Oraux blancs - TW3

Interrogateur : Samy MKHININI | *mai-juin 2026*

Exercice 1 (X-ESPCI)

Pour $x \geq 0$, on pose
$$I(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta)\, d\theta.$$

1. Écrire $I(x)$ sous la forme d'une série.
2. Montrer que $I(x) = O\left(x^{-1/4}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (X-ESPCI)

Soit $f \in \mathcal{L}\big(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}\big)$ telle que $\forall M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), f(M) \geq 0$. Montrer que f est une combinaison linéaire des formes linéaires $\varphi_X : M \longmapsto X^T M X$ avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (ENS)

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétriques. On note $[X,Y] = XY - YX$ le commutateur.

1. Montrer que
$$[[A,B]^2, C] = 0.$$
2. Même question si on ne suppose pas que les matrices sont symétriques.

Exercice 4 (X)

Montrer que :
$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} \geq \ln x + O(1).$$

Indication. Considérer $\ln(n!)$.

Exercice 5 (ENS)

1. Soient f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et J une partie finie de $\mathbb{N}$. On suppose que $f^{(i)}(0) = 0$ si $i \notin J$ et $f^{(i)}(1) = 0$ si $i \in J$. Que dire de f ?
2. La propriété est-elle encore vérifiée si J est une partie infinie de $\mathbb{N}$?

Exercice 6 (ENS)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. On pose $Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$.

Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) \geq 0.$$

Exercice 7 (X-ESPCI)

Soient A et B deux matrices réelles symétriques positives d'ordre n.

1. Montrer que la suite
$$\left((A+B)\left((A+B) + \frac{1}{k} I_n\right)^{-1}\right)_{k \geq 1}$$
converge. On note P sa limite.
2. Montrer que
$$\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B).$$