Oraux blancs - TW3

Interrogateur : Samy MKHININI

mai-juin 2026

Exercice 1 (X)

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Montrer que

$$\deg(\pi_u) \leq 1 + \mathrm{rg}(u).$$

Exercice 2 (X)

Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier cette suite et donner un développement asymptotique de u_n comportant deux termes.

Exercice 3 (Mines-Ponts)

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$a_{n,1} = a_{i,i+1} = 1 \quad (1 \leq i < n)$$

et dont les autres coefficients sont nuls. On pose, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$B_p = I_n + A + \cdots + A^{p-1}.$$

Montrer que B_p est inversible si et seulement si n et p sont premiers entre eux.

Exercice 4 (Mines-Ponts)

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $m < n$. Soient A une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des parties à m éléments de $\{1, \ldots, n\}$, et

$$X = \max(A) - \min(A).$$

Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 5 (Mines-Ponts)

Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(AB) = N(A)N(B) \quad ?$$

Exercice 6 (Mines-Ponts)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in [0, 1], \quad \int_x^1 f(t)\, dt \geq \frac{1 - x^2}{2}.$$

Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^2\, dt \geq \frac{1}{3}.$$

Exercice 7 (ENS Lyon)

Soit φ l'indicatrice d'Euler.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n) \geq \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.
2. Existe-t-il $C \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n) \geq Cn$?

Exercice 8 (ENS Lyon)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n le nombre d'involutions dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et $p_n = \dfrac{I_n}{n!}$. On pose $p_0 = 1$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.

1. Calculer $f(x)$.
2. Montrer que $p_n \geq \dfrac{1}{\sqrt{n!}}$.
3. Montrer que $p_n \leq \dfrac{e^{n/2+\sqrt{n}}}{\sqrt{n^n}}$.