Exercices de colles

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la pyramide suivante constituée des entiers impairs (les nombres A_n et B_n désignent respectivement le premier et le dernier entier de la n-ième ligne) :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 3 & & 5 & & & & \\ & & & 7 & & 9 & & 11 & & & \\ & & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & & \\ & . & & & & & & & & . & \\ A_n & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & B_n \end{array}$$

1. Déterminer, en fonction de n, le nombre N_n d'entiers impairs dans cette pyramide.
2. Déterminer B_n et A_n en fonction de n.
3. Déterminer la somme des nombres de la n-ième ligne.
4. Retrouver ainsi l'expression de la troisième somme d'Euler

$$E_3(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

Exercice 2

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
2. En déduire que lorsqu'un nombre réel peut être écrit sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, alors cette écriture est unique.

Exercice 3

1. Démontrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.
2. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant
$$0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1.$$
Montrer qu'il y a deux de ces réels dont la distance est inférieure ou égale à $1/n$.

Exercice 4

Soit $n \geq 1$. Calculer le produit $P_n = \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est constante ;
2. f n'est pas constante ;
3. f s'annule ;
4. f est périodique.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2$;
2. $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \min\{i, j\}$.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a > b$. Démontrer que
$$a^n - b^n \ \geq \ n\, b^{n-1}.$$
2. En déduire que si $(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3}$ est une solution de l'équation de Fermat
$$x^n + y^n = z^n,$$
alors $x \geq n$ et $y \geq n$.

Exercice 8

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer deux réels a et b tels que :
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$
3. Donner alors un encadrement de $\zeta(2) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 9

Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E.

1. $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$.
2. $(A \cap B = A \cup B) \iff (A = B)$
3. $(A \cup B = B \cap C) \iff (A \subset B \subset C)$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n réels $x_1, \ldots, x_n$ vérifiant
$$\sum_{k=1}^{n} x_k = n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n.$$
Démontrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $x_k = 1$.

Exercice 11

On souhaite démontrer que tout nombre réel est somme d'un réel strictement positif et d'un réel strictement négatif.

1. Reformuler ce résultat sous forme d'une égalité entre ensembles.
2. Démontrer le résultat.

Exercice 12

1. Déterminer une suite (u_k) telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k.$$
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} (k+2)2^k$.

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.
2. $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ f(x) > M$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$.
4. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in I^2,\ \big(|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\big)$.

Exercice 14

Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel $x > -1$, on a l'inégalité
$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$
On tâchera de bien dégager et justifier la stratégie de la preuve.

Exercice 15

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que :
$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$
2. Calculer la somme
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}.$$

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux manières la somme $\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right]$, retrouver l'expression de la troisième somme d'Euler

$$E_3(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

Exercice 17

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $1 \leq x < y$,
2. $(x^2 = 1) \Rightarrow x = 1$,
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 0$,
4. $\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ (x \neq x') \Rightarrow f(x) \neq f(x')$,
5. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ (A \cap B = \varnothing) \Rightarrow (A = \varnothing \text{ ou } B = \varnothing)$.

Exercice 18

Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}.$$

Exercice 19

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $b \neq 0$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} b^{-k}$;
2. $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \max\{i, j\}$.

Exercice 20

Soit $E = \{a, b\}$. À quels ensembles appartiennent les couples suivants :

$$(a, b), \qquad (a, \{b\}), \qquad (E, a) \qquad \text{et} \qquad (\varnothing, \{a\}) \ ?$$

Exercice 21

Les lettres $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ désignant des propriétés dépendant d'un paramètre x, compléter à l'aide des symboles $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ les propriétés mathématiques suivantes :

$$(\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x)) \ \ldots \ (\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)) \text{ et } (\forall x \in E,\ \mathcal{Q}(x)),$$

$$(\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x)) \ \ldots \ (\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)) \text{ et } (\exists x \in E,\ \mathcal{Q}(x)),$$

$$(\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x)) \ \ldots \ (\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)) \text{ ou } (\forall x \in E,\ \mathcal{Q}(x)),$$

$$(\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x)) \ \ldots \ (\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)) \text{ ou } (\exists x \in E,\ \mathcal{Q}(x)).$$

Exercice 22

Soient E et F deux ensembles. Démontrer que

$$E = F \quad \text{si, et seulement si,} \quad \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F).$$

Exercice 23

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{0 \leq k \leq \ell \leq n} \frac{k}{\ell + 1}$;
2. $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq m}} p\,(q^2 + 1)$;
3. $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \leq i \leq j+p}} (i - j)^2$.

Exercice 24

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.

1. Démontrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
2. Démontrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ si, et seulement si, $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Exercice 25

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

$$\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2 \qquad \text{et} \qquad \lfloor 2x+1 \rfloor = \lfloor x+4 \rfloor.$$

Exercice 26

Soit $n \geq 1$. On pose

$$P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Calculer $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$. En déduire P_n et I_n.

Exercice 27

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

On pourra procéder par double inégalité.

Exercice 28

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,
$$xy \leq \tfrac{1}{2}(x^2+y^2).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que pour tout $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \;\leq\; \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right).$$
3. En déduire l'inégalité de Cauchy–Schwarz :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}, \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$
4. **(Bonus)** Démontrer l'identité de Lagrange :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 + \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} (a_k b_\ell - a_\ell b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right).$$
Retrouver alors l'inégalité de C-S.

Exercice 29

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}\big(x+y+|x-y|\big) \qquad \text{et} \qquad \min(x,y) = \frac{1}{2}\big(x+y-|x-y|\big).$$

Exercice 30

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p \binom{n}{k}.$$

1. Calculer $S_0(n)$.
2. Calculer $S_1(n)$. *On réécrira* $k\binom{n}{k}$ *d'une autre manière.*
3. En déduire une expression explicite de $S_2(n)$. *On réécrira astucieusement* k^2 *comme la somme de ...*

Exercice 31

Soit x un nombre réel. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n(n+1)}{2}\, x - n \;\leq\; u_n \;\leq\; \frac{n(n+1)}{2}\, x.$$

Exercice 32

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair. *On pourra utiliser le binôme de ...*
2. En déduire que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair. *On pourra remarquer que* $(2-\sqrt{3})^n < 1$.

Exercice 33

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de factorielles

$$\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}.$$

Que reconnaît-on ?

Exercice 34

Soient a, b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leur borne supérieure et/ou leur borne inférieure.

1. $\{\, x \in \mathbb{R} \;:\; x^2 < 2 \,\}$;
2. $\{\, a + (-1)^n b \;:\; n \in \mathbb{N} \,\}$;
3. $\{\, a + bn \;:\; n \in \mathbb{N} \,\}$.

Exercice 35

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq \ell \leq m}} \binom{n}{k} \ell^k$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$ *(on effectuera le changement d'indice* $l = 2n+1-k$*).*

Exercice 36

Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles minorées, majorées ? Dans chaque cas, déterminer s'il y a lieu la borne inférieure, la borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

$$A = \left\{ \frac{n}{mn+1} \;:\; (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}, \qquad B = \left\{ \frac{n}{mn+1} \;:\; (m,n) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

Exercice 37

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Exercice 38

Soient a, b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leur borne supérieure et/ou leur borne inférieure.

1. $\left\{ a + \frac{b}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
2. $\left\{ (-1)^n a + \frac{b}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
3. $\left\{ a + (-1)^n \frac{b}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 39

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. En utilisant $k = \sum_{l=1}^{k} 1$, démontrer

$$\sum_{k=1}^{n} k x^k = \frac{n x^{n+2} - (n+1) x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.$$

Exercice 40

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$ deux n-uplets de réels.

1. Démontrer l'identité

$$\sum_{1 \leq k < \ell \leq n} (a_\ell - a_k)(b_\ell - b_k) \;=\; n \sum_{j=1}^{n} a_j b_j - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right) \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right).$$

2. En déduire que si $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, alors

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} b_k \right) \;\leq\; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Autrement dit, pour deux suites rangées par ordre croissant, le produit des moyennes est inférieur ou égal à la moyenne des produits.

Exercice 41

Encadrer $x + y$, $x - y$ et xy sachant que $x \in [3, 6]$ et $y \in [-4, -2]$.

Exercice 42

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que $2n \leq 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1$. *On pourra montrer que pour tous réels $a, b > 0$, on a $2\sqrt{ab} \leq a + b$.*
2. En déduire la valeur de $\left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right\rfloor$.

Exercice 43

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, comparer $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ et $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$. *On pourra procéder par double inégalité.*

Exercice 44

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_p(n) = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$

Interpréter $S_p(n)$ sur le triangle de Pascal et calculer cette somme en lui ajoutant astucieusement 0.

Exercice 45

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x + 3| = 5$;
2. $|x + 3| \leq 5$;
3. $|x + 2| > 7$.

Exercice 46

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k! \leq (n+1)!.$$

Exercice 47

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x + 12| = |x^2 - 8|$;
2. $|x + 12| \leq |x^2 - 8|$.

Exercice 48

Soit $n \geq 2$.

1. Démontrer l'identité $k^2 + k + 1 = (k+1)^2 - (k+1) + 1$.
2. En déduire alors une simplification de

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}.$$

,

Exercice 49

1. Déterminer une expression de la fonction cotangente, définie par $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$, différente de $1/\tan(x)$.
2. En déduire alors le graphe de la fonction cotangente (on représentera le graphe de la fonction tangente en premier).

Exercice 50

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue et strictement décroissante. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$.

Exercice 51

1. Soit f un polynôme de degré n, $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$. Démontrer que $x^{-n} f(x)$ admet une limite non nulle en $+\infty$.
2. On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q tels que, pour tout $x > 0$,
$$\ln x = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$
On note $p = \deg P$ et $q = \deg Q$. Démontrer que $x^{\,q-p} \ln(x)$ admet une limite non nulle en $+\infty$.
3. En déduire que l'hypothèse faite à la question précédente est fausse.

Exercice 52

Démontrer qu'il existe à tout moment deux points opposés sur l'équateur où les températures sont égales. On pourra considérer que la température à l'équateur est une fonction continue de la longitude.

Exercice 53

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions impaires. Que dire de la parité de $f + g$, $f \times g$ et $f \circ g$?

Exercice 54

Résoudre les inéquations suivantes en précisant leur domaine de définition :

$$(2x-7)\ln(x+1) > 0, \qquad \ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \leq 0, \qquad \big(\ln x + 1\big)\big(\ln x - 2\big) > 0.$$

Exercice 55

1. Résoudre l'équation $\cos(3\theta) = \cos(4\theta)$.
2. En déduire les solutions de l'équation (E) :
$$8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Exercice 56

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer qu'elle peut s'écrire comme somme d'une fonction paire p et d'une fonction impaire i. Une telle décomposition est-elle unique ?

Exercice 57

Étudier la parité des fonctions :

$$f(x) = e^x - e^{-x}, \qquad g(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$

Exercice 58

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos^2(x) + 9\cos(x) + 4 = 0$.
2. Résoudre sur $[0, 2\pi]$ l'équation $\cos(2x) + \cos(x) = 0$.

Exercice 59

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\big(|\sin(\frac{x}{2})|\big)$. Quel est le domaine de définition de f ? Est-elle paire ? impaire ? périodique ?

Exercice 60

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto x^x$. Étudier les variations de cette fonction et ses limites aux bornes.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Quel est le nombre de solutions de l'équation $y = x^x$, d'inconnue $x > 0$?

Exercice 61

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations :

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0 \qquad \text{et} \qquad 3e^x - 7e^{-x} = -20.$$

Exercice 62

Donner les ensembles de définition des fonctions définies par :

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{8-16x^2}{(7+x^2)}}$;
2. $g(x) = \ln(3-x) + \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$.

Exercice 63

Déterminer le nombre de solutions dans $]0,+\infty[$ de l'équation

$$x\ln(x) = 1.$$

Exercice 64

On considère la courbe de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = x + e^{2x}$. Démontrer qu'il existe un réel c tel que $g(x) < 0$ si $x < c$ et $g(x) > 0$ si $x > c$.
2. En déduire qu'il y a un unique point sur la courbe de la fonction exponentielle qui minimise la distance à l'origine. On le note M_0.
3. Démontrer que la tangente à la courbe en M_0 est perpendiculaire à la droite (OM_0).

Exercice 65

Soit $f : [-1,1] \to [-1,1]$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. Montrer que f est une bijection.

Exercice 66

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective et calculer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 67

Résoudre l'équation

$$x - 1 \ \leq \ \sqrt{x+2}.$$

Exercice 68

Déterminer, via l'étude d'une fonction, les entiers naturels n tels que

$$2^n \geq n^2.$$

Exercice 69

Donner les ensembles de définition des fonctions définies par :

1. $f_1(x) = \sqrt{2x^2 - 12x + 18}$;
2. $f_2(x) = \ln\big(x^2 + 4x + 4\big)$.

Exercice 70

Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \ \leq \ \ln(1+x) \ \leq \ x.$$

Exercice 71

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$. Justifier que la composée $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (itérée n fois) est bien définie sur $\mathbb{R}^+$, et expliciter son expression.

Exercice 72

Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ \leq \ e \ \leq \ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 73

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}.$$

1. Pour quelles valeurs de $y \in \mathbb{R}$ l'équation $f(x) = y$ admet-elle des solutions ? En déduire l'image $f(\mathbb{R})$.
2. Par quelle autre méthode peut-on déterminer $f(\mathbb{R})$?

Exercice 74

Soit $f : E \to E$ une application et $F = \{x \in E : \ f(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de f. Montrer que $f \circ f = f$ si, et seulement si, $f(E) \subset F$.

Exercice 75

Soit $\theta \in]0, \pi[$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^j}\right) \ = \ \frac{\sin\theta}{2^n \sin(\theta/2^n)}.$$

2. En déduire, si elle existe, la limite quand $n \to +\infty$ de la suite

$$\left(\prod_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^j}\right)\right)_{n\geq 1}.$$

Exercice 76

Résoudre les équations

$$-\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x = 1 \qquad \text{et} \qquad \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = -\sqrt{2}.$$

Exercice 77

On considère $T : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad (T(f))(x) = f(x+1) - f(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T^n = T \circ \cdots \circ T$ (itéré n fois).

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, calculer $(T^2(f))(x)$ et $(T^3(f))(x)$.
2. Proposer une formule générale fermée pour $(T^n(f))(x)$ et la démontrer.

Exercice 78

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_1 + \cdots + a_n = 0$. Montrer que

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \ \leq \ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Exercice 79

On considère l'équation

$$e^{x-2} + e^{x+8} = e^{4-x} + e^{3x+2}.$$

1. Toto a "résolu" cette équation en utilisant la formule (archi-fausse) $e^a + e^b = e^{ab}$. Déterminer les "solutions" trouvées par Toto.
2. Résoudre correctement l'équation. Que dire ?

Exercice 80

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Écrire explicitement $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Ces deux applications sont-elles égales ?
3. Sont-elles périodiques ?

Exercice 81

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = (x + y,\, xy)$.

1. Pour $(S, P) \in \mathbb{R}^2$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $F(x, y) = (S, P)$ en inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. L'application F est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Comment restreindre F pour qu'elle devienne bijective ? (On cherchera d'abord une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ telle que $F(A) = F(\mathbb{R}^2)$.)

Exercice 82

Résoudre l'équation

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^{\,x}.$$

Exercice 83

Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 84

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x + \cos(\alpha x)$. On veut montrer que f est périodique ssi $\alpha \in \mathbb{Q}$.

1. On suppose $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$. Montrer que f est périodique.
2. On suppose $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Résoudre $f(x) = 2$ puis en déduire que f n'est pas périodique.

Exercice 85

Étudier la fonction $f : x \mapsto x^{-\ln x}$.

Exercice 86

On cherche à déterminer tous les $t \in \mathbb{R}$ tels que

$$\cos t = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution dans $]0, \pi/4[$. On la note t_0.
2. Calculer $\cos(2t_0)$ puis montrer que $\cos(4t_0) = -\cos(t_0)$.
3. En déduire t_0 et résoudre l'équation.

Exercice 87

Montrer que l'équation

$$\ln(1 + |x|) = \frac{1}{x - 1}$$

admet exactement une solution α dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que $1 < \alpha < 2$.

Exercice 88

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{1 - x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1 - x^2}.$$

Exercice 89

Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier l'existence et la bonne définition d'une telle suite.
2. Étudier (u_n).
3. En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 90

Montrer que toute suite d'entiers convergente est stationnaire.

Exercice 91

On dit que $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N, \quad |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

1. Démontrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2. Démontrer que toute suite de Cauchy est bornée.

Exercice 92

1. Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

Démontrer que (u_n) est arithmétique.

2. Soit (v_n) une suite de nombres réels strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = \sqrt{v_n\, v_{n+2}}.$$

Démontrer que (v_n) est géométrique.

Exercice 93

Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_n^n + u_n^{n-1} + ... + u_n - 1 = 0$ pour tout $n \geq 1$.

1. Justifier l'existence et la bonne définition d'une telle suite.
2. Étudier la suite (u_n).

Exercice 94

Soit $\alpha > 0$ un nombre irrationnel et (r_n) une suite de nombres rationnels qui converge vers α. Pour tout n, on écrit $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, où $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty.$$

Exercice 95

Étudier la monotonie des suites définies par

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}, \qquad v_n = \frac{5^n}{n!} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(n) + \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 96

Étudier la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \left(2 - \frac{k}{2n}\right).$$

Indication : couper le produit au "milieu".

Exercice 97

Soit (u_n) une suite définie par $0 \leq u_0 < 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$, pour tout $n \geq 0$. On considère également la suite (v_n) définie par

$$v_n = \prod_{i=1}^{n} u_i,$$

pour tout $n \geq 0$. Montrer que (v_n) est convergente et calculer sa limite. Que dire du cas $u_0 = 1$?
(Bonus) Que dire du cas $u_0 > 1$?

Exercice 98

Soient (a_n) et (b_n) deux suites telles que $a_0 = 0,\ b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = -2a_n + b_n, \qquad b_{n+1} = 3a_n.$$

1. Montrer que la suite $(a_n + b_n)$ est constante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 99

Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives. On suppose qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Démontrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n \leq c\, v_n.$$

Exercice 100

Posons, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}.$$

1. Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Démontrer que e est un irrationnel. *Indication :* raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $e = p/q$ et s'intéresser à l'encadrement $u_q < e < v_q$.

Exercice 101

Démontrer que les suites ci-dessous n'ont pas de limite :

$$u_n = \cos\Big(\frac{(n^2+1)\pi}{3n}\Big), \qquad v_n = \frac{1}{(-1)^n \ln(1+1/n)}, \qquad w_n = \frac{\lfloor n/2 \rfloor^{\lfloor n/2 \rfloor}}{(n/2)^{n/2}}.$$

Exercice 102

Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que

$$\forall n \geq 1, \qquad u_n \leq \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}.$$

On dit que (u_n) est *convexe*.

1. Montrer que $(u_{n+1} - u_n)$ est convergente. On note ℓ sa limite.
2. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Distinguer les cas $\ell \leq 0$ et $\ell > 0$.

Exercice 103

Étudier le comportement asymptotique des suites, définies pour $n \geq 1$, par

1. $n \cos\big(\frac{1}{n}\big)$,
2. $\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}$,
3. $\sqrt[n]{n^2}$.

Exercice 104

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$, $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(u_{3n})_{n\geq 0}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

Exercice 105

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\ln(u_n) + nu_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier l'existence et la bonne définition d'une telle suite.
2. Étudier (u_n).
3. En déduire un équivalent de u_n.

Exercice 106

1. Soit $n \geq 0$. Montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.
2. En déduire la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sin\Big((2+\sqrt{3})^n \pi\Big),$$

pour tout $n \geq 0$.

Exercice 107

Soit (u_n) une suite réelle. On considère la suite (v_n) *des moyennes de Cesàro* définie par :

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

1. On suppose que (u_n) converge vers un réel l. Montrer que la suite (v_n) converge également vers l.
2. Montrer que la réciproque est fausse en général.

Exercice 108

Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{k\to\infty} \frac{n^k}{(n+1)^k}\Big) \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to\infty}\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(n+1)^k}\Big).$$

Exercice 109

Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\tan\Big(\frac{\pi}{2}x\Big) = \frac{\pi}{2nx}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier l'existence et la bonne définition d'une telle suite.
2. Étudier (x_n).
3. En déduire un équivalent de x_n.

Exercice 110

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \qquad u_{p+q} \leq u_p + u_q.$$

1. Justifier l'existence de la borne inférieure de la suite (u_n/n).
2. Montrer que la suite (u_n/n) n'est pas nécessairement décroissante.
3. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m > n$. On écrit la division euclidienne de m par n :
$$m = nq + r,$$
avec $0 \leq r < n$. Montrer que
$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n} + \frac{u_r}{m}.$$
En déduire que (u_n/n) converge vers sa borne inférieure.

Exercice 111

Déterminer un équivalent de chacune des suites puis calculer leur limite :

1. $n\big(\sqrt{1+e^{-n}}-1\big)$,
2. $\dfrac{\sqrt{n+1}\,\big(1-\cos(1/n)\big)}{\tan^3(1/\sqrt{n})}$,
3. $\sin\big(\sqrt[n]{2}-1\big)$,
4. $\sqrt{1-\cos\big(ne^{-n}\big)}$.

Exercice 112

1. À l'aide des formules d'addition, retrouver la formule
$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$
2. En déduire la limite de la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par
$$u_n = \sin\big(\ln(n+1)\big) - \sin(\ln n).$$

Exercice 113

Soit (x_n) une suite de réels positifs telle que $x_x \sin x_n - c\cos x_n = 0$ $(c > 0)$ et $x_n \in \left]n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$, pour tout $n \geq 0$.

1. Justifier l'existence et la bonne définition d'une telle suite.
2. Étudier (x_n).
3. En déduire un équivalent de x_n.
4. **(Bonus)** En déduire également un équivalent de la suite (u_n) définie par
$$u_n = x_n - n\pi,$$
pour tout $n \geq 0$. *On admettra que* $\arctan x \sim x$ *en* 0.

Exercice 114

1. Démontrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$,
$$\big|\sin(1/n)\big| \leq \frac{1}{16}.$$
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) définie par
$$u_n = \left(2\sin\Big(\frac{1}{n}\Big) + \frac{3}{4}\cos(n)\right)^n ?$$

Exercice 115

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles définies par $a_0, b_0 \in \mathbb{R}_+$ et les relations de récurrences croisées
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\,.$$
Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune (appelée moyenne arithmético–géométrique de a_0 et b_0).

Exercice 116

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\lim u_n v_n = 1$. Montrer que $\lim u_n = 1$ et $\lim v_n = 1$.

Exercice 117

Étudier les comportements asymptotiques des suites définies par

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+n^2}{k+n^3} \qquad \text{et} \qquad \beta_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor k\pi \rfloor.$$

Exercice 118

Déterminer un équivalent de chacune des suites puis calculer leur limite :

1. $4^n - 2n^7 - \ln(\sqrt{n})$,
2. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,
3. $n^{1/n} - 1$,
4. $\sqrt[3]{\dfrac{n+1}{n}} - 1$.

Exercice 119

Soit (x_n) une suite de réels positifs telle que $x_n^n = e^{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier l'existence et la bonne définition d'une telle suite.
2. Étudier (x_n).

Exercice 120

Déterminer si, oui ou non, la fonction f définie par :

$$f(x) = x\left|1 + \frac{1}{x}\right|$$

est continue en 0.

Exercice 121

Les (deux) questions sont indépendantes.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l < 1$. Démontrer que f admet un point fixe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique et admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 122

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) = 0.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que
   $$\forall x \geq A,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big|f(x+n) - f(x)\big| \leq n\varepsilon.$$
   (b) En déduire qu'il existe un nombre réel M (dépendant de ε) tel que
   $$\forall x \geq A, \qquad \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{M}{x} + \varepsilon.$$
   (c) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
2. Que se passe-t-il si $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) = \ell \neq 0$ est finie ?

Exercice 123

Étudier le comportement local en 0 puis le comportement asymptotique en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \left\lfloor \tfrac{1}{x} \right\rfloor, \qquad g(x) = x\left\lfloor \tfrac{1}{x} \right\rfloor, \qquad h(x) = x^2\left\lfloor \tfrac{1}{x} \right\rfloor.$$

Exercice 124

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles pour tout $x \in [a,b]$,

$$0 < g(x) < f(x).$$

Montrer qu'il existe $m, M \in \,]0,1[$ tels que pour tout $x \in [a,b]$,

$$m\, f(x) \leq g(x) \leq M\, f(x).$$

Exercice 125

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 126

Démontrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine.

Exercice 127

1. Démontrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0, alors $|f|$ est continue en x_0.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 128

Soient $a, b > 0$. Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction

$$x \longmapsto \left(a^x + b^x\right)^{1/x}.$$

Exercice 129

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} (ax)^2, & \text{si } x \leq 1, \\ a \sin\left(\dfrac{\pi}{2} x\right), & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est une constante réelle. Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle continue ?

Exercice 130

Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues telles que

$$g \circ f \;=\; f \circ g.$$

On veut démontrer qu'il existe un réel c tel que $f(c) = g(c)$. On note $s \in [0,1]$ un point fixe de f et on définit une suite (u_n) par

$$u_0 = s \quad \text{et} \quad u_{n+1} = g(u_n).$$

1. Justifier l'existence de s.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, u_n est un point fixe de f.
3. On suppose que la suite (u_n) est monotone. Démontrer le résultat.
4. On suppose que la suite (u_n) n'est pas monotone.
   (a) Démontrer qu'il existe $u, v \in [0,1]$ tels que
   $$(f-g)(u) \cdot (f-g)(v) \leq 0.$$
   (b) Conclure.

Exercice 131

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$.

1. On suppose que $f\big([0,1]\big) \subset [0,1]$. Démontrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = a$.
2. On suppose que $[0,1] \subset f\big([0,1]\big)$. Démontrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = a$.

Exercice 132

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.

Exercice 133

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Démontrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 134

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la suite $\big(f(n)\big)_{n\geq 0}$ diverge vers $+\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 135

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

1. $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$;
2. $g(x) = \exp(-1/x)$ si $x \neq 0$;
3. $h(x) = \sin(x+1)\,\ln|1+x|$ si $x \neq -1$.

Exercice 136

Étudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$.

Exercice 137

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe $c_n \in \left[0,\, 1-\dfrac{1}{n}\right]$ tel que
$$f(c_n) = f\left(c_n + \frac{1}{n}\right).$$
2. Montrer que si l'on remplace $1/n$ par un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $1/\alpha$ n'est pas un entier, le résultat précédent n'est plus vrai.

Exercice 138

Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions
$$f(x) = \cos(\sqrt{x}), \qquad g(x) = x|x|.$$

Exercice 139

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ égale à $f(0)$. Montrer qu'il existe $c \in]0,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
Indication : considérer $g(x) = f(\tan x)$ pour $x \in [0, \pi/2[$.

Exercice 140

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

1. Démontrer que (u_n) converge. On note l sa limite.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f(0) = 0$. Prouver que
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = l f'(0).$$
3. Pour $f(x) = \ln(1+x)$, déterminer l.

Exercice 141

Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction f définie par
$$f(x) = |\ln x|.$$

Exercice 142

On considère une suite réelle vérifiant : $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et
$$u_{n+1} = f(u_n),$$
où $f(x) = 1 + \dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. En notant $I = \left[\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}\right]$, montrer que $f(I) \subset I$. En déduire qu'il existe $l \in I$ tel que $f(l) = l$.
2. Montrer que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \dfrac{4}{9}$. En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Exercice 143

Étudier les suites (x_n) de réels vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2.$$

Exercice 144

Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}, \qquad g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Exercice 145

Étudier les suites (x_n) de réels vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = e^{x_n}.$$

Exercice 146

Soient I un intervalle et $a \in I$. On considère $f, m, M : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions telles que m et M sont dérivables en a. On suppose que $m \leq f \leq M$, $m(a) = M(a)$ et $m'(a) = M'(a)$. Démontrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = m'(a) = M'(a)$.

Exercice 147

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$,

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

où $P_n \in \mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 148

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = 1$ et $|f'| \leq 2$. Démontrer que f est positive sur $[0,1]$.

Exercice 149

Soit $x > 0$.

1. Montrer que

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Démontrer que

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n < \ln(2n) - \ln n.$$

En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 150

Soit $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$.

1. Calculer la dérivée k-ième de $x \mapsto x^{n-1}$ et de $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. En déduire la dérivée n-ième de la fonction suivante :

$$x \longmapsto x^{n-1} \ln(1+x).$$

Exercice 151

1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$\left|\arctan(x+1) - \arctan(x)\right| \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

2. Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$\frac{1}{1+(x+1)^2} \leq \arctan(x+1) - \arctan(x) \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Exercice 152

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et dérivable telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$. Montrer que $\ell = 0$.

Exercice 153

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ et

$$f(x)\, f''(x) \leq \big(f'(x)\big)^2.$$

Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) \leq f(0) \exp\left(x\, \frac{f'(0)}{f(0)}\right).$$

Exercice 154

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe $0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ vérifiant

$$f'(x_1) + \cdots + f'(x_n) = n.$$

Exercice 155

Soit f une fonction dérivable en un point x_0. Montrer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0).$$

Réciproquement, si la limite précédente existe, peut-on dire que f est dérivable en x_0 ?

Exercice 156

Soit $n \geq 2$ un entier et $p, q \in \mathbb{R}$. On note

$$P(X) = X^n + pX + q.$$

1. Démontrer que P admet au plus 3 racines réelles.
2. On suppose que n est pair. Démontrer que P admet au plus deux racines réelles.

Exercice 157

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable définie sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ (avec $a < b$). Nous allons démontrer, de deux manières, que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que pour tous $\alpha, \beta \in]a,b[$ tels que $\alpha < \beta$, la fonction f' prend toutes les valeurs comprises entre $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$. C'est le théorème de Darboux.

1. Soient $\alpha, \beta \in]a,b[$ tels que $\alpha < \beta$. Démontrer le théorème de Darboux en appliquant le TVI aux applications

$$\tau_\alpha : \begin{cases}]\alpha,\beta] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \tau_\beta : \begin{cases} [\alpha,\beta[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}. \end{cases}$$

2. Soient $\alpha, \beta \in]a,b[$ tels que $\alpha < \beta$ et $k \in \mathbb{R}$ compris strictement entre $f'(\alpha)$ et $f'(\beta)$. Démontrer que l'application $\varphi : x \mapsto f(x) - kx$ n'est pas injective et retrouver ainsi le théorème de Darboux.

Exercice 158

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable. On définit g sur $[0,1]$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \\ f(2x-1) & \text{si } \dfrac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

À quelle condition la fonction g est-elle continue ? et dérivable ?

Exercice 159

Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.

Exercice 160

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$ et que $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in (a,b)$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 161

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X^2-1)^n$. Démontrer que $P^{(n)}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.