Oraux X-ESPCI-ENS

Exercice 1 (X-ESPCI)

Pour $x \geq 0$, on pose
$$I(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x\cos\theta)\,d\theta.$$

1. Écrire $I(x)$ sous la forme d'une série.
2. Montrer que $I(x) = O\left(x^{-1/4}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (X-ESPCI)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), f(M) \geq 0$. Montrer que f est une combinaison linéaire des formes linéaires $\varphi_X : M \longmapsto X^T M X$ avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (ENS)

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétriques. On note $[X,Y] = XY - YX$ le commutateur.

1. Montrer que
$$[[A,B]^2, C] = 0.$$
2. Même question si on ne suppose pas que les matrices sont symétriques.

Exercice 4 (X-ESPCI)

Montrer que :
$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln p}{p} \geq \ln x + O(1).$$

Indication. Considérer $\ln(n!)$.

Exercice 5 (ENS)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients dans $\{0,1\}$. Supposons A inversible. Combien au maximum est-ce que A peut avoir de coefficients égaux à 1 ?

Exercice 6 (ENS)

1. Soient f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et J une partie finie de $\mathbb{N}$. On suppose que $f^{(i)}(0) = 0$ si $i \notin J$ et $f^{(i)}(1) = 0$ si $i \in J$. Que dire de f ?
2. La propriété est-elle encore vérifiée si J est une partie infinie de $\mathbb{N}$?

Exercice 7 (ENS)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. On pose $Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$.

Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) \geq 0.$$

Exercice 8 (ENS)

Soient A et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques positives telles que $B - A$ est positive. La matrice symétrique $B^2 - A^2$ est-elle nécessairement positive ?

Exercice 9 (X-ESPCI)

Soient A et B deux matrices réelles symétriques positives d'ordre n.

1. Montrer que la suite
$$\left((A+B)\left((A+B) + \frac{1}{k}I_n\right)^{-1}\right)_{k \geq 1}$$
converge. On note P sa limite.
2. Montrer que
$$\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B).$$

Exercice 10 (X-ESPCI)

Soit $(x_n)_n$ une suite réelle vérifiant $x_0 \geq 0$, $x_1 \geq 0$, $x_0 + x_1 > 0$, et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}x_{n+1} + x_n$. Étudier la convergence de $(x_n)_n$.

Exercice 11 (ENS)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(X_1=1)\neq 0$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $S_n = X_1+\cdots+X_n$. Montrer que

$$\mathbb{P}(4 \text{ divise } S_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}.$$

Exercice 12 (X-ESPCI)

Soit $P = X^2 + c_1X + c_0$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. Déterminer les suites d'entiers naturels (a_n) telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}$.

Exercice 13 (X-ESPCI)

Soit $f\in\mathcal{C}^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=f(2\pi)$. Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = 0.$$

Quel est le nombre minimal d'annulations de f ?

Exercice 14 (X-ESPCI)

Soient $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $f : x\longmapsto \sum_{i=0}^{+\infty} c_ix^i$. Montrer que, si $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}$, alors $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est irrationnel.

Exercice 15 (ENS)

Soit $a_0=\frac{\pi}{2}$ et $a_{n+1}=\sin(a_n)$ pour tout $n\geq 0$. La série $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ converge-t-elle ?

Exercice 16 (ENS)

Soit $f:[0,1]\to(0,\infty)$ une fonction intégrable tel que $f(x)f(1-x)=1$ pour tout $x\in[0,1]$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq 1.$$

Exercice 17 (X-ESPCI)

On pose, pour $k\geq 2$, $\zeta(k)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}$.

1. Montrer que, pour tout $x\in]-1,1[$, on a
$$\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k.$$
2. En déduire la valeur de
$$S=\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\zeta(2k)-\zeta(2k+1)\big).$$

Exercice 18 (X-ESPCI)

Existe-t-il une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels non nuls telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le polynôme $P_n=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ soit scindé à racines simples dans $[0,1]$?

Exercice 19 (ENS)

On note $M(t)\in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dépendante du temps telle que pour tout $M_{ij}(t)\in C^1(\mathbb{R})$ pour tout $1\leq i,j\leq n$. On souhaite montrer que

$$\frac{d}{dt}[\det(M(t))] = \det M(t)\,\mathrm{Tr}\left(M(t)^{-1}\frac{d}{dt}M(t)\right)$$

pour tout t, tel que $M(t)$ est inversible.

1. Montrer le résultat dans le cas où $M(t)$ est une matrice diagonale.
2. Montrer le résultat dans le cas en t_0 où $M(t_0)=I_n$.
3. Traiter le cas général.

Exercice 20 (ENS)

Un répunit est un nombre entier positif dont l'écriture décimale ne comprend que des 1. Trouver tous les polynômes à coefficients réels tels que l'image d'un répunit par ce polynôme soit toujours un répunit.

Exercice 21 (ENS)

Soit $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer
$$M(t) = \lim_{N\to\infty} \left(I_2 + \frac{t}{N}A\right)^N$$
2. Montrer que l'ensemble des $M(t)$, pour $t \in \mathbb{R}$, forme un groupe.

Exercice 22 (ENS)

Soit A une matrice symétrique à coefficients réels. On suppose que $a_{11}, \dots, a_{nn}$ sont les valeurs propres de A.

1. Montrer que A est diagonale.
2. Ce résultat est-il vrai si on ne suppose plus que la matrice A est symétrique ?

Exercice 23 (ENS)

Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ avec B symétrique définie positive. On suppose que pour tout X (vecteur colonne)
$$|X^t AX| \leq X^t BX.$$

1. Montrer que $|\det A| \leq \det B$. (Indication : on pourra chercher à définir $B^{1/2}$.)
2. Soient $S_1, \dots, S_k$ des matrices symétriques définies positives (dans $S_n(\mathbb{R})$) et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des réels (non tous nuls). Montrer que
$$\left|\det\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i S_i\right)\right| \leq \det\left(\sum_{i=1}^k |\lambda_i| S_i\right).$$

Exercice 24 (ENS)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = A$. Quelles sont les valeurs que peut prendre $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$?

Exercice 25 (ENS)

Soit $n \geq 1$ un entier. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons J_x la matrice carrée de taille n contenant des x sur sa diagonale et des 1 partout ailleurs.

1. Calculer $\det(J_x)$.
2. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ de $\{1, \dots, n\}$, on note $s(\sigma)$ sa signature et $f(\sigma)$ son nombre de points fixes. Montrer que
$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(n)} \frac{s(\sigma)}{f(\sigma)+1} = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}.$$

Exercice 26 (ENS)

Trouver toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f(t)^2 = f(\sqrt{2}t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 27 (ENS)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(x) = 0$ pour $|x| > 3$. Montrer que
$$\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\right)^4 \leq 4\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2\,dx\right).$$

Exercice 28 (ENS)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, positive, telle que $f''(x)$ soit bornée. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)|^2 \leq Cf(x).$$

Exercice 29 (X-ESPCI)

Caractériser les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont somme de deux matrices diagonalisables de rang 1.

Exercice 30 (X-ESPCI)

Soient $n \geq 3$, $a_1, \dots, a_n$ des complexes de module 1. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $\displaystyle\prod_{i=1}^n |z - a_i| = 1$.

Exercice 31 (ENS)

Soit σ une permutation aléatoire uniforme de $\{1, \dots, n\}$. On dit que k est un maximum local de σ si $\sigma(k-1) < \sigma(k) > \sigma(k+1)$ (sauf en $k = 1$ ou n, on où compare avec son seul voisin au lieu des deux). Quelle est l'espérance du nombre de maxima locaux de σ ? (Autrement dit nombre moyen de maxima locaux, quand on moyenne sur toutes les permutations possibles)

Exercice 32 (X-ESPCI)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on pose

$$D(a_1, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

et

$$[a_1, \dots, a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}.$$

Soient $n \geq 2$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Montrer que

$$[a_1, \dots, a_n] = \frac{D(a_1, \dots, a_n)}{D(a_2, \dots, a_n)}.$$

Exercice 33 (ENS)

Soient, pour $\lambda > 0$, $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda, D_\lambda$ quatre variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

1. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathbb{P}(A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ n'a que des racines réelles).
2. Même question pour $A_\lambda X^3 + B_\lambda X^2 + C_\lambda X + D_\lambda$.

Exercice 34 (X-ESPCI)

On note E l'ensemble des polynômes non nuls à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes appartenant à E. Déterminer l'adhérence de A.

Exercice 35 (X-ESPCI)

Soit (u_n) une suite bornée. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{k<n} |u_k| \to 0$,

(ii) il existe $A \subset \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle \frac{1}{n} |A \cap [0, n-1]| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\displaystyle \lim_{n \notin A} u_n = 0$.

Exercice 36 (ENS)

Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, des variables aléatoires i.i.d suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, M_n la matrice aléatoire $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Calculer $\mathbb{E}\left(\mathrm{tr}\left((M_n)^k\right)\right)$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Calculer $\mathbb{E}(\det(M_n))$ et $\mathbb{E}\left((\det M_n)^2\right)$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Montrer que $\mathbb{P}\left(|\det(M_n)| \geq f(n)\sqrt{n!}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exercice 37 (X-ESPCI)

Soient $A, B, C \in M_3(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telles que

$$AB - BA = C, \quad BC - CB = A \quad \text{et} \quad CA - AC = B.$$

1. Montrer que A admet un vecteur propre u.
2. Montrer $(Bu = 0 \text{ ou } Cu = 0) \Rightarrow Au = 0$.
3. Montrer que si $Bu \neq 0$, alors (u, Bu, Cu) est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que A, B et C sont simultanément semblables aux matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 38 (ENS)

Soit $A = (a_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathrm{Tr}(A^2) \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

Dans quels cas a-t-on égalité ?

Exercice 39 (ENS)

1. Soit $X \subset \mathbb{N}$ telle que 0 et 1 appartiennent à X et
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Card}(X \cap [\![0,n]\!]) = 0.$$
Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $j \in \mathbb{N}$ telle que
$$\operatorname{Card}(X \cap [\![j, j+k]\!]) = 2.$$
2. Montrer qu'il existe 100 entiers consécutifs contenant exactement 5 nombres premiers.

Exercice 40 (ENS)

Soit $c \in \mathbb{C}$. On définit la suite $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$. On définit
$$M = \{c \in \mathbb{C}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

1. Montrer que si $|c| \leq 1/4$ alors $c \in M$.
2. Montrer que si $|c| \geq 3$ alors $c \notin M$.
3. Calculer $M \cap \mathbb{R}$.
4. Montrer que pour une suite $c_k \in M$ tel que $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = c$ alors $c \in M$.

Exercice 41 (ENS)

Soit $\eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, C^2 avec $\eta(0) = 1$ et $\eta(x) = 0$ si $x \geq 1$.

1. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \eta\left(\frac{n}{N}\right) = 1 + O_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{N}\right).$$
2. Calculer
$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \eta\left(\frac{n}{N}\right).$$
3. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) = CN - \frac{1}{2} + O_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Exercice 42 (ENS)

On choisit un entier $n \in \{1, \dots, N\}$ aléatoirement selon une loi uniforme. Le but de cet exercice est d'estimer le nombre typique de diviseur premier de n lorsque $N \to \infty$ que l'on notera $D(n)$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(D(n)) \sim \sum\limits_{p \text{ premier }, p\leq N} \frac{1}{p}$ pour $N \to \infty$. (On pourra commencer par donner $\mathbb{P}(p \text{ divisent } n)$.)
2. Soit $p, q \leq N$ deux nombres premiers, calculer $\mathbb{P}(q \text{ et } p \text{ divisent } n)$.
3. On admettra que $\sum\limits_{p \text{ premier }, p\leq N} \frac{1}{p} \sim \log\log N$ pour $N \to \infty$. Montrer que
$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{D(n)}{\log\log N} - 1\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Exercice 43 (ENS)

On choisit σ une permutation sur $\{1, \dots, N\}$ aléatoirement selon une loi uniforme. Le but de l'exercice est d'estimer la taille de la plus grande sous suite croissante.

1. On note $P_2(\sigma)$ l'ensemble des paires $(i,j) \in \{1, \dots, N\}^2$ telles que $i < j$ et $\sigma(i) < \sigma(j)$. Calculer $\mathbb{E}(|P_2(\sigma)|)$.
2. On note $P_k(\sigma) = \{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, N\}^k, i_1 < \dots < i_k \text{ et } \sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)\}$ c'est à dire l'ensemble des sous suites croissantes de longueurs k dans σ. Calculer $\mathbb{E}(|P_k(\sigma)|)$.
3. En déduire que
$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\text{la plus grande sous suite croissante } > (e+\epsilon)\sqrt{N}\right) = 0.$$

Exercice 44 (X-ESPCI)

Soit $r \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre de mots de n lettres sur l'alphabet $\{0,1\}$ ne contenant pas r zéros consécutifs. On pose $a_0 = 1$. Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Montrer que le rayon de convergence de f est > 0.

b) Trouver une relation de récurrence entre les a_n.

c) Exprimer $f(x)$.

Exercice 45 (ENS)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de A sont imaginaires pures.
2. Que dire de $\det(A)$ si n est impair ?
3. On suppose n pair et on considère la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Montrer que $\det(A+J) = \det(A)$.

Exercice 46 (ENS)

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ vérifiant $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \in \{0,1\}$. On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^T A = kI_n + J$. Montrer que A est inversible.

Exercice 47 (ENS)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$.

1. Quelles sont les valeurs propres complexes possibles de A ?
2. Donner un exemple de matrice A qui vérifie $A^2 = A^T$ et qui possède toutes les valeurs propres possibles trouvées à la question précédente.

Exercice 48 (ENS)

1. Montrer que toute matrice symétrique positive admet une racine carrée.
2. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement s'il existe S symétrique définie positive telle que $SA = A^T S$.

Exercice 49 (X-ESPCI)

Un graphe est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini et A un ensemble de paires de S. Les éléments de S s'appellent les sommets de G et ceux de A les arêtes de G. Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes et f une application de S dans S'. On dit que f est un morphisme de G dans G' si $\forall (u,v) \in S^2$, $\{u,v\} \in A \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in A'$. On dit que f est un isomorphisme de G dans G' si $\forall (u,v) \in S^2$, $\{u,v\} \in A \iff \{f(u), f(v)\} \in A'$.
Donner une majoration du nombre de graphes à n sommets et k arêtes deux à deux non isomorphes.

Exercice 50 (X-ESPCI)

Déterminer les extrema globaux et locaux de $f : M \in SO_4(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(M)$.

Exercice 51 (ENS)

Soit E un espace euclidien. Soit a un endomorphisme autoadjoint de E. Soient $u \in E$ non nul et $V = \mathrm{Vect}\{a^k(u); k \in \mathbb{N}\}$. Montrer que l'endomorphisme induit par a sur V n'a que des valeurs propres simples.

Exercice 52 (ENS)

On considère $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$, où le spectre est pris sur $\mathbb{C}$. L'application f est-elle lipschitzienne ?

Exercice 53 (ENS)

On pose $a_1 \geq 0$ puis $a_{n+1} = 10^n a_n^{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. À quelle condition sur a_1 la suite (a_n) tend-elle vers 0 ?

Exercice 54 (ENS)

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Donner un équivalent de $f(n)$.

Exercice 55 (ENS)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $\lambda(t) = \max_{x\in\mathbb{R}} \big(|f(x)| \exp(-tx^2)\big)$.

1. On suppose $f(0) \neq 0$. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} \lambda(t)$.
2. On suppose maintenant $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent de λ en $+\infty$.
3. Même question en supposant la fonction f de classe C^∞, $f(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$ et $f^{(k)}(0) \neq 0$.

Exercice 56 (ENS)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Trouver toutes les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ bornées sur $\mathbb{R}^2$ et telles que
$$f = a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Exercice 57 (ENS)

Montrer que la fonction $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto f(P) = \displaystyle\int_0^1 (P(x) - e^x)^2 \, dx$ admet un unique point critique.

Exercice 58 (X-ESPCI)

Soit F un polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $F(n)$ ne soit pas premier.

Exercice 59 (X-ESPCI)

Soit $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5\left(1 + \frac{i}{n^3} - z\right)}$.

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
2. Montrer que la restriction de f à l'ensemble des nombres complexes de module 1 n'est pas continue.

Exercice 60 (X-ESPCI)

Soit S l'ensemble des $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = xf'(x/2).$$

1. Chercher les $f \in S$ développables en série entière.
2. L'espace S est-il de dimension finie ?

Exercice 61 (ENS)

Déterminer les $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 62 (X-ESPCI)

Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers 0. Pour $t \in]-1,1[$, on pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $]-1,1[$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} (1-t)f(t) = 0$.
3. On suppose de plus qu'il existe des réels $a_1, \dots, a_r$ et $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_r < \pi$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a_k \cos(n\theta_k)$. Montrer que $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$.

Exercice 63 (X-ESPCI)

Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$ de classe C^1 telle que $X'(t) = JSX(t)$, où
$$J = \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$$
et $S \in S_{2n}^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que X est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 64 (X-ESPCI)

La fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{k!}$ admet-elle une limite lorsque x tend vers 1^- ?

Exercice 65 (X-ESPCI)

Soit $(a_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série entière
$$f_n : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} z^k$$
a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note B l'ensemble des nombres complexes de module ≤ 1. On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur B et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in B$, $|f_n(z)| \leq M$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$ pour tout $r < 1$.

Exercice 66 (X-ESPCI)

Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de 0 telle que $f(z) = O_{z\to 0}(z^k)$. Montrer que, pour $r > 0$ assez petit, il existe au moins $2k$ nombres complexes z de module r tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 67 (ENS)

On dit qu'une matrice est positive si tous ses coefficients sont positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre :

(i) A est monotone, c'est-à-dire A est inversible et A^{-1} positive,

(ii) $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$.

Exercice 68 (ENS)

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall A \in E,\ \mathrm{rg}(A) \leq 1$. Montrer que $\dim(E) \leq n$.

Exercice 69 (X-ESPCI)

Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

On admet que, si f est continue, alors (P_n) tend uniformément vers f sur $[0,1]$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ afin qu'il existe une suite de polynômes à coefficients entiers qui converge uniformément vers f.

Exercice 70 (ENS)

Caractériser les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes d'indice $n-1$.

Exercice 71 (X-ESPCI)

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour n'importe quelle permutation de ses n^2 coefficients, on obtienne toujours une matrice inversible.

Exercice 72 (X-ESPCI)

Soit (a_n) une suite de réels de $]0,1[$ telle que la série $\sum \frac{a_n}{\ln(1/a_n)}$ converge. Montrer que la série $\sum \frac{a_n}{\ln(n)}$ converge.

Exercice 73 (X-ESPCI)

Soient $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant

$$(E) : y'' - py = 0.$$

1. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.
2. On admet que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, il existe y vérifiant (E) et $(y(0), y'(0)) = (a,b)$. Montrer que (E) admet une solution non bornée.

Exercice 74 (X-ESPCI)

1. Montrer que toute matrice réelle de taille n symétrique positive admet une racine carrée symétrique positive.
2. Soient S et A deux matrices de taille n avec S symétrique définie positive et A antisymétrique. Montrer que AS est $\mathbb{C}$-diagonalisable.

Exercice 75 (X-ESPCI)

Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $H \in S_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\varphi_k(H) = \sum_{i=0}^{k-1} A^i H A^{k-1-i}.$$

1. Montrer que φ_k est un endomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$.
2. À quelle condition φ_k est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 76 (ENS)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers de $[\![1,n]\!]$ qui sont premiers avec n. On note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n. Montrer que

$$\sqrt{\sigma(n)\varphi(n)} \leq n \leq \frac{\sigma(n)+\varphi(n)}{2}.$$

Exercice 77 (ENS)

On note $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de déterminant 1 et H l'ensemble des complexes de partie imaginaire strictement positive.

Pour toute $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, on définit $f_M : z \in H \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$.

1. Montrer que, pour toute $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, f_M est bien définie.
2. Montrer que $f_{MM'} = f_M \circ f_{M'}$ pour toutes $M, M' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.
3. On note $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ qui sont à coefficients entiers et D l'ensemble des $z \in H$ tels que $|z| \geq 1$ et $|\operatorname{Re}(z)| \leq \dfrac{1}{2}$. Montrer que pour tout $z \in H$ il existe $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $f_M(z) \in D$.

Exercice 78 (ENS)

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont le déterminant vaut ± 1. On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ sont $\mathbb{Z}$-semblables s'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que $A = QBQ^{-1}$. Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ semblables sur $\mathbb{C}$ sont-elles $\mathbb{Z}$-semblables ?

Exercice 79 (ENS)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   i) $\exists B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ A = B^2$;
   ii) $A = 0$ ou $A^2 \neq 0$.
2. Déterminer si les matrices suivantes sont des carrés dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe B et $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = B^2 + C^2$.

Exercice 80 (X-ESPCI)

Trouver les racines du polynôme $1 - 2X + 3X^2 - 2X^3 + X^4$.

Exercice 81 (X-ESPCI)

Montrer que les racines du polynôme $P(X) = 4X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X$ ont un module strictement inférieur à 1.

Exercice 82 (ENS)

On considère la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de matrices définie par $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I_{a_n} \\ I_{a_n} & -A_n \end{pmatrix},$$
où a_n est la taille de la matrice A_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer a_n. Calculer A_n^2. Déterminer les valeurs propres de A_n ainsi que leurs multiplicités.
2. Soient $i_1 < i_2 < \cdots < i_{a_n/2-1}$ des entiers compris entre 1 et a_n. On supprime dans la matrice A_n les lignes et les colonnes d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_{a_n/2-1}$. Soit B_n la matrice obtenue. Montrer que $\sqrt{n}$ est valeur propre de B_n.

Exercice 83 (ENS)

Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Soit u un endomorphisme symétrique de E. On suppose que u stabilise F. Montrer que u stabilise $F^\perp$.
2. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_k$ des endomorphismes symétriques de E, qui commutent. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle les matrices des u_i sont toutes diagonales.

Exercice 84 (ENS)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Pour tout endomorphisme u de E, on pose $\Gamma(u) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ v \circ u = u \circ v\}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes de E qui converge vers u. Montrer que $\dim(\Gamma(u_k)) \leq \dim(\Gamma(u))$ à partir d'un certain rang.

Exercice 85 (X-ESPCI)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{Q}^*$ tels que $(c+i)^n = (c-i)^n$. Montrer que $c = \pm 1$ et $n \equiv 0\ [4]$.

Exercice 86 (X-ESPCI)

Soient $n > 2$ et $a_1, \ldots, a_n$ des points du plan. Existe-t-il un polygone dont les a_i sont les milieux des côtés ?

Exercice 87 (ENS)

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On note Δ l'ensemble des matrices diagonales de taille d et dont les coefficients diagonaux valent ± 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $U(\varepsilon)$ l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $D \in \Delta$ telle que $\|M - D\|_\infty \leq \varepsilon$, où $\|A\|_\infty = \max\limits_{i,j} |a_{i,j}|$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $U(\varepsilon) \subset \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$.

Exercice 88 (ENS)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Montrer qu'il existe une fonction continue $M : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $M(0) = I_n$ et $M(1) = A$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices telles que $A^2 = A$ et $B^2 = B$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$ si, et seulement si, il existe une fonction continue $M : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M(0) = A$, $M(1) = B$ et $\forall t \in [0,1],\ M(t)^2 = M(t)$.

Exercice 89 (ENS)

Pour φ_1 et $\varphi_2 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_1' \\ \varphi_2 & \varphi_2' \end{vmatrix}.$$

1. Soit q une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient φ_1 et φ_2 deux solutions de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. Que dire de la fonction W ?
2. Soient q_1 et q_2 deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit φ_1 une solution de $y'' + q_1 y = 0$ et φ_2 une solution de $y'' + q_2 y = 0$. Calculer W'.
3. Soit q une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que q est minorée par un réel strictement positif α. Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$ s'annule une infinité de fois.

Exercice 90 (ENS)

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λ. On définit la matrice aléatoire

$$M = \begin{pmatrix} X & Y \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note A l'événement « M est diagonalisable ». Montrer qu'il existe $c > 0$, indépendant de λ, tel que $\mathbb{P}(A) \leq c/\lambda$.

Exercice 91 (ENS)

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$, et on note $t \mapsto X(t)$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ qui est la solution de $X' = AX$ vérifiant $X(0) = X_0$.

1. Calculer X pour
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Ici $n = 2$. À quelle condition sur A, $\|X\|$ est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?
3. Montrer que si A est antisymétrique alors $\|X\|$ est bornée.
4. Montrer que si $\|X\|$ est constante et non nulle alors A est antisymétrique.

Exercice 92 (ENS)

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 5x(1-x)$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On prend $u_0 = \dfrac{1}{2}$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer que, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors elle est stationnaire.
3. On considère désormais que u_0 est une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty\right) > 0$.
4. Montrer que $\left\{u_0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty\right\} = \bigcup\limits_{j=0}^{+\infty} I_j$ où les I_j sont des intervalles disjoints dont la somme des longueurs est $\geq 1/2$. Ind. Utiliser une majoration de $|f'|$ sur $[0,1]$.

Exercice 93 (X-ESPCI)

Soient $A \in O_3(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_3\}$, $B \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Montrer que $AB = BA$ si et seulement si $\ker B = \ker(A - (\det A) I_3)$.

Exercice 94 (X-ESPCI)

Soit $A = (a_{i,j}) \in S_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on ait $X^T A X > 0$. Montrer que

$$\max_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = \max_{1 \leq i \leq n} a_{i,i}.$$

Exercice 95 (X-ESPCI)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que χ_A soit à racines dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $U_0 = I_2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}(U_n + AU_n^{-1})$. Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ converge vers une matrice B qui vérifie $B^2 = A$.

Exercice 96 (X-ESPCI)

1. Montrer que $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(u^2)\, du$ est une intégrale convergente.
2. Soient a, b deux réels strictement positifs. Trouver un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \cos(n(at^2 + bt^3))\, dt$.

Exercice 97 (X-ESPCI)

Trouver un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 + nx^4)^{-n}\, dx$.

Exercice 98 (X-ESPCI)

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note γ sa limite.
2. Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t}\, dt$.
4. Montrer que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Exercice 99 (X-ESPCI)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 100 (X-ESPCI)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1 + u^{1/n}}\, du$.

1. Calculer I_1.
2. Trouver une relation entre I_{n-1} et I_n.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 101 (X-ESPCI)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 3A = 0$. Montrer que $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$ sont des entiers divisibles par 3.

Exercice 102 (X-ESPCI)

Soient A, B, C, D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M, P, Q sont semblables.
2. Montrer que le polynôme χ_R est à coefficients réels.
3. Soit θ défini par $\forall (X, Y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, $\theta(X, Y) = (-\overline{Y}, \overline{X})$. Trouver les endomorphismes de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ qui commutent avec θ.
4. On suppose que R est diagonalisable. Montrer que $\det(R)$ est positif ou nul.

Exercice 103 (X-ESPCI)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$. On note $f(x)$ sa somme.
2. Déterminer à quelle condition on a $|f^{(n)}(x)| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$.

Exercice 104 (X-ESPCI)

On pose $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n!}}{n}$.

1. Justifier que f est la somme d'une série entière et calculer son rayon de convergence.
2. Montrer qu'il existe une partie dense du bord du disque de convergence sur laquelle la série diverge.

Exercice 105 (X-ESPCI)

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = (1+\exp(-t^2))x. \end{cases}$$

On veut montrer qu'il existe $r > 0$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x(t) - r\cos(t+\theta_0) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad y(t) - r\sin(t+\theta_0) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

1. Montrer que $z = x^2 + y^2$ admet une limite en $+\infty$.
2. On pose $u = \frac{x}{\sqrt{z}}$ et $v = \frac{y}{\sqrt{z}}$ et $\theta : t \mapsto \int_0^t (uv' - u'v)$. Montrer qu'il existe une constante K telle que $x + iy = \sqrt{z}\exp(i(\theta+K))$.
3. Conclure.

Exercice 106 (ENS)

Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On cherche les fonctions $u \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial(u^2)}{\partial x}(t,x) = 0 \quad \text{et} \quad u(0,x) = u_0(x). \qquad \text{(E)}$$

1. On suppose que u existe et on pose alors $X \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ une fonction telle que :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial X}{\partial t}(t,x) = u(t, X(t,x)) \quad \text{et} \quad X(0,x) = x.$$

   Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, que peut-on dire de $t \mapsto u(t, X(t,x))$?
2. En exprimant $X(t,x)$, trouver les fonctions u vérifiant (E).

Exercice 107 (X-ESPCI)

Pour tout $x \geq 1$, on définit :

$$\pi(x) = \mathrm{Card}\{p \text{ premier inférieur ou égal à } x\}.$$

Le très célèbre Théorème des Nombres Premiers affirme alors que :

$$\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

On considère la suite (p_n) des nombres premiers.

1. Que vaut $\pi(p_n)$?
2. En déduire la nature de la série

$$\sum \frac{1}{p_n}.$$

3. **(Bonus)** Retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser le TNP et en considérant la série de terme général $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$.

Exercice 108 (X-ESPCI)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note τ_n le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$. Pour $x \geq 1$, on pose

$$F(x) = \sum_{n \leq x} \tau_n.$$

1. Déterminer un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
2. Montrer plus précisément que

$$F(x) = x\ln x + (2\gamma - 1)x + O\big(\sqrt{x}\big) \qquad (x \to +\infty),$$

   où γ désigne la constante d'Euler.