Oraux X-ENS

Samy MKHININI

Exercice 1 (X)

Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier cette suite et donner un développement asymptotique de u_n comportant deux termes.

Exercice 2 (Lyon)

Soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle n-bloc de a tout n-uplet $(a_k, \dots, a_{k+n-1})$.

1. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que le nombre de m-blocs de a soit majoré par m. Montrer que a est périodique.
2. Que peut-on dire si le nombre de m-blocs est majoré par $m+1$?

Exercice 3 (Ulm)

Déterminer l'image de $\Phi : \; A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longmapsto A^3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 4 (ULSR)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé réel de dimension finie, K un compact non vide de E. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant K. Cette boule est-elle unique ?

Exercice 5 (X)

Décrire les composantes connexes par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 (X)

Décrire les composantes connexes par arcs de $O_n(\mathbb{R})$ et de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7 (X)

Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 8 (X)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.

1. Montrer que, si $p \geq 1$, $\sum u_n^p$ converge.
2. Trouver la limite lorsque $p \to +\infty$ de

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^p\right)^{1/p}.$$

Exercice 9 (Lyon)

Soit φ l'indicatrice d'Euler.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\; \varphi(n) \geq \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.
2. Existe-t-il $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\; \varphi(n) \geq Cn$?

Exercice 10 (Lyon)

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $y^3 = x^2 + 1$.

Exercice 11 (Lyon)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\sigma(n) = \sum_{\substack{1 \leq d < n \\ d \mid n}} d.$$

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par : $x_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sigma(x_n)$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que la suite $(x_0, \dots, x_N)$ soit strictement croissante.

Exercice 12 (Ulm)

Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 13 (ULSR)

1. Soient x un réel et Q un entier strictement positif. Montrer qu'il existe des entiers p, q tels que $1 \leq q \leq Q$ et
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qQ}.$$
2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, de degré $n \geq 2$. Soit x une racine de P. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, d'écriture $r = \dfrac{p}{q}$ sous forme irréductible, on ait
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^n}.$$

Exercice 14 (Ulm)

Si $(G, +)$ est un groupe abélien et si A et B sont deux parties non vides de G, on pose
$$A + B = \{a + b \ ; \ (a, b) \in A \times B\}.$$

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les parties finies A de $\mathbb{R}^d$ telles que $|A + A| \leq |A|$?
2. Soit $(G, +)$ un groupe abélien. Quelles sont les parties finies de G telles que $|A + A| = |A|$?

Exercice 15 (Ulm)

Soit $n \geq 2$ un entier. On note $\overline{\ell}$ la réduction modulo n de l'entier ℓ. Si f est une fonction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, on note
$$\mathrm{Supp}(f) = \{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ ; \ f(x) \neq 0\}.$$
Soit f une fonction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ non identiquement nulle. On pose, pour $k \in \mathbb{Z}$,
$$\widehat{f}(\overline{k}) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\overline{j}) e^{-2i\pi kj/n}.$$
Montrer que $|\mathrm{Supp}(f)| \times |\mathrm{Supp}(\widehat{f})| \geq n$.

Exercice 16 (ULSR)

Soient $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et M un idéal de A. On dit que M est maximal si M est différent de A et si tout idéal de A contenant M est égal à M ou à A.

1. Soit M un idéal de A. Montrer que M est maximal si et seulement si, pour tout $a \notin M$, il existe $x \in M$ et $u \in A$ tels que $1 = x + u \times a$.
2. Soient $(B, +, \times)$ un anneau commutatif et $f : A \to B$ un morphisme surjectif de A sur B. Montrer que si M est un idéal maximal de A, alors soit $f(M) = B$, soit $f(M)$ est un idéal maximal de B.
3. Soit K un corps. Déterminer les idéaux maximaux de $K[X]$.
4. Soit M un idéal maximal de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $M \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$.
   (a) Montrer qu'il existe p premier tel que $M \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.
   (b) Montrer qu'il existe des éléments irréductibles P et Q de $\mathbb{Z}[X]$ tels que $M = (P) + (Q)$.

Exercice 17 (ULSR)

Un anneau intègre A est dit euclidien s'il existe une fonction $N : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $(a, b) \in A \times (A \setminus \{0\})$, il existe un couple $(q, r) \in A^2$ tel que $a = bq + r$ et si $r \neq 0$ alors $N(r) < N(b)$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$, défini comme $\{a + ib, \ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$, est euclidien.
2. Énoncer un théorème d'existence et d'unicité de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$.
3. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, le cardinal de
$$\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \ ; \ a^2 + b^2 = R^2\}$$
est dominé par R^ε quand R tend vers $+\infty$.

Exercice 18 (Lyon)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la somme μ_n des racines primitives n-ièmes de l'unité.

Exercice 19 (X)

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $\exp(M) = -I_n$.

Exercice 20 (Lyon)

Un nombre complexe est un entier algébrique s'il annule un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$.

1. Montrer que l'ensemble des entiers algébriques est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. On appelle unité tout inversible de l'anneau des entiers algébriques. Montrer que, si q est une racine n-ième primitive de 1 et $m \geq 2$ un entier premier avec n, alors $\dfrac{q^m - 1}{q - 1}$ est une unité.
3. Montrer qu'un nombre complexe est une unité si et seulement s'il annule un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $P(0) = \pm 1$.

Exercice 21 (ULSR)

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A = \pm 1$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $(a, b)^T$ soit la première colonne d'une matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
3. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que $(a_1, \ldots, a_n)^T$ est la première colonne d'une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.
4. Soient $U, V \in \mathbb{Z}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur U et V pour qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont la première colonne soit U et la deuxième V.

Exercice 22 (Lyon)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, K un corps. Déterminer les automorphismes de l'algèbre $\mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 23 (ULSR)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $|\det A| = 1$. On suppose que les valeurs propres complexes de A sont de module différent de 1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 24 (ULSR)

Soient A et B deux matrices complexes telles que $AB - BA \in \mathrm{Vect}(A, B)$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

Exercice 25 (Lyon)

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer l'existence de
$$S(A) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} A(t^2 I_n + A^2)^{-1}\, dt.$$
2. Déterminer les valeurs propres de $S(A)$.
3. Montrer que $S(A)$ est diagonalisable.

Exercice 26 (Ulm)

Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux conditions suivantes :

i) tout sous-espace de E stable par u a un supplémentaire stable par u ;

ii) le polynôme minimal de u est produit de facteurs irréductibles unitaires distincts.

Exercice 27 (Ulm)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Donner une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simple semblable à M sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28 (ULSR)

Soit p un nombre premier.

1. Déterminer les matrices A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que $A^p = I_p$.
2. Déterminer les matrices A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{Q})$ telles que $A^p = I_p$.

Exercice 29 (Lyon)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose
$$\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto AM - MA.$$

1. Montrer que φ_A est nilpotent si A est nilpotente.
2. Montrer que φ_A est diagonalisable si A est diagonalisable.
3. Montrer que φ_A est trigonalisable si A est trigonalisable.

Exercice 30 (ULSR)

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et
$$\Phi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto AM + MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$
Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
2. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une partie $\mathcal{W}$ dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $U \in \mathcal{W}$, il existe un unique $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $UV+VU = P$.

Exercice 31 (Ulm)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $[A, B] = AB - BA$ soit de rang majoré par 1. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.

Exercice 32 (ULSR)

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le seul élément nilpotent est la matrice nulle. Montrer que les éléments de $\mathcal{A}$ sont simultanément diagonalisables.

Exercice 33 (SR)

On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$
$$(P, Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt.$$

1. Montrer qu'il existe une suite orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout n, $\deg P_n = n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P_n possède n racines simples situées toutes dans $]0, 1[$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de P_n.
3. Montrer que les $R \mapsto R(\alpha_i)$ pour $1 \leq i \leq n$ forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]^*$.
4. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on ait
$$\int_0^1 P(t)\, dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(\alpha_i).$$
Donner une expression de λ_i ainsi que son signe.

Exercice 34 (Ulm)

Soit $A \in S_d(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Montrer qu'il existe v unitaire à coefficients strictement positifs tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad A^n x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle x, v\rangle v.$$

Exercice 35 (SR)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^T A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ à valeurs propres positives. On note $\mu_r \geq \mu_{r-1} \geq \cdots \geq \mu_1 > 0$ ses valeurs propres strictement positives comptées avec multiplicité. Pour $k \in [\![1, r]\!]$, on pose $\sigma_k = \sqrt{\mu_k}$.
2. Montrer qu'il existe deux matrices $U \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = U\Sigma V^T$, où $\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a pour coefficients diagonaux $\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0$, et tous ses coefficients hors-diagonale nuls. Une telle décomposition est-elle unique ?

Exercice 36 (ULSR)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres. On note $\|\ \|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que : $\forall X \in \mathbb{R}^n$,
$$\|X\|^4 \leq \langle AX, X\rangle\langle A^{-1}X, X\rangle \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}\right)^2 \|X\|^4.$$
2. Soit $b \in \mathbb{R}^n$. On considère $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle AX, X\rangle - \langle b, X\rangle \in \mathbb{R}$. Soit X^* l'unique point de $\mathbb{R}^n$ où f atteint son minimum. On définit récursivement la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = X_k - \rho_k \nabla f(X_k)$ où $\rho_k > 0$ minimise $f(X_k - \rho\nabla f(X_k))$. Montrer la bonne définition des objets, puis montrer que $X_k \to X^*$ et étudier la vitesse de convergence.

Exercice 37 (Ulm)

1. Énoncer et démontrer le théorème spectral.
2. Pour $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, comparer $\sqrt[n]{\det(I_n + A)}$ et $1 + \sqrt[n]{\det(A)}$.
3. Pour $(A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$, comparer $\sqrt[n]{\det(A + B)}$ et $\sqrt[n]{\det(A)} + \sqrt[n]{\det(B)}$.

Exercice 38 (ULSR)

Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On suppose que $-(A+A^T) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On note (E) l'équation

$$AX + XA^T = -BB^T$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer l'existence de

$$R = \int_0^{+\infty} e^{tA} BB^T e^{tA^T}\, dt.$$

2. Montrer que R est la seule solution de (E).

Exercice 39 (ULSR)

Soient n et m dans $\mathbb{N}^*$, $u_1, \dots, u_m$ des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$, $c_1, \dots, c_m$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $M_i = u_i u_i^T$. On suppose que $\sum_{i=1}^m c_i M_i = I_n$.

1. Soient $\theta_1, \dots, \theta_m \in \mathbb{R}$. On pose $X = \sum_{i=1}^m c_i \theta_i u_i$.
   (a) Montrer que $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^m c_i \langle X, u_i\rangle^2$.
   (b) Montrer que $\|X\|^2 \le \sum_{i=1}^m c_i \theta_i^2$.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) \le \prod_{i=1}^m \|Au_i\|^{c_i}$.
3. Même chose avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\det(M)^{1/n} = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A^T AM).$$

Exercice 40 (X)

À quelle condition une permutation de $\{1, \dots, n\}$ est-elle un carré ?

Exercice 41 (SR)

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On admet qu'il existe une unique décomposition $A = OS$ où $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique suite $(X_k)_{k\ge 0}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $X_0 = A$ et $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$X_{k+1} = \frac{1}{2} X_k \left(I_n + (X_k^T X_k)^{-1}\right),$$

puis étudier la convergence de cette suite.

Exercice 42 (Lyon)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. On écrit $P = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ où les α_i sont dans $\mathbb{C}$. Soit $s_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k$ et S la matrice $S = (s_{i+j-2})_{1\le i,j\le n}$.

1. Montrer que S est la matrice d'un produit scalaire si et seulement si P est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.
2. De façon plus générale, compter le nombre de valeurs propres négatives de S en fonction de la factorisation de P.

Exercice 43 (Ulm)

Pour A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $A \ge B$ si et seulement si $A - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\le$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $(M_k)_{k\ge 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ croissante et majorée pour l'ordre précédent. Montrer que $(M_k)_{k\ge 1}$ converge.

Exercice 44 (Ulm)

On dit qu'une fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ est ouverte si l'image d'un ouvert de $[0,1]$ est un ouvert de $[0,1]$. Caractériser ces fonctions.

Exercice 45 (ULSR)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{C}^n$ de sa norme euclidienne standard, dont on note S la sphère unité. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'ensemble $\{\overline{X}^T AX,\ X \in S\}$ est une partie convexe de $\mathbb{C}$.

Exercice 46 (Ulm)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des points de continuité de l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ qui à une matrice associe son polynôme minimal.

Exercice 47 (SR)

Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'on peut écrire
$$\chi_{A^TA} = X^{n-r} \prod_{i=1}^{r} (X - \sigma_i^2)$$
où $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.
2. On note $D = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$. Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que UAV soit de la forme
$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 48 (Ulm)

Soit M une partie de $\mathbb{R}_+^*$ à plus de deux éléments, stable par moyenne géométrique. Montrer que l'ensemble des irrationnels de M est dense dans $[\inf M, \sup M]$.

Exercice 49 (Ulm)

Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E. Soit $f : K \to K$ telle que $\forall (x, y) \in K^2, d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. Montrer que f est une isométrie.

Exercice 50 (Ulm)

Soit $(K_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de compacts connexes par arcs de $\mathbb{R}^d$. Est-ce que $\displaystyle\bigcap_{n \geq 0} K_n$ est nécessairement connexe par arcs ?

Exercice 51 (ULSR)

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$. Montrer que f est analytique.

Exercice 52 (ULSR)

Une partie A d'un espace normé est dite séparable si elle contient une partie dense au plus dénombrable.

1. Montrer qu'un espace normé de dimension finie est séparable.
2. Montrer que, si A est une partie séparable d'un espace normé et B une partie de A, B est séparable.
3. Soient A une partie séparable d'un espace normé, $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de A dont la réunion est A. Montrer que l'on peut extraire de $(\Omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement au plus dénombrable de A.
4. Étudier la réciproque de la question précédente.

Exercice 53 (Ulm)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note c_n le nombre de racines réelles distinctes du polynôme
$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k X^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$
Montrer que $c_n \sim \dfrac{4n}{e\pi}$.

Exercice 54 (ULSR)

1. Soient $x \geq 1$ et $Q \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in [\![1, Q]\!]$ tel que
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qQ}.$$
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ est transcendant.

Exercice 55 (Lyon)

On pose $I_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^\pi x^n (\pi - x)^n \sin(x)\, dx$.

1. Montrer que I_n est un polynôme à coefficients entiers en π de degré $\leq n$.
2. Donner un encadrement grossier de I_n.
3. En déduire que π est irrationnel.

Exercice 56 (Ulm)

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n\geq 0}$ pour que, pour toute suite réelle $(b_n)_{n\geq 0}$ décroissante positive avec $b_n \leq a_n$ pour une infinité de n, la série $\sum b_n$ converge.

Exercice 57 (X)

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $\dfrac{(2m)!(2n)!}{(m+n)!m!n!} \in \mathbb{N}$.

Exercice 58 (Lyon)

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = o(1/n).$$
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} < e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 59 (Lyon)

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :
$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) \leq xy + f(x) + f(y).$$
2. Existe-t-il des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues mais non dérivables telles que :
$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) \leq xy + f(x) + f(y)?$$

Exercice 60 (Ulm)

Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telles que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad (f(x) - f(y))\left(f(\sqrt{xy}) - f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) = 0.$$

Exercice 61 (Lyon)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique $c_n \in [0,1]$ tel que $I_n = \dfrac{1}{1+(c_n)^n}$.
2. Déterminer la limite de $(n(c_n)^n)_{n\geq 0}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 62 (SR)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, dx$.

1. Montrer qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $I_n = a_n + eb_n$.
2. En déduire que e est irrationnel.

Exercice 63 (Lyon)

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Pour $\varepsilon > 0$, soit η_ε la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\mathbf{1}_{|x|\leq\varepsilon}.$$
Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose
$$Z_\varepsilon(P) = \int_a^b \eta_\varepsilon(P)|P'|.$$

1. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ a ses zéros sur $\mathbb{R}$ simples, étudier $Z_\varepsilon(P)$ lorsque ε tend vers 0.
2. Dans le cas général, borner $Z_\varepsilon(P)$.

Exercice 64 (ULSR)

Soient a et b dans $\mathbb{R}$, E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. Pour $f \in E$, soit
$$I(f) = \int_0^1 \sqrt{1+f'^2}.$$
Montrer que I atteint son minimum sur E en un unique point que l'on précisera.

Exercice 65 (Lyon)

1. Déterminer une suite $(a_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum a_n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha \geq 1$.
2. Existe-t-il une fonction continue f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha = 1$?

Exercice 66 (X)

Soit $\theta \in [0, 2\pi]$, $t \in [0, 1[$. On pose

$$S_n(t) = \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} \sin(p\theta).$$

1. Calculer $S(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

Exercice 67 (ULSR)

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\lambda_n - n^2| \leq Cn$. Soit

$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{\lambda_n}\right).$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 68 (Ulm)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $w(0) = 1$ et $w'(0) = 0$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(ntw(t/n))\,dt.$$

Exercice 69 (Lyon)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n le nombre d'involutions dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et $p_n = \dfrac{I_n}{n!}$. On pose $p_0 = 1$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.

1. Calculer $f(x)$.
2. Montrer que $p_n \geq \dfrac{1}{\sqrt{n!}}$.
3. Montrer que $p_n \leq \dfrac{e^{n/2+\sqrt{n}}}{\sqrt{n^n}}$.

Exercice 70 (Lyon)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 |f_n|$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 |f|$ quand n tend vers $+\infty$, alors $\displaystyle\int_0^1 |f_n - f|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 (f_n)^2$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f^2$ quand n tend vers $+\infty$, alors $\displaystyle\int_0^1 (f_n - f)^2$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 71 (SR)

Soit $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu^2}}{1+u^2}\,du$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Quelle est la limite de F en $+\infty$?
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$.

Exercice 72 (X)

Déterminer les matrices A à coefficients complexes dont la classe de similitude est bornée.

Exercice 73 (SR)

1. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^4+1}$$
et calculer la valeur commune. On pose pour $t \in \mathbb{R}_+$,
$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x^2+t)^2}}{x^2+i}\,dx.$$
2. Montrer que F est continue. Étudier la limite de F en $+\infty$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $F'(t)$ pour $t > 0$.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt$ converge et calculer sa valeur.
5. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{i(yt^2+ixy)}\,dy$ pour x réel.

Exercice 74 (Lyon)

1. Montrer que $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{itx+i\frac{t^3}{3}}\,dt$ est bien définie.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. Montrer que F est solution de l'équation différentielle $y'' = xy$.

Exercice 75 (Ulm)

Soit f une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, montrer l'existence de
$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z}\,dt.$$
Montrer que F est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
2. Montrer que F détermine f.

Exercice 76 (ULSR)

Les n participants à la soirée déposent leur veste au vestiaire. À la fin de la soirée, les vestes sont redistribuées aléatoirement. Soit X le nombre d'invités qui retrouvent leur veste. Préciser la loi, l'espérance et la variance de X.

Exercice 77 (Lyon)

Soient A, B, C des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Soit $p(\lambda)$ la probabilité que toutes les solutions de $Ay'' + By' + Cy = 0$ s'annulent une infinité de fois. Montrer que $p(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 1$.

Exercice 78 (ULSR)

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(a) = \gamma(b)$. On pose, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$,
$$n_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt.$$

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$. Montrer que $n_\gamma(z)$ est un entier.
2. Montrer que $z \mapsto n_\gamma(z)$ est constante sur les composantes connexes par arcs de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$.
3. Montrer qu'il existe une unique composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Im} \gamma([a,b])$. Montrer que n_γ est nul sur cette composante.
4. Calculer $n_\gamma(z)$ pour γ qui parcourt le cercle unité et $|z| < 1$.
5. Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$ et $\gamma_2(a) = \gamma_2(b)$. On suppose que $|\gamma_1 - \gamma_2| < |\gamma_1|$ et que γ_1 et γ_2 ne passent pas par 0. Montrer que $n_{\gamma_1}(0) = n_{\gamma_2}(0)$.

Exercice 79 (ULSR)

On souhaite établir le théorème de Cayley-Hamilton. Soit donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, dont on note P le polynôme caractéristique.
Calculer, pour r grand, l'intégrale
$$I(r) = \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}) re^{i\theta} (A - re^{i\theta} I_n)^{-1}\,d\theta$$
de deux manières différentes, et en déduire que $P(A) = 0$.

Exercice 80 (ULSR)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, et pour $p \in E$,
$$I(p) = \int_0^1 \sqrt{1 + p'^2}\,dx.$$
Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E.

Exercice 81 (Lyon)

Soient $n \in \mathbb{N}$, y une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad y''(x) = \frac{8x^n}{(1+x^2)^2} y(x).$$

1. On suppose que $y(0) = y'(0) = 1$. Déterminer la limite de y en $+\infty$.
2. Que dire dans le cas général ?

Exercice 82 (Lyon)

Si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $[A, B] = AB - BA$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, B une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t) = [A(t), B(t)]$. Montrer que le polynôme caractéristique de $A(t)$ est indépendant de t.

Exercice 83 (SR)

Soit $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont la différentielle est constante.

1. Montrer que U est affine.
2. On suppose l'existence d'un ouvert borné non vide Ω de $\mathbb{R}^n$ tel que U s'annule en tout point de la frontière de Ω. Montrer que U est nulle.

Exercice 84 (Lyon)

Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement convexe, telle que

$$f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty.$$

1. Montrer que f admet un unique minimum.
2. Si $x_0 \in \mathbb{R}^2$, on admet qu'il existe une unique application x de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $x(0) = x_0$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x'(t) = -\nabla f(x(t))$. Étudier le comportement de $x(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
3. Démontrer le résultat admis dans la question précédente.

Exercice 85 (X)

1. Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, résoudre $x^2 = 1$ dans l'anneau $\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z}$.
2. Pour quels $\alpha \in \mathbb{N}^*$ le groupe $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^*$ est-il cyclique ?

Exercice 86 (SR)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ admettant un maximum local en (x_0, y_0). Que dire de
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) ?$$
2. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$, $\overline{D}$ son adhérence et ∂D sa frontière. Soient $\varepsilon > 0$, $T > 0$ et $f : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^2 vérifiant :
   i) $\forall (x, y) \in \overline{D},\ f(0, x, y) \geq \varepsilon$,
   ii) $\forall (x, y) \in \partial D,\ \forall t \in [0, T],\ x\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, x, y) = 0$,
   iii) $\forall (x, y) \in \overline{D},\ \forall t \in [0, T],\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(t, x, y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x, y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, x, y) \geq \varepsilon$.

   Montrer que $f > 0$ sur $[0, T] \times \overline{D}$.

Exercice 87 (X)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, P s'écrit $P = A^2 + B^2$ avec A et B dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 88 (Ulm)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on appelle serpent de A associé à σ l'ensemble

$$S_\sigma = \{a_{1,\sigma(1)}, \dots, a_{n,\sigma(n)}\}.$$

1. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   (i) tous les serpents de A contiennent 0 ;
   (ii) il existe une sous-matrice nulle de A de taille (r, s), avec
   $$r + s = n + 1.$$
2. On suppose que A est à coefficients positifs et que la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne vaut 1 (on dit que A est une matrice bistochastique). Montrer que A possède un serpent ne contenant pas 0.

Exercice 89 (X)

Résoudre l'équation $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{n}{a+b}$ d'inconnue (a, b, n) dans $(\mathbb{N}^*)^3$.

Exercice 90 (SR)

Soit $\alpha \in]0,1]$. Un joueur joue n parties d'un même jeu. La probabilité de victoire à chaque partie est α/n.

1. On suppose les parties mutuellement indépendantes. Montrer que l'on peut minorer la probabilité d'obtenir exactement une victoire par un réel strictement positif indépendant de n.
2. On suppose les parties indépendantes deux à deux. Le résultat est-il toujours vrai ?

Exercice 91 (Lyon)

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher indépendantes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Soit T la variable aléatoire égale à $+\infty$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n < 0$, à $\min\{n \in \mathbb{N}^* \ ; \ S_n > 0\}$ sinon.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{P}(S_{2n} \neq 0) = 2\mathbb{P}(S_{2n} > 0) = \mathbb{P}(T \leq 2n-1)$.
2. Déterminer la loi de T.

Exercice 92 (SR)

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Soit enfin $N = \mathrm{card}\{n \in \mathbb{N}^* \ ; \ S_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

1. Donner un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. En déduire $\mathbb{E}(N)$.
2. Montrer que N est presque sûrement égale à $+\infty$.

Exercice 93 (Ulm)

Soient $(X_{\{i,j\}})_{i<j}$ et $(Y_{\{i,j\}})_{i<j}$ des familles i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre $1/2$. On peut les voir comme une construction d'un graphe aléatoire dont l'ensemble des sommets est $\mathbb{N}$. Quelle est la probabilité qu'il existe une fonction f, aléatoire, bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que $\forall i < j$, $Y_{\{i,j\}} = X_{\{f(i),f(j)\}}$?

Exercice 94 (Ulm)

Soient m un nombre premier, $\ell \in \{1,\dots,m-1\}$, Q la matrice de $\mathcal{M}_m(\mathbb{Q})$ telle que, si $1 \leq i,j \leq m$, $Q_{i,j}$ soit égal à $\dfrac{1}{2}$ si $i-j$ est congru à 0 ou ℓ modulo m, à 0 sinon.

1. Montrer que la suite $(Q^n)_{n\geq 0}$ converge vers une matrice à préciser.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ telle que $\mathbb{P}(X = \overline{0}) = \mathbb{P}(X = \overline{\ell}) = \dfrac{1}{2}$. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Que dire de la loi de S_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 95 (Ulm)

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que les X_n et N admettent une espérance. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Étudier l'existence de l'espérance de S_N. On traitera notamment les cas suivants :

1. N est indépendante des X_n ;
2. X_1 admet un moment exponentiel : il existe $\lambda > 0$ tel que $e^{\lambda|X_1|}$ soit d'espérance finie.

Exercice 96 (Ulm)

Soient X une variable aléatoire réelle discrète d'espérance finie, $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de X. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $C(\varepsilon) > 0$ telle que, pour toute fonction φ strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, on ait, pour n assez grand,
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{\varphi(n)}}{\varphi(n)} - \mathbb{E}(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq C(\varepsilon)\frac{\mathbb{E}\left(X^2\mathbf{1}_{|X|\leq\varphi(n)}\right)}{\varphi(n)} + \varphi(n)\mathbb{P}(|X| > \varphi(n)).$$
2. On fixe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = \lfloor (1+\delta)^n \rfloor$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\sum \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{\varphi(n)}}{\varphi(n)} - \mathbb{E}(X)\right| \geq \varepsilon\right)$$
converge.

Exercice 97 (Ulm)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(X^n_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ une famille i.i.d. de variables aléatoires vérifiant $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{\lambda X^n_{i,j}}) \leq e^{\lambda^2}$. Soit $M^n = (M^n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice aléatoire symétrique telle que, si $1 \leq i \leq j \leq n$, $M^n_{i,j} = X^n_{i,j}$.

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit v un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$,
$$\mathbb{P}\big((M^n v, v) \geq \alpha\sqrt{n}\big) \leq \sqrt{n}e^{-n\alpha^2/8}.$$
2. En déduire une majoration avec grande probabilité, lorsque n est grand, de la plus grande valeur propre de M^n.

Exercice 98 (Ulm)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, ayant un moment d'ordre 2. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n^2) \leq M$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) pour toute $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bornée et à dérivée bornée, on a
$$\mathbb{E}(X_n f(X_n) - f'(X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

(ii) pour toute $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bornée, on a
$$\mathbb{E}(f(X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2}\,dx.$$

Exercice 99 (X)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$C_n = \{(x, y) \in (\mathbb{Q}^*)^2,\ x^2 + y^2 = n\}.$$

1. Montrer que C_1 est non vide.
2. Montrer que C_7 est vide.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que C_n est non vide. Montrer que C_n est infini.

Exercice 100 (X)

Soient $p \geq 5$ un nombre premier et $r = \left\lfloor \frac{2p}{3} \right\rfloor$. Montrer que p^2 divise $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \binom{p}{k}$.

Exercice 101 (X)

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.
2. Si $(G, +)$ est un groupe abélien, une partie X de G est dite sans somme s'il n'existe pas de couple $(x, y) \in X^2$ tel que $x + y \in X$. Soit p un nombre premier de la forme $3k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ contient une partie sans somme de cardinal $k + 1$.
3. Soient A et B deux parties d'un corps fini K. Calculer
$$\sum_{x\in K^*} |A \cap xB|.$$
4. Soit A une partie finie et non vide de $\mathbb{Z}^*$. Montrer qu'il existe une partie B de A sans somme et de cardinal strictement supérieur à $\dfrac{|A|}{3}$.

Exercice 102 (X)

Pour $\sigma \in S_n$, on pose
$$A(\sigma) = \sigma(1)\sigma(2) + \sigma(2)\sigma(3) + \cdots + \sigma(n-1)\sigma(n).$$
Déterminer le maximum de A.

Exercice 103 (X)

On considère G le groupe des symétries d'un pentagone régulier, c'est-à-dire les isométries vectorielles de $\mathbb{C}$ conservant U_5.

1. Décrire G. En donner un système de générateurs. On note $\{r, s\}$ un système de générateurs de G, avec $r^5 = 1$ et $s^2 = 1$. Montrer que $G = \{r^k,\ 0 \leq k \leq 4\} \cup \{sr^k,\ 0 \leq k \leq 4\}$.
2. On souhaite maintenant montrer que tout groupe à 10 éléments est isomorphe, soit à $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, soit au groupe des symétries du pentagone. On considère $(G, \cdot)$ un groupe à 10 éléments, non cyclique. Montrer que G possède un élément d'ordre 5, noté ρ, et un élément d'ordre 2, noté σ. Montrer que $G = \{\rho^k,\ 0 \leq k \leq 4\} \cup \{\sigma\rho^k,\ 0 \leq k \leq 4\}$. Montrer que $\sigma\rho\sigma^{-1} \in \{\rho, \rho^{-1}\}$. En distinguant les cas, conclure.

Exercice 104 (X)

Soit p un nombre premier impair. On suppose connus les carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Déterminer les carrés dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Exercice 105 (X)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de déterminer les automorphismes de S_n pour $n \neq 6$.

1. Pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on note $Z(\sigma)$ l'ensemble des permutations qui commutent avec σ. Montrer que $Z(\sigma)$ est un sous-groupe de S_n.
2. Déterminer le cardinal de $Z(\sigma)$ lorsque σ est une transposition, puis lorsque σ est un produit de transpositions à supports disjoints.
3. Soit φ un automorphisme sur S_n. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, $Z(\varphi(\sigma)) = \varphi(Z(\sigma))$.
4. Soit τ une transposition. Montrer que $\varphi(\tau)$ s'écrit comme un produit de transpositions à supports disjoints.
5. Supposons que pour toute transposition τ, $\varphi(\tau)$ soit aussi une transposition. Montrer qu'il existe $\rho \in S_n$ tel que, pour tout $\sigma \in S_n$, $\varphi(\sigma) = \rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}$.
6. Supposons $n \neq 6$. Soit τ une transposition. Montrer que $\varphi(\tau)$ est une transposition. Conclure.

Exercice 106 (X)

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $F_k = 1 + 2^{2^k}$. Soit p un diviseur premier de F_k.

1. Montrer que p est premier avec 2. Trouver l'ordre de 2 dans le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
2. Soit $t \in [\![1, k+1]\!]$. Quelle est la classe de p modulo 2^t ?
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 2^t.

Exercice 107 (X)

Soit G un groupe d'ordre $2n$ avec n impair.

1. Montrer que G contient un élément d'ordre 2.
2. Montrer que G contient un sous-groupe de cardinal n.

Ind. Considérer l'application Ψ qui à $g \in G$ associe l'application $h \mapsto gh$.

1. Dans le groupe symétrique S_4, on considère $a = (123)$ et $b = (12)(34)$. Calculer aba^{-1} et bab^{-1}.
2. Le groupe alterné A_4 contient-il un sous-groupe d'ordre $|A_4|/2$?

Exercice 108 (X)

Soient p un nombre premier impair, $S = \left\{1, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$, $a \in \mathbb{Z}$ non divisible par p.

1. Montrer que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1\ [p]$.
2. Montrer que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p]$ si et seulement si la classe de a modulo p est un carré de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. On écrit, si $s \in S$, $as \equiv e_s(a) s_a\ [p]$ où $e_s(a) \in \{\pm 1\}$ et où $s_a \in S$. Justifier, puis montrer que $s \mapsto s_a$ est une bijection de S sur lui-même.
4. On note $\left(\frac{a}{p}\right)$ l'élément de $\{\pm 1\}$ congru à $a^{\frac{p-1}{2}}$ modulo p. Montrer que
$$\left(\frac{a}{p}\right) = \prod_{s \in S} e_s(a).$$
5. Montrer, pour $m \in \mathbb{N}$ impair,
$$\sin(mx) = (-1)^{(m-1)/2} \sin(x) \prod_{k=0}^{(m-1)/2} \left(\sin^2(x) - \sin^2\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right).$$
6. Montrer, pour p et q premiers distincts,
$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}.$$

Exercice 109 (X)

Soit G un groupe d'ordre 8 non cyclique.

1. Montrer qu'il admet un élément d'ordre 2 et que tous les éléments sont d'ordre 1, 2 ou 4.
2. On suppose que tous les éléments sont d'ordre au plus 2. Que dire de G ?
Dans la suite de l'exercice, on suppose qu'il existe un élément a d'ordre 4, on note H le sous-groupe engendré par a.
3. Montrer que $xHx^{-1} = H$ pour tout $x \in G$.
4. Soit $b \in G \setminus H$. Montrer que bab^{-1} vaut a ou a^3.
5. En déduire qu'il existe, à isomorphisme près, au plus cinq groupes d'ordre 8.
6. Exhiber cinq groupes d'ordre 8 deux à deux non isomorphes.

Exercice 110 (X)

Soit p un nombre premier impair. On note G le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et H l'ensemble des carrés dans G.

1. Montrer que H est un sous-groupe de G de cardinal $\dfrac{p-1}{2}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que $-1 \in H$.
3. Montrer que tout élément de l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est somme de deux carrés.
4. On note
$$K = \{(a,b) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2,\ a^2+b^2=1\}$$
et
$$L = \{(a,b) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2,\ a^2+b^2=-1\}.$$
Montrer que K et L ont même cardinal, et en déduire le cardinal de K.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$ impair. Dénombrer les $(z_1,\dots,z_n) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ tels que
$$\sum_{k=1}^n z_k^2 = 1.$$

Exercice 111 (X)

Soient G un groupe fini de neutre e et, pour d diviseur de $|G|$, $n_d(G)$ le nombre d'éléments d'ordre d de G.

1. Que vaut $\displaystyle\sum_{d|n} n_d(G)$, où $n=|G|$?
2. Que déduire de la question précédente si G est cyclique ?
3. Montrer que G est cyclique si et seulement si, pour tout diviseur d de $|G|$, l'ensemble $\{x \in G\ ;\ x^d = e\}$ est de cardinal majoré par d.
4. On suppose qu'il existe un corps K tel que G soit un sous-groupe de $(K^*,\cdot)$. Montrer que G est cyclique. Que dire si $K=\mathbb{C}$?

Exercice 112 (X)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^{10}$ qui stabilise tous les sous-espaces de dimension 5. Que dire de f ?

Exercice 113 (X)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ pair et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose que les termes diagonaux de M sont nuls, et les termes en dehors de la diagonale dans $\{-1,1\}$. Montrer que M est inversible.

Exercice 114 (ULSR)

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe a et b dans $[0,1]$ tels que $f(a)>0$ et $f(b)<0$. Montrer qu'il existe P dans $\mathbb{R}[X]$ strictement positif sur $[0,1]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 fP = 0$.

Exercice 115 (X)

1. Soient G un groupe, $\chi_1,\dots,\chi_m$ des morphismes distincts de G dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que $(\chi_1,\dots,\chi_m)$ est une famille libre de $\mathbb{C}^G$.
2. Déterminer les morphismes de groupes continus de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}^*$.

Exercice 116 (X)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que P induit une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que P appartient à $\mathbb{Q}[X]$.
2. Montrer que P est de degré 1.

Exercice 117 (X)

Soient (a_n) une suite de complexes non nuls, et $P_n = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$. Soit $r>0$. Montrer que pour n assez grand, les racines de P_n ne sont pas toutes dans le disque $|z-r|<r$.

Exercice 118 (X)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est premier. Montrer que P est constant.

Exercice 119 (X)

Soient K un sous-corps de $\mathbb{C}$, P et Q dans $K[X]$ admettant une racine commune dans $\mathbb{C}$ et P irréductible sur K. Montrer que P divise Q.

Exercice 120 (ULSR)

Soit (a_n) une suite de nombres complexes et (n_k) une suite strictement croissante d'entiers naturels. On note R, R_1, R_2 les rayons de convergence respectifs de $\sum a_kx^k$, $\sum a_{n_k}x^k$, $\sum a_kx^{n_k}$. Comparer R avec R_1 puis comparer R avec R_2.

Exercice 121 (X)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note μ_n l'ensemble des racines primitives n-ièmes de 1 et on pose

$$\Phi_n = \prod_{z \in \mu_n} (X - z).$$

1. Montrer que $\prod_{d|n} \Phi_d = X^n - 1$, puis que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, Φ_n est dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Expliciter Φ_k pour tout $k \in [1, 8]$.
3. Soit μ la fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par $\mu(1) = 1$, $\mu\left(\prod_{i=1}^{r} p_i\right) = (-1)^r$ si $p_1, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers distincts et $\mu(n) = 0$ si n est divisible par le carré d'un nombre premier. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{1,n}.$$
4. Soient $(G, +)$ un groupe abélien, f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans G, F la fonction définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d).$$
Comment se transforme cette formule si $(G, \times)$ est un groupe multiplicatif et f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans G ?
5. En déduire une formule permettant de calculer Φ_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter Φ_{28}.
6. Soit $s > 1$ réel. Montrer que
$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \quad \text{où} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Exercice 122 (X)

Soit S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Montrer l'existence de n points $A_1, \ldots, A_n$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ tels que le groupe des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^{n-1}$ stabilisant l'ensemble de ces n points soit isomorphe à S_n.

Exercice 123 (X)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Quels sont les endomorphismes de E qui stabilisent les hyperplans de E ?

Exercice 124 (X)

Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ semblables uniquement à elles-mêmes.

Exercice 125 (X)

Soient K un sous-corps de $\mathbb{C}$, $n \geq 2$ un entier,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $C(J) = \{M \in \mathcal{M}_2(K) \,;\, MJ = JM\}$, $\Gamma_n = \{M \in \mathcal{M}_2(K) \,;\, M^n = J\}$.

1. Déterminer $C(J)$. Vérifier que $C(J)$ est une sous-algèbre commutative de la K-algèbre $\mathcal{M}_2(K)$.
2. Montrer que, si $K = \mathbb{R}$, la $\mathbb{R}$-algèbre $C(J)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Déterminer Γ_n.
3. Montrer que, si $K = \mathbb{Q}$, la $\mathbb{Q}$-algèbre $C(J)$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[i]$. Déterminer Γ_n. On admettra que les éléments d'ordre fini de $(\mathbb{Q}[i]^*, \times)$ sont ± 1 et $\pm i$.
4. Montrer que, si $K = \mathbb{C}$, la $\mathbb{C}$-algèbre $C(J)$ est isomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Déterminer Γ_n.

Exercice 126 (X)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\det(I_n + A\overline{A}) \in \mathbb{R}$.
2. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A\overline{A})$ tel que $\lambda < 0$. Montrer que la dimension de $E_\lambda(A\overline{A})$ est paire.
3. Montrer que $\det(I_n + A\overline{A}) \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 127 (X)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toute valeur propre est de module strictement inférieur à 1. Montrer que la suite $(M^k)_{k \geq 0}$ converge vers 0.

Exercice 128 (X)

On se donne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1. Soit $u \in GL(E)$. Montrer que u^{-1} est un polynôme en u.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, dont on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes. On pose
$$P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k).$$
Montrer que l'on peut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ telle que $u_0 = u$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   i) $P(u_n) = P(u)^{2^n} v_n$ pour un certain polynôme v_n en u ;
   ii) $P'(u_n)$ est inversible ;
   iii) $u_{n+1} = u_n - P(u_n)P'(u_n)^{-1}$.

Exercice 129 (X)

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, et U et V deux sous-espaces vectoriels de E. On note respectivement π_U et π_V les projections orthogonales sur U et V. Montrer qu'il existe $q \in \mathcal{L}(E)$ et un réel $\rho \in]0, 1[$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$,
$$\|((\pi_U \pi_V)^n)(x) - q(x)\| \leq \rho^n \|x\|.$$

Exercice 130 (X)

1. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\det M^2 \leq (m_{1,1}^2 + m_{2,1}^2)(m_{1,2}^2 + m_{2,2}^2).$$
2. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le déterminant de M^2 est inférieur à $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 \right)$.

Exercice 131 (X)

Soit K un voisinage compact de 0 dans $\mathbb{R}^n$. On pose
$$A = \{u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\ ;\ u(K) \subset K\}.$$

1. Montrer que A est compact.
2. Montrer que, pour $u \in A$, $|\det(u)| \leq 1$.

Exercice 132 (X)

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Nature de la série de terme général $\dfrac{\sigma(n)}{n^2}$?

Exercice 133 (X)

Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 134 (X)

Soit K une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que K est précompacte lorsque, pour tout $\delta > 0$, il existe une liste finie $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E telle que
$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_f(x_k, \delta),$$
et on note alors $n(K, \delta)$ le plus petit de ces entiers n.

1. Montrer que si K est compact alors il est précompact.
2. On suppose E de dimension finie d, et K compact d'intérieur non vide. Déterminer un équivalent de $\ln(n(K, \delta))$ lorsque δ tend vers 0^+.
On pourra commencer par le cas où $E = \mathbb{R}^d$ est muni de la norme infinie.
3. On considère ici l'espace vectoriel $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On note K l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0. Montrer que K est précompact, puis déterminer un équivalent de $\ln(\ln(n(K, \delta)))$ quand δ tend vers 0^+.

Exercice 135 (X)

1. Soit u une suite réelle telle que $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ u_{m+n} \leq u_m + u_n$. Montrer que la suite
$$\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$$
admet une limite dans $[-\infty, +\infty[$.
2. Un n-chemin dans $\mathbb{Z}^2$ est une $(n+1)$-liste $(x_0, \dots, x_n)$ d'éléments de $\mathbb{Z}^2$ telle que, pour tout $k \in [0, n-1]$, $\|x_{k+1} - x_k\|_1 = 1$. Un tel chemin est dit simple lorsque ses éléments sont distincts. On note A_n le nombre de n-chemins simples partant de $(0, 0)$. Montrer qu'il existe un réel $\gamma \in [2, 4]$ tel que, pour tout $t > \gamma$, $A_n = o(t^n)$, et, pour tout $t \in [0, \gamma[$, $t^n = o(A_n)$.

Exercice 136 (X)

Si A est une partie de $\mathbb{N}$, on dit que A est de densité d si

$$\frac{|A \cap [0,n]|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} d.$$

1. Une partie de $\mathbb{N}$ admet-elle toujours une densité ?
2. Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ une suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

si et seulement s'il existe une partie A de $\mathbb{N}$ de densité 0 telle que

$$u_n \xrightarrow[\substack{n\to+\infty \\ n\notin A}]{} 0.$$

3. Que dire d'une fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ transformant toute suite vérifiant les conditions de la question précédente en une suite vérifiant ces mêmes conditions ?

Exercice 137 (X)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels non nuls. Nature de la série de terme général

$$\frac{1}{\text{ppcm}(a_1,\dots,a_n)}\ ?$$

Exercice 138 (X)

Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante, telle que $u_0 = 1$ et telle que la série de terme général $\dfrac{u_n^2}{u_{n+1}}$ converge. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n^2}{u_{n+1}} \geq 4.$$

Exercice 139 (X)

Quels sont les $n \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe un cercle du plan dont le nombre de points d'intersection avec $\mathbb{Q}^2$ soit n ? L'intersection peut-elle être infinie ?

Exercice 140 (X)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f' < 0$ et que

$$\sup\left\{\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\ ;\ x\in\mathbb{R}_+\right\} < 2.$$

Montrer que

$$xf(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 141 (X)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que f, f', f'', f''' soient à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et que $f''' < f$. Montrer que

$$f''^2 < 2ff', \qquad f'^2 < 2ff'', \qquad f^2 < 2f'.$$

Exercice 142 (X)

Soient $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}_+^*$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ continues telles que

$$\forall x \in [0,1], \qquad g(x) = \int_0^1 f(y)K(x,y)\,dy$$

et

$$f(x) = \int_0^1 g(y)K(x,y)\,dy.$$

Montrer que $f = g$.

Exercice 143 (X)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue intégrable.

1. La fonction f est-elle nécessairement de limite nulle en $+\infty$?
2. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ tendant vers $+\infty$ telle que $(x_n f(x_n))_n$ converge vers 0.

Exercice 144 (ULSR)

On étend de façon naturelle la valuation 2-adique v_2 à $\mathbb{Q}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Calculer $v_2(H_n)$.

Exercice 145 (X)

1. Soit $r \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Calculer
$$\int_0^{2\pi} \ln|1 - re^{it}|\, dt.$$
2. Calculer
$$\int_0^{2\pi} \ln|1 - e^{it}|\, dt.$$

Exercice 146 (X)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\preceq$ un ordre partiel sur $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que la matrice
$$(\mathbf{1}_{i \preceq j})_{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2}$$
est inversible.
2. Soit μ la fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}$ définie par $\mu(1) = 1$,
$$\mu\left(\prod_{i=1}^{r} p_i\right) = (-1)^r$$
si $p_1, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers distincts et $\mu(n) = 0$ si n est divisible par le carré d'un nombre premier. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leq i, j \leq n$, on pose $M_{i,j} = \mu\left(\frac{i}{j}\right)$ si j divise i, $M_{i,j} = 0$ sinon. Montrer que la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible et calculer son inverse.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$. Montrer l'existence d'une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ de réels et de $\alpha > 0$ tels que
$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \qquad e^{P(x)} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1 - x^n)^{a_n}}.$$

Exercice 147 (Ulm)

Soient G un groupe, A une partie finie non vide de G. Montrer que $|A| = |AA|$ si et seulement si $A = xH$ avec $x \in G$ et H sous-groupe de G tel que $x^{-1}Hx = H$.

Exercice 148 (SR)

Montrer que toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ admet une racine carrée.

Exercice 149 (SR)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que $|z| < 2$.

Exercice 150 (Ulm)

Soient G un groupe et $A \subset G$ fini non vide tel que $|AA| < \frac{3}{2}|A|$. Montrer que $A^{-1}A$ est un sous-groupe de G.

Exercice 151 (X)

Soit
$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Donner un équivalent de f en 1^-.
3. Déterminer la limite de f en -1^+.

Exercice 152 (X)

Soit $A : \mathbb{C} \to SL_2(\mathbb{C})$, dont tous les coefficients sont développables en série entière sur $\mathbb{C}$. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $A(z) \in SO_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une fonction φ développable en série entière sur $\mathbb{C}$, telle que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad A(z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(z) & -\sin\varphi(z) \\ \sin\varphi(z) & \cos\varphi(z) \end{pmatrix}.$$
2. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |\cos(\varphi(z))| \leq e^{c|z|} \quad \text{et} \quad |\sin(\varphi(z))| \leq e^{c|z|}.$$
Montrer que φ est affine.

Exercice 153 (Ulm)

Soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs d'un espace euclidien E tels que $\langle e_i, e_j \rangle \leq 0$ pour tous i, j distincts dans $[1, n]$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre si et seulement s'il existe une forme linéaire f sur E telle que $\forall i \in [1, n]$, $f(e_i) > 0$.

Exercice 154 (Ulm)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tout $v \in \mathbb{C}^n$ non nul, on a $\{Mv\ ;\ M \in A\} = \mathbb{C}^n$. Montrer que $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 155 (ULSR)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 + B^2 = AB$ et $AB - BA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que n est divisible par 3.

Exercice 156 (X)

1. Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. Montrer, si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, que
$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}(X) + \lambda) \leq \frac{V(X)}{V(X) + \lambda^2}.$$
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes ayant un moment d'ordre 2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $V(X_n) \leq 1$. On pose
$$N = \min\{n \in \mathbb{N}^*\ ;\ X_n \leq 1\}.$$
Montrer que e^{aN} est d'espérance finie pour tout $a \in [0, \ln 2[$.

Exercice 157 (X)

Étant donné une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et un entier $k \in [1, n]$, une k-montée de σ est une liste strictement croissante $(i_1, \dots, i_k)$ d'éléments de $[1, n]$ telle que $\sigma(i_1) < \cdots < \sigma(i_k)$.
On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme, et on note X_n la variable aléatoire attribuant à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ le plus grand entier $k \in [1, n]$ tel que σ admette une k-montée.

1. Montrer, pour tout $k \in [1, n]$, l'inégalité
$$\mathbb{P}(X_n \geq k) \leq \frac{1}{k!}\binom{n}{k}.$$
2. Mettre en évidence un réel $C > 0$ tel que $\mathbb{P}(X_n \geq C\sqrt{n})$ tende vers 0 quand $n \to +\infty$.

Exercice 158 (X)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$
On pose $S_0 = 0$, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Calculer $\mathbb{P}(\forall n \in [0, 10],\ S_n \in \{0, 1\})$.
2. Calculer $\mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \in \{0, 1\})$.
3. Calculer $\mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \in [-5, 5])$.
4. Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ est presque sûrement non bornée.

Exercice 159 (X)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dénombrer l'ensemble
$$E_n = \{f \in [\![1, n]\!]^{[\![1,n]\!]}\ ;\ \forall i \in [1, n],\ f(i) \leq i\}.$$
2. Soit f_n suivant la loi uniforme sur E_n. Soit
$$X_n = \min\{k \in \mathbb{N}^*\ ;\ f_n^k(n) = f_n^{k-1}(n)\}.$$
Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.
3. Calculer $\mathbb{P}(f_n^{X_n}(n) = k)$.

Exercice 160 (ULSR)

Soit A l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. Pour $f, g \in A$, on pose
$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(A, +, *)$ est un anneau commutatif intègre.
2. Caractériser les inversibles de l'anneau A.
3. Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans l'anneau A avec a et $b^2 - 4ac$ inversibles.

Exercice 161 (X)

Soit $d \geq 1$ entier. Pour toute partie $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ de $[\![1, d]\!]$, avec $a_1 < \cdots < a_p$, et toute matrice M de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on pose

$$M^A = (m_{a_k, a_\ell})_{1 \leq k, \ell \leq p}.$$

1. Montrer, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, l'égalité

$$\det(I_d + M) = \sum_{A \subset [\![1,d]\!]} \det(M^A).$$

Dans la suite, on se donne une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathcal{P}([\![1, d]\!])$. On suppose qu'il existe $K \in S_d(\mathbb{R})$ telle que, pour toute partie A de $[\![1, d]\!]$, on ait

$$\mathbb{P}(A \subset X) = \det(K^A).$$

2. Soient $f : [\![1, d]\!] \to \mathbb{R}$ et D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $f(1), \dots, f(d)$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i \in X}(1 + f(i))\right) = \det(I_d + DK).$$

3. Montrer que le spectre de K est inclus dans $[0, 1]$.
4. Montrer que $|X|$ suit la loi de la somme de d variables de Bernoulli indépendantes dont les paramètres respectifs sont les valeurs propres de K.

Exercice 162 (X)

Soient X une variable aléatoire centrée et bornée, $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de X et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Montrer qu'il existe $C \in]0, 1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(S_n \geq na) \leq C^n.$$

Exercice 163 (Lyon)

Déterminer les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que M soit semblable à $2M$.

Exercice 164 (ULSR)

Soit $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, avec p premier supérieur ou égal à 5, m et p premiers entre eux.

1. Montrer que

$$\binom{np}{m} \equiv 0 \ [p].$$

2. Montrer que

$$\binom{np}{mp} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p(n-1)}{mp-k}\binom{p}{k}.$$

3. Montrer que

$$\binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} \ [p^2].$$

L'objectif de la suite est de montrer

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \ [p^3].$$

4. Montrer que $\forall k \in [\![1, p]\!]$,

$$\binom{p-1}{k-1} \equiv \pm 1 \ [p].$$

5. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{(p-1)!}{k}\right)^2 \equiv 0 \ [p].$$

6. Conclure.

Exercice 165 (ULSR)

1. Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont cycliques.
2. Alice et Barbara jouent à un jeu. Elles choisissent à tour de rôle un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sans remise qu'elles ajoutent à un ensemble S. Le jeu s'arrête quand S engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et la joueuse ayant tiré le dernier numéro perd. Selon n, y a-t-il une stratégie gagnante pour la première joueuse ?
3. Même question avec le groupe $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 166 (ULSR)

Soit p un nombre premier impair.

1. Déterminer $\text{card}\{x^2,\ x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.
2. Démontrer l'équivalence :
$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p] \iff a \text{ est un carré non nul modulo } p.$$
3. On pose
$$a = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (2k).$$
Démontrer que :
- si $p \equiv 1\ [4]$, alors
$$a \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \left(\frac{p-1}{2}\right)!\ [p],$$
- si $p \equiv -1\ [4]$, alors
$$a \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} \left(\frac{p-1}{2}\right)!\ [p].$$

Exercice 167 (Lyon)

On considère l'équation $2^a + 3^b = 5^c$ où $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$.

1. Résoudre l'équation dans le cas $a = b = c$.
2. Traiter le cas b impair.
3. Traiter le cas c impair.
4. Traiter le cas général.

Exercice 168 (ULSR)

Pour $i \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $c_i(A)$ le coefficient numéro i du polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de la matrice A.

1. Montrer que $c_i(AB) = c_i(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $i \in \mathbb{N}$.
2. Le résultat reste-t-il valable pour des matrices à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ quelconque ?

Exercice 169 (SR)

Soit p un nombre premier impair.

1. Quel est le cardinal du groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
2. Montrer que l'équation $x^2 = 1$ possède exactement deux solutions dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
3. En déduire : $\text{card}\{x^2,\ x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$.
4. Soit $\chi : \mathbb{Z} \to \{-1, 0, 1\}$ telle que : $\chi(n) = 1$ si $n \wedge p = 1$ et si n est un carré modulo p ; $\chi(n) = -1$ si $n \wedge p = 1$ et si n n'est pas un carré modulo p ; $\chi(n) = 0$ si $p \mid n$. Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.
5. Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \chi(k)$.
6. En déduire une majoration de $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \chi(k)\right|$ pour $N \in \mathbb{N}$. De plus, on pose $\xi = e^{2i\pi/p}$. Montrer alors que
$$\chi(n) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{a=0}^{p-1} \chi(a) \xi^{k(a-n)}.$$
Pour $k \in [1, p-1]$, on note $S_k(N) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \xi^{-kn}$.
7. Montrer que $\forall N \geq 0$,
$$|S_k(N)| \leq \frac{1}{|\sin(k\pi/p)|}.$$
8. En déduire que, pour $k < p/2$, $|S_k(N)| \leq p/2k$.
9. Trouver une majoration similaire pour $k > p/2$.
10. On pose
$$G_k = \sum_{a=0}^{p-1} \chi(a) \xi^{ka}.$$
Montrer que $|G_k| = \sqrt{p}$.

Exercice 170 (ULSR)

À quelle condition sur la matrice A, la comatrice de A est-elle diagonalisable ?

Exercice 171 (SR)

1. Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $c_1 \circ \cdots \circ c_r$ sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Calculer l'ordre de σ dans le groupe $\mathfrak{S}_n$.
2. On note $g(n)$ l'ordre maximal d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que g est croissante et $n \leq g(n) \leq n!$.
3. Trouver n minimal tel que $g(n) > n$.
4. On note $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrer que :
$$n \geq \sum_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \Longrightarrow g(n) \geq \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}.$$
5. On suppose que $g(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Montrer que :
$$n \geq \sum_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}.$$
6. Montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists C > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ g(n) \leq Ce^{\varepsilon n}$.

Exercice 172 (SR)

Lorsque $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $n_k(\sigma)$ le nombre de k-cycles dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints. Ainsi $n_1(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ. On note également
$$m(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} n_k(\sigma)$$
le nombre d'orbites de σ.

1. Soient $i, k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de i dans $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. On dit que σ et τ sont conjuguées s'il existe $\phi \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma = \phi\tau\phi^{-1}$. Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si : $\forall k \in [1, n]$, $n_k(\sigma) = n_k(\tau)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\det((i \wedge j)_{1\leq i,j\leq n})$.
Ind. Considérer les matrices $A = (\mathbf{1}_{i|j})$ et $B = (\varphi(j)\mathbf{1}_{j|i})$.
4. Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si : $\forall i \in [1, n]$, $m(\sigma^i) = m(\tau^i)$.
5. Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si les matrices de permutation P_σ et P_τ sont semblables.

Exercice 173 (ULSR)

1. Soient $n \geq 3$ et Q un polygone régulier à n côtés. Montrer que l'ensemble des isométries affines du plan préservant Q est un groupe à $2n$ éléments.
2. On note maintenant $n = q$, nombre premier impair, et D_{2q} le groupe précédent. Montrer que tout groupe de cardinal $2q$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ ou à D_{2q}.

Exercice 174 (Lyon)

1. Trouver tous les groupes d'ordre 8 dont l'ordre maximal des éléments est 4.
2. Trouver tous les groupes d'ordre 8 à isomorphisme près.

Exercice 175 (Lyon)

1. Donner des exemples de groupes d'ordre 12 commutatifs ainsi qu'un exemple non commutatif.
2. Montrer que tout groupe d'ordre 12 admet un élément d'ordre 2.
3. Trouver à isomorphisme près les groupes commutatifs d'ordre 12.
4. Montrer que tout groupe d'ordre 12 admet un élément d'ordre 3.
5. Trouver tous les groupes d'ordre 12 à isomorphisme près.

Exercice 176 (ULSR)

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F}_3).$$
On admet que $A^{13} = -I_3$.

1. Quels calculs auriez-vous fait pour justifier que $A^{13} = -I_3$?
2. Montrer que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ et que A est d'ordre 26 dans ce groupe.
3. On note G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ engendré par A, et on pose $V = G \cup \{0\}$. Montrer que $V = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.
4. On pose $W = \mathrm{Vect}(I_3, A)$. Montrer que, pour tout $M \in G$, il existe $N, P \in W \setminus \{0\}$ tels que $M = P^{-1}N$.
5. On note H le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ engendré par A^2. Montrer que H est isomorphe à $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, puis que $|H \cap W^*| = 4$.

Exercice 177 (Lyon)

1. Montrer que toute rotation du plan complexe est composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites.
2. Montrer que toute permutation d'un ensemble fini non vide X est produit de deux éléments d'ordre au plus 2 du groupe des permutations de X.
3. Le résultat de la question précédente subsiste-t-il si X est infini ?

Exercice 178 (Lyon)

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \in [1/C, C]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - x_{k,n}),$$

où l'on a noté $x_{k,n}$ les racines complexes de P_n.

1. Montrer que $\{x_{k,n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*,\ k \in [\![1, n]\!]\}$ est borné.
2. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} x_{k,n}^2 = \frac{a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n}{a_n^2}$$
pour tout $n \geq 2$.
3. Montrer que, pour n suffisamment grand, P_n n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 179 (Ulm)

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaires. On dit que P et Q sont entrelacés lorsqu'entre deux racines consécutives de l'un (en tenant compte des multiplicités) il y a exactement une racine de l'autre. On suppose que $\deg(Q) = \deg(P) - 1$, que Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, et que P et Q n'ont aucune racine commune. On pose enfin $F = \dfrac{P}{Q}$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Montrer l'équivalence entre :
(i) P est scindé sur $\mathbb{R}$ et P et Q sont entrelacés, (ii) $F(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$.

Exercice 180 (Lyon)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Exprimer $\det(A + uv^T)$. Dans le cas où celui-ci est non nul, exprimer $(A + uv^T)^{-1}$.

Exercice 181 (SR)

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Que dire de f si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée ?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\operatorname{tr} A = 0$. Montrer que A est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

Exercice 182 (SR)

Soit $\chi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes non constant. Soit A l'ensemble des matrices de la forme

$$\big(a + b\chi(r) + c\chi(s) + d\chi(r)\chi(s)\big)_{r,s \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}$$

avec a, b, c et $d \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que A est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Pour $\xi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes, calculer
$$\sum_{r \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} \xi(r).$$
3. Montrer que A est stable par produit matriciel et que la $\mathbb{R}$-algèbre $(A, +, \times, \cdot)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (on exhibera un isomorphisme).

Exercice 183 (Ulm)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, m un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que la réduction modulo m définit un morphisme de groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, puis que ce morphisme est surjectif.

Exercice 184 (SR)

1. Rappeler l'ordre d'un élément k de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Montrer que deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si elles ont pour tout k, le même nombre de cycles de longueur k dans leurs décompositions en produit de cycles à supports disjoints.
3. Soit c un cycle de longueur k. Déterminer le nombre de cycles dans la décomposition de c^i en produit de cycles à supports disjoints.

Exercice 185 (SR)

Pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, soit

$$\mathrm{Pf}(A) = a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3}.$$

1. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A)$.
2. On admet que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$ et tout $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$,
$$\mathrm{Pf}(BAB^T) = \det(B)\,\mathrm{Pf}(A).$$
Ind. Pour le cas $\det B < 0$, considérer la matrice $J = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$.
3. Soit $R \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$. On pose $A = R - R^T$. Montrer l'équivalence entre : (i) R n'a pas de valeur propre réelle, (ii) $\mathrm{Pf}(A) \neq 0$, (iii) A est inversible.
4. Soient $R_1, R_2 \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$, $A_1 = R_1^T - R_1$ et $A_2 = R_2^T - R_2$. On suppose $\chi_{R_1} = \chi_{R_2}$ et $\mathrm{Pf}(A_1) = \mathrm{Pf}(A_2) \neq 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ telle que $R_1 = PR_2P^T$.

Exercice 186 (Lyon)

Déterminer l'image de

$$\varphi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} M^{2n+1}.$$

Exercice 187 (ULSR)

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\zeta = e^{2i\pi/n}$ et

$$S = \left(\zeta^{(r-1)(s-1)}\right)_{1\leq r,s\leq n}.$$

1. Donner une expression simple de $\det(S)$. *Ind.* On pourra calculer S^2.
2. On pose
$$G_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik^2\pi}{n}}.$$
Donner une expression simple de $|G_n|^2$ par un calcul direct.
3. On suppose que n est impair. Déterminer le spectre de S et la multiplicité de chacune de ses valeurs propres.

Exercice 188 (ULSR)

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation $(E) : X - AXB = C$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ les spectres complexes de A et B.

1. On suppose que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$, $\alpha\beta \neq 1$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution.
2. Que se passe-t-il dans le cas général ?

Exercice 189 (Lyon)

Combien y a-t-il de classes de similitude de $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ constituées de matrices M telles que $M^3 = 0$?

Exercice 190 (Lyon)

Déterminer les matrices $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $k \geq 2$, on dispose de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $A = M^k$.

Exercice 191 (Lyon)

Trouver un espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ et $f : \mathbb{R} \to E$ tels que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2}\right) = \langle f(x), f(y)\rangle.$$

Exercice 192 (ULSR)

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$
soit positive, puis définie positive.
2. Soit $(a, b, c) \in [-1, 1]^3$. On suppose que $1+2abc \geq a^2+b^2+c^2$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$1 + 2(abc)^n \geq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}.$$

Exercice 193 (ULSR)

Montrer que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 194 (ULSR)

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Montrer qu'il existe un vecteur propre de A dont tous les coefficients sont > 0.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients > 0. Montrer que A possède un vecteur propre à coefficients > 0.
3. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$,
$$M_i = \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
pour $1 \leq i \leq n$. Montrer que $M_1 \times \cdots \times M_n$ est à spectre inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 195 (SR)

1. Rappeler la définition de l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.
2. Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u et u^* commutent si et seulement s'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant soit de taille 1, soit de taille 2 et de la forme
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 196 (Lyon)

Soient $p \geq 1$ et $A, B \in S_p^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que
$$\operatorname{tr}(I_p - A^{-1}B) \leq \ln\left(\frac{\det A}{\det B}\right).$$
2. Soient $n \geq 1$, $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^p$ et $\lambda > 0$. Pour $1 \leq m \leq n$, on pose
$$A_m = \sum_{k=1}^{m} u_k u_k^T \quad \text{et} \quad B_m = \lambda I_p + A_m.$$
Montrer que, pour $1 \leq m \leq n$, B_m est symétrique définie positive.
3. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres (avec multiplicité) de A_n. Montrer que
$$\sum_{m=1}^{n} \langle u_m, B_m^{-1} u_m \rangle \leq \sum_{i=1}^{p} \ln\left(1 + \frac{\lambda_i}{\lambda}\right).$$

Exercice 197 (ULSR)

Si G est un groupe, on note $Z(G)$ son centre. On pose
$$U_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ A^*A = I_n\}$$
où $A^* = \overline{A}^T$, l'ensemble des matrices unitaires.

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G et que $U_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne, c'est-à-dire telle que $A^* = A$. Démontrer qu'il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$ telle que P^*AP soit diagonale.
3. Démontrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit comme combinaison linéaire d'au plus quatre matrices unitaires.
4. Déterminer $Z(U_n(\mathbb{C}))$.

Exercice 198 (Ulm)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $f : E \to F$ telle que :
$$\forall r \in]0,1],\ \forall x \in E, \quad B\left(f(x), \frac{r}{2}\right) \subset f(B(x,r)) \subset B(f(x), 2r).$$

1. Montrer que f est continue et surjective.
2. Que peut-on dire de l'image par f d'un ouvert ? D'un fermé ?
3. Soit γ un chemin continu de $[0,1]$ dans F. Montrer qu'il existe un chemin c continu de $[0,1]$ dans E tel que $f \circ c = \gamma$.

Exercice 199 (ULSR)

1. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un fermé non vide. Soit $f : X \to X$. On suppose qu'il existe $\theta \in [0,1[$ tel que $\forall x, y \in X$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \theta \|x - y\|$. Montrer que f possède un unique point fixe c et que, pour tout $x \in X$, $f^m(x) \to c$ quand $m \to +\infty$.
2. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un compact non vide. Soit $f : X \to X$. On suppose que $\forall x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.
   (a) Soient Y, Z deux compacts non vides tels que $f(Y) \subset Y$ et $f(Z) \subset Z$. Montrer que $Y \cap Z$ est non vide.
   (b) En déduire que f possède un unique point fixe.

Exercice 200 (Ulm)

Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, E une partie de $\mathbb{R}^2$ coupant toute boule de rayon r (pour la norme euclidienne canonique), $P \in \mathbb{R}[X,Y]$ s'annulant sur E. Montrer que $P = 0$.

Exercice 201 (Ulm)

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 2$, C un convexe ouvert de E ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe une droite vectorielle ne coupant pas C.

Exercice 202 (Ulm)

Déterminer les valeurs d'adhérence des suites $(\cos n)$ et $(\cos^n n)$.

Exercice 203 (ULSR)

Soit S une partie de $\mathbb{N}^*$ infinie et stable par produit. On range les éléments de S en une suite strictement croissante $(s_n)_{n\geq 1}$. Montrer que la suite

$$\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)_{n\geq 1}$$

admet une limite dans $[1, +\infty[$.

Exercice 204 (Lyon)

Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_{n+1} = z_n e^{-i\,\mathrm{Im}(z_n)}.$$

Pour quelles valeurs de z_0 cette suite est-elle convergente ?

Exercice 205 (Lyon)

Trouver un équivalent de

$$S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k}$$

quand $n \to +\infty$.

Exercice 206 (Ulm)

On fixe un entier $n \geq 2$ et $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ une famille d'éléments de $]0,1[$. Soit, pour $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(x_k^i)_{k\geq 0}$ une suite réelle. On suppose que, pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{k+1}^i = (1-t_i)x_k^i + t_i x_k^{i+1}.$$

Montrer que les n suites $(x_k^i)_{k\geq 0}$ pour $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ convergent vers une même limite.

Exercice 207 (ULSR)

Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{U}$ distincts et $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$. On suppose que

$$\sum_{k=1}^{m} a_k z_k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrer que $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

Exercice 208 (Ulm)

Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que

$$\forall h \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+h} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 209 (Lyon)

Pour $x_0 > 0$, on définit par récurrence

$$x_{n+1} = x_n + \int_{x_n}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Étudier la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Donner un équivalent de x_n puis un développement asymptotique à deux termes.

Exercice 210 (X)

Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f \circ f = \exp$?

Exercice 211 (Lyon)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(n_i)_{i\geq 1} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $n_{i+1} \geq n_i^2$ et que
$$\alpha = \sum_{i=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n_i}\right).$$
2. Généraliser ce résultat.

Exercice 212 (Lyon)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. On note, pour $\alpha \geq 0$,
$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n a_n \leq \alpha\right\}.$$
Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle positive sommable. Pour tout $\alpha > 0$, construire une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\alpha$ telle que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n b_n = \max_{(u_n)\in\mathcal{R}_\alpha} \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n b_n\right\}.$$

Exercice 213 (ULSR)

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$,
$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$
2. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} < e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$
3. Montrer que la constante e est optimale.

Exercice 214 (ULSR)

Soient $p \in]1, +\infty[$ et $q \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ des suites d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telles que $\sum a_n^p$ et $\sum b_n^q$ convergent. Montrer que $\sum a_n b_n$ converge.
2. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs telle que $\sum a_n$ converge et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit
$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k.$$
Déterminer la nature de $\sum \dfrac{a_n}{R_n^\alpha}$.
3. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$. On suppose que, pour toute suite $(b_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telle que $\sum b_n^q$ converge, $\sum a_n b_n$ converge. Montrer que $\sum a_n^p$ converge.

Exercice 215 (ULSR)

On admet l'irrationalité de π. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + \cos(n)}.$$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\sum u_n$ converge.

Exercice 216 (Lyon)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue et dont une primitive est bornée. On suppose que, pour tout $x > 0$,
$$|f(x)| \leq \frac{2}{x^2}\int_0^x (x-y)|f(y)|\,dy.$$
Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Quelles généralisations peut-on étudier ?

Exercice 217 (SR)

Soient $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^n$. On note $a \succeq b$ si

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \qquad \sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Montrer que $a \succeq b$ si et seulement si, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{\sigma(i)}} \geq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_{\sigma(i)}}.$$

Exercice 218 (SR)

1. Montrer que

$$\cos(k\theta), \quad \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta}, \quad \frac{\cos((k+1/2)\theta)}{\cos(\theta/2)} \quad \text{et} \quad \frac{\sin((k+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}$$

   sont des polynômes en $\cos\theta$.
2. Soient $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels. On suppose que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad g(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)\big) \geq 0.$$

   Montrer qu'il existe un polynôme complexe P tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad g(\theta) = \left|P(e^{i\theta})\right|^2.$$

Exercice 219 (X)

Quels sont les $m \in \mathbb{N}^*$ tels qu'il existe m éléments consécutifs de $\mathbb{N}^*$ divisibles par des cubes d'éléments de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$?

Exercice 220 (X)

Soit p un nombre premier impair.

1. Dénombrer les $(x, y) \in (\mathbb{F}_p)^2$ tels que $x^2 + y^2 = 1$.
2. Soit $z \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$. Dénombrer

$$\{(x, y) \in \mathbb{F}_p^2,\ x^2 + y^2 = z\}.$$

Exercice 221 (SR)

1. Soit (a_n) une suite réelle telle que

$$\forall n, p, \qquad a_{n+p} \leq a_n + a_p + C,$$

   où C est une constante réelle. Montrer que $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ converge ou tend vers $-\infty$.
2. Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue et croissante, telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x)+1$. On note f^n la composée itérée de f (n fois). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(\frac{f^n(x) - x}{n}\right)_{n \geq 1}$$

   converge vers une limite qui ne dépend pas de x.

Exercice 222 (ULSR)

1. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x \in [0, 2\pi]$ tel que

$$f(x) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt.$$

2. Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.
   Montrer qu'il existe une partie I de $[\![1, n]\!]$ telle que

$$\left|\sum_{j \in I} z_j\right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

Exercice 223 (Ulm)

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant tel que $P(0) \neq 0$, $r \in \mathbb{R}_+^*$, $z_1, \dots, z_p$ les racines de module strictement inférieur à r de P comptées avec multiplicité. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(|P(re^{it})|\right)\, dt = \ln(|P(0)|) + \sum_{k=1}^{p} \ln\left(\frac{r}{|z_k|}\right).$$

Exercice 224 (X)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré majoré par n, Δ le pgcd de $P(0), P(1), \dots, P(n)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, Δ divise $P(k)$.

Exercice 225 (Ulm)

On considère une pièce équilibrée et ε_n la valeur du n-ième lancer que l'on considère à valeurs dans $\{-1,1\}$. Soient

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \quad \text{et} \quad \tau = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = 0\}.$$

Déterminer $\mathbb{P}(\tau = n)$ ainsi qu'un équivalent de cette quantité lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 226 (SR)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et Y la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k).$$
On pose
$$A = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$
2. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{rg}(A))$.
3. Calculer $\mathbb{P}(A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ puis $\mathbb{P}(A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}))$.
4. Déterminer la probabilité pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
5. On pose
$$B = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ X-Y & Y \end{pmatrix}.$$
Calculer $\mathbb{P}(B \in O_2(\mathbb{R}))$.
6. Soient Z une variable aléatoire réelle et
$$C = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ Z & Y \end{pmatrix}.$$
Calculer $\mathbb{P}(C \in O_2(\mathbb{R}))$.
7. Soit M une matrice aléatoire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la famille des coefficients est i.i.d., chaque coefficient suivant la loi uniforme sur $\{0,-1,1\}$. Déterminer $\mathbb{P}(M \in O_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 227 (Lyon)

Pour $x > 0$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(1) = 1$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 1$ entier,
$$\Gamma(k) = (k-1)! \quad \text{et} \quad \Gamma(k+1/2) \leq k!.$$
2. Soient $\sigma > 0$ et X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans un ensemble discret, telle que, pour tout $t \geq 0$,
$$\mathbb{P}(|X| > t) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right).$$
Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$,
$$\mathbb{E}(|X|^k) \leq (2\sigma^2)^{k/2} k\Gamma(k/2).$$
3. On suppose de plus que $\mathbb{E}(X) = 0$. Montrer que, pour tout $s > 0$,
$$\mathbb{E}\left[\exp(sX)\right] \leq \exp(4\sigma^2 s^2).$$

Exercice 228 (X)

Soit p un nombre premier. On dit qu'un groupe G est un p-groupe si, pour tout $g \in G$, l'ordre de g est une puissance de p. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que G est k-divisible si, pour tout $g \in G$, il existe $x \in G$ tel que $x^k = g$.

1. Montrer qu'un p-groupe non trivial et p-divisible est infini.
2. Donner un exemple de tel groupe.
3. Montrer que G est alors k-divisible pour tout k.

Exercice 229 (X)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si M est inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre non-inversible ?
2. Si M n'est pas inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre inversible ?

Exercice 230 (X)

On appelle nombre de coefficients positifs du polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$$

de degré $n \geq 1$ le cardinal de l'ensemble $\{i \in [\![0, n]\!],\ a_i \geq 0\}$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$. Montrer que P^2 a au moins trois coefficients positifs.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que P^2 ait exactement trois coefficients positifs.

Exercice 231 (X)

Pour $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, on pose

$$\|P\| = \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 \right)^{1/2}.$$

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\|(X - z)P\| = \|(1 - \overline{z}X)P\|.$$
2. On suppose P unitaire et on note M_P le produit des modules des racines de P de module supérieur ou égal à 1. Montrer que $M_P \leq \|P\|$.
3. Montrer, pour $1 \leq k \leq n - 1$, que
$$|a_k| \leq \binom{n-1}{k} M_P + \binom{n-1}{k-1}.$$

Exercice 232 (X)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que

$$ab - ba = f \circ v,$$

avec $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, E)$ et $v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.

1. Calculer $\det(ab - ba)$.
2. Montrer que a et b sont cotrigonalisables.

Exercice 233 (X)

1. Soient $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On pose
$$r = \min\{|z|\ ;\ z \in \mathbb{C},\ P(z) = 0\}$$
et on suppose $r > 0$. Si $a_k \neq 0$, montrer que
$$r^k \leq \binom{n}{k} \frac{|a_0|}{|a_k|}.$$
2. Soit
$$A_n = \{P \in \mathbb{C}[X]\ ;\ \deg(P) = n,\ P(-1) = P(1) = 0\}.$$
Montrer que
$$\sup_{P \in A_n} \{\min\{|z|\ ;\ z \in \mathbb{C},\ P'(z) = 0\}\} < +\infty.$$

Exercice 234 (X)

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $a, b \in \mathcal{L}(V)$. Pour $u, v \in \mathcal{L}(V)$, on pose $[u, v] = uv - vu$. On suppose que a est nilpotent et que $[a, [a, b]] = 0$. Montrer que $[a, b]$ et ab sont nilpotents.

Exercice 235 (X)

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ peut-elle s'écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 236 (X)

Soit $d \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $\delta_1, \delta_2 \geq 0$ avec $\delta_1 \neq \delta_2$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$. On suppose que $\forall i \neq j$, $\|x_i - x_j\| \in \{\delta_1, \delta_2\}$. Montrer que

$$n \leq \frac{(d+1)(d+5)}{2}.$$

Indication. Montrer que les

$$f_i : y \longmapsto \left(\|y - x_i\|^2 - \delta_1^2\right)\left(\|y - x_i\|^2 - \delta_2^2\right)$$

sont linéairement indépendantes.

Exercice 237 (X)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue non nulle. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$,

$$t \longmapsto f(t)e^{xt}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, et on pose

$$L(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{xt}\, dt.$$

1. Montrer que L est développable en série entière en 0 sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$.
2. Montrer que $\ln L$ est convexe.

Exercice 238 (X)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

1. Soit $h_1 : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$h_1(f) = \sum_{\substack{p/q \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ p \wedge q = 1}} f\left(\frac{p}{q}\right) \frac{1}{q^3}.$$

   Montrer que h_1 est bien définie et continue.
2. Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et $h_2 : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$h_2(f) = \sup_{t \in [0,1]} g(f(t)).$$

   Déterminer les points de continuité de h_2.

Exercice 239 (X)

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$$

   admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ que l'on note a_n.
2. Montrer que $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite ℓ à déterminer. Donner un équivalent de $a_n - \ell$.

Exercice 240 (X)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-périodique. On définit :

$$\forall S \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M_n(f, S) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(S_k).$$

1. Montrer que la suite $(M_n(f, S))$ converge pour toute suite S si et seulement si f est constante.
2. On dit qu'une suite réelle (u_n) est équirépartie modulo 1 lorsque

$$\forall f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ 1-périodique}, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(x)\, dx.$$

   Montrer que la suite $(\sqrt{n})$ est équirépartie modulo 1.

Exercice 241 (X)

Calculer la somme de la série de terme général $n^2 2^{-(n+1)}$.

Exercice 242 (X)

Précisez la nature de la série

$$\sum \sin(n!\, \pi e).$$

Exercice 243 (X)

Déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}.$$

Exercice 244 (X)

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact et E l'ensemble des fonctions φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ bornées par 1. Déterminer

$$\sup \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi' ;\ \varphi \in E \right\}.$$

Exercice 245 (X)

Nature de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{-x} + e^{2x}|\sin x|}\, dx\,?$$

Exercice 246 (X)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable et lipschitzienne. Peut-il exister un réel x non nul tel que la série de terme général $f(nx)$ diverge ?

Exercice 247 (X)

1. Soit (f_n) une suite de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ convergeant uniformément vers une fonction f sur $[0,1]$. On suppose que, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$,
$$\int_0^1 f_n' g \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
Que dire de f ?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Exercice 248 (X)

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - (1-e^{-n})^x\right) \sim \ln(x)$$

quand $x \to +\infty$.

Exercice 249 (X)

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = n\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\, dt.$$

Exercice 250 (X)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer espérance et variance du nombre de points fixes d'une permutation de $[\![1,n]\!]$.

Exercice 251 (X)

Soit $r \in]0,\pi[$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_{-r}^{r} \frac{\sin(nt)}{\sin t}\, dt.$$

Exercice 252 (X)

Déterminer un équivalent en 1^- de

$$x \mapsto \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}}\, dt.$$

Exercice 253 (X)

Calculer

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixt}}{1+t^2}\, dt.$$

Exercice 254 (X)

Soit $t > 0$. Pour $p \in \mathbb{R}$, on pose

$$F_c(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\cos(px^2)\, dx,$$

$$F_s(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\sin(px^2)\, dx$$

et $Z = F_c + iF_s$.

1. Montrer que Z est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation différentielle du premier ordre satisfaite par Z.
3. En déduire F_c et F_s.

Exercice 255 (Lyon)

On note d_n le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$d_n = O(n^\varepsilon)$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 256 (Ulm)

Soit A un anneau tel que tout élément $a \in A$ est nilpotent ou idempotent, c'est-à-dire tel que $a^2 = a$.

1. Montrer que tout élément de A est idempotent.
2. Montrer que A est commutatif.
3. On suppose que A est fini. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Exercice 257 (X)

On munit $\mathfrak{S}_n$ de la loi uniforme et on considère X_n la variable aléatoire qui associe à une permutation le nombre d'orbites de cette permutation.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.
2. Déterminer la fonction génératrice de X_n.
3. En déduire des équivalents de $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ quand $n \to +\infty$.
4. Comment peut-on déterminer la loi de X_n ?

Exercice 258 (X)

Soit s un réel > 1. On munit $\mathbb{N}^*$ de la probabilité $\mathbb{P}_s$ définie par

$$\mathbb{P}_s(\{n\}) = \frac{1}{n^s \zeta(s)}$$

pour tout $n \geq 1$. On note par ailleurs $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout $p \in \mathcal{P}$ on note X_p la variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $X_p(n) = 1$ si p divise n, et 0 sinon.

1. Montrer que les variables aléatoires X_p sont mutuellement indépendantes.
2. En déduire que
$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$
3. Pour $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_p(n)$ la plus grande puissance de p qui divise n. Déterminer la loi de v_p et étudier l'indépendance mutuelle des variables aléatoires v_p.

Exercice 259 (X)

Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique ?

Exercice 260 (Lyon)

Soit (u_n) définie par $u_0 = 4$, $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+4} = u_n + u_{n+1}.$$

Montrer que, pour tout nombre premier p, p divise u_p.

Exercice 261 (Lyon)

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le signe de

$$\det(A^k + B^k).$$

Exercice 262 (ULSR)

Soient $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

de rayon de convergence égal à $+\infty$.

1. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, justifier la définition de
$$f^*(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k M^k.$$
2. Montrer que f^* est continue.
3. On suppose que f est surjective. Montrer que f^* induit une surjection de l'ensemble des matrices diagonalisables sur lui-même.
4. On suppose que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \lambda$ et $f'(z) \neq 0$. Montrer que f^* est une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur lui-même.

Exercice 263 (Ulm)

Déterminer l'ensemble des symétries linéaires sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui fixent un hyperplan et stabilisent l'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 264 (Ulm)

Montrer que la fonction $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(e^S)$ est convexe.

Exercice 265 (Ulm)

Soit $H = (H_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tous $i \neq j$, $H_{i,j} \leq 0$. Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on dit que i et j sont connectés s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $k_1, \ldots, k_m \in [\![1,n]\!]$ tels que $k_1 = i$, $k_m = j$ et, pour tout $\ell \in [\![1, m-1]\!]$, $H_{k_\ell, k_{\ell+1}} \neq 0$.
Montrer que i et j sont connectés si et seulement si $H^{-1}_{i,j} > 0$, où $H^{-1}_{i,j}$ est le coefficient d'indice (i,j) de H^{-1}.

Exercice 266 (Lyon)

1. Pour quels réels s la somme
$$\sum_{\substack{n,m\in\mathbb{N}^*\\ n\neq m}} \frac{|n-m|^s}{nm(n^2-m^2)^2}$$
est-elle finie ?
2. Pour $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$, on note $|n| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$.
Pour quels réels s la somme
$$\sum_{\substack{(n,m)\in(\mathbb{Z}^2\setminus\{0\})^2\\ n\neq m}} \frac{\big||n|-|m|\big|^s}{|n||m|\Big(1+\big(|n|-|m|\big)^2\Big)}$$
est-elle finie ?

Exercice 267 (ULSR)

On note S l'ensemble des suites croissantes à termes dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

1. Pour $a \in S$, montrer que
$$\varphi(a) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$$
appartient à $]0,1]$.
2. Montrer que φ définit une bijection de S sur $]0,1]$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in S$ pour que $\varphi(a) \in \mathbb{Q}$.

Exercice 268 (Ulm)

Trouver les $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que
$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$

Exercice 269 (SR)

Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on pose
$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

1. Calculer $B_n(u_1)$ et $B_n(u_2)$ où $u_n : x \mapsto x^n$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$,
$$\sum_{k=0}^{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}.$$
3. En déduire que si f est M-lipschitzienne, alors
$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}$$
pour tout x.

Exercice 270 (Lyon)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :
- f est croissante, à valeurs dans $[0,1]$, f est continue à droite,
- $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$,
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists b_k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)^k = f(x+b_k)$.

Exercice 271 (X)

Soient A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note
$$k = \dim\ker(AB).$$
Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension de $\ker(BA)$?

Exercice 272 (Ulm)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(P_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ et $(Q_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ deux familles de polynômes réels, f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} P_k(x) e^{Q_k(x)}.$$

Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors f ne possède qu'un nombre fini de zéros.

Exercice 273 (Lyon)

Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ et tout $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \{\pm 1\}^{n^2}$, il existe $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ dans $\{\pm 1\}^n$ tels que

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} x_i y_j \geq C n^{3/2}.$$

Exercice 274 (Ulm)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ un ensemble de cardinal n. Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur S_n. Si $i, j \in [\![1, n]\!]$, on pose $e_i \star e_j = e_{\sigma_i(j)}$. Montrer que la probabilité que $(E, \star)$ soit un groupe, sachant que $\star$ admet un neutre, tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exercice 275 (Lyon)

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n = -k) = c e^{-|k|}$$

où c est à déterminer. Déterminer la loi du rayon de convergence de la série entière aléatoire

$$\sum X_n z^n.$$

Exercice 276 (Ulm)

Soit n un entier premier > 1. Montrer que -1 est un carré modulo n si et seulement si n est somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 277 (X)

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ une matrice complexe dont les valeurs propres sont de module strictement inférieur à R. Montrer que
$$\sum a_n M^n$$
converge.
2. Existe-t-il une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que, pour toute matrice M à spectre inclus dans $\overline{D(0,R)}$ et admettant une valeur propre de module R, la série
$$\sum a_n M^n$$
diverge ?
3. Existe-t-il une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que, pour toute matrice M à spectre inclus dans $\overline{D(0,R)}$ et admettant une valeur propre de module R, la série
$$\sum a_n M^n$$
converge ?
4. Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose
$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^n.$$
Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\chi_M = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, où les λ_i sont distincts et de module $< R$ et les α_i dans $\mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer l'existence de $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que
   $$\forall i \in [\![1, r]\!], \quad \forall k \in [\![0, \alpha_i - 1]\!], \quad f^{(k)}(\lambda_i) = P^{(k)}(\lambda_i).$$
   (b) On suppose que M est diagonalisable. Montrer que $f(M) = P(M)$.
   (c) Est-ce toujours le cas si on ne suppose plus M diagonalisable ?

Exercice 278 (Ulm)

1. Calculer
$$\sum_{d|n} \varphi(d)$$
où φ est l'indicatrice d'Euler.
2. Calculer
$$\sum_{d|n} \mu(d)$$
où μ est la fonction de Möbius définie par $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$, $\mu(p^k) = 0$ pour $k \geq 2$ si p est un nombre premier et $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$ si $n \wedge m = 1$.
On pose
$$F : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \left|\left\{\frac{p}{q} \in [0,1]\ ;\ q \leq x\right\}\right|.$$
3. Montrer que
$$F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x \ln x).$$

Exercice 279 (Ulm)

Soient p, q deux nombres premiers distincts. On note $v_p(n)$ la valuation p-adique d'un entier n. On pose, pour $m \in \mathbb{N}^*$,
$$N(m) = (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m).$$
Trouver une constante $c > 0$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,
$$v_p(N(m)) \leq cm\ln(m).$$

Exercice 280 (ULSR)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition $(1\ 2)$ et le cycle $(1\ 2\ \cdots\ n)$ engendrent le groupe symétrique S_n.
2. La transposition $(1\ 3)$ et le cycle $(1\ 2\ 3\ 4)$ engendrent-ils S_4 ?
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq a < b \leq n$ tels que $\tau = (a\ b)$ et $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ n)$ engendrent S_n. Montrer que $b - a$ et n sont premiers entre eux.
4. Montrer la réciproque de la propriété précédente.

Exercice 281 (ULSR)

Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G, on pose
$$X^{-1} = \{x^{-1},\ x \in X\} \quad \text{et} \quad XY = \{xy,\ (x,y) \in X \times Y\}.$$
Dans la suite, X désigne une partie non vide de G.

1. On suppose que $|XX| < 2|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.
2. On suppose que $|XX^{-1}| < \frac{3}{2}|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G.

Exercice 282 (Lyon)

Soient a, b, m, p des entiers naturels tels que
$$a^2 + b^2 - pm = -1.$$
On pose
$$A = \begin{pmatrix} p & a+ib \\ a-ib & m \end{pmatrix}.$$
Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}(i))$ telle que $A = B^*B$ où $B^* = \overline{B}^T$. Même question avec B dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

Exercice 283 (Ulm)

Soit G l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ de la forme
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$
où $ad - bc = 1$ et $a \equiv d \equiv 1 - c \equiv 1 \pmod 3$.
Montrer que G est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 284 (Ulm)

Peut-on écrire $]0,1[$ comme réunion dénombrable disjointe de segments d'intérieurs non vides ?

Exercice 285 (Lyon)

Soient $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de réflexion dans $\mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$. On pose

$$A' = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Calculer $\chi_{A'}(1)$ en fonction de la première colonne de M et de χ_A.

Exercice 286 (Ulm)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et telle que

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$$

si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Quels sont les points de continuité de f ?

Exercice 287 (Ulm)

Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante de limite nulle en $+\infty$ et

$$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(nx).$$

Quelle est la limite de g en 0^+ ?

Exercice 288 (X)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $p, u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que p est un projecteur et que

$$pu + up = u.$$

Montrer que $\operatorname{tr}(u) = 0$.

Exercice 289 (ULSR)

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\varepsilon(\sigma)$ sa signature et $\nu(\sigma)$ son nombre de points fixes. Calculer

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma) + 1}.$$

Exercice 290 (ULSR)

Soit $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\Lambda(n) = \ln(p)$ si $n = p^k$ avec p premier et $k \in \mathbb{N}^*$, et $\Lambda(n) = 0$ sinon. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{d \mid n} \Lambda(d) = \ln(n).$$
2. Montrer que, pour tout $s > 1$,
$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^s}.$$
3. Montrer que, pour tout $s > 1$,
$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\ln(p)}{p^s} \underset{s \to 1^+}{=} \frac{1}{s-1} + O(1).$$
4. Montrer que, pour tout $s > 1$,
$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \underset{s \to 1^+}{=} \ln\left(\frac{1}{s-1}\right) + O(1).$$

   Qu'en déduire ?

Exercice 291 (X)

Soient (a_n) et (b_n), deux suites réelles positives telles que la série de terme général b_n converge, que la série de terme général na_n diverge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1.$$

1. Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = b_n + \sum_{k=0}^{n} u_k a_{n-k}.$$
2. Montrer que (u_n) est bornée.
3. Montrer que, si (u_n) converge, alors sa limite est 0.

Exercice 292 (X)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, strictement croissante et bijective. Montrer que les séries

$$\sum \frac{1}{f(n)} \quad \text{et} \quad \sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$$

sont de même nature.

Exercice 293 (X)

Soit

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{x^2/2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt.$$

1. Montrer que
$$f(x) < \frac{1}{x}$$
pour tout $x > 0$.
2. Montrer que
$$f(x) > \frac{\sqrt{x^2+4} - x}{2}$$
pour tout $x > 0$.
3. Donner un développement limité à quatre termes de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 294 (X)

Soit $P = a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{Z}[X]$ avec a_1 impair.

1. Montrer l'existence d'une suite réelle $(b_k)_{k\geq 0}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\exp(P(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k.$$
2. Montrer que les b_k sont tous non nuls.

Exercice 295 (X)

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}$. En combien de points de $\mathbb{R}$ la dérivée n-ième de f s'annule-t-elle ?

Exercice 296 (Ulm)

Déterminer les inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[X]$.

Exercice 297 (Ulm)

Si A est un anneau commutatif et I un idéal de A, on dit que I est premier si $A \setminus I$ est stable par multiplication, que I est maximal si le seul idéal de A contenant strictement I est A.

1. Montrer que tout idéal maximal est premier.
2. Soient $n \geq 3$ un nombre premier, $A = \mathbb{Z}[e^{2i\pi/n}]$. Montrer que tout idéal premier de A est maximal.

Exercice 298 (ULSR)

Soit $d \in \mathbb{N}^*$, et $0 < a_1 < \cdots < a_d$ des entiers.
On pose

$$P_n = \prod_{k=1}^{d} (X - n a_k) - 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, pour n assez grand, P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $n \geq 1$ pour lequel P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, et tout $k \in [\![1, d]\!]$, on note $x_n^{(k)}$ la k-ième racine de P_n dans l'ordre croissant. Déterminer, pour n'importe quel $k \in [\![1, d]\!]$, un équivalent de $x_n^{(k)}$ lorsque $n \to +\infty$.
3. Montrer que P_n est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 299 (ULSR)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ impair, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $A + iB$ admet un vecteur propre réel.

Exercice 300 (X)

Déterminer les couples (A, B) d'éléments de $\mathbb{Z}[X]$ tels que la suite

$$(A(n) \wedge B(n))_{n\geq 1}$$

soit périodique.

Exercice 301 (ULSR)

1. Quelle est la dimension maximale d'une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par une matrice nilpotente ?
2. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_m$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent deux à deux, $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par $A_1, \ldots, A_m$. Montrer que la dimension de $\mathcal{A}$ est majorée par

$$n\left(n - \min\{\mathrm{rg}(A_i)\ ;\ 1 \leq i \leq m\}\right).$$

Exercice 302 (Ulm)

1. Montrer que si n est impair alors $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ne contient aucune matrice inversible.
2. On suppose n pair. On note

$$I = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2\ :\ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Montrer qu'il existe une fonction polynomiale $P : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\det(A) = P^2\left((a_{i,j})_{(i,j)\in I}\right)$$

pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 303 (Ulm)

Soit E un espace euclidien, G un sous-groupe fini d'ordre $n > 1$ de $\mathcal{O}(E)$, et v un vecteur unitaire de E tel que

$$\|g(v) - v\|^2 < \frac{2n}{n-1}$$

pour tout $g \in G$. Montrer qu'il existe un vecteur $w \in E \setminus \{0\}$ tel que $g(w) = w$ pour tout $g \in G$.

Exercice 304 (Lyon)

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ strictement décroissante telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)}\, dx = +\infty.$$

Exercice 305 (Ulm)

Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto 2x - \dfrac{1}{x}$. On pose

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}([-1,1]).$$

Montrer que K est un compact d'intérieur vide, sans point isolé, et que $f(K) = K$.

Exercice 306 (X)

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ telle qu'il existe $d > 0$ tel que

$$F(n) = |A \cap [\![1, n]\!]| \sim n^d.$$

On pose

$$Q = \{a/b,\ (a,b) \in A^2\}.$$

1. Montrer que Q est dense dans $\mathbb{R}_+$.
2. On suppose que $d = 1$. Montrer que $Q = \mathbb{Q}^{+*}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A \subset \mathbb{N}^*$ telle que $Q \neq \mathbb{Q}^{+*}$ et

$$\frac{F(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} d \geq 1 - \varepsilon.$$

Exercice 307 (X)

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{d-1})$ une liste de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. On note p_d la probabilité pour que le polynôme

$$X^d + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i X^i + 1$$

possède une racine rationnelle. Montrer que

$$p_d \underset{d\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi d}}.$$

Exercice 308 (Ulm)

L'ensemble des permutations de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

Exercice 309 (X)

1. Soit $n \geq 3$ un entier. Montrer que l'équation $x = n\ln(x)$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on note a_n et b_n avec $a_n < b_n$.
2. Trouver une suite strictement croissante $(p_k)_{k\geq 2}$ d'entiers telle que $p_2 \geq 2$, $\sum 2^{-(p_{k+1}-p_k)}$ diverge et qu'existe $C > 0$ tel que, pour tout $k \geq 2$,
$$\sum_{j=p_k}^{p_{k+1}-1} \frac{1}{\ln(j)} \geq C.$$
3. Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Rademacher. Que dire de la convergence de
$$\sum \frac{X_n}{\ln(n)}?$$

Exercice 310 (X)

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)^2 \leq \operatorname{rg}(A) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

Exercice 311 (X)

Soient p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que

$$\operatorname{tr}((A+B)^p) \equiv \operatorname{tr}(A^p) + \operatorname{tr}(B^p)\ [p].$$

Exercice 312 (X)

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que toute combinaison linéaire de A et B soit nilpotente. Montrer que $\operatorname{tr}(A^kB) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Trouver deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\operatorname{tr}(A^kB) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et ne vérifiant pas l'hypothèse de la question précédente.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est nilpotente si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{tr}(M^k) = 0$.

Exercice 313 (X)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A_{i,i} = \lambda_i$ si $1 \leq i \leq n$, $A_{i,i+1} = 1$ si $1 \leq i \leq n-1$ et $A_{i,j} = 0$ si $j \notin \{i, i+1\}$. À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

Exercice 314 (X)

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ engendrant l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se donne une base $(g_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée d'éléments de G.

1. Montrer que la fonction $M \in G \mapsto (\operatorname{tr}(Mg_i))_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ est injective.
2. Montrer que, si l'ensemble des classes de similitude des éléments de G est fini, alors G est fini.

Exercice 315 (X)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2n+1} \in \mathcal{A}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout (i,j) tel que $j > i$, on ait $a_{i,j} = 1$ si $j - i \leq n$ et $a_{i,j} = -1$ sinon.

1. Montrer que $\operatorname{rg} A = 2n$.
2. On note B_n l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ sans point fixe. Montrer que B_n est de cardinal impair.
3. Calculer $|B_n|$. Déterminer le comportement asymptotique de $(|B_n|)_{n\geq 1}$.

Exercice 316 (X)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = \max\{\operatorname{tr}(OM)\ ;\ O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}.$$

1. Justifier la définition de φ.
2. Montrer que φ est continue.
3. Calculer $\varphi(M)$ lorsque $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
4. Montrer que, si φ atteint son maximum en O, alors $OM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 317 (Ulm)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g(n)$ le maximum des ordres des éléments de $\mathfrak{S}_n$. Pour quels n l'entier $g(n)$ est-il impair ?

Exercice 318 (Ulm)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n)$ désigne le nombre de diviseurs premiers de n comptés avec multiplicité ; par exemple, $g(5^2) = 2$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{d|n} (-1)^{g(d)}.$$

Exercice 319 (X)

Soient $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $M = P^{-1}DP$. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on note M_j la sous-matrice de M obtenue en retirant les j-èmes ligne et colonne, et $\lambda_1(M_j), \dots, \lambda_{n-1}(M_j)$ ses valeurs propres. Montrer que pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$,

$$p_{i,j}^2 \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j\}} (\lambda_j - \lambda_k) = \prod_{\ell=1}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_\ell(M_i)).$$

Exercice 320 (X)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que, pour toute $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum y_n^2$ converge, la série $\sum x_n y_n$ converge. Montrer que $\sum x_n^2$ converge.
Ind. Considérer, lorsqu'il est défini,

$$y_n = \frac{x_n}{x_0^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Exercice 321 (X)

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Rademacher mutuellement indépendantes. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{2n} X_k\right|\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{4n}{\pi}}.$$

Exercice 322 (Lyon)

Montrer que, si m et n sont dans $\mathbb{N}^*$, n divise $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m^{k\wedge n}$.

Exercice 323 (Lyon)

1. Soit α un nombre réel irrationnel. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe (p,q) de $\mathbb{Z} \times [\![1,n]\!]$ tel que
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qn}.$$
2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que d n'est pas un carré parfait. Montrer que l'équation $a^2 - db^2 = 1$ possède une solution $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ telle que $b \neq 0$.

Exercice 324 (SR)

On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \ ; \ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, soit $N(z) = |z|^2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Déterminer ses éléments inversibles.
2. Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$ et $x \neq 0$, montrer qu'il existe $(q,r) \in \mathbb{Z}[i]^2$ tel que $y = qx + r$ et $N(r) < N(x)$. En déduire que les idéaux de $\mathbb{Z}[i]$ sont principaux.
3. Pour n et k dans $\mathbb{N}^*$, soit
$$s_{n,k} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}[i] \\ N(x)=n}} x^k.$$
Montrer que $s_{n,k} \in \mathbb{Z}[i]$.

Exercice 325 (Ulm)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $g(n)$ le maximum des ordres des éléments de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{g(n)}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 326 (Ulm)

Les sous-groupes stricts de $(\mathbb{Q}, +)$ sont-ils monogènes ?

Exercice 327 (Lyon)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que soit A a une valeur propre de module strictement supérieur à 1, soit il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k - I_n$ est nilpotente.

Exercice 328 (Ulm)

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_m$ des éléments idempotents de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire vérifiant $A_k A_k = A_k$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{m} (n - \operatorname{rg}(A_i)) \geq \operatorname{rg}\left(I_n - \prod_{i=1}^{m} A_i\right).$$

Exercice 329 (ULSR)

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que

$$E = \{P(f)(x)\ ;\ P \in \mathbb{C}[X]\}.$$

1. On suppose que f est cyclique. Montrer que tout endomorphisme induit par f est cyclique et que l'ensemble des sous-espaces de E stables par f est fini.
2. On suppose que l'ensemble des sous-espaces de E stables par f est fini. Montrer que f est cyclique.

Exercice 330 (Ulm)

Soient $n \geq 2$ un entier, A et B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, X et Y dans $\mathbb{C}^n$.

1. On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k X = B^k Y$. Montrer que $X = Y$.
2. Déterminer le plus petit N de $\mathbb{N}^*$ tel que, pour toutes matrices $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et tous vecteurs X, Y de $\mathbb{C}^n$, la condition $\forall k \in \{1, \dots, N\},\ A^k X = B^k Y$ implique $X = Y$.

Exercice 331 (Ulm)

Soit $(p_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $p_0 = p_1 = 1$ et, pour $n \geq 2$,

$$p_n = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} \cdots \int_0^{1-x_{n-1}} dx_n\, dx_{n-1} \cdots \right) dx_1.$$

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n (\pi/6)^n.$$

Exercice 332 (Ulm)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P = \det(XI_n - A)$.
On pose

$$P = X^n + c_1 X^{n-1} + \cdots + c_n = (X - z_1) \cdots (X - z_n).$$

1. Calculer de deux façons
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P(x)}{x - z_k}$$
pour $x \in \mathbb{C}$ avec $|x| > \max\limits_{1 \leq i \leq n} |z_i|$.
2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer :
$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \begin{vmatrix} \operatorname{tr}(A) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \operatorname{tr}(A^2) & \operatorname{tr}(A) & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \operatorname{tr}(A^{k-1}) & \ddots & \ddots & \operatorname{tr}(A) & k-1 \\ \operatorname{tr}(A^k) & \operatorname{tr}(A^{k-1}) & \cdots & \operatorname{tr}(A^2) & \operatorname{tr}(A) \end{vmatrix}.$$

Exercice 333 (Ulm)

Soit f une fonction continue et de carré intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite en $+\infty$ de

$$x \mapsto e^{-x} \int_0^x f(t) e^t\, dt.$$

Exercice 334 (Lyon)

Soit $k \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n \geq k+1}$ une suite réelle telle que $\sum |a_n|$ converge et, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n \cos(nx).$$

Minorer le nombre de zéros de f sur $[-\pi, \pi[$.

Exercice 335 (X)

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que la classe de similitude de M est connexe par arcs si et seulement si M est diagonalisable.

Exercice 336 (Ulm)

Déterminer la limite en $+\infty$ de

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^k}\right)^{1/x}.$$

Exercice 337 (Ulm)

Déterminer la limite de

$$\frac{1}{A}\int_1^A A^{1/x}\,dx$$

lorsque A tend vers $+\infty$.

Exercice 338 (Ulm)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. Soit $\lambda \in]0,1[$.

1. Montrer que, pour tout réel t, l'ensemble

$$A_t = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n X_n \leq t\right)$$

est un événement.

2. Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(A_t)$ est continue.

Exercice 339 (Ulm)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}(X_1 \geq x) > 0$.
Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

i) pour tout réel $\alpha > 1$, on a

$$\mathbb{P}(X_1 \geq \alpha x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\mathbb{P}(X_1 \geq x));$$

ii) il existe une suite $(b_n)_{n\geq 1}$ divergeant vers $+\infty$ et telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{b_n}\max_{1\leq i\leq n} X_i - 1\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 340 (X)

Soit G un groupe fini. Pour $x \in G$, on note $\overline{x}$ la classe de conjugaison de x :

$$\overline{x} = \{gxg^{-1}\ ;\ g \in G\};$$

on dit que x est ambivalent si $x^{-1} \in \overline{x}$.

1. Montrer que si une classe de conjugaison contient un élément ambivalent, alors tous ses éléments le sont.
2. Pour $x \in G$, soit $\rho(x)$ le nombre de $g \in G$ tels que $g^2 = x$. Montrer que

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} \rho(x)^2$$

est le nombre de classes de conjugaison ambivalentes de G.

Exercice 341 (X)

Soit P un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinctes et tel que P'' divise P.

1. Montrer que P est à racines simples.
2. Montrer que les racines de P sont alignées.

Exercice 342 (X)

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ des nombres complexes de module au plus 1,

$$P = \prod_{i=1}^{d}(X - \lambda_i).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$f(n) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n.$$

On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$.

1. Montrer que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$.
2. Montrer que f est périodique à partir d'un certain rang.
3. Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, λ_i est nul ou racine de l'unité.

Exercice 343 (X)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et σ dans $\mathfrak{S}_n$, soit P_σ la matrice de permutation associée à σ. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$T_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \det(I_n + P_\sigma).$$

1. Calculer
$$\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1+\omega).$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et σ dans $\mathfrak{S}_n$, calculer $\det(I_n + P_\sigma)$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+1} = 2T_n + n(n-1)T_{n-1}$.
4. Donner une formule simple pour T_n.

Exercice 344 (X)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer les polynômes minimaux de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 345 (X)

Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels qu'existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $X^3 + 2X + 2$. Même question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

Exercice 346 (X)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$.

1. Montrer que pour tout $u \in \mathrm{GL}(E)$ il existe un unique polynôme $I_u \in \mathbb{C}[X]$ de degré minimal tel que $u^{-1} = I_u(u)$, et justifier que $\deg I_u < n$.
2. Étudier la continuité de $u \in \mathrm{GL}(E) \mapsto I_u \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Exercice 347 (X)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une famille $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On note A l'événement : la matrice $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible. Montrer que

$$\mathbb{P}(A) \geq \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right).$$

Exercice 348 (X)

Pour $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x^k}.$$

1. Montrer que, si $x \in]-1,1[$, $(P_n(x))_{n \geq 1}$ converge. On note $P(x)$ la limite.
2. Montrer que, pour $x \in]-1,1[$,
$$P(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n,$$
où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n est le nombre de façons d'écrire n comme somme d'éléments de $\mathbb{N}^*$ sans tenir compte de l'ordre.
3. Montrer que, lorsque $x \to 1^-$,
$$P(x) = \exp\left(\frac{\pi^2}{6(1-x)}(1+o(1))\right).$$
4. Montrer que, lorsque $n \to +\infty$,
$$p_n \leq \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}(1+o(1))\right).$$

Exercice 349 (X)

Soient φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $Z = \varphi^{-1}\{0\}$.

1. Soit $z \in Z$ tel que $\nabla\varphi(z) \neq 0$. Que dire de Z au voisinage de z ?
2. On suppose que Z compacte, non vide, et que $\nabla\varphi$ ne s'annule pas sur Z. Quelle est l'image de
$$z \in Z \mapsto \frac{\nabla\varphi(z)}{\|\nabla\varphi(z)\|}?$$

Exercice 350 (Lyon)

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{Z},\ (an+b) \wedge (cn+d) = 1\}$$

soit infini.

Exercice 351 (X)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, M une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, N une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{0, 1\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(M \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})).$$

Exercice 352 (X)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!} = \frac{1}{n!}.$$
2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On pose
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$
Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n \geq x)\, dx = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}.$$

Exercice 353 (Ulm)

Une partition multiplicative d'un entier $n > 1$ est la donnée d'une famille $1 < d_1 \leq \cdots \leq d_r$ d'entiers tels que

$$n = \prod_{i=1}^{r} d_i.$$

On note $f(n)$ le nombre de partitions multiplicatives de n. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $f(n) \leq n^{1+\varepsilon}$ pour n assez grand.

Exercice 354 (Ulm)

Existe-t-il deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, non presque sûrement constantes, indépendantes et telles que XY suive une loi de Poisson ?

Exercice 355 (Lyon)

Soit $p \geq 5$ un nombre premier. Quand n n'est pas un multiple de p, on note n^* un entier tel que $nn^* \equiv 1\ [p^2]$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^* \equiv 0\ [p^2].$$

Exercice 356 (Lyon)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le cardinal de l'ensemble des $d \in \mathbb{N}^*$ tels que d divise n et

$$\sqrt{n/2} \leq d < \sqrt{2n}.$$

1. La suite (a_n) est-elle convergente ?
2. La suite (a_n) est-elle bornée ?

Exercice 357 (Lyon)

Soit A un anneau commutatif fini possédant $n \geq 2$ diviseurs de 0. Que peut-on dire du cardinal de A ?

Exercice 358 (ULSR)

1. Soit $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose que G^k est semblable à G pour tout entier $k \geq 1$. Montrer que $G - I_n$ est nilpotente.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On pose $M = I_n + A$. Montrer que M^k est semblable à M pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 359 (Lyon)

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si, pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^t XAX > 0$.

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à spectre inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable à spectre inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soient A, B, C dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que ABC est symétrique. Montrer que le spectre de ABC est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 360 (Lyon)

Soit $q : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 - z^2$. On pose

$$G = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3),\ q \circ f = q\}.$$

1. Montrer que G est un groupe.
2. Déterminer les composantes connexes par arcs de G.

Exercice 361 (Lyon)

On veut montrer que $\mathbb{R}$ ne peut s'écrire comme union dénombrable de segments disjoints. On suppose par l'absurde que $\mathbb{R}$ est l'union disjointe des $[a_n, b_n]$, pour $n \in \mathbb{N}$, où $a_n \leq b_n$. On pose

$$E = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

1. Montrer que E est fermé.
2. Montrer que E ne possède aucun point isolé.
3. Conclure.

Exercice 362 (Ulm)

On note $\{x\}$ la partie fractionnaire du réel x. Que dire des valeurs d'adhérence de $(\{\ln(n!)\})_{n\geq 1}$?

Exercice 363 (Ulm)

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on considère deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n suivant la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$, et on considère l'événement

$$A_n = \{\omega\ ;\ \forall j \in [\![1,n]\!],\ \exists \sigma \in \langle X_n(\omega), Y_n(\omega)\rangle,\ \sigma(1) = j\}$$

(où $\langle X_n(\omega), Y_n(\omega)\rangle$ désigne le sous-groupe engendré par les éléments $X_n(\omega)$ et $Y_n(\omega)$), et on note p_n sa probabilité. Montrer que p_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 364 (ULSR)

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant une loi de Poisson, la variable aléatoire $f(X)$ suive une loi de Poisson.

Exercice 365 (SR)

Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{N}^*$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le dispositif aléatoire suivant : dans n urnes sont disposées, en toute indépendance et équiprobabilité, r_n boules ; la variable aléatoire N_n indique le nombre d'urnes vides.

1. On suppose que $r_n/n \to c \in \mathbb{R}_+$. Établir l'existence de $\ell \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{N_n}{n} - \ell\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. On suppose que $ne^{-r_n/n} \to \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ lorsque $n \to +\infty$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de $(\mathbb{P}(N_n = k))_{n\geq 1}$.

Exercice 366 (Ulm)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace probabilisé fini. On munit E^n de la loi produit. Soient $\varepsilon > 0$ et

$$A_n = \inf\{|A|\ ;\ A \subset E^n \text{ et } \mathbb{P}(A) > 1 - \varepsilon\}.$$

Montrer que

$$\left(\frac{\ln(A_n)}{n}\right)_{n\geq 1}$$

converge vers une limite qui ne dépend pas de ε.

Exercice 367 (Ulm)

Soit $\|\ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\ \|_{op}$ la norme d'opérateur associée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(A_i)_{i\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à support fini, indépendantes, identiquement distribuées, à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la suite de terme général

$$\frac{1}{m} \ln\left(\|A_1 \cdots A_m\|_{op}\right)$$

converge en probabilité vers un réel c.

Exercice 368 (Lyon)

Soient $p > 3$ et $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ la réduction canonique modulo p. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\varphi_{|G}$ est injective.

Exercice 369 (Ulm)

Soient $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_k = j) = e^{-\beta k j}(1 - e^{-\beta k}).$$

On pose

$$N = \sum_{k=1}^{+\infty} k X_k.$$

1. Montrer que N est presque sûrement fini.
2. Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(N)$ lorsque $\beta \to 0^+$.
3. Trouver un équivalent de $\mathbb{V}(N)$ lorsque $\beta \to 0^+$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $p(n)$ le nombre de partitions de l'entier n. Exprimer la loi de N à l'aide de $p(n)$.
5. En déduire que
$$\overline{\lim} \left(\frac{\ln(p(n))}{\pi\sqrt{2n/3}} \right) \leq 1.$$
6. En utilisant la croissance de $n \mapsto p(n)$, montrer que
$$\underline{\lim} \left(\frac{\ln(p(n))}{\pi\sqrt{2n/3}} \right) \geq 1.$$

Exercice 370 (X)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $T_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM - MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si A est nilpotente alors T_A est nilpotent.
2. Montrer que si A possède une unique valeur propre alors T_A est nilpotent.
3. Montrer que si A possède plusieurs valeurs propres alors T_A n'est pas nilpotent.
4. Que peut-on dire de T_A si A est diagonalisable ?
5. Quel est le rang maximal de T_A ?
6. Montrer que s'il existe $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ tel que $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \geq 2$, alors T_A n'est pas de rang maximal.

Exercice 371 (X)

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < b < a$. Montrer
$$1 \leq \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \leq \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}} \leq \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < b < a$. On pose
$$I(a,b) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}.$$
   i) Montrer que
   $$I(a,b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$
   ii) En déduire une méthode de calcul approché de $I(a, b)$.

Exercice 372 (X)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n (resp. B_n) est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont indépendants et suivent une loi uniforme sur $\{0, 1\}$ (resp. $\{-1, 1\}$). On note

$$p_n = \mathbb{P}(A_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad q_n = \mathbb{P}(B_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})).$$

1. Montrer que $q_{n+1} = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$p_n \geq \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right).$$

Exercice 373 (Lyon)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Dénombrer les $\theta \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma \circ \theta = \theta \circ \sigma$.
2. Montrer que, si $n \neq 6$, un automorphisme du groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ envoie une transposition quelconque sur une transposition.
3. Que peut-on en déduire sur les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ si $n \neq 6$?

Exercice 374 (Ulm)

Soit $A \subset \mathbb{N}^*$ tel que $\displaystyle\sum_{n\in A} \frac{1}{n} < +\infty$. Montrer que $\operatorname{Card}\big(A \cap [\![1,n]\!]\big) = o(n)$.

Exercice 375 (ULSR)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(\pi P(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ est fini. Montrer que $P - P(0)$ est à coefficients rationnels.

Exercice 376 (Lyon)

Soit q un réel tel que

$$1 < q \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Soit x un réel tel que

$$1 < x < \frac{1}{q-1}.$$

Montrer qu'il existe une infinité de suites $\varepsilon \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ telles que

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_i q^{-i}.$$

Exercice 377 (Ulm)

Soient (a_n) et (b_n) deux suites sommables à valeurs non nulles telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^k = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^k.$$

Montrer que les suites sont égales à permutation près.

Exercice 378 (Ulm)

Une fonction continue sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est-elle bornée ?

Exercice 379 (Lyon)

Caractériser les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour toute série convergente $\sum a_n$ à termes réels, la série $\sum f(a_n)$ soit convergente.

Exercice 380 (Ulm)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note

$$R_n = \operatorname{card}\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{E}(R_n) = o(n)$.
2. On suppose que les X_i admettent une espérance. Montrer que $\mathbb{E}(R_n) = o(\sqrt{n})$.

Exercice 381 (Ulm)

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes strictement positives, toutes d'espérance 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} X_k.$$

Montrer que $(P_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilités vers 0 si et seulement si

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\sqrt{X_k}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 382 (ULSR)

1. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $0 < \mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X > 0) \geq \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne un réel $p_n \in]0,1[$. On considère le graphe aléatoire non orienté Γ_n, de sommets $1, 2, \dots, n$, tel que, pour tout (i,j) tel que $1 \leq i < j \leq n$, si $X_{i,j}$ est la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque (i,j) est une arête de Γ_n et 0 sinon, les $X_{i,j}$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n. On note alors Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de sommets isolés (reliés à aucun autre).

1. On suppose que $\dfrac{\ln n}{n} = o(p_n)$. Montrer que $\mathbb{P}(Y_n > 0) \to 0$.
2. On suppose cette fois que $p_n = o(\ln n / n)$. Montrer que $\mathbb{P}(Y_n > 0) \to 1$.

Exercice 383 (X)

Soient f dans $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}.$$

1. Pour x dans $\mathbb{R}$, montrer :

$$\int_0^x f(t)e^{-t}\,dt = F(0) - F(x)e^{-x}.$$

2. Si f est dans $\mathbb{Z}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$, montrer

$$\frac{f^{(k)}}{k!} \in \mathbb{Z}[X].$$

3. Soient m et p dans $\mathbb{N}^*$,

$$f_{m,p} = \frac{X^{p-1}}{(p-1)!}\prod_{k=1}^{m}(X-k)^p.$$

   Montrer que les $f_{m,p}(j)$, pour $j \in \{0,\dots,m\}$, sont des entiers.

4. En utilisant les questions précédentes et en raisonnant par l'absurde, montrer que e est un nombre transcendant.

Exercice 384 (ULSR)

Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bornée, continue avec $g(0) > 0$. On pose

$$F : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} g(t)e^{-tx}\,dt.$$

Montrer que si g change au plus N fois de signe, alors F a au plus N zéros.

Exercice 385 (Ulm)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ définie par : $f_0 = f$ et

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)\,dt$$

pour $n \geq 0$ et $x \in]0,1]$. Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 386 (ULSR)

Soient $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^1([1,+\infty[,\mathbb{R}_+^*)$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f' = a$. On considère $u \in \mathcal{C}^2([1,+\infty[,\mathbb{R})$ bornée et solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' - \frac{f'}{f}y' - \frac{y}{f^2} = 0.$$

1. Montrer que $u'(x) = O(1/x)$ quand $x \to +\infty$.
2. Montrer que $u(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 387 (X)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mu(n)$ comme 0 si n est divisible par le carré d'un nombre premier, et sinon par $(-1)^k$ où k est le nombre de diviseurs premiers de n. On fixe $s \in]1,+\infty[$, et on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}.$$

On admet que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}.$$

2. On rappelle que φ désigne la fonction indicatrice d'Euler. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}.$$

3. Montrer que

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi(k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{\pi^2}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et on note p_n la probabilité de l'événement $(X_n \wedge Y_n = 1)$. Montrer que la suite $(p_n)_n$ converge et préciser sa limite.

Exercice 388 (Lyon)

Déterminer les matrices d'ordre fini dans $GL_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 389 (SR)

Soient p et q deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Exercice 390 (ULSR)

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$\frac{\cos(\ln n)}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\cos(\ln n)}{\ln n}.$$

Exercice 391 (Lyon)

On note $\lambda : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ telle que $\lambda(1) = 1$, $\lambda(p) = -1$ pour tout p premier, et

$$\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n).$$

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \lambda(n) \frac{x^n}{1-x^n}$$

converge. On note $N(x)$ sa somme.

2. Soit $x \in]-1,1[$. Donner une expression de $N(x)$ à l'aide des

$$\sigma_n = \sum_{d|n} \lambda(d).$$

3. Calculer σ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x)N(x).$$

Exercice 392 (X)

Calculer

$$\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} - \frac{1}{7 \times 8} + \cdots$$

Exercice 393 (Lyon)

Soient $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et

$$g : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On suppose que le rayon de convergence de g est ≥ 1.

1. On suppose que : $\forall z \in \mathbb{C}, \ |z| < 1 \Rightarrow \mathrm{Re}(g(z)) \geq 0$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |a_n| \leq 2\,\mathrm{Re}(a_0).$$

2. On suppose que : $\forall z \in \mathbb{C}, \ |z| < 1 \Rightarrow |g(z)| \leq 1$. Montrer que, pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leq 1/3$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||z|^n \leq 1.$$

Exercice 394 (ULSR)

1. Les groupes $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Z}^2,+)$ sont-ils isomorphes ?
2. Pour quels $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ les groupes $(\mathbb{Z}^m,+)$ et $(\mathbb{Z}^n,+)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 395 (ULSR)

Soit A un anneau commutatif. On note $S_n(A)$ l'ensemble des $x \in A$ pour lesquels il existe n carrés d'éléments de A dont x est la somme.

1. Montrer que $S_2(A)$ est stable par multiplication.
2. Montrer que $S_3(\mathbb{Z})$ n'est pas stable par multiplication.
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \equiv 7 \mod 8$. Montrer que $n \notin S_3(\mathbb{Z})$.

Exercice 396 (ULSR)

Soit $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{Q})$. Montrer que les dénominateurs des coefficients de A écrits sous forme irréductible sont impairs.

Exercice 397 (ULSR)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ possédant exactement k coefficients non nuls. Montrer que P a au plus $2k-1$ racines réelles distinctes et que cette majoration est optimale.

Exercice 398 (ULSR)

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients appartiennent à $\{-1,1\}$.

1. Calculer la moyenne μ_n de det sur $\mathcal{B}_n$.
2. Calculer la moyenne m_n de $\det^2$ sur $\mathcal{B}_n$.
3. Soit f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}_+$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et p_n la probabilité pour qu'une matrice de $\mathcal{B}_n$ ait un déterminant $\geq f(n)\sqrt{n!}$. Montrer que $(p_n)_n$ converge vers zéro.
4. Montrer que pour une infinité de valeurs de n on a

$$\max\{\det M,\ M \in \mathcal{B}_n\} \geq (n+1)^{(n-1)/2}.$$

Exercice 399 (X)

Soit G un groupe commutatif fini de cardinal pq, où p et q sont premiers distincts. Montrer que G possède un élément d'ordre pq.

Exercice 400 (X)

Pour x réel, on pose si possible

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{it^x}\, dt.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier la continuité de f.
3. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 401 (X)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ xf'(x) + f(x) \in [a,b]$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in [a,b]$.

Exercice 402 (X)

Soit

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2+\sqrt{n}}.$$

La fonction f est-elle continue, différentiable, de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 403 (X)

Soient $n \in \mathbb{N}$ impair et $\Phi : \mathbb{R} \to O_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi'(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 404 (X)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, dont les fonctions composantes sont notées f_i. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la jacobienne de f en x est symétrique.

(ii) Il existe $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ telle que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = f_i$$

pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$.

Exercice 405 (X)

Soit

$$\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (\operatorname{tr} M, \operatorname{tr} M^2, \dots, \operatorname{tr} M^n).$$

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que Φ est différentiable en M et calculer sa différentielle.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{rg} d\Phi(M)$ est égal au degré du polynôme minimal de M.
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 406 (Lyon)

Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n+1}$ est dite zigzaguante si

$$\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \cdots.$$

On note T_n le nombre de permutations zigzaguantes de $\mathfrak{S}_{2n+1}$. Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Exercice 407 (Lyon)

On définit dans $\mathbb{R}^n$ les opérations suivantes sur des parties quelconques E_1 et E_2, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$E_1 + E_2 = \{p_1 + p_2,\ p_1 \in E_1,\ p_2 \in E_2\},$$

$$\lambda E_1 = \{\lambda p_1,\ p_1 \in E_1\}.$$

1. On se place dans $\mathbb{R}^2$, et on considère E un polygone convexe, côtés et intérieur compris. Montrer que E admet un centre de symétrie si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, et des segments $S_1, \ldots, S_k$ tels que

$$E = S_1 + \cdots + S_k.$$

2. On se donne P et Q deux polygones symétriques de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'aire de $P + tQ$ est un polynôme en t. Quel est son degré ?
3. Donner l'énoncé équivalent du résultat de la première question en dimension supérieure. Montrer que ce résultat ne subsiste pas en dimension $n > 2$.
4. On revient à $n = 2$ et on considère plus généralement E c.p.a. A-t-on toujours l'équivalence de la première question ?

Exercice 408 (Lyon)

Soit $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$. On définit un produit scalaire sur E en prenant, pour $f, g \in E$:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(\cos\theta)g(\cos\theta)\,d\theta.$$

Soit E_n l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n, et soit Π_n le projeté orthogonal sur E_n.
Soit $f \in E$. On pose M_f l'endomorphisme de E défini par

$$M_f : E \to E, \qquad g \mapsto fg.$$

Donner un équivalent de

$$\mathrm{Tr}(\Pi_n \circ M_f)$$

quand $n \to +\infty$.

Exercice 409 (X)

Soit a, b dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2 - b^2t^{-2}}\,dt$.

Exercice 410 (X)

Soit $x \geq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\theta\right)^n\,d\theta.$$

Déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 411 (Lyon)

Soit U l'ensemble des racines de l'unité, et soit F le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$.
On pose

$$\mathcal{F} = \{f : A \subset U \to \mathbb{C} \mid U \setminus A \text{ est fini}\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un F-espace vectoriel.
2. Soit $f_k : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall u \in U, \qquad f_k(u) = o(u)^k,$$

où $o(u)$ est l'ordre de u dans U. Montrer que la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est F-libre.

Exercice 412 (Lyon)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que

$$|P(e^{i\theta})| \leq 1$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que P est soit nul, soit égal à $\pm X^n$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 413 (Lyon)

Soit $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ polynomiale, homogène de degré k, c'est-à-dire telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad P(\lambda X, \lambda Y) = \lambda^k P(X, Y),$$

dont la hessienne est de déterminant nul. Montrer qu'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tel que

$$P = L^k.$$

Exercice 414 (Lyon)

Soit
$$f : x \in [0,1] \longmapsto 4x(1-x) \in [0,1].$$
Pour $u \in [0,1]$, on définit $x_0(u) = u$ et
$$x_{n+1}(u) = f(x_n(u)).$$

1. Soit u tel que la suite $(x_n(u))_n$ converge. Montrer que $(x_n(u))_n$ est stationnaire.
2. Soit n un entier naturel. Soit k_n une variable aléatoire de loi uniforme dans $[\![0,n]\!]$. Calculer la probabilité que la suite
$$\left(x_m\left(\sin^2\left(\frac{k_n\pi}{n}\right)\right)\right)_m$$
converge, pour n grand par exemple.
3. Soit u une variable aléatoire uniforme dans $[0,1]$. Calculer la probabilité que la suite $(x_n(u))_n$ converge.

Exercice 415 (Lyon)

Déterminer la nature des séries
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\ln n)}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}.$$

Exercice 416 (Lyon)

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument.
On définit, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \cos(nx).$$
On suppose que
$$a_0 = a_1 = \cdots = a_k = 0.$$
Montrer que f s'annule en au moins $k+1$ points.

Exercice 417 (Ulm)

Donner un exemple de groupe infini non commutatif.

Exercice 418 (Ulm)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$. Soit n le degré de P et
$$Q = P + P' + \cdots + P^{(n)}.$$
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$Q(x) \geq 0.$$

Exercice 419 (Lyon)

Soit $k \geq 4$ pair. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}(z) > 0$. On pose
$$u_z = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m+nz)^k}.$$

1. Montrer que u_z est bien défini.
2. Montrer que
$$\lim_{\mathrm{Im}(z)\to+\infty} u_z = 2\zeta(k).$$

Exercice 420 (Lyon)

Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$, unitaire de degré 10, ayant au moins 8 racines dans U, au moins 2 racines dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant
$$P(0) = 1,$$
et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 421 (Lyon)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver n points non alignés dans le plan à distances mutuelles entières.
2. Peut-on en trouver une infinité ?

Exercice 422 (Ulm)

Soit $f : [-1,0] \to \mathbb{R}$. Peut-on approximer f par un polynôme à coefficients positifs ? Donner une condition nécessaire, une condition suffisante, ou une condition nécessaire et suffisante.

Exercice 423 (Lyon)

Soit $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que :

$$u(a) = u(b) = 0,$$

et

$$u_{|\,]a,b[} > 0.$$

Montrer l'inégalité

$$\int_a^b \frac{|u''(t)|}{u(t)}\,dt \geq \frac{4}{b-a}.$$

Exercice 424 (Ulm)

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que f est développable en série entière en tout point et telles que $f^{(n)}$ converge simplement vers g quand $n \to +\infty$. Trouver g.

Exercice 425 (Ulm)

Soient $n > 1$ et $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ tels que

$$B^2 = B.$$

Montrer que

$$\mathrm{rg}(AB - BA) \leq \mathrm{rg}(AB + BA).$$

Exercice 426 (Ulm)

Soit $(\varepsilon_i)_{i\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On définit $(Y_n)_{n\geq 0}$ par

$$Y_0 = 0, \qquad Y_1 = 1,$$

et, pour tout $n \geq 2$,

$$Y_n = |Y_{n-1} + \varepsilon_n Y_{n-2}|\,.$$

Soit

$$A = \bigcap_{n\geq 1} \{Y_n \neq 0\}.$$

Montrer que

$$\mathbb{P}(A) \in]0,1[.$$

Exercice 427 (Ulm)

Soit K un corps. Trouver les fonctions

$$f : M_n(K) \to \mathbb{R}$$

telles que, pour tous $X, Y \in M_n(K)$,

$$f(XY) \leq \min(f(X), f(Y)).$$

Exercice 428 (Ulm)

Soit $s > 0$ un réel. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = s,$$

et, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}u_n}{n}.$$

Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 429 (Ulm)

Soit G un groupe. Soient $\delta > 0$ et $f : G \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$\forall x, y \in G, \qquad |f(xy) - f(x)f(y)| \leq \delta.$$

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

   $$\forall x \in G, \qquad |f(x)| \leq C,$$

   ou bien que

   $$\forall x, y \in G, \qquad f(xy) = f(x)f(y).$$

2. Soit δ fixé. Trouver la constante C optimale.

Exercice 430 (Ulm)

1. Soit G un groupe. Est-il vrai que G est fini si et seulement si G a un nombre fini de sous-groupes ?
2. Soit G un groupe. Est-il vrai que G est fini si et seulement si tous les sous-groupes de G sont d'ordre fini ?
3. Mêmes questions en remplaçant « fini » par « dénombrable ».

Exercice 431 (Ulm)

Soient $a, r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ deux fonctions continues. On suppose qu'il existe $\varepsilon, M > 0$ tels que

$$r(x) \leq x - \varepsilon$$

pour tout $x \geq M$. Soit également $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $[0, +\infty[$, telle que

$$\forall x \geq 0, \qquad y'(x) = a(x) y(x - r(x)).$$

Montrer que

$$y(x) \exp\left(-\int_0^x a(t)\, dt\right)$$

converge vers une limite finie quand $x \to +\infty$.
Question supplémentaire : trouver les solutions de l'équation d'ordre 2 à coefficients constants.

Exercice 432 (Ulm)

Soient $(a_i)_{i\geq 1}$, $(b_i)_{i\geq 1}$ et $(c_i)_{i\geq 1}$ trois suites réelles positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n + c_n.$$

On suppose que la série $\sum c_n$ converge. Montrer que la suite $(a_i)_{i\geq 1}$ converge.

Exercice 433 (Ulm)

Soit

$$P = \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i),$$

où, pour tout i, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $|\alpha_i| < 1$. On suppose que, si $z \in U$, alors

$$|P(z)| \leq 1.$$

Montrer que

$$P(z) = z^n.$$

Exercice 434 (ULSR)

On définit un ensemble parfait comme un ensemble C non vide, fermé, sans point isolé. Déterminer un ensemble parfait non vide de $\mathbb{R}$ sans rationnels.

Exercice 435 (Ulm)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que, pour tout $x > 0$,

$$P(x) > 0.$$

Montrer qu'il existe $n \geq 1$ tel que

$$(1 + X)^n P(X)$$

soit à coefficients strictement positifs.

Exercice 436 (Ulm)

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et 1-périodiques. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x) g(nx)\, dx.$$

Exercice 437 (Ulm)

Soit $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ et $(c_1, \ldots, c_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que les a_i sont deux à deux distincts de même que les b_j. On suppose de plus que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

1. Résoudre le système : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i + b_j} = c_j$.
2. Soit $H = (h_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $h_{ij} = \dfrac{1}{i + j - 1}$. Montrer que H est inversible et que H^{-1} est à coefficients entiers.

Exercice 438 (Ulm)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant une limite à gauche et une limite à droite en tout point. Montrer que f admet un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité.

Exercice 439 (Ulm)

Montrer que le polynôme

$$n + (n-1)X + \cdots + X^{n-1}$$

n'admet pas de racines dans $\mathrm{Conv}(\mathbb{U})$.

Exercice 440 (Ulm)

Trouver les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$g(n) = \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \min\{k \geq 1,\ \sigma^k = \mathrm{id}\}$$

soit impair.

Exercice 441 (Ulm)

Soit $f : \left]\frac{1}{4}, 1\right[\to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \left]\frac{1}{4}, 1\right[$,

$$x^{f(x)} = f(x).$$

Montrer que f est uniformément continue sur $\left]\frac{1}{4}, 1\right[$.

Exercice 442 (Ulm)

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

et soit $\varepsilon > 0$.

1. Calculer
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon \;\middle|\; S_{2n} = 0\right).$$
2. Améliorer la vitesse de convergence trouvée précédemment en utilisant l'espérance conditionnelle.

Exercice 443 (ULSR)

Soient $X, Y \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathrm{tr}(XYXY) \leq \mathrm{tr}(X^2Y^2).$$

Exercice 444 (Ulm)

Trouver tous les réels c tels qu'il existe une fonction deux fois dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel x,

$$f'(x) > f(x) + c$$

et

$$f''(x) > f'(x) + c.$$

Exercice 445 (ULSR)

Soit G un groupe fini.

1. Soient H et H' deux sous-groupes de G conjugués. Montrer que H est isomorphe à H'.
2. Donner un contre-exemple de la réciproque : donner un exemple d'un groupe fini G et de deux sous-groupes H et H' de G qui sont isomorphes mais pas conjugués.
3. On pose Γ l'ensemble des bijections de G.
   (a) Expliciter un morphisme injectif
   $$\mu : G \to \Gamma.$$
   (b) Montrer que $\mu(H)$ et $\mu(H')$ sont conjugués dans Γ, où H et H' sont isomorphes.

Exercice 446 (ULSR)

On se place dans $M_n(\mathbb{C})$.

1. Déterminer une famille de matrices linéairement indépendantes et commutant deux à deux de cardinal exactement
$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1.$$
2. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base commune de trigonalisation.
3. Montrer que la borne trouvée en première question est optimale.

Exercice 447 (ULSR)

Soit
$$P = \lambda \prod_{j=1}^{n} (X - \alpha_j) \in \mathbb{C}[X]$$
de degré n. On pose
$$M(P) = |\lambda| \prod_{j=1}^{n} \max(1, |\alpha_j|).$$
On cherche à montrer que
$$M(P) = |\lambda| \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|P(e^{i\theta})|\, d\theta\right).$$

1. Montrer qu'il suffit de montrer le résultat pour les polynômes unitaires de degré 1 de $\mathbb{R}[X]$.
2. On pose, pour $a \in \mathbb{R}$,
$$I(a) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos\theta + a^2)\, d\theta.$$
Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$I(a) = I(-a)$$
et
$$I(a^2) = 2I(a).$$
En déduire $I(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
3. Conclure.

Exercice 448 (ULSR)

Soit $n \geq 2$ un entier. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ et on pose
$$\sigma = (1\ 2\ \cdots\ n)$$
et
$$\tau = (a\ b).$$
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que σ et τ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 449 (ULSR)

On dit que n est un nombre parfait si
$$\sigma(n) = 2n,$$
où
$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$
On accepte le théorème suivant : n est un nombre parfait pair si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que
$$n = 2^{p-1}(2^p - 1).$$
On veut montrer qu'aucun entier consécutif à un nombre parfait pair n'est parfait.
On se donne P un nombre parfait pair. On pose
$$m = P + 1 \qquad \text{et} \qquad n = P - 1.$$

1. Montrer que si $2^p - 1$ est premier, alors p est premier.
2. Étudier la congruence de P modulo 12.
3. Montrer que m et n ne sont pas des carrés.
4. Étudier $\sigma(m)$ modulo 3 et $\sigma(n)$ modulo 4, et en déduire que m et n ne sont pas parfaits.

Exercice 450 (ULSR)

Soient $a, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $t \in [-1, 1]$,
$$|b(t)| \leq -a(t).$$
Pour $u \in [-1, 1]$, soit x_u la solution de
$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$
vérifiant
$$x(0) = u.$$

1. Montrer que
$$\forall u \in [-1, 1],\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad |x_u(t)| \leq 1.$$
2. Montrer que si a et b sont T-périodiques, pour un $T > 0$ donné, alors il existe des solutions périodiques.

Exercice 451 (ULSR)

On prend

$$A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R}), \qquad B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

et

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

des fonctions T-périodiques. On note x_u la solution de

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)$$

vérifiant

$$x(0) = u$$

pour $u \in \mathbb{R}^n$. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|B(t)\| \leq -\gamma(t)$$

et que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,

$${}^t uA(t)u \leq \gamma(t).$$

Montrer qu'il existe des solutions périodiques.

Exercice 452 (ULSR)

Soit $(A_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
On pose

$$X_1 = 0$$

et, pour tout $k \geq 1$,

$$X_{k+1} = \begin{cases} X_k + 1 & \text{si } A_k = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que, pour toute application bornée

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) - L \right| \geq \varepsilon \right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 453 (ULSR)

Soit G un groupe fini de cardinal n. On dit que G vérifie $(*)$ si, pour tout entier d divisant n, il existe au plus un sous-groupe de G de cardinal d.

1. On suppose G cyclique. Montrer que G vérifie $(*)$.
2. Réciproquement, si G vérifie $(*)$, montrer que G est cyclique.
3. Soit F un corps fini dont on admet l'existence. On note F^* l'ensemble des éléments non nuls de F et on rappelle que $(F^*, \times)$ forme un groupe. Montrer que F^* est cyclique.
4. On suppose que
$$|F| = p^2,$$
où p est un entier premier supérieur ou égal à 3, en admettant que cela est possible. Montrer que
$$X^4 + 1$$
admet une racine dans F.

Exercice 454 (ULSR)

Calculer la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$ possède un cycle de taille strictement supérieure à

$$\frac{n}{2}.$$

Exercice 455 (ULSR)

Soit E un espace vectoriel normé et soit G un sous-groupe borné de $\mathcal{L}(E)$.
On définit, pour $x \in E$,

$$|||x||| = \sup_{g \in G} \|g(x)\|.$$

1. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme strictement convexe sur E.
2. Soit K un compact de E et soit f une application qui stabilise K. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 456 (ULSR)

Existe-t-il une fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

supérieure à toute série entière réelle en $+\infty$?

Exercice 457 (ULSR)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A + {}^tA = I_n$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 458 (ULSR)

Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}$ non vide, fermée, sans point isolé et au plus dénombrable.

Exercice 459 (ULSR)

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g)$ est un entier divisible par l'ordre de G.

Exercice 460 (ULSR)

Pour $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, on définit les opérateurs suivants :

$$P(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) + f(x))$$

et

$$D(f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

Montrer l'inégalité suivante, pour tout $n, x \in \mathbb{N}$:

$$P^n(f^2)(x) - (P^n(f)(x))^2 \leq \frac{n}{4} P^{n-1}\left((D(f))^2\right)(x).$$

Exercice 461 (SR)

Soit C un convexe compact de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est régulière. Pour tout $\varepsilon \geq 0$, on note

$$C_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, C) \leq \varepsilon\}.$$

Exprimer le périmètre de C_ε en fonction du périmètre de C.

Exercice 462 (X)

Soit G un sous-groupe fermé de $SL_2(\mathbb{R})$ non commutatif tel que $G = -G$ et pour tout $M \in G \setminus \{I_2, -I_2\}$, $|\mathrm{Tr}(M)| > 2$. Soit également $G_0 = G \setminus \{I_2, -I_2\}$. Montrer que G_0 est fermé.

Exercice 463 (ULSR)

Si $d \geq 2$, on note

$$N(d) = \left|\left\{(n, m) \in \mathbb{N}^2,\ n \leq m,\ \binom{m}{n} = d\right\}\right|.$$

1. Montrer que l'application

$$(i, j) \longmapsto \binom{i+j}{i}$$

   est strictement croissante en i et en j. Soit maintenant

$$B = \min\left\{b \in \mathbb{N},\ \binom{2b}{b} \geq d\right\}.$$

2. Montrer que

$$N(d) \leq 2B.$$

   En déduire que

$$N(d) = O(\ln d).$$

3. Montrer que

$$\frac{1}{x} \sum_{1 \leq d \leq x} N(d) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 2.$$

Exercice 464 (SR)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^p$ et

$$C = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0\right\}.$$

1. Montrer que C est un cône, c'est-à-dire :
   — C est convexe ;
   — pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in C$, on a $tx \in C$.
2. On suppose que la famille $(b_1, \ldots, b_n)$ est libre. Montrer que C est fermé.
3. Dans le cas général, montrer que C est fermé.

Exercice 465 (X)

Décrire $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 2xz = 0\}$.

Exercice 466 (SR)

Calculer
$$\int_0^1 x^x\,dx.$$

Exercice 467 (ULSR)

On définit
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

On note
$$P_n(X) = \det(\Delta_n - XI_n).$$

1. Donner une relation entre P_{n+2}, P_{n+1} et P_n.
2. On pose U_n tel que
$$U_n(\cos x) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x}$$
partout où cela a un sens. On admet que
$$U_{n+2}(X) = 2XU_{n+1}(X) - U_n(X).$$
Relier U_n à P_n et trouver les valeurs propres de Δ_n.
3. On note $y_{1,n}, \ldots, y_{n,n}$ les valeurs propres de Δ_n. On pose
$$S_n = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{k,n}\ln(y_{k,n}).$$
Étudier S_n en $+\infty$.

Exercice 468 (X)

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Montrer que f est développable en série entière en 0 si et seulement s'il existe un voisinage V de 0 et des réels $M, a > 0$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in V, \qquad |f^{(n)}(x)| \leq Ma^n n!.$$

Exercice 469 (SR)

Soit
$$p : [0,1] \to M_n(\mathbb{R})$$
continue telle que, pour tout $t \in [0,1]$, $p(t)$ est un projecteur.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(p(t))$ est constant. On note r cette constante.
2. Montrer qu'il existe
$$(v_1, \ldots, v_r) \in C([0,1], \mathbb{R}^n)^r$$
tel que, pour tout $t \in [0,1]$,
$$(v_1(t), \ldots, v_r(t))$$
soit une base de $\mathrm{Im}(p(t))$.
Indication : montrer que c'est vrai sur un voisinage de 0.

Exercice 470 (SR)

On considère la fonction
$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad u(x) = \begin{cases} \log(|x|) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que u est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$.
2. On dit qu'une fonction f est à oscillation moyenne bornée si, pour tout segment I de $\mathbb{R}$, il existe une constante $C_I \in \mathbb{R}$ telle que
$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(x) - C_I|\,dx$$
soit bornée indépendamment de I.
Montrer que si f est à oscillation moyenne bornée, alors on peut prendre comme constante la valeur moyenne de f sur I.
3. Montrer que u est à oscillation moyenne bornée.
4. Qu'en est-il si l'on prend u nulle sur $\mathbb{R}_-$ et coïncidant avec ln sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 471 (X)

Alice et Bernard jouent à pile ou face. Alice gagne si le motif PPF apparaît avant le motif PFF, et Bernard gagne dans le cas contraire. Trouver la fonction génératrice des probabilités qu'Alice gagne.

Exercice 472 (SR)

Soit $f \in C(\mathbb{R})$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit f_t par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_t(x) = f(x-t).$$

On dit que $T \in \mathbb{R}$ est une ε-presque période si

$$\|f - f_T\|_\infty \leq \varepsilon.$$

On dit que f est presque périodique si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout segment S de $\mathbb{R}$ vérifiant $|S| > R_\varepsilon$, il existe $T \in S$ qui soit une ε-presque période de f.

1. Donner des exemples de fonctions presque périodiques.
2. Montrer qu'une fonction presque périodique est uniformément continue.
3. Soit f une fonction presque périodique. Montrer que pour toute suite réelle (t_n), il existe une extractrice φ telle que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N, \qquad \|f_{t_{\varphi(p)}} - f_{t_{\varphi(q)}}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Exercice 473 (SR)

On note
$$GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid M, M^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})\}.$$

1. Montrer que
$$M \in GL_n(\mathbb{Z}) \implies \det M \in \{-1, 1\}.$$
2. Soit $A \in GL_3(\mathbb{Z})$ telle que -1 et 1 ne soient pas valeurs propres de A. Montrer que A est diagonalisable.
Indication : montrer que si $P \in \mathbb{Q}[X]$ est irréductible, alors il est simplement scindé sur $\mathbb{C}$.

Exercice 474 (SR)

Montrer que si C est un compact de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, la fonction

$$d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto d(x, C)$$

est lipschitzienne.

Exercice 475 (X)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \left\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall i, j,\ M_{i,j} \in \{\pm 1\},\ {}^t M M = n I_n\right\}.$$

1. Déterminer H_1 et H_2.
2. Montrer que si $n > 2$ et $H_n \neq \varnothing$, alors
$$4 \mid n.$$
3. Montrer que $H_4 \neq \varnothing$, puis que $H_{2n} \neq \varnothing$ pour tout n tel que $H_n \neq \varnothing$.
4. On admet que $H_{12} \neq \varnothing$. Quelle conjecture peut-on formuler ?
5. Soit n tel que
$$p = 4n - 1$$
soit premier. Montrer qu'il y a exactement
$$\frac{p-1}{2}$$
carrés dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
6. Soit l un carré non nul de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que $-l$ n'est pas un carré.
7. Soit r non nul dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que
$$\left|\left\{(i,j) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2,\ r = i^2 - j^2\right\}\right| = \frac{p-3}{4}.$$

Exercice 476 (X)

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et

$$A = \{S \in S_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Sp}(S) = \{\lambda_1, \lambda_2\}\}.$$

Localiser les diagonales, vues comme des points de $\mathbb{R}^2$, des éléments de A, c'est-à-dire décrire $d(A)$ où

$$d : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, d).$$

Exercice 477 (Lyon)

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, c_n le nombre de triangulations d'un polygone à n côtés. Trouver la série génératrice de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une formule close pour c_n.

Exercice 478 (X)

1. Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
2. Soit
$$P \in GL_2^+(\mathbb{R}),$$
l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de déterminant strictement positif. Montrer qu'il existe
$$S \in S_2^{++}(\mathbb{R})$$
telle que
$$S^2 = {}^t PP.$$
3. Que dire de PS^{-1} ?
4. Soit
$$\varphi : S_2^{++}(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R}) \to GL_2^+(\mathbb{R}), \qquad (S, O) \mapsto OS.$$
Montrer que $GL_2^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
5. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ et
$$S_M = \{PMP^{-1} \mid P \in GL_2(\mathbb{R})\}.$$
Montrer que S_M est connexe par arcs si et seulement si M est diagonalisable.

Exercice 479 (X)

Pour une suite (u_n), on définit (v_n) par
$$v_n = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}.$$
On parle de convergence au sens de Cesàro logarithmique.

1. Étudier (v_n) lorsque (u_n) converge.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. On définit u_n par
$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si le premier chiffre de } n \text{ en base 10 est 1,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Étudier la convergence de (u_n) au sens classique, au sens de Cesàro, et au sens de Cesàro logarithmique.

Exercice 480 (X)

Soit G un groupe abélien fini de cardinal n. On pose
$$\widehat{G} = \{\varphi : (G, \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \times) \mid \varphi \text{ morphisme de groupes}\}.$$

1. Démontrer que $\widehat{G}$ est un groupe abélien fini.
2. Montrer que
$$|\widehat{G}| \leq n.$$
3. Si $x \in G$, on définit
$$\psi_x : \widehat{G} \to \mathbb{C}, \qquad \psi_x(\varphi) = \varphi(x).$$
Montrer que
$$\psi_x \in \widehat{\widehat{G}}.$$
Montrer que l'application
$$f : G \to \widehat{\widehat{G}}, \qquad x \mapsto \psi_x$$
est injective.
4. Conclure que
$$|\widehat{G}| = n.$$

Exercice 481 (X)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$d_k = \dim(\ker u^k).$$
Montrer que la suite $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est concave.

Exercice 482 (X)

Montrer que l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ de déterminant strictement positif est connexe par arcs.

Exercice 483 (X)

Calculer à 10% près
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{100}(x)\, dx.$$

Exercice 484 (X)

1. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle réelle g telle que
$$\frac{d}{dx}\left(g(x)e^{-x^2}\right) = e^{-x^2}.$$
2. Soient g une fraction rationnelle réelle et $H \in \mathbb{R}[X, Y]$ tels que la fonction
$$x \mapsto H(x, e^{g(x)})$$
s'annule sur un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.
Montrer que
$$H = 0.$$

Exercice 485 (X)

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On pose
$$f(x) = \frac{\pi}{\tan(\pi x)} - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}.$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est 1-périodique.

Exercice 486 (X)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que
$$\sup_{|z|\leq 1} |P(z)| = \sup_{|z|=1} |P(z)|.$$

Exercice 487 (X)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On suppose que
$$\mathrm{Vect}\{x \mapsto f(x+k),\ k \in \mathbb{Z}\}$$
est de dimension finie. Que dire de f ?

Exercice 488 (Ulm)

Déterminer les morphismes du groupe $\mathfrak{S}_4$ dans $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 489 (X)

Soit $X : \Omega \to [a, b]$ une variable aléatoire centrée. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \exp\left(\frac{t^2(b-a)^2}{8}\right).$$

Exercice 490 (X)

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une matrice T semblable à M, triangulaire supérieure, telle que
$$\forall j > i, \qquad |T_{i,j}| \leq \varepsilon.$$
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude
$$S(M) = \{PMP^{-1} \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$$
est fermée dans $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 491 (X)

1. Montrer que $\ell^1(\mathbb{N})$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$, est un espace de Banach.
2. Montrer que l'application
$$\Phi : (\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty) \to \left(\mathcal{L}_c(\ell^1(\mathbb{N}), \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathrm{op}}\right)$$
définie par
$$\Phi(v) : u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés.

Exercice 492 (X)

Calculer, si $(A_1, \dots, A_n)$ est un polygone régulier inscrit dans le cercle unité, le produit des longueurs
$$A_1A_k, \qquad 2 \leq k \leq n.$$

Exercice 493 (X)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ tel que son polynôme caractéristique est à coefficients réels. A-t-on toujours une matrice

$$B \in M_n(\mathbb{R})$$

semblable à A ?

Exercice 494 (X)

Soit

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n, scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}, \qquad a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2.$$

Exercice 495 (X)

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge. On note l sa limite.
2. Préciser le signe de l.
3. Établir le développement asymptotique $u_n = \ell + \frac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
4. Montrer que $l = (1+\sqrt{2}) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} < +\infty$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}\,(\sqrt{p}+\sqrt{p-1})^2}$.

Exercice 496 (X)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On considère (U_n) une suite d'ouverts denses dans E et on cherche à montrer que

$$U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

est dense dans E. On pourra commencer par montrer que U est non vide.

Exercice 497 (X)

Soit, pour $x > 0$,

$$\Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

1. Montrer que Γ_n converge simplement sur $]0, +\infty[$. On notera Γ sa limite.
2. Montrer que
$$\Gamma(1) = 1,$$
que, pour tout $x > 0$,
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$
et que $\ln \circ \Gamma$ est convexe.
3. Montrer que ces trois propriétés déterminent uniquement Γ.

Exercice 498 (X)

Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. On suppose que

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(r-1)}(0) = 0$$

et que $f^{(r)}$ est non nulle au voisinage de 0. Montrer que f admet une réciproque g sur un intervalle de la forme $[0, a]$ et que g s'écrit

$$g(y) = \Gamma\left(y^{1/r}\right)$$

avec Γ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, a]$.

Exercice 499 (X)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et soit u un endomorphisme de E. Montrer l'existence d'un unique couple (d, ν) d'endomorphismes de E tel que :

1. $u = d + n$;
2. d et n commutent ;
3. d est diagonalisable et n est nilpotent.

Vérifier en outre que d et n sont des polynômes en u.

Exercice 500 (ULSR)

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer la signature de la permutation μ_σ de $\mathfrak{S}_n$ définie par $\mu_\sigma(g) = \sigma \circ g$.

Exercice 501 (X)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que
$$\int_0^{+\infty} f = 1.$$
On pose, pour $x \geq 0$,
$$g(x) = \int_x^{+\infty} f.$$

1. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} g = \int_0^{+\infty} x f(x)\, dx,$$
que ces intégrales soient finies ou non.
2. On suppose que f est décroissante. Montrer qu'il existe un unique réel m tel que
$$\int_0^m f = \frac{1}{2}.$$
3. Sous les mêmes hypothèses, montrer que
$$\int_0^{+\infty} g \geq m.$$

Exercice 502 (X)

Soient $m_1, \dots, m_n > 0$ et
$$0 < x_1 < \cdots < x_n$$
des réels. On note, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{x - x_i}.$$
Soit, pour $\lambda > 0$,
$$A_\lambda = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq \lambda\}.$$

1. Décrire la structure de A_λ.
2. Calculer la longueur de A_λ.

Exercice 503 (Ulm)

Soit $n \geq 3$. On note u_n la plus petite solution de $x = n\ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la suite $(u_n)_{n\geq 3}$.

Exercice 504 (X)

Soit E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé quelconque, et soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}(E, F)$. On suppose que
$$\forall x \in E, \qquad \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < +\infty,$$
et que, pour tout $i \in I$,
$$\|T_i\|_{\text{op}} < +\infty.$$
On veut montrer que
$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\text{op}} < +\infty.$$
On pose
$$g(x) = \sup_{i\in I} \|T_i(x)\|$$
et
$$U_n = \{x \in E \mid g(x) > n\}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est ouvert.
2. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que U_n ne soit pas dense.
3. Conclure.

Exercice 505 (X)

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. On suppose que
$$\sum_{g\in G} \text{Tr}(g) = 0.$$
Montrer que
$$\sum_{g\in G} g = 0.$$

Exercice 506 (Lyon)

Soit p_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série de terme général $p_n^{-p_n}$.

Exercice 507 (Ulm)

Soit p un nombre premier et G un sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$. Déterminer le cardinal de l'ensemble des morphismes de groupes de $(G, \circ)$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 508 (X)

Existe-t-il une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\sum u_n^r$$

converge pour tout entier r impair différent de 5, et telle que

$$\sum u_n^5$$

diverge ?

Exercice 509 (X)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\int_0^{+\infty} f$$

converge en $+\infty$. On suppose que

$$\int_x^{x+1} f'(t)^2 \, dt$$

est bornée pour tout réel x positif. Montrer que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 510 (ULSR)

Soit G un groupe d'ordre n. Construire un morphisme injectif de G dans S_n. Donner en plus une CNS pour que ce morphisme soit à valeurs dans A_n.

Exercice 511 (Lyon)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S, P \in GL_n(\mathbb{R})$, avec S symétrique. Montrer que

$$^tPSP$$

a le même nombre de valeurs propres positives que S.

Exercice 512 (Lyon)

On note b_n le nombre de parenthésages admissibles de n symboles, tels que chaque couple de parenthèses contient au moins 2 symboles, et qu'il n'y ait pas de parenthèses englobant tous les symboles. Montrer l'inégalité

$$4b_n \leq (3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n.$$

Exercice 513 (Lyon)

Soit p un nombre premier impair et soit

$$a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*.$$

On pose la permutation

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \\ x \mapsto ax. \end{cases}$$

Montrer que

$$\varepsilon(\sigma) = 1$$

si et seulement si a est un carré, où ε désigne la signature.

Exercice 514 (X)

Soit $\mathcal{L}$ une application linéaire du plan dans lui-même. Quelle est l'image d'un carré par $\mathcal{L}$?

Exercice 515 (Lyon)

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire, de degré 2 et de discriminant non nul. On considère l'ensemble

$$E = \{A \in GL_2(\mathbb{Q}) \mid \chi_A = P\}.$$

Montrer que toutes les matrices de cet ensemble sont conjuguées, c'est-à-dire

$$\forall (A, B) \in E^2,\ \exists Q \in GL_2(\mathbb{Q}), \qquad A = Q^{-1}BQ.$$

Indication : se placer dans le plus petit corps contenant $\mathbb{Q}$ et les racines de P. Quelle est sa dimension en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ?

Exercice 516 (Lyon)

Soit p un nombre premier, $P \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ unitaire, de degré 2 et de discriminant non nul, et soit
$$A \in GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$
telle que
$$\chi_A = P.$$
On admet que le résultat précédent reste vrai dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, c'est-à-dire qu'il existe un surcorps K de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de dimension 1 ou 2 en tant que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel, contenant les racines de P et dans lequel travailler. On munit $GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de la probabilité uniforme. Quelle est la probabilité qu'une matrice
$$M \in GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$
commute avec A ?

Indication : trouver une base judicieuse du commutant de A.

Exercice 517 (Ulm)

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ non constante telle que
$$\forall n \geq 0, \forall x \in [0,1],\ f^{(n)}(x) \geq 0.$$
Montrer que f s'annule au plus une fois.

Exercice 518 (Ulm)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

i) P n'a pas de racine réelle ;

ii) $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \det(P(A)) = 0 \Longrightarrow P(A) = 0$.

Exercice 519 (ULSR)

Existe-t-il une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toute fonction g développable en série entière avec un rayon de convergence de $+\infty$, on ait $g(x) = o(F(x))$ au voisinage de $+\infty$?

Exercice 520 (X)

Un dérangement est une permutation sans point fixe. Y a-t-il plus de dérangements impairs ou de dérangements pairs dans $\mathfrak{S}_n$?

Exercice 521 (X)

1. Soit p un nombre premier. Montrer que
$$1 + \sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} \equiv 0 \pmod p.$$

2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ pour que
$$\sum_{k=1}^{n-1} k^n \equiv 0 \pmod n.$$

Exercice 522 (X)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que
$$a_0 = 0$$
et, pour tout $n \geq 0$,
$$a_{n+1} = a_n^2 + 1.$$
Montrer qu'il existe $\alpha > 1$ tel que
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha^{2^n}.$$

Exercice 523 (X)

Soient A, B deux matrices symétriques réelles.

1. Montrer que
$$\operatorname{tr}(\exp(A)\exp(B)) \geq 0.$$
Indication :
$$\operatorname{tr}(\exp(A)\exp(B)) = \operatorname{tr}\left(\exp\left(\frac{A}{2}\right)\exp(B)\exp\left(\frac{A}{2}\right)\right).$$

2. Montrer que
$$\operatorname{tr}(\exp(A+B)) \leq \operatorname{tr}(\exp(A)\exp(B)).$$
On pourra notamment traiter le cas de la dimension 2 et utiliser le fait suivant (après l'avoir démontré) : si M est une matrice symétrique réelle de dimension 2, alors M est la somme d'une homothétie et d'une matrice de trace nulle.

Exercice 524 (X)

Soit $c > 0$ et soit $f : [0, c] \to [0, c]$ une fonction continue, admettant en 0 un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha),$$

où $a > 0$ et $\alpha > 1$.

1. Montrer que, pour u_0 assez petit, la suite (u_n) définie par

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

   pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers 0.
2. Déterminer alors un équivalent de u_n.
3. Traiter les exemples

$$x \mapsto \sin x \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \ln(1 + x).$$

Exercice 525 (X)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et, pour $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.
2. On prend $u_0 = 5$. Montrer que

$$u_{1000} \in [45 ; 45{,}1].$$

Exercice 526 (X)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

Donner les deux premiers termes du développement asymptotique de u_n.

Exercice 527 (ULSR)

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un K-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E, et μ_u son polynôme minimal. Démontrer l'inégalité

$$\deg \mu_u \leq 1 + \operatorname{rg} u.$$

Exercice 528 (Ulm)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle vérifiant

$$u_{n+1} = |u_n - n|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 529 (X)

Existe-t-il une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de réels telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n u_{n+1} = n$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1?$$

Exercice 530 (X)

Soit a_n la plus grande racine réelle de

$$X^{2n} - 2nX + 1.$$

Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n.

Exercice 531 (X)

Soit $c > 0$.

1. Montrer que l'équation

$$x \sin x = c \cos x$$

   admet une unique racine x_n dans tout intervalle

$$\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$$

   et qu'elle n'en admet pas d'autre dans $\mathbb{R}_+$.
2. Trouver un équivalent θ_n de $x_n - n\pi$, puis un équivalent de

$$x_n - n\pi - \theta_n.$$

Exercice 532 (X)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 533 (X)

Soit
$$P_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}.$$

1. Montrer que P_n admet au plus une racine réelle.
2. Soit a_n l'unique zéro de P_{2n+1}. Étudier la limite de la suite (a_n).
3. Déterminer un équivalent de a_n.

Exercice 534 (X)

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$. On pose, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,
$$R_i = \sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}} |a_{i,j}|.$$

1. On suppose que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > R_i$. Montrer que la matrice A est inversible.
2. Montrer que
$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leq R_i\}.$$
3. On suppose à nouveau que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > R_i$. Montrer que
$$|\det A| \geq \prod_{i=1}^{n} (|a_{i,i}| - R_i).$$
4. On suppose que $A \in M_n(\mathbb{R})$ et que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} > R_i$. Montrer que
$$\det A \geq \prod_{i=1}^{n} (a_{i,i} - R_i).$$

Exercice 535 (X)

Soit G un groupe fini et $a \in G$.

1. Soit $C_a = \{g \in G : ag = ga\}$ le centralisateur de a. Montrer que le nombre de conjugués de a est égal à $|G|/|C_a|$.
2. On suppose que G est de cardinal p^m avec p premier et $m \geq 1$. Montrer que le centre de G est d'ordre p^k avec $0 < k \leq m$.
3. On suppose $m = 2$. Montrer que G est abélien.

Exercice 536 (X)

Soit S l'ensemble des matrices réelles stochastiques, c'est-à-dire l'ensemble des matrices
$$P = (p_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$$
telles que
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad p_{i,j} \geq 0$$
et
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que tous les éléments de S ont une valeur propre commune.
2. Si $P, Q \in S$, en est-il de même de PQ ?
3. Soit $P \in S$ et soit λ une valeur propre complexe de P. Montrer que
$$|\lambda| \leq 1.$$

Exercice 537 (Ulm)

Soit
$$A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$$
une matrice stochastique. Soit λ une valeur propre de A de module 1 et soit
$$X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$
un vecteur propre associé.

1. Si x_i est une composante de X de module maximal, montrer que λx_i est encore une composante de X de module maximal.
2. En déduire que λ est une racine m-ième de l'unité, avec
$$m \leq n.$$
3. On suppose que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,
$$a_{i,i} \neq 0.$$
Montrer que la seule valeur propre de A de module 1 est 1.

Exercice 538 (X)

Montrer que, pour $n \geq 1$, il existe un unique sous-groupe de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ de cardinal n.

Exercice 539 (X)

Soit S l'ensemble des matrices carrées d'ordre n réelles stochastiques.

1. Montrer que S est un convexe compact.
2. Déterminer le plus petit entier p tel qu'il existe un sous-espace affine de dimension p de $M_n(\mathbb{R})$ contenant S.

Exercice 540 (Ulm)

Soit
$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$$
une matrice strictement stochastique, c'est-à-dire stochastique avec des coefficients strictement positifs.

1. Montrer que
$$1 \in \mathrm{Sp}(A)$$
et que
$$\dim \ker(A - I_n) = 1.$$
2. Montrer que toute valeur propre complexe de A est de module inférieur à 1, et que 1 est la seule valeur propre de module 1.

Exercice 541 (ULSR)

Si $(X, Y) \in M_n(\mathbb{R})^2$, on note
$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}({}^tXY).$$

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
   On considère, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par
$$\mathrm{ad}_A : X \mapsto AX - XA.$$
2. Calculer l'adjoint de ad_A.
3. Montrer que A est nilpotente si et seulement si
$$A \in \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_A).$$
4. Montrer que A est nilpotente si et seulement si A est semblable à $2A$.

Exercice 542 (Ulm)

Montrer que le groupe $GL_2(\mathbb{Q})$ ne contient pas d'élément d'ordre 5.

Exercice 543 (Ulm)

Soit $A \in M_n(K)$. On suppose A diagonalisable et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A, et $n_1, \ldots, n_r$ leurs multiplicités respectives. On note $C(A)$ le commutant de A et
$$K[A] = \{P(A) \mid P \in K[X]\}.$$

1. Calculer les dimensions de $C(A)$ et $K[A]$.
2. Montrer les équivalences suivantes :
$$\dim C(A) = n \iff \dim K[A] = n \iff r = n \iff C(A) = K[A].$$
3. On ne suppose plus A diagonalisable. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que
$$K[A] = C(A).$$

Exercice 544 (ULSR)

Soit G un sous-groupe commutatif de $\mathfrak{S}_n$ tel que, pour tout $a, b \in [\![1, n]\!]$, il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma(a) = b$. Montrer que G est de cardinal n.

Exercice 545 (ULSR)

Soit $n \geq 3$ et G le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ formé des éléments qui fixent n. Montrer que G est maximal parmi les sous-groupes stricts de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 546 (X)

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs qui décroît vers 0. Étudier la nature de la série
$$\sum \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}.$$

Exercice 547 (X)

Quelle est la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{(\ln(n+1))^2}{\ln n \, \ln(n+2)}\right)$?

Exercice 548 (Lyon)

Soit G un groupe fini et p un nombre premier divisant $|G|$.

1. Soit $\theta : G^p \to G^p$ l'application qui à $X = (x_0, \dots, x_{p-1})$ associe le p-uplet $(x_{p-1}, x_0, \dots, x_{p-2})$. On pose
$$A = \{(x_0, \dots, x_{p-1}) \in G^p : x_0 x_1 \cdots x_{p-1} = e\}.$$
Quels sont les points fixes de θ ? Montrer que $\theta(A) \subset A$. Exprimer $|A|$ en fonction de $|G|$ et p.
2. Pour $X \in G^p$ on pose $\widehat{X} = \{X, \theta(X), \dots, \theta^{p-1}(X)\}$. Soit q le cardinal de $\{X \in A,\ |\widehat{X}| = 1\}$. Montrer que p divise $|A| - q$. En déduire que G admet un élément d'ordre p.
3. On suppose G abélien d'ordre pq, où p et q sont deux nombres premiers distincts. Montrer que G est cyclique.

Exercice 549 (Ulm)

Soit p un nombre premier, m un entier non divisible par p et $k \geq 1$. Soit G un groupe de cardinal $p^k m$. Le but est de montrer que G possède un sous-groupe de cardinal p^k.

1. Traiter le cas $m = 1$ puis le cas où G est cyclique.
2. On définit $M = \{A \subset G : \mathrm{Card}(A) = p^k\}$. Montrer que p ne divise pas le cardinal de M.
3. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur M telle que $A_1 \sim A_2$ s'il existe $g \in G$ tel que $A_1 = gA_2$. Montrer qu'il existe une classe d'équivalence de cardinal non divisible par p.
4. Soit $H = \{g \in G,\ gA = A\}$, où A est un représentant de la classe étudiée à la question précédente. Montrer que H est un sous-groupe de G de cardinal p^k.

Exercice 550 (ULSR)

Soit (a_n) une suite positive et (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}.$$
Démontrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 551 (Lyon)

Soit G un groupe abélien fini. Pour $x \in G$, on note $\omega(x)$ l'ordre de x.

1. Soit $(x, y) \in G^2$ tel que $\omega(x) = m$, $\omega(y) = n$ et $\gcd(m, n) = 1$. Montrer que $\omega(xy) = mn$. Si on ne suppose plus m premier avec n, a-t-on $\omega(xy) = \mathrm{ppcm}(m, n)$?
2. Pour $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, montrer qu'il existe $(m', n') \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que
$$m'|m,\ n'|n,\ \gcd(m', n') = 1 \text{ et } \mathrm{ppcm}(m, n) = m'n'.$$
3. Montrer qu'il existe $z \in G$ tel que $\omega(z)$ soit le ppcm des ordres des éléments de G.
4. Soit K un corps et G un sous-groupe fini de K^*. Montrer que G est cyclique.

Exercice 552 (Ulm)

Soit G un groupe abélien fini de cardinal $n \geq 2$. Un morphisme de groupes de G dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ est appelé un *caractère*.

1. Déterminer les caractères d'un groupe cyclique.
2. Soit H un sous-groupe de G et χ un caractère de H. Montrer que χ peut être prolongé en un caractère de G.
3. Montrer que G est isomorphe à un produit direct de groupes cycliques
$$\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$$
où $n_1, \dots, n_r$ sont des entiers ≥ 2 vérifiant $n_1 \mid n_2 \mid \cdots \mid n_r$.

Exercice 553 (Ulm)

Déterminer un équivalent de
$$u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} k^k}$$

Exercice 554 (X)

Étudier la convergence de la série $\sum \sin\left(\pi\left(2 + \sqrt{3}\right)^n\right)$.

Exercice 555 (ULSR)

Soit p un nombre premier. On pose

$$G_p = \{\, z \in \mathbb{C} : \exists k \in \mathbb{N},\ z^{p^k} = 1 \,\}.$$

1. Montrer que $(G_p, \times)$ est un groupe.
2. Décrire les sous-groupes de G_p. Existe-t-il un sous-groupe strict de G_p maximal pour l'inclusion ?
3. Soit f un morphisme surjectif de G_p vers un groupe quelconque G. Montrer que G est trivial ou isomorphe à G_p.
4. Montrer que G_p est indécomposable (non isomorphe à un produit direct de deux groupes non triviaux).
5. Montrer que la réunion des G_p engendre le groupe

$$\{\, z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ z^n = 1 \,\}.$$

Exercice 556 (Ulm)

Soit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. À toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ on associe la fonction homographique f_A définie par

$$f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

où $z \in \mathbb{H}$.

1. Montrer que l'application $\psi : A \mapsto f_A$ est un morphisme de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dans le groupe des permutations de $\mathbb{H}$. Déterminer Ker ψ. On note G l'image de ψ ; on l'appelle le *groupe modulaire*.
2. Pour $z \in \mathbb{H}$, on pose $I_z = \{\operatorname{Im} g(z) \mid g \in G\}$. Montrer que I_z est une partie de $\mathbb{R}_+^*$ admettant un plus grand élément.
3. On note G_0 le sous-groupe de G engendré par $u : z \mapsto z+1$ et $v : z \mapsto -1/z$. Pour $z \in \mathbb{H}$, montrer qu'il existe $g_0 \in G_0$ tel que, pour tout $g \in G_0$, $\operatorname{Im} g(z) \leq \operatorname{Im} z_0$, où $z_0 = g_0(z)$.
4. Soit $D = \{z \in \mathbb{H} : |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |z| \geq 1\}$ le domaine fondamental du groupe modulaire G. Montrer qu'on peut choisir $z_0 \in D$.
5. En déduire que $G_0 = G$.

Exercice 557 (X)

1. Montrer que la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2}\ln^2 n$ converge.
2. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

Exercice 558 (X)

Soit (a_n) une suite réelle convergeant vers 0 telle que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} |a_{k+1} - a_k|$ converge. Montrer que pour tout réel x, $\displaystyle\sum_{k\geq 0} a_k \sin(kx)$ converge. Indiquer des intervalles de convergence uniforme.

Exercice 559 (X)

Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 560 (ULSR)

Pour tout $x \geq 1$, on définit :

$$\pi(x) = \mathrm{Card}\{p \text{ premier inférieur ou égal à } x\}.$$

Le très célèbre Théorème des Nombres Premiers affirme alors que :

$$\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

On considère la suite (p_n) des nombres premiers.

1. Que vaut $\pi(p_n)$?
2. En déduire la nature de la série

$$\sum \frac{1}{p_n}.$$

3. **(Bonus)** Retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser le TNP et en considérant la série de terme général $-\ln\left(1 - \dfrac{1}{p_n}\right)$.

Exercice 561 (X)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note τ_n le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$. Pour $x \geq 1$, on pose
$$F(x) = \sum_{n \leq x} \tau_n.$$

1. Déterminer un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
2. Montrer plus précisément que
$$F(x) = x \ln x + (2\gamma - 1)x + O\big(\sqrt{x}\big) \qquad (x \to +\infty),$$
où γ désigne la constante d'Euler.

Exercice 562 (X)

Établir la convergence et calculer la somme de la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sum_{p=2^{n-1}}^{2^n - 1} \frac{1}{p(2p+1)(2p+2)}.$$

Exercice 563 (ULSR)

Soit $a \in \mathbb{R}$, et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\big(an! - \lfloor an! \rfloor\big)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $a \in \mathbb{Q} + \mathbb{N}e$.

Exercice 564 (X)

Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes vérifiant $\lim_{n\to+\infty} u_n^6 = 1$ et telles que la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{C}$ qui à la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ associe la limite ℓ de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$. Déterminer $\varphi(E)$.

Exercice 565 (X)

Soit $p > 3$ un nombre premier. On écrit
$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{(p-1)!}.$$

Montrer que p^2 divise a.

Exercice 566 (X)

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{C}$. On pose, pour $n \geq 1$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad \text{et} \qquad \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k.$$

1. On suppose dans cette question que les u_n sont des réels positifs. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   (a) la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge ;
   (b) la suite $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ converge.
2. On revient au cas général. Montrer que
$$u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$
est une condition suffisante pour que la convergence de la suite $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ entraîne celle de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 567 (Ulm)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle qui croît vers $+\infty$ et telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0. Montrer que
$$\{u_n - \lfloor u_n \rfloor,\ n \in \mathbb{N}\}$$
est dense dans $[0, 1]$.

Exercice 568 (Ulm)

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^p)^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0.

1. La suite u converge-t-elle ?
2. Si u est bornée, montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u ne peut s'écrire comme union disjointe de deux fermés non vides.
3. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus u bornée ?

Exercice 569 (X)

Déterminer un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$.

Exercice 570 (Ulm)

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Une suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ est dite équirépartie dans $[a, b]$ si, pour tout $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq c < d \leq b$, on a :

$$\frac{\operatorname{Card}\{k \in [\![1, n]\!],\ u_k \in [c, d]\}}{\operatorname{Card}\{k \in [\![1, n]\!],\ u_k \in [a, b]\}} \longrightarrow \frac{d-c}{b-a}.$$

1. Montrer que la suite $(\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor)$ est équirépartie dans $[0, 1]$.
2. La suite $(\ln(n) - \lfloor \ln(n) \rfloor)_{n\geq 1}$ est-elle équirépartie dans $[0, 1]$?
3. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $[0, 1]$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est dense dans $[0, 1]$ si et seulement s'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}^*$ telle que $(u_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ soit équirépartie dans $[0, 1]$.
4. Existe-t-il une suite équirépartie dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire équirépartie dans tout segment de longueur non nulle de $\mathbb{R}$?

Exercice 571 (X)

Déterminer une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ de classe C^∞ telle que, pour toute suite $(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ vérifiant $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$, on ait

$$u_n \sim \frac{1}{\ln n}.$$

Exercice 572 (X)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$. Montrer l'équivalence :

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p \iff p \text{ premier.}$$

Exercice 573 (Lyon)

Soit p un nombre premier.

1. Soit q un nombre premier qui divise $p-1$. Établir l'existence d'un élément de $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times)$ d'ordre multiplicatif q.
2. Soit q un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tels que q^α divise $p-1$. Montrer l'existence d'un élément de $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times)$ d'ordre q^α.
3. En déduire que $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times)$ est cyclique.

Exercice 574 (Ulm)

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux. On lui associe la fonction $\widehat{f} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\widehat{f}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} f\left(\frac{x}{k}\right)$ pour $x \geq 1$.

1. Montrer que, pour $x \geq 1$,
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(n) \widehat{f}\left(\frac{x}{n}\right),$$
où μ désigne la fonction de Möbius :
$$\mu(1) = 1, \qquad \mu(n) = (-1)^r$$
si n est le produit de r nombres premiers deux à deux distincts, et $\mu(n) = 0$ sinon.
2. On suppose que, pour x tendant vers l'infini,
$$\widehat{f}(x) = Ax(\ln x)^2 + Bx \ln x + Cx + O(x^\beta),$$
où $\beta \in]0, 1[$ et A, B, C sont des constantes. Montrer que
$$f(x) = 2Ax \ln x + O(x).$$

Exercice 575 (Ulm)

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \displaystyle\sum_{p\geq 0} a_p \binom{n}{p}$, avec la convention $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$.
2. Montrer que
$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad n - m \mid f(n) - f(m) \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \operatorname{ppcm}(1, \ldots, n) \mid a_n.$$

Exercice 576 (X)

Soit p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^k$ est égal à 0 ou -1.

Préciser à quelle condition on obtient 0 ou -1.

Exercice 577 (X)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier.

1. Montrer que la valuation p-adique de $n!$ est égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.
2. Calculer le nombre de zéros qui se trouvent à droite de l'écriture décimale de 2017!.
3. On écrit n en base p : $n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_r p^r$ et on pose $s = a_0 + a_1 + \cdots + a_r$. Montrer que $v_p(n!) = \dfrac{n-s}{p-1}$.
4. Soit $D : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \lfloor x \rfloor - \lfloor x/2 \rfloor - \lfloor x/3 \rfloor - \lfloor x/5 \rfloor + \lfloor x/30 \rfloor$. Montrer que $D(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et en déduire que $\dfrac{(30n)!\, n!}{(15n)!\,(10n)!\,(6n)!}$ est entier pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 578 (Ulm)

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ on a $(1+X)^p = 1 + X^p$.
2. Soit n et k deux entiers écrits en base p : $n = n_0 + n_1 p + \cdots + n_j p^j$ et $k = k_0 + k_1 p + \cdots + k_j p^j$ avec le même indice j quitte à compléter avec des zéros. Établir le théorème de Lucas :
$$\binom{n}{k} \equiv \binom{n_0}{k_0}\binom{n_1}{k_1}\cdots\binom{n_j}{k_j} \pmod p$$
avec la convention habituelle que $\dbinom{n}{k} = 0$ si $k > n$.
3. Application. Montrer que le nombre d_n de coefficients binomiaux impairs sur la n-ième ligne du triangle de Pascal, c'est-à-dire parmi les $\dbinom{n}{k}$ pour $0 \leq k \leq n$, est une puissance de 2.
4. Montrer que $\dbinom{pn}{pk} \equiv \dbinom{n}{k} \pmod{p^2}$.

Exercice 579 (Ulm)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n est la somme des carrés de trois rationnels. Montrer que n est la somme des carrés de trois entiers.

Exercice 580 (Ulm)

On note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs positifs de l'entier n. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = 2\sum_{k=1}^{r} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - r^2, \quad \text{où } r = \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

Exercice 581 (Lyon)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n. Montrer que $\sigma(n) \leq n + n \ln n$.

Exercice 582 (X)

On note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $f(p) = \sup\{n \in \mathbb{N}^*,\ \sigma(n) \leq p\}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $p - f(p) = k$ a une infinité de solutions.

Exercice 583 (Ulm)

Pour $n \geq 1$, on note d_n le nombre de diviseurs strictement positifs de n.

1. Montrer que $\displaystyle\left(\sum_{k|n} d_k\right)^2 = \sum_{k|n} d_k^3$.
2. Trouver les fonctions f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :
   i) $\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \mathrm{pgcd}(m,n) = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$,
   ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\left(\sum_{k|n} f(k)\right)^2 = \sum_{k|n} f(k)^3$.
3. Soit f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
   i) $\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \mathrm{pgcd}(m,n) = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$,
   ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\left(\sum_{k|n} f(k)\right)^2 = \sum_{k|n} f(k)^3$.

   Montrer que f est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 584 (X)

Combien y a-t-il dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ de polynômes irréductibles unitaires de degré 2 ?

Exercice 585 (Ulm)

Pour $n \geq 1$, on note r_n la probabilité pour que deux entiers choisis aléatoirement dans $[\![1, n]\!]$ soient premiers entre eux. D'autre part, on définit la fonction de Möbius $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ ainsi : $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ si n est divisible par le carré d'un nombre premier et $\mu(p_1 \cdots p_r) = (-1)^r$, si les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts.

1. Montrer que $r_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{d \mid n} \mu(d)$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} r_n = \frac{6}{\pi^2}$.

Exercice 586 (Ulm)

1. Montrer que $a\dbinom{a+b}{a}$ divise $\mathrm{ppcm}(b+i)_{1 \leq i \leq a}$ pour tous a et b dans $\mathbb{N}^*$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(n+1)\,\mathrm{ppcm}\left(\binom{n}{i}\right)_{0<i\leq n} = \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n+1).$$
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{ppcm}(1, \ldots, n) \geq 2^{n-1}$.
4. On note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Montrer que $n^{\pi(n)} \geq 2^{n-1}$. En déduire une minoration de $\pi(n)$.

Exercice 587 (X)

1. Montrer que pour p premier et $n \in \mathbb{N}^*$, $v_p\left(\dbinom{2n}{n}\right) \leq \dfrac{\ln(2n)}{\ln p}$.
2. En déduire que $\dfrac{n}{\ln n} = O(\pi(n))$ quand n tend vers l'infini où $\pi(n)$ est le nombre d'entiers premiers $\leq n$.

Exercice 588 (Ulm)

Soit K un convexe fermé non vide de $\mathbb{C}$, P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant et $A = \{a \in \mathbb{C}, P^{-1}(\{a\}) \subset K\}$. Montrer que A est convexe.

Exercice 589 (X)

Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs à n et $\pi(n)$ le cardinal de $\mathcal{P}_n$.

1. Soit $p \in \mathcal{P}_{2n} \setminus \mathcal{P}_n$. Montrer que p divise $\dbinom{2n}{n}$.
2. Montrer que $n^{\pi(2n)-\pi(n)} \leq 2^{2n}$.
3. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 2$,
$$\pi(n) \leq C\frac{n}{\ln n}.$$

Exercice 590 (X)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq 1$. On note $n(z)$ le nombre de racines de l'équation $P(x) = z$. Donner une expression de $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{C}} (d - n(z))$.

Exercice 591 (X)

Soit $P = X^4 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que les racines de P forment un parallélogramme.
2. Même question avec un rectangle.

Exercice 592 (Ulm)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, E_n l'ensemble des polynômes complexes de degré n s'annulant en 1 et -1. Montrer qu'il existe $r_n > 0$ tel que, pour tout P de E_n, P' ait un zéro de module majoré par r_n.

Exercice 593 (Ulm)

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.
2. Déterminer le plus grand entier $n \geq 2$ tel que les racines non nulles de $(X+1)^n - X^n - 1$ soient de module 1.
3. Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$, Δ une droite du plan complexe, H_1 et H_2 les deux demi-plans ouverts limités par Δ. On suppose que P' a une racine dans H_1. Montrer que $P(H_1) = \mathbb{C}$.

Exercice 594 (Ulm)

Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que $n_0 = 0$ et $n_1 = 1$ et $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres complexes non nuls telle que $a_0 = 1$ et $a_1 = -1$. Pour $d \geq 2$, on pose $r_d = \prod_{k=2}^{d} \frac{n_k}{n_k - 1}$ et $P_d = \sum_{k=0}^{d} a_k X^{n_k}$. Montrer que P_d admet une racine de module inférieur ou égal à r_d.

Exercice 595 (Ulm)

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n, F un sous-espace vectoriel de E de dimension m et p la projection orthogonale sur F.

1. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2$ si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormale de E.
2. Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de réels compris entre 0 et 1 dont la somme est m. Montrer l'existence d'une base orthonormale $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|p(e_i)\|^2 = a_i$.

Exercice 596 (X)

Soit E un espace euclidien et $u \in O(E)$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$.

Exercice 597 (Ulm)

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles antisymétriques de taille n. Montrer que l'application $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

Exercice 598 (Ulm)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. On suppose que $f(t) = O\left(\sqrt{|t|}\right)$ au voisinage de $\pm\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 599 (Ulm)

Une barrière circulaire est composée de 17 poteaux dont 5 sont pourris. Montrer qu'il existe un ensemble de 7 poteaux consécutifs dont 3 sont pourris.

Exercice 600 (X)

Soient $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $u \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ une solution non nulle de l'équation différentielle $y'' + fy = 0$ vérifiant $u(a) = u(b) = 0$. Montrer que $\int_a^b |f(t)|\, dt \geq \frac{4}{b-a}$.

Exercice 601 (X)

Soit $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} t|p(t)|\, dt < +\infty$. Montrer que l'équation différentielle $y'' + py = 0$ possède une solution unique telle que $\lim\limits_{+\infty} y = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} y' = 0$.

Exercice 602 (X)

Soient $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, intégrable et $(E) : y'' + q(x)y = 0$.

1. Montrer que si y est une solution bornée, alors y' tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer qu'il existe des solutions non bornées.

Exercice 603 (X)

Soient $w, b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues.

1. On suppose que pour $t \geq 0$, $w(t) \leq \int_0^t w(s)b(s)\, ds$. Que dire de la fonction w ?
2. Soient a et m dans $[0, 1]$, avec $a < 1$. On suppose que pour $t \geq 0$,
$$w(t) \leq aw(mt) + \int_0^t w(s)b(s)\, ds.$$
Montrer que $w = 0$.

Exercice 604 (Ulm)

Déterminer la probabilité p_n pour qu'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ n'ait aucun cycle de longueur strictement supérieure à $n/2$ dans sa décomposition en cycles à supports disjoints. Quelle est la limite de cette probabilité lorsque $n \to +\infty$?

Exercice 605 (X)

Soient $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On suppose $g \geq 0$ et

$$\forall t \in [a, b], \quad 0 \leq f(t) \leq h(t) + \int_a^t g(u)f(u)\, du.$$

Montrer que pour tout $t \in [a, b]$, $0 \leq f(t) \leq h(t) + \displaystyle\int_a^t g(u)h(u)e^{\int_u^t g}\, du$.

Exercice 606 (X)

Soit y une solution non nulle de $y'' + (1 + p(x))y = 0$, où p est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que p' intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{+\infty} p = 0$.

1. Montrer qu'il existe un réel a tel que, pour tout $x \geq 0$, on ait
$$y^2(x) \leq a + 2\int_0^x y^2(t)|p'(t)|\, dt.$$
2. En déduire que y est bornée.

Exercice 607 (Ulm)

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue. On suppose qu'il existe $c \geq 0$ tel que pour tout $x \geq 0$, $xf(x) \leq c + \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. Montrer que f est bornée.
2. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, une solution de $y'' + ty = 0$. Montrer que g est bornée.

Exercice 608 (Ulm)

Soient $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ continue et croissante telles que $y'' + qy = 0$.

1. Montrer que l'ensemble des zéros de y n'est pas majoré.
2. Montrer que y est bornée.

Exercice 609 (Ulm)

Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Donner un équivalent lorsque r tend vers $+\infty$ du nombre $N(r)$ de points de $\mathbb{Z}^n$ de norme inférieure ou égale à r.

Exercice 610 (X)

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, avec $q_1 \geq q_2$. Soient $\alpha < \beta$ deux zéros d'une solution non nulle de $y'' + q_2 y = 0$. Montrer que toute solution de $y'' + q_1 y = 0$ s'annule sur $[\alpha, \beta]$.
2. On considère l'équation différentielle $y'' + e^t y = 0$ sur $I = \mathbb{R}_+$. Montrer qu'une solution non nulle admet une infinité de zéros qu'on peut ordonner en une suite strictement croissante $(t_n)_{n\geq 1}$. Montrer que la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$ et que $e^{t_n} \sim \dfrac{\pi^2 n^2}{4}$.

Exercice 611 (Ulm)

Soit $\varepsilon : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$. On considère une solution non nulle x de l'équation différentielle $x'' + x = \varepsilon(t)x'$ définie sur $[a, +\infty[$ et $b \geq a$. Pour $t \geq b$, on définit

$$N_b(t) = \mathrm{Card}\{u \in [b, t],\ x(u) = 0\}.$$

Montrer que, pour b assez grand, on a $N_b(t) \sim \dfrac{t}{\pi}$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 612 (Ulm)

Soient $\alpha > 0$. On considère une solution réelle f non nulle de l'équation différentielle $y'' + t^{\alpha-2}y = 0$ sur $[1, +\infty[$.

1. Montrer que, pour tout $t > 1$, la fonction f a un nombre fini de zéros, noté $n(t)$, dans l'intervalle $[1, t]$.
2. Montrer que $n(t) \sim_{t\to+\infty} \dfrac{2t^{\alpha/2}}{\pi\alpha}$ (commencer par le cas $\alpha = 2$).

Exercice 613 (Ulm)

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on note $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{N}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient A et B dans $SL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une fonction continue $N : [0, 1] \to \mathcal{N}_n$ telle que la solution M du problème de Cauchy $Y' = N(t)Y$, $Y(0) = A$ vérifie $M(1) = B$.

Exercice 614 (Ulm)

Soient $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une application de classe C^∞ telle que les valeurs propres de $A(0)$ aient toutes une partie réelle strictement positive et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ de classe C^∞. Montrer qu'il existe $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ de classe C^∞, solution de

$$tX'(t) + A(t)X(t) = F(t).$$

On commencera par le cas $n = 1$.

Exercice 615 (X)

Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$, où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note $D \subset \mathbb{R}^2$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R et on pose $F(x, y) = f(x + iy)$, $P(x, y) = \mathrm{Re}(F(x, y))$ et $Q(x, y) = \mathrm{Im}(F(x, y))$, pour tout $(x, y) \in D$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le disque D et que P et Q vérifient les conditions de Cauchy

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

2. Montrer que F, P et Q sont de classe C^∞ et harmoniques sur D.
3. On suppose f polynomiale. Soit $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ non identiquement nulle et de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose $G(F(x, y)) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f est un polynôme constant.

Exercice 616 (Ulm)

Soient B (resp. S) la boule unité ouverte (resp. la sphère unité) de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne canonique, f une fonction continue de $\overline{B}$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à B est de classe $\mathcal{C}^2$, a_{ij} (pour $1 \le i, j \le n$) et b_i (pour $1 \le i \le n$) des fonctions continues de B dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in B$, la matrice $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \le i,j \le n}$ appartienne à $S_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que la fonction

$$g = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

est identiquement nulle sur la boule B. Montrer que f atteint son maximum sur S.

Exercice 617 (X)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ admet une limite lorsque $z \neq z_0$ tend vers z_0. On note alors $f'(z_0)$ cette limite.

1. Montrer que $z \mapsto z^n$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$.
2. La conjugaison est-elle $\mathbb{C}$-dérivable ?
3. Montrer que la somme d'une série entière est $\mathbb{C}$-dérivable sur son disque ouvert de convergence.
4. On note $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + iy \in \Omega\}$ et on pose $F(x, y) = f(x + iy)$, $P(x, y) = \mathrm{Re}(F(x, y))$ et $Q(x, y) = \mathrm{Im}(F(x, y))$, pour tout $(x, y) \in U$. Soit $(x_0, y_0) \in U$ et $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si, et seulement si, F est différentiable en (x_0, y_0) et

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Exercice 618 (Ulm)

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, b à valeurs strictement positives.

1. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + b(x)u(x) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) \tag{A}$$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x). \tag{B}$$

2. On remplace $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$ par $\sum_{1 \le i,j \le n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right)$ dans (A), où les fonctions α_{ij} sont dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Montrer que si la matrice symétrique $(\alpha_{ij}(x) + \alpha_{ji}(x))_{1 \le i,j \le n}$ est positive pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors la conclusion (B) reste vraie.

Exercice 619 (Lyon)

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, dont on note S l'ensemble des zéros et $a \in S$ tel que $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$. Soient $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $X :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $X(0) = a$ et $X'(t) = G(X(t))$ pour tout $t \in]-\delta, \delta[$. On suppose que $G(x)$ est tangent à S en x pour tout x dans S. Montrer que $X(t) \in S$ pour t voisin de 0.

Exercice 620 (Ulm)

1. Quel est l'espace tangent en un point x d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$?
2. Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$ telle qu'en tout point de X l'espace tangent est $\mathbb{R}^n$ tout entier. Est-ce que X est nécessairement un ouvert ?
3. Quel est l'espace tangent en un point de $GL_n(\mathbb{R})$?
4. Quel est l'espace tangent à $O(n)$ en l'identité ?
5. Quel est l'espace tangent à $SL_n(\mathbb{R})$ en l'identité ?
6. Soit $L = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{Tr} M = 0\}$ et $S = \exp(L)$. Préciser l'espace tangent à S en l'identité. A-t-on $S = SL_n(\mathbb{R})$ en général ?

Exercice 621 (Ulm)

Soient A et B dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et V l'ensemble des applications $u = (u_1, u_2)$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ telles que $u(0) = A$ et $u(1) = B$. Pour tout $u \in V$, on pose

$$E(u) = \int_0^1 \frac{u_1'(s)^2 + u_2'(s)^2}{u_2(s)^2}\, ds.$$

Soit $v = (v_1, v_2) \in V$ tel que $E(v)$ soit minimal.

1. Trouver un système différentiel vérifié par v_1 et v_2.
2. Étudier ce système. Quelle est la nature de l'arc géométrique défini par v ?

Exercice 622 (Ulm)

Soient A et B dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, et $E = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^2),\ u(0) = A,\ u(1) = B\}$. Soit $n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $u \in E$, on pose $F(u) = \displaystyle\int_0^1 n(u(t)) \|u'(t)\|^2\, dt$. On suppose qu'il existe $u_0 \in E$ tel que $F(u_0) = \displaystyle\min_{u \in E} F(u)$. Montrer que u_0 est de classe $\mathcal{C}^2$ et trouver une équation différentielle vérifiée par u_0.

Exercice 623 (Ulm)

Soient $a > 0$, $b > 0$ et $E = \{g \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}_+^*),\ g(0) = a,\ g(1) = b\}$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $g \in E$ on pose

$$\Phi(g) = \int_0^1 f(g(t), g'(t))\, dt.$$

   On suppose qu'il existe une fonction $g_0 \in E$ minimisant Φ. Donner une équation différentielle vérifiée par g_0.
2. Pour $g \in E$, on considère la surface S d'équation $r = g(z)$ en coordonnées cylindriques et on note $A(g)$ l'aire de S. Soit $g_0 \in E$ qui minimise A. Déterminer g_0.

Exercice 624 (Ulm)

On appelle chemin de Dick de taille n toute suite $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ de $\{\pm 1\}^{n+1}$ telle que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} u_i \geq 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i = 0$. Dénombrer le nombre de chemin de Dick de taille n.

Exercice 625 (Ulm)

On lance n boules indépendamment et uniformément dans n corbeilles. On note $X_1, \ldots, X_n$ le nombre de boules dans chacune des corbeilles et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

Pour $\alpha > 0$, on pose $k_\alpha = \left\lfloor \alpha \dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))} \right\rfloor$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note Y_i la fonction indicatrice de l'événement $(X_i \geq k_\alpha)$ et $Z_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Vérifier que $\mathbb{E}(Z_n) \sim n\mathbb{P}(X_1 = k_\alpha)$ puis trouver la limite de cette espérance selon que $\alpha > 1$ ou $\alpha < 1$.
2. En déduire que si $\alpha > 1$, $\mathbb{P}(M_n \geq k_\alpha)$ converge vers 0.
3. On suppose que $\alpha < 1$. Montrer que $\mathbb{P}(Z_n = 0) \leq \dfrac{\mathbb{E}(Z_n^2)}{(\mathbb{E}(Z_n))^2} - 1$ puis que $\mathbb{P}(Z_n = 0)$ converge vers 0.
4. Conclure que $\dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln n} M_n$ converge vers 1 en probabilité.

Exercice 626 (Lyon)

Une antichaîne de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ est un ensemble X de parties de $[\![1,n]\!]$ incomparables pour l'ordre d'inclusion, c'est-à-dire tel que pour tout couple $(A,B) \in X^2$, $A \subset B$ implique $A = B$.

1. Soit X une antichaîne de $[\![1,n]\!]$. Pour $k \in [\![0,n]\!]$ on note L_k le nombre de parties de X qui sont de cardinal k. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} k!(n-k)!L_k \leq n!.$$
Pour $A \in X$ de cardinal m on pourra considérer l'ensemble des permutations σ de $\mathfrak{S}_n$ qui envoient $[\![1,m]\!]$ sur A.
2. Montrer que le cardinal maximal d'une antichaîne de $[\![1,n]\!]$ est égal à $a_n = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. C'est le théorème de Sperner.
3. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels non nuls. Montrer que le nombre de n-uplets $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i = 0$ est inférieur ou égal à a_n.
4. On note E_n l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{\pm 1\}$ telles qu'il existe $X \in \operatorname{Ker} M$ à coefficients dans $\{1, 2, \ldots, \lfloor \sqrt{n}/2 \rfloor\}$. Montrer que $|E_n| = o(2^{n^2})$.

Exercice 627 (Ulm)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X \geq n) > 0$ pour tout n. On suppose qu'il existe Y indépendante de X, suivant la même loi et telle que $\mathbb{P}(X+Y \geq n) \sim_{n\to\infty} 2\mathbb{P}(X \geq n)$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq n) \sim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \geq n-1)$.
2. Montrer que $e^{\lambda X}$ n'est d'espérance finie pour aucun réel $\lambda > 0$.

Exercice 628 (X)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Démontrer que $\dfrac{S_n}{n \ln n}$ converge en probabilité vers 1.
Pour un entier N bien choisi (qui dépendra de n) on considérera, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la variable $X_i \mathbf{1}_{(X_i<N)}$.

Exercice 629 (Ulm)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que pour tout $j \geq 1$, $\mathbb{P}(X_1 = 2^j) = \dfrac{1}{2^j}$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que si $\varepsilon > 0$, on a
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n \log_2 n} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Exercice 630 (Ulm)

Soient $n > m$ des entiers > 0, et soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$. On suppose que pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$,
$$|a_{i,j}| \leq \alpha,$$
où α est un entier > 0. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{Z}^n$, $X \neq 0$, tel que $AX = 0$ et tel que, en posant
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$
on ait $|x_j| \leq (n\alpha)^{\frac{m}{n-m}} + 1$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

Exercice 631 (Ulm)

Pour $n \geq 1$ on note d_n le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments qui n'ont pas de point fixe et on pose $d_0 = 1$ par convention.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.
2. On considère $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{d_k z^k}{k!}$, la série génératrice exponentielle de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dont on note D la somme. Minorer son rayon de convergence R, puis calculer $D(z)$ pour $|z| < R$.
3. En déduire que pour $n \geq 1$, d_n est la partie entière de $\dfrac{n!}{e} + \dfrac{1}{2}$.

Exercice 632 (X)

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt$.

Exercice 633 (X)

1. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ continue. On suppose f dérivable en 0 et $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ intégrable sur $[1, +\infty[$. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, dx = f(0) \ln \frac{a}{b}.$$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\pi x) - \arctan x}{x}\, dx$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\, dx$, pour $\alpha > -1$.

Exercice 634 (X)

Montrer que pour tout réel x on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1 + t^2}\, dt = \pi e^{-|x|}.$$

Exercice 635 (X)

On considère la série entière $\sum c_n x^n$ où, pour $n \geq 1$, $c_n = \dfrac{p_n}{n}$, p_n étant le nombre d'entiers $k \geq 1$ tels que $k!$ divise n.

1. Donner le rayon de convergence de cette série.
2. Étudier la convergence de la série $\sum c_n x^n$ lorsque $x = e^{2i\pi r}$, avec $r \in \mathbb{Q}$, puis lorsque $x = e^{2i\pi e}$. On pourra montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} c_i x^i = \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k! \leq n}} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\ell=1}^{\lfloor n/k! \rfloor} \frac{x^{k!\ell}}{\ell} \right).$$

Exercice 636 (Ulm)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \ln \det(\mathrm{Id}_E + tu)$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 637 (Ulm)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n(1 + x^2)}\right)$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Étudier la limite en $+\infty$.
2. Montrer que f est développable en série entière en 0.
3. Calculer $f(0)$ et $f''(0)$.

Exercice 638 (Ulm)

1. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{nk} a_k = (-1)^n.$$
2. Y a-t-il unicité de la suite (a_n) ?

Exercice 639 (Ulm)

Pour $i \in [\![1, 9]\!]$, et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $N_i(n)$ le nombre d'éléments de l'ensemble $\{2, \ldots, 2^n\}$ dont le premier chiffre de l'écriture décimale est i. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{N_i(n)}{n}$.

Exercice 640 (Ulm)

Soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0.

1. Montrer que la série $\sum b_n \sin nt$ converge uniformément sur tout segment $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ $(0 < \alpha < \pi)$.
2. Montrer l'équivalence des deux conditions :

   (i) $b_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers l'infini ;

   (ii) la série $\sum b_n \sin nt$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 641 (Ulm)

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $[0,1]$. Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$, on pose

$$X_n(a,b) = \mathrm{Card}\{k \in [\![1,n]\!],\ u_k \in [a,b]\}.$$

Prouver l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $\dfrac{X_n(a,b)}{n}$ tend vers $b-a$ pour tout couple (a,b) ;

(ii) pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)\,dt;$$

(iii) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} = 0.$$

Exercice 642 (Ulm)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(3x^2 - 2x^3)\,dx = 2\int_0^1 f(3x^2-2x^3)\,dx.$$

Exercice 643 (Ulm)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ tel que $P(1) = P(-1) = 0$ et $P(x) > 0$ pour $x \in]-1,1[$. Soit $A = \displaystyle\int_{-1}^{1} P$ et T l'aire du triangle délimité par l'axe des abscisses et les tangentes au graphe de P en 1 et -1. Montrer que $A \geq \dfrac{2}{3}T$.

Exercice 644 (X)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x \in]0,1]$, on pose $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ et $F(0) = f(0)$. Montrer que

$$\int_0^1 F^2(x)\,dx \leq 4\int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

Exercice 645 (X)

Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Soit $f \in E$. Montrer l'existence de $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f(t)f'(t)\,\mathrm{cotan}(\pi t)\,dt$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)^2}{\tan^2(\pi t)}(1+\tan^2(\pi t))\,dt$. Comparer I_1 et I_2.
2. Montrer que pour tout $f \in E$, on a l'inégalité de Wirtinger
$$\int_0^1 f'^2 \geq \pi^2 \int_0^1 f^2.$$
3. Quels sont les cas d'égalité ?

Exercice 646 (ULSR)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Quelle est la limite de

$$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n+1}\right) f'\left(\frac{k+1}{n+1}\right)?$$

Exercice 647 (Ulm)

1. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$
2. Soit $(n_i)_{i\geq 0}$ une suite d'entiers pairs, $(\mu_i)_{i\geq 0}$ une suite d'entiers. On suppose que ces deux suites tendent vers $+\infty$, que $\mu_i \leq n_i$ pour tout indice i et que
$$\frac{\mu_i - \frac{n_i}{2}}{\sqrt{n_i}}$$
a une limite $\lambda > 0$ quand i tend vers $+\infty$. Trouver un équivalent du coefficient binomial $\dbinom{n_i}{\mu_i}$.

Exercice 648 (X)

Soient $a > 1$ et $b > 1$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x}\right) dx$.

Exercice 649 (X)

Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\, dt$.

Exercice 650 (X)

Chercher un équivalent de I_n où $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt$. En déduire la nature de la série $\sum (I_n)^{\alpha}$.

Exercice 651 (Ulm)

Pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ fonction 2π-périodique ne s'annulant jamais on pose

$$I(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt.$$

1. Montrer que $I(f)$ est un entier.

Soit P un polynôme complexe. On pose $f_P(t) = P(e^{it})$. On admet le théorème de d'Alembert dans la question 2 mais pas dans la question 3.

2. Caractériser $I(f_P)$ à l'aide des zéros de P.
3. En utilisant $P(re^{it})$ pour r variable, donner une preuve du théorème de D'Alembert-Gauss.

Exercice 652 (Ulm)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^{∞}. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$. Pour $\lambda > 0$, on pose $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{\lambda} f(t)\, dt$. Trouver un équivalent de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers l'infini.

Exercice 653 (Ulm)

1. Soient $\Phi :]a,b[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, croissante et $h : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue ($-\infty < a < b \leq +\infty$). Soit $\xi \in]a,b[$ tel que $h(\xi) \neq 0$ et $\Phi'(\xi) \neq 0$. Soit enfin $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose
$$I_n = \int_a^{\xi + \alpha\frac{\ln n}{n} + \frac{\beta}{n}} h(x) e^{n\Phi(x)}\, dx.$$
Trouver un équivalent de I_n.
2. Soit $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Pour n impair, on note $-x_n$ l'unique racine réelle de P_n. Trouver un développement asymptotique de x_n sous la forme $x_n = \xi n + \alpha \ln n + \beta + o(1)$.

Exercice 654 (Ulm)

Soit $N : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$ une application vérifiant les trois axiomes d'une norme :

(i) $\forall u \in \mathbb{Z}^2,\ N(u) = 0 \iff u = 0$;

(ii) $\forall u \in \mathbb{Z}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{Z},\ N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$;

(iii) $\forall (u,v) \in (\mathbb{Z}^2)^2,\ N(u+v) \leq N(u) + N(v)$.

Montrer que N se prolonge de façon unique en une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 655 (Ulm)

Soient E un espace euclidien et $f : E \to E$. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que :
$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \big|\|f(x) - f(y)\| - \|x - y\|\big| \leq \delta.$$
Montrer qu'il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $x \in E$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\varphi(n)} f(\varphi(n)x)$ existe et que l'application qui à x associe cette limite est une isométrie de E.

Exercice 656 (Ulm)

Soit X une partie non vide et sans point isolé d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Montrer que si toute fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue alors X est compacte.

Exercice 657 (ULSR)

Soit $p > 1$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$.

1. Soit q défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que
$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \qquad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$
et en déduire l'inégalité de Hölder :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \qquad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$
où $\langle x, y\rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que l'application $p \mapsto \|x\|_p$ est décroissante sur $]1, +\infty[$ pour tout x. Quelle est sa limite lorsque $p \to +\infty$? Dessiner la boule unité fermée de $\|\cdot\|_p$ dans $\mathbb{R}^2$ pour plusieurs valeurs de p.
4. Soit $1 < p' < p$. Montrer que $\|\cdot\|_{p'} \leq n^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}} \|\cdot\|_p$. Prouver que l'égalité peut être réalisée avec un vecteur x non nul.

Exercice 658 (Ulm)

On admet que pour toute fonction continue $f : [0,1]^2 \to \mathbb{C}^*$, il existe une fonction continue $g : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ telle que $f(s,t) = e^{ig(s,t)}$ pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $h : [0,1]^2 \to \mathbb{C}^*$ vérifiant :
$$\begin{cases} \forall t \in [0,1], & h(1,t) = h(0,t), \\ \forall s \in [0,1], & h(s,0) = 1 \text{ et } h(s,1) = e^{2i\pi s}. \end{cases}$$
2. Soient $p_1 : [0,1] \to [0,1]^2$ et $p_2 : [0,1] \to [0,1]^2$ deux fonctions continues reliant respectivement $(0,0)$ à $(1,1)$, et $(1,0)$ à $(0,1)$. Montrer que les images de ces fonctions ont un point d'intersection.

Exercice 659 (Lyon)

Soit K un corps et $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On note $\widetilde{A}$ la transposée de la comatrice de A. Montrer que $\widetilde{A}$ est un polynôme en A. On traitera pour commencer le cas $K = \mathbb{R}$.

Exercice 660 (Lyon)

On dit qu'une famille $(D_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de disques fermés de $\mathbb{R}^2$ vérifie la propriété (P) si pour $s \neq t$ les disques D_s et D_t ont des centres distincts et si, pour $s < t$, on a $D_s \subset D_t$.

1. Existe-t-il une telle famille de disques ?
2. Soit $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$ injective de classe $\mathcal{C}^1$. Existe-t-il une famille $(D_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ vérifiant (P) et telle que $A(t)$ soit le centre de D_t pour tout t ?
3. Même question en supposant A seulement continue.

Exercice 661 (X)

Soit E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire non nulle. Montrer que f est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

Exercice 662 (Ulm)

On note $\mathcal{B}$ l'espace des fonctions bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et C le sous-espace des fonctions continues sur $[0,1]$. On les munit de la norme infinie. Démontrer qu'il n'existe pas d'application linéaire continue T de $\mathcal{B}$ dans C telle que $T(f) = f$, pour tout $f \in C$.

Exercice 663 (ULSR)

Soit K une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. On suppose que pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E telle que $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe une partie finie J de I telle que $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$. Déterminer les morphismes d'algèbres de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 664 (Lyon)

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On note E_q l'ensemble des matrices $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A^q = I_n$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme triple $|||\cdot|||$ associée à une norme quelconque $\|\cdot\|$ de $\mathbb{C}^n$.

1. Que dire de $A \in E_q$ si 1 est la seule valeur propre de A ?
2. Montrer que I_n est un point isolé de E_q.
3. Soit $A_0 \in E_q$. Montrer l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que si $A \in E_q$ et $|||A - A_0||| < \varepsilon$, alors A et A_0 sont semblables.

Exercice 665 (Ulm)

Soit
$$S = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^2 = I_n\}.$$

1. Montrer que I_n est un point isolé de S.
2. Montrer que, si $n \geq 2$, une symétrie par rapport à un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ n'est pas isolée dans S.
3. Montrer que S n'est pas compact.
4. Pour $A \in S \setminus \{\pm I_n\}$ on pose
$$\delta(A) = \inf_{(X,Y)\in E} \|X - Y\|,$$
où
$$E = \{(X,Y),\ X \in \ker(A - I_n),\ Y \in \ker(A + I_n),\ \|X\| = \|Y\| = 1\}$$
et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère l'ensemble
$$S_\varepsilon = \{A \in S \setminus \{\pm I_n\},\ \delta(A) \geq \varepsilon\}.$$
Montrer que S_ε est compact.

Exercice 666 (Ulm)

Soient $n \geq 2$ un entier, $r \in [\![1, n-1]\!]$, J_r la matrice diagonale dont les r premiers coefficients sur la diagonale valent 1 et les autres 0, et
$$\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^2 = M \text{ et } \operatorname{rg} M = r\}.$$

Montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant J_r, V un ouvert de $\mathbb{R}^{2r(n-r)}$ et $f : V \to U \cap \mathcal{P}$ un homéomorphisme.

Exercice 667 (Ulm)

Soient E un espace euclidien et K une partie compacte de E contenant une base de E. Pour u dans $S^+(E)$, on pose
$$C_u = \{x \in E,\ \langle x, u(x)\rangle \leq 1\}.$$

1. Montrer que l'ensemble A des u de $S^+(E)$ tels que $K \subset C_u$ est un compact de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que det atteint son maximum sur A en un unique point u et que ce point appartient à $S^{++}(E)$.

Exercice 668 (Ulm)

Soit X l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\ker A$ n'est pas inclus dans $\operatorname{Im} A$.

1. Montrer que X est connexe par arcs.
2. Quelle est l'adhérence de X ?

Exercice 669 (Ulm)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose
$$E_n = \left\{ M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \chi_M = \prod_{i=1}^{n}(X - m_{ii}) \right\}.$$

1. L'ensemble E_n est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Est-ce un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
3. Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans E_n.

Exercice 670 (X)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que l'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable dans un sous-espace stable est diagonalisable.
2. Soit $A \subset \mathcal{L}(E)$ formée d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Montrer que les éléments de A admettent une base commune de diagonalisation.

Exercice 671 (X)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $i \in I$, $f_i \in \mathbb{C}[g]$.

Exercice 672 (X)

Trouver les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que
$$X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 673 (Ulm)

Soit $n \geq 2$ un entier, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $[A, B] = AB - BA$ et on considère $L \in \mathcal{M}_{n(n-1)^2,n}(\mathbb{C})$ la matrice par blocs

$$L = \begin{pmatrix} [A, B] \\ [A, B^2] \\ \vdots \\ [A^i, B^j] \\ \vdots \\ [A^{n-1}, B^{n-1}] \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun si, et seulement si, la matrice L vérifie $\mathrm{rg}(L) < n$.
2. Montrer que l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que A et ${}^tA$ n'ont pas de vecteur propre commun est un ouvert dense.

Exercice 674 (Ulm)

Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A + \widetilde{A}$ soit scalaire, où $\widetilde{A}$ est la transposée de la comatrice de A.

Exercice 675 (Ulm)

Soit $n \geq 2$ et p un nombre premier. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ contient une matrice non trigonalisable.

Exercice 676 (Ulm)

Déterminer le nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour $n \leq 4$.

Exercice 677 (Ulm)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n. Déterminer le nombre de classes de similitude de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la réunion est l'ensemble des matrices ayant P pour polynôme caractéristique.

Exercice 678 (Ulm)

Soit K un corps infini, E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'ensemble des sous-espaces stables par u est fini si, et seulement si, le polynôme minimal de u est de degré n.

Exercice 679 (Ulm)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $K[A] = C(A)$ si, et seulement si, A est cyclique.

Exercice 680 (Lyon)

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On note π le polynôme minimal de u. Pour tout $x \in E$, on note

$$E_x = \{P(u)(x),\ P \in K[X]\}.$$

1. On suppose π irréductible. Soit F un sous-espace de E stable par u et $x \in E$. Montrer que $E_x \subset F$ ou $E_x \cap F = \{0\}$. Montrer qu'il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ de E tels que
$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{x_i}.$$
2. Montrer le même résultat en supposant que la décomposition de π en facteurs irréductibles est sans facteur carré.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ telle que $A^4 = I_n$. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{Q})$ telle que $P^{-1}AP$ appartienne à $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 681 (SR)

Pour quelles valeurs de n existe-t-il un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ isomorphe au groupe additif $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$?

Exercice 682 (Lyon)

Soit K un corps commutatif fini de cardinal q. Déterminer le cardinal de $GL_n(K)$ et celui de $SL_n(K)$.

Exercice 683 (Ulm)

Soit p un nombre premier impair. Déterminer le nombre de matrices A de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ telles que $A^2 = I_n$.

Exercice 684 (Ulm)

Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'on peut écrire

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$$

avec $r \geq 0$, où, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, E_i est un sous-espace vectoriel tel que :

(i) il existe $x_i \in E_i$ et $d_i \geq 1$ tels que

$$\left(x_i, f(x_i), \ldots, f^{d_i - 1}(x_i)\right)$$

soit une base de E_i ;

(ii) le polynôme minimal de l'induit de f sur E_{i+1} divise celui de l'induit de f sur E_i pour $i < r$.

Indication. On pourra utiliser le fait que le polynôme minimal est atteint par un polynôme minimal ponctuel.

Exercice 685 (Ulm)

Soit $p \geq 3$ un nombre premier et M une matrice de $GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. L'application $X \mapsto MX$ est une permutation de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. Quelle est sa signature ? On pourra utiliser sans le redémontrer le fait que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est un groupe cyclique.

Exercice 686 (Ulm)

1. Quel est le cardinal de $GL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$? de $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$?
2. Montrer qu'il n'existe aucun morphisme surjectif de groupes de $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucun sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ de cardinal 12.
4. Le groupe $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est-il isomorphe à $\mathfrak{S}_4$?
5. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes surjectif de $SL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ sur $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 687 (Ulm)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $a_{ij} = \operatorname{pgcd}(i, j)$. Calculer $\det A$.

Exercice 688 (Lyon)

Soit A un anneau commutatif et $G = SL_2(A)$ l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients dans A et de déterminant 1.

1. Montrer que G est un groupe pour le produit matriciel.
2. On prend $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier. Calculer $\operatorname{Card} G$. Dans le cas où $p = 2$, étudier l'ordre des éléments de G ; reconnaître un groupe connu isomorphe à G.
3. On prend $A = \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$. Quel est le cardinal de G ? Montrer que tout élément de G a un ordre inférieur ou égal à $3 \times 2^{n-1}$.

Exercice 689 (Ulm)

Soit p un nombre premier. On note $\mathrm{SO}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ telles que

$${}^tMM = I_2 \qquad \text{et} \qquad \det M = 1.$$

Soit u_p le cardinal de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Montrer que $u_2 = 2$, que $u_p = p - 1$ si $p \equiv 1$ [4] et enfin que $u_p = p + 1$ si $p \equiv 3$ [4].

Exercice 690 (X)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + {}^tX = (\operatorname{Tr} X)A$, où l'inconnue X est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 691 (X)

Montrer que pour $n \geq 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ rencontre $GL_n(K)$.

Exercice 692 (SR)

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur associée. Montrer que l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 693 (Ulm)

Déterminer le cardinal maximum d'une famille de matrices de $GL_n(\mathbb{C})$ qui anticommutent deux à deux.

Exercice 694 (X)

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose que f admet un maximum global en a avec de plus $f''(a) < 0$. Donner un équivalent quand n tend vers l'infini de

$$I_n = \int_a^b e^{nf(x)}\, dx.$$

Exercice 695 (X)

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence ≥ 1. Pour $x \in]-1, 1[$, soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. On suppose que $\sum a_n$ converge. Montrer que $f(x)$ a une limite finie lorsque $x \to 1^-$. La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose que $f(x)$ a une limite finie lorsque x tend vers 1^- et que $a_n = o(1/n)$. Montrer que $\sum a_n$ converge.

Exercice 696 (X)

Trouver l'adhérence de $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ M^p = I_n\}$.

Exercice 697 (Ulm)

1. Trouver l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Trouver l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble des matrices cycliques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On rappelle que A est dite cyclique si $\mu_A = \chi_A$, ce qui équivaut à l'existence d'un vecteur X tel que

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Vect}(X, AX, \dots, A^{n-1}X).$$

Exercice 698 (Ulm)

Montrer que l'ordre de toute matrice A de $GL_2(\mathbb{Z})$ est infini ou égal à $1, 2, 3, 4$ ou 6. Montrer que dans chaque cas hormis 1, il existe une infinité de matrices de cet ordre.

Exercice 699 (ULSR)

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et de période π. On note E l'ensemble des solutions de

$$y'' + qy = 0.$$

On note $f : C^2(\mathbb{R}) \to C^2(\mathbb{R})$ l'application qui à ϕ associe $x \mapsto \phi(x + \pi)$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel dont on précisera la dimension.
2. Montrer que f induit un endomorphisme de E noté $\widetilde{f}$.
3. Montrer :
$$\det(\widetilde{f}) = 1.$$
4. On suppose $|\operatorname{tr}(\widetilde{f})| < 2$. Montrer que E est constitué de fonctions bornées.
5. On suppose $|\operatorname{tr}(\widetilde{f})| > 2$. Montrer que la fonction nulle est la seule fonction bornée de E.
6. On suppose $|\operatorname{tr}(\widetilde{f})| = 2$. Montrer que E contient une fonction bornée non nulle.
7. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2, nulle en a et b et strictement positive sur $]a, b[$. On admet que, pour une telle fonction,
$$\int_a^b \frac{|\phi''(t)|}{\phi(t)}\, dt > \frac{4}{b-a}.$$
Montrer que si q est positive, q n'est pas la fonction nulle et
$$\int_0^\pi q(t)\, dt \leq \frac{4}{\pi},$$
alors E ne contient que des fonctions bornées.

Exercice 700 (X)

1. Prouver que l'application $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à X associe $(\det X)X^{-1}$ admet un et un seul prolongement continu $\overline{\varphi}$ à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que
$$\left(\frac{d}{dt}\{\det(A + tB)\}\right)_0 = \mathrm{Tr}(\overline{\varphi}(A)B).$$