uOttawa

Département de
mathématiques et de statistique

MAT 1741
Automne 2026
Test 2
3 novembre
Durée: 80 minutes

Nom: _____

Numéro étudiant: _____

Signature: _____

Ce contrôle contient 10 pages et 15 questions.

Il s'agit d'un examen à livre fermé. Les calculatrices, les appareils électroniques de toute sorte et les notes de cours ne sont pas permis.

Des feuilles supplémentaires sont fournies pour le brouillon. Vous pouvez les utiliser librement, mais elles ne seront pas corrigées. **Seules les réponses inscrites dans les espaces prévus à cet effet dans ce cahier, ainsi que les réponses cochées ou encerclées aux questions vrai ou faux et à choix multiples, seront prises en compte lors de la correction.**

Pour les questions 1 à 6, aucune justification n'est requise. Pour les questions 7 à 10, **il peut y avoir plus d'une bonne réponse**; cochez **TOUTES** les réponses qui s'appliquent. Pour les questions 11 à 14, seule la réponse finale sera notée. Pour la question 15, vous devez justifier votre démarche.

Tableau des notes (à l'usage du correcteur seulement)

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8
Points:	½	½	½	½	½	½	1	1
Score:								

Question:	9	10	11	12	13	14	15	Total
Points:	1	1	1	1	1	1	4	15
Score:								

Bon succès!

I. Vrai ou faux? [3 points]

Aucune justification n'est requise.

1. [½ point] Si U et W sont des sous-espaces d'un espace vectoriel V, alors $U \cup W$ est aussi un sous-espace de V.

   A. Vrai B. Faux

2. [½ point] Tout ensemble de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est linéairement dépendant.

   A. Vrai B. Faux

3. [½ point] Soit $V = \text{Vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est linéairement dépendant, alors $\dim(V) \leq 2$.

   A. Vrai B. Faux

4. [½ point] Si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est linéairement dépendant et qu'aucun de ces vecteurs n'est nul, alors au moins un des trois vecteurs est un multiple scalaire d'un autre.

   A. Vrai B. Faux

5. [½ point] Tout système linéaire homogène de quatre équations à cinq inconnues a une infinité de solutions.

   A. Vrai B. Faux

6. [½ point] Si la forme échelonnée d'une matrice augmentée contient une ligne de zéros, alors le système linéaire correspondant a une infinité de solutions.

   A. Vrai B. Faux

II. Questions à choix multiples [4 points]

Attention: pour les questions 7 à 10, **il peut y avoir plus d'une bonne réponse**. Cochez **TOUTES** les réponses qui s'appliquent.

7. [1 point] Considérez l'ensemble

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}.$$

Lesquels des énoncés suivants sont vrais?

- ◯ W est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.
- ◯ $W = \text{Vect}\{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.
- ◯ $\dim(W) = 1$.
- ◯ $(1, 1, 1) \in W$.

8. [1 point] Supposons que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ soit un ensemble linéairement indépendant.

Lesquels des ensembles suivants sont linéairement dépendants?

- ◯ $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w} + \mathbf{u}\}$
- ◯ $\{\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{w} - \mathbf{u}\}$
- ◯ $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}\}$
- ◯ $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$

9. [1 point] La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée d'un système linéaire à quatre inconnues est

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Lesquels des énoncés suivants sont vrais?

- ◯ Le système est compatible.
- ◯ Le système a une solution unique.
- ◯ x_3 est une variable non directrice.
- ◯ La solution générale dépend d'un paramètre.

10. [1 point] Soit V un espace vectoriel de dimension 4, et soit

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} \subseteq V.$$

Lesquels des énoncés suivants sont nécessairement vrais?

- ◯ Si S est linéairement indépendant, alors S est une base de V.
- ◯ Si S engendre V, alors S est une base de V.
- ◯ Tout ensemble de trois vecteurs de V est linéairement indépendant.
- ◯ Tout ensemble de cinq vecteurs de V est linéairement dépendant.

III. Questions à réponse courte [4 points]

Seule la réponse finale sera notée.

11. [1 point] Pour quelle valeur de k l'ensemble

$$\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,k)\}$$

est-il linéairement dépendant?

Réponse:

12. [1 point] Trouvez la dimension de

$$\text{Vect}\{1+x,\ x+x^2,\ 1+2x+x^2\}$$

dans $\mathbb{P}_2$.

Réponse:

13. [1 point] La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée d'un système linéaire est

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Écrivez la solution générale du système.

Réponse:

14. [1 point] Considérez le système linéaire dont la matrice augmentée est

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & h \end{array}\right].$$

Pour quelles valeurs de h le système est-il incompatible?

Réponse:

IV. Question à développement [4 points]

15. Considérez l'ensemble S de toutes les solutions du système linéaire homogène

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = 0, \\ 2x + 3y + z + 2w = 0, \\ x + y + 2z + w = 0. \end{cases}$$

(a) [2½ point] Utilisez l'élimination de Gauss pour déterminer la solution générale du système. Montrez les principales étapes de votre réduction.

(b) [1½ point] Écrivez S sous la forme

$$S = \text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\},$$

puis donnez une base de S et déterminez $\dim(S)$.

Espace de travail additionnel

Espace de travail additionnel

Espace de travail additionnel

Espace de travail additionnel