TABLE DES MATIÈRES

AVERTISSEMENT

Nous présentons ici une réédition légèrement révisée du Séminaire original, dont le but et le contenu se trouvent indiqués dans l'Introduction. La révision a consisté pour l'essentiel dans la correction de fautes de frappe, l'addition (en notes de bas de page) de quelques remarques ou références supplémentaires, le découpage actuel en trois volumes munis chacun d'une table des matières détaillée et d'un index des notations, l'adjonction d'un index terminologique à la fin du volume 3. De plus, l'exposé $\mathrm{VI_B}$ de J.-E. Bertin a été partiellement réécrit par ses soins, notamment les paragraphes 5 et 10, de sorte que certaines références à cet exposé sont différentes des références à l'exposé originel. Le lecteur trouvera une liste des exposés du Séminaire au début du présent volume.

Depuis la parution de la première édition du présent Séminaire a paru la totalité des Éléments de Géométrie Algébrique, Chap. IV, ce qui rend inutile certains passages du Séminaire ; nous avons signalé parfois en note de bas de page les références pertinentes à EGA IV qui permettent de court-circuiter de tels passages.

Pour un autre exposé sur les groupes algébriques utilisant systématiquement le langage des schémas, nous signalons le livre de M. Demazure et P. Gabriel, Groupes Algébriques (North-Holland & Masson et Cie). Contrairement au présent Séminaire, ce livre ne suppose aucune connaissance de Géométrie Algébrique, mais contient tous les préliminaires nécessaires de théorie des schémas, et sa lecture peut donc servir d'introduction à l'étude de notre Séminaire. (Il contient d'ailleurs des thèmes non couverts dans le Séminaire, comme la théorie de structure à la Dieudonné des groupes algébriques affines commutatifs, dans *loc. cit.* Chap. V.)

Bures-sur-Yvette, Mars 1970

INTRODUCTION

1. Le but du présent séminaire est double.

D'une part, nous visons à donner des fondements commodes pour la théorie des schémas en groupes en général. Les exposés I à IV donneront à cet égard les indispensables exercices préliminaires de syntaxe schématique et catégorique. Pour obtenir un langage qui « colle » sans effort à l'intuition géométrique, et éviter des circonlocutions insupportables à la longue, nous identifions toujours un préschéma X sur un autre S au foncteur $(\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ qu'il représente [(*)], et il est nécessaire de donner de nombreuses définitions de telle façon qu'elles s'appliquent à des foncteurs quelconques, représentables ou non. D'ailleurs, presque tous les foncteurs que nous aurons à utiliser seront des « faisceaux » (pour la « topologie fidèlement plate quasi-compacte ») ; l'exposé IV, qui ne traite des groupes que de façon accessoire, donne une esquisse du langage de la « localisation » et des faisceaux, qui s'avère également fort commode dans les questions de représentabilité des foncteurs. Cet exposé nous fournira surtout, pour les questions de passage au quotient, le cadre le plus commode pour la suite.

L'exposé V donne quelques résultats généraux sur l'existence de quotients, repris dans l'exposé VI_{A} dans le cas du quotient d'un groupe algébrique sur un corps (ou plus généralement, sur un anneau artinien) par un sous-groupe [(**)]. Ce dernier exposé et l'exposé VI_{B} qui lui fait suite contiennent également divers résultats élémentaires spéciaux aux groupes algébriques sur un corps, couramment utilisés par la suite.

L'exposé VII étudie certains faits liés à la caractéristique du corps de base et développe notamment avec la généralité qui convient la correspondance entre schémas en groupes radiciels de hauteur 1 et p-algèbres de Lie restreintes.

[(*)] Un tel point de vue semble avoir été envisagé pour la première fois il y a huit ou neuf ans à propos de la théorie des groupes formels par P. Cartier, qui n'a pas pris la peine malheureusement de le préciser et de le systématiser comme il le méritait.

[(**)] Pour une étude plus approfondie du passage au quotient, notamment par les groupes réductifs, voir l'importante étude de D. Mumford, Geometric Invariant Theory, Ergebnisse der Mathematik, Bd 34, Springer 1965. Observons que sur un point important, la terminologie de ce livre ne concorde pas avec la nôtre, car sur un corps de caractéristique $p > 0$, les groupes que Mumford appelle « réductifs » [(1)], sont les groupes lisses de type multiplicatif au sens du Séminaire (cf. Exp. IX). On peut sans doute considérer que l'acception de Mumford du sens du mot « réductif », qui perd sa signification sur une base qui n'est pas un corps, a été adoptée par lui à titre provisoire et comme une sorte de pis aller (et c'est aussi à peu près ce qu'explique Mumford pour d'autres motifs, dès le second alinéa de sa préface !). [(1)] N.D.E. : voir les remarques ajoutées à la fin de cette Introduction.

Enfin, l'exposé XVIII contient la généralisation, en théorie des schémas, du théorème de Weil sur la définition « birationnelle » des groupes algébriques.

D'autre part, nous nous proposons de généraliser aux groupes sur un préschéma de base quelconque, la théorie de structure de Borel-Chevalley des groupes algébriques affines. Il est d'ailleurs apparu à l'occasion de la rédaction des notes du séminaire que l'hypothèse affine était inutile pour de nombreux résultats de la théorie. Les résultats les plus complets sont obtenus évidemment dans les cas des « schémas en groupes semi-simples » ou plus généralement « réductifs », dont nous nous occuperons exclusivement à partir de l'exposé XIX. Chevalley lui-même avait déjà donné la construction des groupes « de Tôhoku » au-dessus de l'anneau des entiers, construction qui sera reprise dans le présent séminaire. Le théorème d'unicité principal (2) donne une caractérisation simple des variantes « tordues » de ces groupes de Tôhoku, sur un préschéma de base S : ce sont les groupes affines et lisses sur S, dont les fibres géométriques sont des groupes semi-simples connexes au sens habituel (***) (2).

2. Comme dans le cas de la théorie connue sur un corps algébriquement clos, un rôle crucial est joué par les sous-tores des schémas en groupes envisagés. Aussi l'étude préliminaire des tores, et plus généralement des « schémas en groupes de type multiplicatif », (tant du point de vue intrinsèque que du point de vue des sous-groupes de type multiplicatif d'un groupe donné), prend une assez large place dans ce Séminaire (exposés VIII à XII). Leur remarquable rigidité (plus grande même à certains égards que celle des schémas abéliens, ou des schémas en groupes semi-simples) en fait des instruments de travail très efficaces pour l'étude de certains groupes plus généraux.

3. À partir de l'exposé XII (à l'exclusion de l'exposé XVIII déjà mentionné) nous utiliserons couramment la théorie des groupes algébriques affines sur un corps algébriquement clos, que le lecteur trouvera dans le Séminaire Chevalley 1956, plus particulièrement dans les exposés IV à IX de ce Séminaire. Nous utiliserons également, mais dans une moindre mesure, les exposés ultérieurs du Séminaire Chevalley, consacrés à la structure des groupes algébriques semi-simples. En effet, nous reprendrons la théorie de Chevalley directement dans le cadre des schémas : on verra que de cette façon (même sur un corps de base) l'exposé gagne en simplicité et en précision.

4. L'objet principal du présent Séminaire est évidemment de développer des techniques qui s'appliquent à l'étude des schémas en groupes sur une base quelconque, i.e. essentiellement à l'étude des *familles* de groupes algébriques. À ce titre, les propriétés infinitésimales de telles familles, et en particulier le cas d'un schéma de base artinien, jouent un rôle important. Ces propriétés interviennent même pour l'étude

(***) C'est là le résultat essentiel de la thèse de M. Demazure (*Schémas en groupes réductifs*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 369-413).

(2) N.D.E. : Ceci fait référence au corollaire XXIII.5.6, qui se déduit facilement du théorème d'unicité pour les groupes réductifs *déployés* (cf. XXIII, th. 4.1 et cor. 5.2), étant donné que tout S-groupe semi-simple est une « forme tordue » (pour la topologie étale) d'un groupe « de Tôhoku » (cf. XXII, cor. 2.3).

des groupes algébriques sur un corps k, dans le cas où ce dernier n'est pas parfait, pour pouvoir notamment appliquer la technique de descente dans le cas non galoisien. Parmi les résultats nouveaux obtenus dans ce cas, signalons l'existence de tores maximaux et de sous-groupes de Cartan dans un groupe algébrique lisse quelconque, la rationalité de la variété des tores maximaux, et divers résultats connexes (Exp. XIV [(3)]), ou la correspondance entre les « formes » d'un groupe semi-simple et les fibrés principaux homogènes sous un groupe algébrique semi-simple (en général non connexe) convenable (Exp. XXIV, 1.16–1.20). De façon générale, on peut dire que les méthodes requises pour travailler sur un corps de base non parfait sont essentiellement celles utilisées pour les préschémas de base quelconques, et par là sortent du cadre de la géométrie algébrique classique.

5. Il n'a pas semblé utile d'indiquer en tête des exposés rédigés la date ou les dates des exposés oraux correspondants du Séminaire. Contentons-nous de dire que l'ordre des exposés multigraphiés (de I à XXVI) correspond bien à l'ordre des exposés oraux. Par ailleurs, la rédaction du texte définitif est parfois nettement postérieure à celle de l'exposé oral, et souvent en diffère assez substantiellement, le texte rédigé étant généralement plus détaillé et plus complet (tels les Exp. IV et $\mathrm{VII_B}$), voire sensiblement plus général (tel l'Exp. XII ou $\mathrm{VII_B}$) que l'exposé oral. D'autres exposés rédigés ne correspondent à aucun exposé oral ($\mathrm{VI_B}$, $\mathrm{VII_A}$, XV, XVI, XVII, et l'essentiel de XXVI), et ont été rédigés et insérés dans le Séminaire multigraphié, soit pour fournir des références commodes pour divers autres exposés (c'est notamment le cas de $\mathrm{VI_B}$), soit parce qu'ils constituent un prolongement naturel des notions et techniques déjà développées. On notera comme conséquence que la lecture des exposés $\mathrm{VII_A}$, $\mathrm{VII_B}$, XV, XVI, XVII n'est pas nécessaire pour l'étude du reste du Séminaire, et notamment pour la partie de ce Séminaire consacrée aux schémas en groupes réductifs.

6. De la théorie des schémas, nous utiliserons surtout le langage général des schémas, exposé dans EGA I, les notions de morphisme plat, morphisme étale, morphisme lisse, exposées dans SGA 1, I à V, enfin la théorie de la descente fidèlement plate de SGA 1, VIII. Nous avons dans la mesure du possible évité de formuler des hypothèses noethériennes inutiles, ce qui nous a obligés en revanche à remplacer l'habituelle hypothèse « de type fini » par l'hypothèse « de présentation finie ». Pour la notion de morphisme de présentation finie, le lecteur consultera EGA IV, 1.4 et 1.6. Les résultats de SGA 1, I à IV, énoncés le plus souvent dans le contexte noethérien, seront développés dans le cas général dans EGA IV [(****)], où seront développées également en détail des méthodes standard pour réduire certains types d'énoncés (faisant intervenir des hypothèses de présentation finie) au cas noethérien (EGA IV, paragraphes 8, 9, 11). Le lecteur qui ne voudra pas admettre ces résultats de EGA IV pourra simplifier certains énoncés ou leur démonstration en supposant le préschéma de base localement noethérien. Il s'expose cependant à des difficultés dans les cas où la démonstration

[(****)] Depuis la rédaction de cette introduction, les quatre parties (§§ 1 à 21) de EGA IV sont parues.

[(3)] N.D.E. : en particulier, théorèmes 1.1 et 6.1.

procède par descente de $\widehat{\mathrm{A}}$ à A, où $\widehat{\mathrm{A}}$ est le complété d'un anneau local noethérien A, car cette méthode amène à introduire l'anneau (en général non noethérien) $\widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \widehat{\mathrm{A}}$.

7. Les références se feront suivant le système décimal habituel : la référence 5.7.11 renvoie à la proposition (ou lemme, définition, etc.) de ce nom dans le même exposé ; dans la référence XVII 7.8 le chiffre romain indique le numéro de l'exposé. Nous utiliserons les sigles suivants pour nos références standard :

Bible	=	Séminaire Chevalley « Groupes de Lie algébriques », 1956/58
EGA X, x.y.z	=	J. Dieudonné et A. Grothendieck, Éléments de Géométrie Algébrique, Chap. X, énoncé x.y.z (ou sous-paragraphe x.y, etc.)
SGA n, X y.z	=	Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, année n, énoncé y.z de l'exposé X.
TDTE	=	A. Grothendieck, Techniques de descente et Théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique, exposés dans le Séminaire Bourbaki entre 1959 et 1962.

(1) N.D.E. : Concernant le quotient par un groupe réductif, la situation a beaucoup évolué depuis la rédaction de la Note (∗∗) par A. Grothendieck. En effet, pour un groupe algébrique affine sur un corps arbitraire k, la « bonne » notion, introduite par Mumford, est celle de groupe « *géométriquement* réductif ». (On dit, d'autre part, que G est « *linéairement* réductif » si toute représentation rationnelle de G est complètement réductible, mais, comme signalé dans la Note (∗∗), cette condition est trop contraignante si $\mathrm{car}(k) > 0$). D'après les résultats de M. Nagata et W. J. Haboush ([**Na64**], [**NM64**], [**Ha75**]), les k-groupes géométriquement réductifs sont exactement les k-groupes réductifs au sens du présent Séminaire. Pour tout ceci, voir les éditions ultérieures du livre de Mumford ([**MF82**]). De plus, l'extension au cas d'une base arbitraire de la notion de « réductivité géométrique », et de ses conséquences pour le passage au quotient, a été faite par C. S. Seshadri ([**Se77**]), et des additions, dues à M. Raynaud, se trouvent dans l'article [**CTS79**] de J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc. Enfin, pour des développements plus récents concernant le passage au quotient par un groupe algébrique ou, plus généralement, par un groupoïde (cf. l'Exposé V du présent Séminaire), signalons les articles [**Ko97**] et [**KM97**] de J. Kollar et de S. Keel et S. Mori.

Bibliographie

[CTS79] J.-L. Colliot-Thélène & J.-J. Sansuc, *Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles*, Math. Ann. **244** (1979), 105-134.

[Ha75] W. J. Haboush, *Reductive groups are geometrically reductive*, Ann. of Math. **102** (1975), n°1, 67-83.

[KM97] S. Keel & S. Mori, *Quotient by groupoids*, Ann. of Math. **145** (1997), n°1, 193-213.

[Ko97] J. Kollár, *Quotient spaces modulo algebraic groups*, Ann. of Math. **145** (1997), n°1, 33-79.

[MF82] D. Mumford & J. Fogarty, *Geometric invariant theory*, 2ème éd., Springer-Verlag, 1982 ; (resp. 3ème éd., avec F. Kirwan, 1994).

[Na64] M. Nagata, *Invariants of a group in an affine ring*, J. Math. Kyoto Univ. **3** (1964), n°3, 369-377.

[NM64] M. Nagata & T. Miyata, *Note on semi-reductive groups*, J. Math. Kyoto Univ. **3** (1964), n°3, 379-382.

[Se77] C. S. Seshadri, *Geometric reductivity over an arbitrary base*, Adv. Math. **26** (1977), n°3, 225-274.

EXPOSÉ I

STRUCTURES ALGÉBRIQUES. COHOMOLOGIE DES GROUPES

par M. Demazure

Cet exposé se compose de deux parties ; la première rassemble un certain nombre 1
de définitions générales et pose des notations qui seront souvent utilisées par la suite, la seconde traite de la cohomologie des groupes et aboutit au théorème 5.3.3 (nullité de la cohomologie des groupes diagonalisables).

Nous choisissons une fois pour toutes un Univers. [1] Toutes les définitions posées et toutes les constructions effectuées seront relatives à cet Univers. Nous nous permettrons systématiquement l'abus de langage suivant : pour définir un foncteur $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$, nous nous contenterons de définir l'objet $f(\mathrm{S})$ de $\mathscr{C}'$ pour tout objet S de $\mathscr{C}$, chaque fois qu'il n'y aura aucune ambiguïté sur la manière de définir $f(h)$ pour une flèche h de $\mathscr{C}$. En pratique, nous dirons : soit $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ le foncteur défini par $f(\mathrm{S}) = \cdots$.

1. Généralités

1.1. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On notera $\widehat{\mathscr{C}}$ la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}^\circ, (\mathbf{Ens}))$ des foncteurs contravariants de $\mathscr{C}$ dans la catégorie $(\mathbf{Ens})$ des ensembles. [2] Il existe un foncteur canonique $\mathbf{h} : \mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}$ qui associe à tout $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ le foncteur $\mathbf{h}_\mathrm{X}$ tel que

$$\mathbf{h}_\mathrm{X}(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{X}).$$

Pour tout foncteur $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$, on définit (cf. par exemple EGA 0_{III}, 8.1.4) une 2
bijection

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{h}_\mathrm{X}, \mathbf{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{F}(\mathrm{X}). \qquad [3]$$

En particulier, pour tout couple X, Y d'objets de $\mathscr{C}$, l'application canonique ci-dessous est bijective :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathbf{h}_\mathrm{X}, \mathbf{h}_\mathrm{Y})\,;$$

---

[1] N.D.E. : cf. SGA 4, Exp. I, § 0 et Appendice ; voir aussi la discussion dans [**DG70**], p. xxvi.

[2] N.D.E. : On l'appelle la *catégorie des préfaisceaux* sur $\mathscr{C}$, cf. IV 4.3.1.

[3] N.D.E. : Ce résultat est souvent appelé « Lemme de Yoneda » ; nous utiliserons cette terminologie dans d'autres N.D.E.

i.e. le foncteur $\mathbf{h}$ est *pleinement fidèle*. Il définit donc un isomorphisme de $\mathscr{C}$ sur une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$, et une équivalence de $\mathscr{C}$ avec la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$ formée des foncteurs *représentables* (i.e. isomorphes à un foncteur de la forme $\mathbf{h}_{\mathrm{X}}$). Dans la suite, nous identifierons souvent X et $\mathbf{h}_{\mathrm{X}}$. Les numéros suivants ont pour but de montrer que cette identification peut se faire sans danger.

Remarque 1.1.1. — [(4)] On a parfois besoin de la variante suivante. Soit $\mathscr{D}$ une sous-catégorie *pleine* de $\mathscr{C}$ et soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, notons $\mathbf{h}'_{\mathrm{X}}$ et $\mathbf{h}'_{\mathrm{Y}}$ les restrictions à $\mathscr{D}$ de $\mathbf{h}_{\mathrm{X}}$ et $\mathbf{h}_{\mathrm{Y}}$. Alors on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{D}}}(\mathbf{h}'_{\mathrm{X}}, \mathbf{h}'_{\mathrm{Y}})$$

et donc : se donner un morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ « est la même chose » que se donner, de façon fonctorielle en T, une application $\phi(\mathrm{T}) : \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{X}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{Y})$, pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$.

1.2. [(5)] On dira que $\mathbf{F}$ est un *sous-objet* (ou un sous-foncteur) de $\mathbf{G}$ si $\mathbf{F}(\mathrm{S})$ est un sous-ensemble de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ pour chaque S.

Dans $\widehat{\mathscr{C}}$ les limites projectives « quelconques » *existent* et se calculent par :

$$(\varprojlim_i \mathbf{F}_i)(\mathrm{S}) = \varprojlim_i \mathbf{F}_i(\mathrm{S}).$$ [(6)]

En particulier les produits fibrés sont définis par :

$$\big(\mathbf{F} \underset{\mathbf{G}}{\times} \mathbf{F}'\big)(\mathrm{S}) = \mathbf{F}(\mathrm{S}) \underset{\mathbf{G}(\mathrm{S})}{\times} \mathbf{F}'(\mathrm{S}).$$ [(7)]

3 Nous choisirons comme objet final de $\widehat{\mathscr{C}}$ le foncteur $\underline{\mathbf{e}}$ tel que $\underline{\mathbf{e}}(\mathrm{S}) = \{\varnothing\}$ [(8)]. Tout $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$ possède un morphisme unique dans $\underline{\mathbf{e}}$ et on pose

$$\mathbf{F} \times \mathbf{F}' = \mathbf{F} \underset{\underline{\mathbf{e}}}{\times} \mathbf{F}'.$$

Le foncteur $\mathbf{h}$ *commute aux limites projectives* ; en particulier pour que $\mathrm{X} \times \mathrm{X}'$ existe ($\mathrm{X}, \mathrm{X}' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$), resp. pour que $\mathscr{C}$ admette un objet final e, il faut et il suffit que $\mathbf{h}_{\mathrm{X}} \times \mathbf{h}_{\mathrm{X}'}$ soit représentable, resp. $\underline{\mathbf{e}}$ soit représentable, et on a

$$\mathbf{h}_{\mathrm{X}} \times \mathbf{h}_{\mathrm{X}'} \simeq \mathbf{h}_{\mathrm{X} \times \mathrm{X}'} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{h}_e \simeq \underline{\mathbf{e}}\,.$$

---

(4) N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

(5) N.D.E. : On a modifié l'ordre, pour introduire les produits fibrés avant les monomorphismes, cf. N.D.E. (9).

(6) N.D.E. : De même, les limites inductives « quelconques » existent et se calculent « *argument par argument* », c.-à-d., $(\varinjlim_i \mathbf{F}_i)(\mathrm{S}) = \varinjlim_i \mathbf{F}_i(\mathrm{S})$; mais en général le foncteur $\mathbf{h}$ ne commute *pas* aux limites inductives.

(7) N.D.E. : En particulier, le *noyau* d'un couple de morphismes $u, v : \mathbf{F} \rightrightarrows \mathbf{G}$ est le sous-foncteur $\mathrm{Ker}(u, v)$ de $\mathbf{F}$ défini par $\mathrm{Ker}(u, v)(\mathrm{S}) = \{x \in \mathbf{F}(\mathrm{S}) \mid u(x) = v(x)\}$.

(8) N.D.E. : $\{\varnothing\}$ (l'ensemble des parties de l'ensemble vide) désigne l'ensemble à un élément.

Un *monomorphisme* de $\widehat{\mathscr{C}}$ n'est autre qu'un morphisme $\mathbf{F} \to \mathbf{G}$ tel que pour $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, l'application d'ensembles correspondante $\mathbf{F}(\mathrm{S}) \to \mathbf{G}(\mathrm{S})$ soit injective. [(9)]

Le foncteur Γ. Pour tout $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$ on pose

$$\Gamma(\mathbf{F}) = \mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, \mathbf{F});$$

un élément de $\Gamma(\mathbf{F})$ est donc une famille $(\gamma_{\mathrm{S}})_{\mathrm{S}\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$, $\gamma_{\mathrm{S}} \in \mathbf{F}(\mathrm{S})$ telle que pour toute flèche $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, on ait $\mathbf{F}(f)(\gamma_{\mathrm{S}''}) = \gamma_{\mathrm{S}'}$.

On pose $\Gamma(\mathrm{X}) = \Gamma(\mathbf{h}_{\mathrm{X}})$ pour $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Si $\mathscr{C}$ a un objet final e, on a donc un isomorphisme $\Gamma(\mathrm{X}) \simeq \mathrm{Hom}(e, \mathrm{X})$.

1.3. Soit $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. On note $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ la catégorie des objets de $\mathscr{C}$ au-dessus de S, i.e. la catégorie dont les objets sont les flèches $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ de $\mathscr{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(f, f')$ étant le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{T}')$ formé des u tels que $f = f' \circ u$. Si $\mathscr{C}$ possède un objet final e, alors $\mathscr{C}_{/e}$ est isomorphe à $\mathscr{C}$. La catégorie $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ possède un objet final : la flèche identique $\mathrm{S} \to \mathrm{S}$.

Si $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, alors on peut former la catégorie $(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/f}$ que l'on note par abus de langage $(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}}$ et on a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{C}_{/\mathrm{T}} \simeq (\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}}\,.$$

Cette construction s'applique aussi à la catégorie $\widehat{\mathscr{C}}$, on définit en particulier la catégorie $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$. D'autre part, on peut former la catégorie $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$.

Si $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, alors $\Gamma(f)$ s'identifie à l'ensemble $\Gamma(\mathrm{T}/\mathrm{S})$ des 4
sections de T au-dessus de S, c'est-à-dire des flèches $\mathrm{S} \to \mathrm{T}$ inverses à droite de f. Remarquons que $\mathbf{h}_f : \mathbf{h}_{\mathrm{T}} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ est alors un objet de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$ et que l'on a :

$$\Gamma(\mathbf{h}_f) \simeq \Gamma(\mathbf{h}_{\mathrm{T}}/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}) \simeq \Gamma(\mathrm{T}/\mathrm{S}) \simeq \Gamma(f).$$

1.4. On se propose maintenant de définir une *équivalence des catégories* $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$ *et* $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$, c'est-à-dire de prouver que « se donner un foncteur sur la catégorie des objets de $\mathscr{C}$ au-dessus de S, c'est « la même chose » que se donner un foncteur sur $\mathscr{C}$ muni d'un morphisme dans $\mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ ».

(i) **Construction de** $\alpha_{\mathrm{S}} : \widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}} \to \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$.

Soit d'abord $\mathrm{H} : \mathbf{F} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ un objet de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$. On doit définir un foncteur $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$ sur $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. Soit donc d'abord $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$; définissons $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})(f)$ comme l'image inverse de $f \in \mathbf{h}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T})$ par l'application $\mathrm{H}(\mathrm{T}) : \mathbf{F}(\mathrm{T}) \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T})$. [(10)]

[(9)] N.D.E. : Si $\mathbf{F}(\mathrm{S}) \to \mathbf{G}(\mathrm{S})$ est injectif pour tout S, il est clair que $\mathbf{F} \to \mathbf{G}$ est un monomorphisme ; la réciproque se voit en considérant le diagramme $\mathbf{F} \times_{\mathbf{G}} \mathbf{F} \rightrightarrows \mathbf{F} \to \mathbf{G}$. On obtient ainsi que : « $\mathbf{F} \to \mathbf{G}$ *est un monomorphisme si et seulement si le morphisme diagonal* $\mathbf{F} \to \mathbf{F} \times_{\mathbf{G}} \mathbf{F}$ *est un isomorphisme* » (cf. EGA I, 5.3.8). De même, il est clair que si $\mathbf{F}(\mathrm{S}) \to \mathbf{G}(\mathrm{S})$ est surjectif pour tout S, alors $\mathbf{F} \to \mathbf{G}$ est un *épimorphisme*, et la réciproque se voit en considérant la somme amalgamée $\mathbf{G} \coprod^{\mathbf{F}} \mathbf{G}$, cf. la démonstration du lemme 4.4.4 dans l'Exp. IV.

[(10)] N.D.E. : *Par exemple*, si $\mathrm{F} = \mathbf{h}_{\mathrm{X}}$ alors H correspond à un morphisme $h : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ et $\mathrm{H}(\mathrm{T}) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{T}, \mathrm{X}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{T}, \mathrm{S})$ est l'application $g \mapsto h \circ g$, d'où $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathbf{h}_{\mathrm{X}}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}(-, \mathrm{X})$.

Soit ensuite $u : f \to f'$ une flèche de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$; alors $\mathbf{F}(u) : \mathbf{F}(\mathrm{T}') \to \mathbf{F}(\mathrm{T})$ induit une application de $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})(f')$ dans $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})(f)$ que l'on note $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})(u)$. On vérifie aussitôt que les applications

$$f \longmapsto \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})(f) \quad \text{et} \quad u \longmapsto \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})(u)$$

définissent bien un foncteur sur $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, donc un objet $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$ de $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$.

Soient enfin $\mathrm{H} : \mathbf{F} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ et $\mathrm{H}' : \mathbf{F}' \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ deux objets de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$ et $\mathrm{U} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}'$ un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F} \arrow[rr, "\mathrm{U}"] \arrow[dr, "\mathrm{H}"'] & & \mathbf{F}' \arrow[dl, "\mathrm{H}'"] \\
& \mathbf{h}_{\mathrm{S}} &
\end{tikzcd}.$$

5 Alors pour tout $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$, l'application $\mathrm{U}(\mathrm{T}) : \mathbf{F}(\mathrm{T}) \to \mathbf{F}'(\mathrm{T})$ induit une application

$$\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{U})(f) : \quad \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})(f) \longrightarrow \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}')(f),$$

ce qui définit un morphisme de foncteurs

$$\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}) : \quad \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}) \longrightarrow \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}').$$

On vérifie aisément que les applications

$$\mathrm{H} \longmapsto \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}) \quad \text{et} \quad \mathrm{U} \longmapsto \alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{U})$$

définissent bien un foncteur $\alpha_{\mathrm{S}} : \widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}} \to \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$.

(ii) ***Proposition 1.4.1***. — *Le foncteur $\alpha_{\mathrm{S}} : \widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}} \to \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$ est une équivalence de catégories.*

Indiquons seulement le principe de la construction d'un foncteur quasi-inverse $\beta_{\mathrm{S}} : \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}} \to \widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$. Soit $\mathbf{G}$ un foncteur sur $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$; pour tout objet T de $\mathscr{C}$, on pose

$$\beta_{\mathrm{S}}(\mathbf{G})(\mathrm{T}) = \text{somme des ensembles } \mathbf{G}(f) \text{ pour } f \in \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{S}) = \mathbf{h}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T}),$$

ce qui définit un foncteur $\beta_{\mathrm{S}}(\mathbf{G})$ sur $\mathscr{C}$, qui est muni d'une projection évidente sur $\mathbf{h}_{\mathrm{S}}$.

1.5. *L'équivalence α_{S} commute aux foncteurs* Γ. En d'autres termes, si $\mathrm{H} : \mathbf{F} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ est un objet de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$ et $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$ l'objet correspondant de $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$, on a

$$\Gamma(\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})) \simeq \Gamma(\mathrm{H}) \simeq \Gamma(\mathbf{F}/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}).$$

L'équivalence α_{S} commute aux foncteurs $\mathbf{h}$, c.-à-d., si $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, $\mathbf{h}_f : \mathbf{h}_{\mathrm{T}} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ est un objet de $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$ dont le transformé par α_{S} n'est autre que $\mathbf{h}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}(f)$, où

$$\mathbf{h}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}} : \mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$$

6 est le foncteur canonique [(11)]. En conséquence :

[(11)]N.D.E. : cf. la N.D.E. (10).

Proposition 1.5.1. — *Soit* $\mathrm{H} : \mathbf{F} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ *un objet de* $\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}$. *Pour que* $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}) : (\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})^{\circ} \to$ $(\mathbf{Ens})$ *soit représentable, il faut et il suffit que* $\mathbf{F} : \mathscr{C}^{\circ} \to (\mathbf{Ens})$ *soit représentable ; si* $\mathbf{F} \simeq \mathbf{h}_{\mathrm{T}}$, *alors* $\alpha_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$ *est représentable par l'objet* $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ *de* $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$.

L'équivalence α_{S} *est transitive en* S : si $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, on a un diagramme commutatif d'équivalences

$$\begin{tikzcd}
(\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}})_{/\mathbf{h}_{\mathrm{T}}} \arrow[rr, "\alpha_{\mathrm{S}}/\mathbf{h}_{\mathrm{T}}"] \arrow[dr, "\cong"'] & & (\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}})_{/\mathbf{h}_{\mathrm{T}}} \arrow[rr, "\alpha_f"] & & \widehat{(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}}} \arrow[dl, "\cong"] \\
& \widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{T}}} \arrow[rr, "\alpha_{\mathrm{T}}"] & & \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{T}}} &
\end{tikzcd} ,$$

où $\alpha_{\mathrm{S}}/\mathbf{h}_{\mathrm{T}}$ désigne (provisoirement) la *restriction* (cf. 1.6) du foncteur α_{S} aux objets au-dessus de $\mathbf{h}_{\mathrm{T}}$.

1.6. Changement de base dans un foncteur. — Pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on a un foncteur canonique

$$i_{\mathrm{S}} : \mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \longrightarrow \mathscr{C}$$

défini par $i_{\mathrm{S}}(f) = \mathrm{T}$ si f est la flèche $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$. Si $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, on note $i_{\mathrm{T}/\mathrm{S}} = i_f$ le foncteur :

$$i_{\mathrm{T}/\mathrm{S}} : (\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}} \longrightarrow \mathscr{C}_{/\mathrm{S}},$$

et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}} \arrow[r, "i_{\mathrm{T}/\mathrm{S}}"] \arrow[dr, "\cong"'] & \mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \arrow[r, "i_{\mathrm{S}}"] & \mathscr{C} \\
& \mathscr{C}_{/\mathrm{T}} \arrow[ur, "i_{\mathrm{T}}"'] &
\end{tikzcd} ,$$

c'est-à-dire, *en identifiant* $(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}}$ à $\mathscr{C}_{/\mathrm{T}}$ *comme nous le ferons désormais*, 7

$$i_{\mathrm{S}} \circ i_{\mathrm{T}/\mathrm{S}} = i_{\mathrm{T}} .$$

De la même manière, si on identifie $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_{/e}$, lorsque $\mathscr{C}$ possède un objet final e, alors $i_{\mathrm{S}/e} : \mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \to \mathscr{C}_{/e}$ s'identifie à i_{S}.

Pour $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ (resp. $\mathrm{Y} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})$), soit $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})$ (resp. $p_{\mathrm{T}/\mathrm{S}}(\mathrm{Y})$) l'objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ (resp. de $\mathscr{C}_{/\mathrm{T}}$) lorsqu'il existe, défini par $\mathrm{X} \times \mathrm{S}$ (resp. $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$) muni de sa deuxième projection :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \times \mathrm{S} \arrow[d, "p_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})"'] & \text{resp.} & \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \arrow[d, "p_{\mathrm{T}/\mathrm{S}}(\mathrm{Y})"] \\
\mathrm{S} & & \mathrm{T}
\end{tikzcd} .$$

Le foncteur (partiellement défini) p_{S} (resp. $p_{\mathrm{T/S}}$) s'appelle *foncteur de changement de base*. C'est par définition du produit (resp. du produit fibré) le foncteur adjoint à droite du foncteur i_{S} (resp. $i_{\mathrm{T/S}}$) [(12)]. On note également

$$p_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}_{\mathrm{S}} \qquad \text{et} \qquad p_{\mathrm{T/S}}(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}_{\mathrm{T}}\,.$$

Le foncteur i_{S} définit un foncteur (*restriction*)

$$i_{\mathrm{S}}^* : \widehat{\mathscr{C}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}};$$

on note $\mathbf{F}_{\mathrm{S}} = i_{\mathrm{S}}^*(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \circ i_{\mathrm{S}}$. On a évidemment

$$i_{\mathrm{T/S}}^* \circ i_{\mathrm{S}}^* = i_{\mathrm{T}}^*,$$

c'est-à-dire pour tout foncteur $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$,

$$(\mathbf{F}_{\mathrm{S}})_{\mathrm{T}} = \mathbf{F}_{\mathrm{T}}.$$

8 La notation demande une justification que voici :

Proposition 1.6.1. — *Pour que le foncteur* $(\mathbf{h}_{\mathrm{X}})_{\mathrm{S}} : (\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})^{\circ} \to (\mathbf{Ens})$ *soit représentable, il faut et il suffit que le produit* $\mathrm{X} \times \mathrm{S}$ *existe. On a alors*

$$(\mathbf{h}_{\mathrm{X}})_{\mathrm{S}} \simeq \mathbf{h}_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}}}.$$

Ceci montre que $\mathbf{F}_{\mathrm{S}}$ a deux interprétations : *restriction* du foncteur $\mathbf{F}$ à $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, foncteur obtenu par *changement de base* $e \leftarrow \mathrm{S}$. Ceci conduit à la notation suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbf{F}_{\mathrm{S}} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbf{F}_{\mathrm{T}} \arrow[d, dash] \\
e & \mathrm{S} \arrow[l] & \mathrm{T} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

qui rend bien compte des deux interprétations précédentes.

Remarquons que l'on a

$$\Gamma(\mathbf{F}_{\mathrm{S}}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{h}_{\mathrm{S}}, \mathbf{F}) \simeq \mathbf{F}(\mathrm{S}),$$

en particulier

$$\Gamma(\mathrm{X}_{\mathrm{S}}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{X}).$$

1.7.0. — [(13)] Soit $\mathbf{E}$ un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$. Considérons la catégorie $\mathscr{C}_{/\mathbf{E}}$ des *objets de* $\mathscr{C}$ au-dessus de $\mathbf{E}$: ses objets sont les couples (V, ρ) formés d'un objet V de $\mathscr{C}$ et d'un $\widehat{\mathscr{C}}$-morphisme $\rho : \mathbf{h}_{\mathrm{V}} \to \mathbf{E}$, i.e. $\rho \in \mathbf{E}(\mathrm{V})$; un morphisme de (V, ρ) vers (V', ρ') est la

---

(12) N.D.E. : i.e. si $g : \mathrm{U} \to \mathrm{S}$ (resp. $h : \mathrm{V} \to \mathrm{T}$) est un objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ (resp. $\mathscr{C}_{/\mathrm{T}}$) alors $i_{\mathrm{S}}(g) = \mathrm{U}$ et $i_{\mathrm{T/S}}(h)$ est l'objet $f \circ h : \mathrm{V} \to \mathrm{S}$ de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, et l'on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}(\mathrm{U}, \mathrm{X} \times \mathrm{S}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{U}, \mathrm{X}) \quad \text{resp.} \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{T}}}(\mathrm{V}, \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}(\mathrm{V}, \mathrm{X}).$$

(13) N.D.E. : On a ajouté le lemme ci-dessous (cf. SGA 4, I.3.4), il est utilisé dans la démonstration de 1.7.1 et sera utile à plusieurs reprises dans la suite.

donnée d'un $\mathscr{C}$-morphisme $f : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ tel que $\rho' \circ f = \rho$ (i.e. $\mathbf{E}(f)(\rho') = \rho$). Notons $\mathbf{L}$ le foncteur

$$\varinjlim_{(\mathrm{V},\rho)\in\widehat{\mathscr{C}}_{\mathbf{E}}} \mathbf{h}_{\mathrm{V}},$$

c.-à-d., pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\mathbf{L}(\mathrm{S}) = \varinjlim_{(\mathrm{V},\rho)} \mathbf{h}_{\mathrm{V}}(\mathrm{S})$ est l'ensemble des classes d'équivalence de triplets (V, ρ, v), où $v : \mathrm{S} \to \mathrm{V}$ est un $\mathscr{C}$-morphisme, et où l'on identifie (V, ρ, v) à $(\mathrm{V}', \rho', f \circ v)$ pour tout $\mathscr{C}$-morphisme $f : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ tel que $\rho' \circ f = \rho$.

Alors, l'application $\phi_{\mathbf{E}}(\mathrm{S})$ qui à la classe de (V, ρ, v) associe l'élément $\rho \circ v$ de $\mathbf{E}(\mathrm{S})$ est bien définie, et définit un morphisme de foncteurs

$$\phi_{\mathbf{E}} : \varinjlim_{(\mathrm{V},\rho)\in\widehat{\mathscr{C}}_{\mathbf{E}}} \mathbf{h}_{\mathrm{V}} \longrightarrow \mathbf{E}.$$

Lemme. — *$\phi_{\mathbf{E}}$ est un isomorphisme.*

En effet, soit $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Tout $x \in \mathrm{E}(\mathrm{S})$ est l'image par $\phi_{\mathbf{E}}(\mathrm{S})$ du triplet $(\mathrm{S}, x, \mathrm{id}_{\mathrm{S}})$; ceci montre que $\phi_{\mathbf{E}}(\mathrm{S})$ est surjective. D'autre part, soient $\ell_1 = (\mathrm{V}_1, \rho_1, v_1)$ et $\ell_2 = (\mathrm{V}_2, \rho_2, v_2)$ deux éléments de $\mathbf{L}(\mathrm{S})$ ayant même image dans $\mathbf{E}(\mathrm{S})$; posons $\gamma = \rho_1 \circ v_1 = \rho_2 \circ v_2$. Alors ℓ_1 et ℓ_2 sont tous deux égaux, dans $\mathbf{L}(\mathrm{S})$, à la classe du triplet $(\mathrm{S}, \gamma, \mathrm{id}_{\mathrm{S}})$. Ceci montre que $\phi_{\mathbf{E}}(\mathrm{S})$ est injective.

Corollaire. — *Pour tout objet $\mathbf{F}$ de $\widehat{\mathscr{C}}$, on a*

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = \varprojlim_{(\mathrm{V},\rho)\in\widehat{\mathscr{C}}_{\mathbf{E}}} \mathbf{F}(\mathrm{V}).$$

1.7. Objets $\underline{\mathrm{Hom}}$, $\underline{\mathrm{Isom}}$, etc. — Soient $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ deux objets de $\widehat{\mathscr{C}}$. Nous allons définir un autre objet de $\widehat{\mathscr{C}}$ de la manière suivante :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}}(\mathbf{F}_{\mathrm{S}}, \mathbf{G}_{\mathrm{S}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}_{/\mathbf{h}_{\mathrm{S}}}}(\mathbf{F} \times \mathbf{h}_{\mathrm{S}}, \mathbf{G} \times \mathbf{h}_{\mathrm{S}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathbf{F} \times \mathbf{h}_{\mathrm{S}}, \mathbf{G}).$$

L'objet $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ défini ci-dessus possède les propriétés suivantes :

(i) $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathbf{e}}, \mathbf{G}) \simeq \mathbf{G}$ [14]

(ii) *La formation de $\underline{\mathrm{Hom}}$ commute à l'extension de la base :* 9

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}_{\mathrm{S}}, \mathbf{G}_{\mathrm{S}}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})_{\mathrm{S}}.$$

(iii) $(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ *est un bifoncteur, contravariant en $\mathbf{F}$ et covariant en $\mathbf{G}$.*

Ces trois propriétés sont évidentes sur les définitions.

Nous allons montrer que, pour tout objet $\mathbf{E}$ de $\widehat{\mathscr{C}}$, on a

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G}).$$

[14] N.D.E. : et, si $\mathbf{E}$ est un troisième objet de $\widehat{\mathscr{C}}$, on a $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{E}, \mathrm{F} \times \mathrm{G}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{E}, \mathrm{G})$.

Soit $\phi : \mathbf{E}\times\mathbf{F} \to \mathbf{G}$; nous devons lui associer un morphisme de $\mathbf{E}$ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$. Soit donc $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ une flèche de $\mathscr{C}$. On a des applications

$$\mathbf{E}(\mathrm{S}) \times \mathbf{F}(\mathrm{S}') \longrightarrow \mathbf{E}(\mathrm{S}') \times \mathbf{F}(\mathrm{S}') \xrightarrow{\phi(\mathrm{S}')} \mathbf{G}(\mathrm{S}').$$

Tout élément e de $\mathbf{E}(\mathrm{S})$ définit donc pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ une application $\mathbf{F}(\mathrm{S}') \to \mathbf{G}(\mathrm{S}')$ fonctorielle en S', c.-à-d., un élément $\theta_\phi(e)$ de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})(\mathrm{S})$. On a donc obtenu une application

$$\phi \mapsto \theta_\phi, \qquad \mathrm{Hom}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})),$$

qui est « fonctorielle en $\mathbf{E}$ ».

Proposition 1.7.1. — (15) *Soient* $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$.

(a) *L'application* $\phi \mapsto \theta_\phi$ *est une bijection :*

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})).$$

(b) *De plus, on a un isomorphisme de foncteurs :*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G}).$$

(a) Considérons les deux membres comme des foncteurs en $\mathbf{E}$. Le résultat annoncé est vrai si $\mathbf{E} = \mathbf{h}_{\mathrm{X}}$; en effet, ce n'est autre en ce cas que la définition du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$. D'autre part les deux membres comme foncteurs en $\mathbf{E}$ transforment limites inductives en limites projectives. Enfin, d'après le lemme 1.7.0, tout objet $\mathbf{E}$ de $\widehat{\mathscr{C}}$ est isomorphe à la limite inductive des $\mathbf{h}_{\mathrm{X}}$, où X parcourt la catégorie $\mathscr{C}_{/\mathbf{E}}$. Ceci prouve (a).

(15) Esquissons une démonstration directe de (a). À tout $\theta \in \mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}))$, on associe l'élément ϕ_θ de $\mathrm{Hom}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G})$ défini comme suit. Pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on a une application

$$\theta(\mathrm{S}) : \mathbf{E}(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{F} \times \mathrm{S}, \mathbf{G}),$$

fonctorielle en S. Si $(e, f) \in \mathbf{E}(\mathrm{S})\times\mathbf{F}(\mathrm{S})$, alors f est un morphisme $\mathrm{S} \to \mathbf{F}$, donc $f\times\mathrm{id}_{\mathrm{S}}$ est un morphisme $\mathrm{S} \to \mathbf{F} \times \mathrm{S}$; d'autre part, $\theta(\mathrm{S})(e)$ est un morphisme $\mathbf{F} \times \mathrm{S} \to \mathbf{G}$, donc par composition on obtient un morphisme :

$$\theta(\mathrm{S})(e) \circ (f \times \mathrm{id}_{\mathrm{S}}) : \mathrm{S} \longrightarrow \mathbf{G},$$

c.-à-d., un élément $\phi_\theta(\mathrm{S})(e, f)$ de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$. On vérifie facilement que la correspondance $\mathrm{S} \mapsto \phi_\theta(\mathrm{S})$ est fonctorielle en S, donc définit un morphisme ϕ_θ de $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ vers $\mathbf{G}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que les applications $\theta \mapsto \phi_\theta$ et $\phi \mapsto \theta_\phi$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

(15) N.D.E. : On a ajouté le point (b), qui sera utile dans II.1 et II.3.11. D'autre part, on a esquissé une seconde démonstration, plus directe, du point (a).

Démontrons (b). Si $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on a, d'après 1.7 (ii) et (a) appliqué à $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$:

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}))(\mathrm{S}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbf{E}_{\mathrm{S}}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathbf{F}_{\mathrm{S}}, \mathbf{G}_{\mathrm{S}}))\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbf{E}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathbf{F}_{\mathrm{S}}, \mathbf{G}_{\mathrm{S}})\\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathbf{E} \times \mathbf{F} \times \mathrm{S}, \mathbf{G})\\ &\cong \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E} \times \mathbf{F}, \mathbf{G})(\mathrm{S})\end{aligned}$$

et ces isomorphismes sont fonctoriels en S.

Corollaire 1.7.2. — *On a :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) &\simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{F}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E}, \mathbf{G})),\\ \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{E}, \mathbf{G})).\end{aligned}$$

10

En particulier, faisant $\mathbf{E} = \underline{\mathbf{e}}$, et compte tenu de $\mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, \mathbf{G}) \simeq \mathbf{G}$, on a

$$\Gamma(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{F}, \mathbf{G}).$$

Notons que la composition des Hom fournit des morphismes fonctoriels

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{H}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{H}).$$

Si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont deux objets de $\widehat{\mathscr{C}}$, on note $\mathrm{Isom}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ formé des isomorphismes de $\mathbf{F}$ sur $\mathbf{G}$. On définit alors un sous-objet $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ par :

$$\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})(\mathrm{S}) = \mathrm{Isom}(\mathbf{F}_{\mathrm{S}}, \mathbf{G}_{\mathrm{S}}).$$

On a alors des isomorphismes

$$\Gamma(\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})) \simeq \mathrm{Isom}(\mathbf{F}, \mathbf{G}),$$

$$\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \simeq \underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{G}, \mathbf{F}).$$

Dans le cas particulier où $\mathbf{F} = \mathbf{G}$, on pose

$$\underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}), \qquad \mathrm{End}(\mathbf{F}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) \simeq \Gamma(\underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F})),$$

$$\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{F}) = \underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}), \qquad \mathrm{Aut}(\mathbf{F}) = \mathrm{Isom}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) \simeq \Gamma(\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{F})).$$

La formation des objets $\underline{\mathrm{Hom}}$, $\underline{\mathrm{Isom}}$, $\underline{\mathrm{Aut}}$, $\underline{\mathrm{End}}$ commute aux changements de base.

Remarque 1.7.3. — [16] Remarquons que l'on peut construire un objet isomorphe à $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ de la manière suivante : on a un morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{F}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F});$$

permutant $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$, on en déduit un morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{F}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) \times \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{G}).$$

D'autre part, le morphisme identique de $\mathbf{F}$ est un élément de $\mathrm{End}(\mathbf{F})$ et définit **11**

[16] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 1.7.3, pour des références ultérieures.

donc un morphisme $\underline{\mathbf{e}} \to \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F})$. Faisant de même avec $\mathbf{G}$ et effectuant le produit, on trouve un morphisme

$$\underline{\mathbf{e}} \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) \times \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{G}).$$

Il est alors immédiat que le produit fibré de $\underline{\mathbf{e}}$ et de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{F})$ au-dessus de $\underline{\mathrm{End}}(\mathbf{F}) \times \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{G})$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$.

Toutes ces définitions s'appliquent en particulier au cas où $\mathbf{F} = \mathbf{h}_{\mathrm{X}}$, $\mathbf{G} = \mathbf{h}_{\mathrm{Y}}$. Dans le cas où $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{h}_{\mathrm{X}}, \mathbf{h}_{\mathrm{Y}})$ est représentable par un objet de $\mathscr{C}$, on note cet objet $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Il possède la propriété suivante : si $\mathrm{Z} \times \mathrm{X}$ existe, alors

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Z}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Z} \times \mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

Cette propriété le caractérise lorsque les produits existent dans $\mathscr{C}$.

On définit de même (lorsqu'ils veulent bien exister) des objets

$$\underline{\mathrm{Isom}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \quad , \quad \underline{\mathrm{End}}(\mathrm{X}) \quad , \quad \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{X});$$

remarquons simplement que d'après la construction donnée plus haut, $\underline{\mathrm{Isom}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ existe chaque fois que les produit fibrés existent dans $\mathscr{C}$ et que $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$, $\underline{\mathrm{End}}(\mathrm{X})$ et $\underline{\mathrm{End}}(\mathrm{Y})$ existent.

Tout ce qui précède s'applique également à des catégories de la forme $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. Les objets correspondants seront notés de manière aussi explicite que possible par des symboles appropriés : par exemple, si T et T′ sont deux objets de $\mathscr{C}$ au-dessus de S, on notera $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T}, \mathrm{T}')$ l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}(\mathrm{T}/\mathrm{S}, \mathrm{T}'/\mathrm{S})$

12 **1.8. Objets constants.** — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie où les sommes directes et les produits fibrés existent et où les sommes directes commutent aux changements de base (par exemple la catégorie des schémas [17]). Pour tout ensemble E et pour tout objet S de $\mathscr{C}$, posons

(1.8.1) $$\mathrm{E}_{\mathrm{S}} = \begin{cases} \text{la somme directe d'une famille } (\mathrm{S}_i)_{i\in\mathrm{E}} \\ \text{d'objets de } \mathscr{C} \text{ tous isomorphes à S.} \end{cases}$$

Cet objet est caractérisé par la formule :

(1.8.2) $$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{E}_{\mathrm{S}}, \mathrm{T}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{E}, \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{S}, \mathrm{T})),$$

pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, où le second Hom est pris dans la catégorie des ensembles.

L'objet E_{S} est muni d'une projection canonique sur S, de telle façon que $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}_{\mathrm{S}}$ est en fait un foncteur de (**Ens**) dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$.

[18] Si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est une flèche de $\mathscr{C}$, on a, puisque les sommes directes commutent aux changements de base,

$$\mathrm{E}_{\mathrm{S}'} = (\mathrm{E}_{\mathrm{S}})_{\mathrm{S}'}.$$

En particulier, si $\mathscr{C}$ possède un objet final e, on a

$$\mathrm{E}_{\mathrm{S}} = (\mathrm{E}_e)_{\mathrm{S}}.$$

[17] N.D.E. : On a remplacé l'ancienne terminologie « préschémas/schémas » par la terminologie actuelle « schémas/schémas séparés ».

[18] N.D.E. : Dans les trois paragraphes qui suivent, on a modifié l'ordre des phrases et ajouté quelques précisions concernant le rôle de l'hypothèse $(*)$ ci-dessous.

Le foncteur $\mathrm{E} \to \mathrm{E_S}/\mathrm{S}$, de (**Ens**) dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, *commute aux produits finis.* Il suffit, pour cela, de voir que

$$(\times) \qquad \mathrm{E_S} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{F_S} = (\mathrm{E} \times \mathrm{F})_\mathrm{S}.$$

Or, d'après les résultats de 1.7 appliqués à $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, on a, pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})$, des isomorphismes naturels (tous les Hom non spécifiés étant pris dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}((\mathrm{E}\times\mathrm{F})_\mathrm{S},\mathrm{T}) &\cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Ens})}(\mathrm{E}\times\mathrm{F},\mathrm{Hom}(\mathrm{S},\mathrm{T})) \cong \\ &\mathrm{Hom}_{(\mathbf{Ens})}(\mathrm{E},\mathrm{Hom}_{(\mathbf{Ens})}(\mathrm{F},\mathrm{Hom}(\mathrm{S},\mathrm{T}))) \cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Ens})}(\mathrm{E},\mathrm{Hom}(\mathrm{F_S},\mathrm{T}))\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{E_S}\times_\mathrm{S}\mathrm{F_S},\mathrm{T}) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{E_S},\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F_S},\mathrm{T})) \cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Ens})}(\mathrm{E},\mathrm{Hom}(\mathrm{S},\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F_S},\mathrm{T}))).$$

Or, $\mathrm{Hom}(\mathrm{S},\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F_S},\mathrm{T})) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{F_S},\mathrm{T})$, d'où $(\times)$.

Supposons que, $\varnothing$ désignant un objet initial de $\mathscr{C}$, le diagramme

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{S} \arrow[d] \\ \mathrm{S} \arrow[r] & \mathrm{S}\coprod\mathrm{S} \end{tikzcd} \qquad \text{soit cartésien.}$$

(C'est le cas de la catégorie des schémas). [19] Alors le foncteur $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{E_S}$ *commute aux limites projectives finies.*

En effet, compte tenu de $(\times)$, il suffit de voir que $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{E_S}$ commute aux produits fibrés. Soient $u : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ et $v : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications d'ensembles. Comme dans $\mathscr{C}$ les sommes directes commutent aux changements de base, on a

$$(1) \qquad \mathrm{F_S} \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{E_S} \cong \coprod_{f\in\mathrm{F}} \mathrm{S}_f \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{E_S} \cong \coprod_{\substack{f\in\mathrm{F}\\ x\in\mathrm{E}}} \mathrm{S}_f \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{S}_x.$$

Si $v(f) \neq u(x)$, il existe dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ un morphisme

$$\mathrm{S}_f \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{S}_x \longrightarrow \mathrm{S}_f \underset{\mathrm{S}_{v(f)}\coprod \mathrm{S}_{u(x)}}{\times} \mathrm{S}_x;$$

or d'après l'hypothèse $(*)$ le terme de droite est $\varnothing$. Par conséquent,

$$(2) \qquad \mathrm{S}_f \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{S}_x \cong \varnothing \quad \text{si } v(f) \neq u(x).$$

D'autre part, si $v(f) = u(x)$, il existe dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ un morphisme

$$\mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{S}_f \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{S}_x;$$

comme $\mathrm{S} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathrm{S}$ est objet final de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, il en résulte que

$$(3) \qquad \mathrm{S}_f \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{S}_x \cong \mathrm{S} \quad \text{si } v(f) = u(x).$$

---

[19] N.D.E. : $(*)$ n'est *pas* vérifiée si $\mathscr{C}$ est la catégorie dont les flèches sont $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ et $\mathrm{id_A}, \mathrm{id_B}$; dans ce cas $\mathrm{B}\coprod\mathrm{B} = \mathrm{B}$ et $\mathrm{B}\times_\mathrm{B}\mathrm{B} = \mathrm{B} \not\cong \mathrm{A}$.

Combinant (1), (2) et (3) on obtient un isomorphisme fonctoriel en S

$$\mathrm{F_S} \underset{\mathrm{G_S}}{\times} \mathrm{E_S} \cong \coprod_{\mathrm{F} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{E}} \mathrm{S} = (\mathrm{F} \underset{\mathrm{G}}{\times} \mathrm{E})_{\mathrm{S}}.$$

Un objet de la forme $\mathrm{E_S}$ sera appelé *objet constant*. Remarquons que l'on a un morphisme fonctoriel en E :

$$\mathrm{E} \longrightarrow \Gamma(\mathrm{E_S}/\mathrm{S})$$

qui associe à chaque $i \in \mathrm{E}$, la section de $\mathrm{E_S}$ sur S définie par l'isomorphisme de S sur S_i. Supposons la condition $(*)$ vérifiée pour tout objet S de $\mathscr{C}$; alors le morphisme $\mathrm{E} \to \Gamma(\mathrm{E_S}/\mathrm{S})$ est un monomorphisme pour tout $\mathrm{S} \not\simeq \varnothing$.

Si $\mathscr{C}$ est la catégorie des schémas, alors $\Gamma(\mathrm{E_S}/\mathrm{S})$ s'identifie aux applications locale-
13 ment constantes de l'espace topologique S dans l'ensemble E, l'application précédente associant à chaque élément de E l'application constante correspondante. Remarquons qu'il résulte de ce qu'on vient de dire que $\mathrm{E_S}$ peut aussi être défini comme représentant le foncteur qui à tout S' au-dessus de S associe l'ensemble des fonctions localement constantes de l'espace topologique S' dans l'ensemble E. [20]

2. Structures algébriques

Étant donnée une espèce de structure algébrique dans la catégorie des ensembles, nous nous proposons de l'étendre à la catégorie $\mathscr{C}$. Traitons d'abord un exemple : le cas des groupes.

2.1. Structures de groupe. — Nous gardons les notations du paragraphe précédent.

Définition 2.1.1. — Soit $\mathbf{G} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$. On appelle structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe sur $\mathbf{G}$ la donnée pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ d'une structure de groupe sur l'ensemble $\mathbf{G}(\mathrm{S})$, de telle manière que pour toute flèche $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, l'application $\mathbf{G}(f) : \mathbf{G}(\mathrm{S}'') \to \mathbf{G}(\mathrm{S}')$ soit un homomorphisme de groupes. Si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont deux $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes, on appelle *morphisme* de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{H}$ tout morphisme $u \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ tel que pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ l'application d'ensembles $u(\mathrm{S}) : \mathbf{G}(\mathrm{S}) \to \mathbf{H}(\mathrm{S})$ soit un homomorphisme de groupes.

On note $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ l'ensemble des morphismes de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{H}$ et $(\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.})$ la catégorie des $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes.

Exemples. — Soit $\mathbf{E} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$; l'objet $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{E})$ est muni de manière évidente d'une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe. L'objet final $\underline{\mathbf{e}}$ possède une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe unique qui en fait un objet final de $(\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.})$.

Pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, soit $e_{\mathbf{G}}(\mathrm{S})$ l'élément unité de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$. La famille des $e_{\mathbf{G}}(\mathrm{S})$
14 définit un élément $e_{\mathbf{G}} \in \Gamma(\mathbf{G}) = \mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, \mathbf{G})$ qui est un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes

[20] N.D.E. : Notons aussi que le morphisme diagonal $\mathrm{E_S} \to \mathrm{E_S} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E_S} = (\mathrm{E} \times \mathrm{E})_{\mathrm{S}}$ est une immersion fermée, i.e. $\mathrm{E_S}$ est séparé sur S.

$\underline{\mathbf{e}} \to \mathbf{G}$ et que l'on appelle *section unité de* $\mathbf{G}$.

Remarquons que se donner une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe sur $\mathbf{G}$ revient à se donner une loi de composition sur $\mathbf{G}$, c'est-à-dire un $\widehat{\mathscr{C}}$-morphisme

$$\pi_{\mathbf{G}} \ : \ \mathbf{G} \times \mathbf{G} \ \longrightarrow \mathbf{G}$$

tel que pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}), \pi_{\mathbf{G}}(\mathrm{S})$ munisse $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ d'une structure de groupe.

De la même manière, $f : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ est un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes si et seulement si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G} \times \mathbf{G} \arrow[r, "\pi_{\mathbf{G}}"] \arrow[d, "{(f,f)}"'] & \mathbf{G} \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{H} \times \mathbf{H} \arrow[r, "\pi_{\mathbf{H}}"] & \mathbf{H} \end{tikzcd} .$$

Un sous-objet $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ tel que, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\mathbf{H}(\mathrm{S})$ soit un sous-groupe de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ possède évidemment une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe induite par celle de $\mathbf{G}$: c'est la seule pour laquelle le monomorphisme $\mathbf{H} \to \mathbf{G}$ soit un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes. Le $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{H}$ muni de cette structure est appelé *sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe de* $\mathbf{G}$.

Si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont deux $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes, le produit $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ est muni d'une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe évidente : pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on munit $\mathbf{G}(\mathrm{S}) \times \mathbf{H}(\mathrm{S})$ de la structure de groupe produit des structures de groupes données sur $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ et $\mathbf{H}(\mathrm{S})$. Le $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ muni de cette structure sera dit *$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe produit* de $\mathbf{G}$ et de $\mathbf{H}$ (c'en est d'ailleurs le produit dans la catégorie des $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes).

Si $\mathbf{G}$ est un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe, alors pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\mathbf{G}_{\mathrm{S}}$ est un $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$-groupe. Si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont deux $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes, on définira l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ de $\widehat{\mathscr{C}}$ par :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}_{\mathrm{S}}, \mathbf{H}_{\mathrm{S}})$$

(Nota : $\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}$ n'est pas en général un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe, ni a fortiori l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}$ dans 15
la catégorie ($\widehat{\mathscr{C}}$-Gr.)).

On définit de même les objets

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}, \mathbf{H}) \quad , \quad \underline{\mathrm{End}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}) \quad , \quad \underline{\mathrm{Aut}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}).$$

Définition 2.1.2. — Soit $\mathrm{G} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. On appelle structure de $\mathscr{C}$-groupe sur G une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe sur $\mathbf{h}_{\mathrm{G}} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$. On appelle morphisme du $\mathscr{C}$-groupe G dans le $\mathscr{C}$-groupe H un élément $u \in \mathrm{Hom}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{h}_{\mathrm{G}}, \mathbf{h}_{\mathrm{H}})$ qui définit un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe de $\mathbf{h}_{\mathrm{G}}$ dans $\mathbf{h}_{\mathrm{H}}$.

On note ($\mathscr{C}$-Gr.) la catégorie des $\mathscr{C}$-groupes. Notons qu'il existe dans (**Cat**) un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{C}\text{-Gr.}) \arrow[r] \arrow[d] & (\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}) \arrow[d] \\ \mathscr{C} \arrow[r, "\mathbf{h}"] & \widehat{\mathscr{C}} \end{tikzcd} .$$

Toutes les définitions et constructions précédentes se transportent donc aussitôt à ($\mathscr{C}$-Gr.) chaque fois que les foncteurs qu'elles font intervenir (produits, objets $\underline{\mathrm{Hom}}$, etc.) sont représentables. Elles s'appliquent aussi aux catégories $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. En ce cas, nous noterons $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-}\mathrm{Gr.}}$ pour $\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}\text{-}\mathrm{Gr.}}$, etc.

2.2. Plus généralement, si (T) est une espèce de structure sur n ensembles de base définie par limites projectives finies (par exemple, par des commutativités de diagrammes construits avec des produits cartésiens : structures de monoïde, groupe, d'ensemble à opérateurs, de module sur un anneau, d'algèbre de Lie sur un anneau, etc.) la construction précédente permet de définir la notion de « structure d'espèce (T)
16 sur n objets $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ de $\widehat{\mathscr{C}}$ » : une telle structure sera la donnée pour chaque S de $\mathscr{C}$, d'une structure d'espèce (T) sur les ensembles $\mathbf{F}_1(\mathrm{S}), \ldots, \mathbf{F}_n(\mathrm{S})$ de telle manière que pour toute flèche $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, la famille d'applications $(\mathbf{F}_i(\mathrm{S}'')) \to (\mathbf{F}_i(\mathrm{S}'))$ soit un poly-homomorphisme pour l'espèce de structure (T). On définit de manière semblable les morphismes de l'espèce de structure (T), d'où une catégorie $(\widehat{\mathscr{C}} \times \widehat{\mathscr{C}} \cdots \times \widehat{\mathscr{C}})^{(\mathrm{T})}$. Le foncteur pleinement fidèle $(\mathbf{h} \times \mathbf{h} \times \cdots \times \mathbf{h})$ permet alors de définir par image inverse la catégorie $(\mathscr{C} \times \mathscr{C} \times \cdots \times \mathscr{C})^{(\mathrm{T})}$, puis, comme il commute aux limites projectives, d'y transporter toutes les propriétés, notions et notations fonctorielles introduites dans $\widehat{\mathscr{C}}$. Supposons maintenant que dans $\mathscr{C}$ les produits fibrés existent, et soit (T) une espèce de structure algébrique définie par la *donnée* de certains morphismes entre produits cartésiens satisfaisant à des *axiomes* consistant en certaines commutativités de diagrammes construits à l'aide des flèches précédentes. Une structure d'espèce (T) sur une famille d'objets de $\mathscr{C}$ sera donc définie par certains morphismes entre produits cartésiens satisfaisant à certaines conditions de commutation. Il en résulte que si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux catégories possédant des produits et $f : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ est un foncteur *commutant aux produits*, alors pour toute famille d'objets (F_i) de $\mathscr{C}$ munie d'une structure d'espèce (T), la famille $(f(\mathrm{F}_i))$ d'objets de $\mathscr{C}'$ sera par là-même munie elle aussi d'une structure d'espèce (T). Tout $\mathscr{C}$-groupe sera transformé en $\mathscr{C}'$-groupe, tout couple ($\mathscr{C}$-anneau, $\mathscr{C}$-module sur ce $\mathscr{C}$-anneau) en un couple analogue dans $\mathscr{C}'$, etc.

Soit en particulier $\mathscr{C}$ une catégorie satisfaisant aux conditions de 1.8 [21] ; le foncteur $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}_{\mathrm{S}}$ défini dans *loc. cit.* commute aux limites projectives finies ; il transforme donc groupe en S-groupe (i.e. $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$-groupe), anneau en S-anneau, etc.

Remarque. — Il est bon de remarquer que le procédé de construction précédent appliqué à la catégorie $\widehat{\mathscr{C}}$ redonne bien les notions que l'on y a déjà définies ; en d'autres termes, il revient au même de se donner sur un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$ une structure d'espèce (T) quand on considère cet objet comme un foncteur sur $\mathscr{C}$, ou de se donner une structure d'espèce (T) sur le foncteur représentable sur $\widehat{\mathscr{C}}$ défini par cet objet. [22]

---

[21] N.D.E. : y compris la condition $(*)$

[22] N.D.E. : Par exemple, pour les structures de groupes : soit $\mathbf{G} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$; si le foncteur $\widehat{\mathscr{C}} \to$ $(\mathbf{Ens})$, $\mathbf{F} \mapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ est muni d'une structure de groupe, il en est de même de sa restriction à $\mathscr{C}$, $\mathrm{X} \mapsto \mathbf{G}(\mathrm{X})$. Réciproquement, si $\mathbf{G}$ est un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe, alors le morphisme « de multiplication »

Nous allons encore traiter deux cas particuliers de la construction précédente, le cas des structures à groupes d'opérateurs et le cas des modules. 17

2.3. Structures à groupes d'opérateurs. —

Définition 2.3.1. — Soient $\mathbf{E} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$ et $\mathbf{G} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.})$. Une structure d'objet à $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe d'opérateurs $\mathbf{G}$ (ou de $\mathbf{G}$-objet) sur $\mathbf{E}$ est la donnée sur $\mathbf{E}(\mathrm{S})$, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, d'une structure d'ensemble à groupe d'opérateurs $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ de telle manière que, pour toute flèche $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, l'application d'ensembles $\mathbf{E}(\mathrm{S}'') \to \mathbf{E}(\mathrm{S}')$ soit compatible avec l'homomorphisme d'opérateurs $\mathbf{G}(\mathrm{S}'') \to \mathbf{G}(\mathrm{S}')$.

Comme d'habitude, il revient au même de se donner un morphisme
$$\mu : \mathbf{G} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}$$
qui pour tout S munisse $\mathbf{E}(\mathrm{S})$ d'une structure d'ensemble à opérateurs $\mathbf{G}(\mathrm{S})$. Mais $\mathrm{Hom}(\mathbf{G} \times \mathbf{E}, \mathbf{E}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{E}))$, donc μ définit un morphisme $\mathbf{G} \to \underline{\mathrm{End}}(\mathbf{E})$ et il est immédiat que celui-ci applique $\mathbf{G}$ dans $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{E})$ et que c'est un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes. En conséquence : *se donner sur* $\mathbf{E}$ *une structure d'objet à* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupe d'opérateurs* $\mathbf{G}$ *est équivalent à se donner un morphisme de* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes*
$$\rho : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{E}).$$
En particulier, tout élément $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$ définit un automorphisme $\rho(g)$ du foncteur $\mathbf{E}_{\mathrm{S}}$, c'est-à-dire un automorphisme de $\mathbf{E} \times \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ commutant à la projection $\mathbf{E} \times \mathbf{h}_{\mathrm{S}} \to \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$, et en particulier un automorphisme de l'ensemble $\mathbf{E}(\mathrm{S}')$ pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Définition 2.3.2. — On note $\mathbf{E}^{\mathbf{G}}$ le sous-objet de $\mathbf{E}$ défini comme suit :
$$\mathbf{E}^{\mathbf{G}}(\mathrm{S}) = \{x \in \mathbf{E}(\mathrm{S}) \mid x_{\mathrm{S}'} \text{ invariant sous } \mathbf{G}(\mathrm{S}') \text{ pour tout } \mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{S}\},$$
où $x_{\mathrm{S}'}$ désigne l'image de x par $\mathbf{E}(\mathrm{S}) \to \mathbf{E}(\mathrm{S}')$.

Alors $\mathbf{E}^{\mathbf{G}}$ (« sous-objet des invariants de $\mathbf{G}$ ») est le plus grand sous-objet de $\mathbf{E}$ sur lequel $\mathbf{G}$ opère trivialement. 18

Définition 2.3.3. — Soit $\mathbf{F}$ un sous-objet de $\mathbf{E}$. On note $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}\,\mathbf{F}$ et $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}\,\mathbf{F}$ les sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupes de $\mathbf{G}$ définis par
$$\begin{aligned}(\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}\,\mathbf{F})(\mathrm{S}) &= \{g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid \rho(g)\mathbf{F}_{\mathrm{S}} = \mathbf{F}_{\mathrm{S}}\} \quad ^{(23)}\\ &= \{g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid \rho(g)\mathbf{F}(\mathrm{S}') = \mathbf{F}(\mathrm{S}'), \quad \text{pour tout } \mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{S}\},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}\,\mathbf{F})(\mathrm{S}) &= \{g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid \rho(g)|_{\mathbf{F}_{\mathrm{S}}} = \text{ identité}\}\\ &= \{g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid \rho(g)|_{\mathbf{F}(\mathrm{S}')} = \text{ identité}, \text{ pour tout } \mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{S}\},\end{aligned}$$
où la barre verticale après $\rho(g)$ désigne la restriction.

$\pi_{\mathbf{G}} : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ induit pour pour tout $\mathbf{F} \in \mathrm{Ob}(\widehat{\mathscr{C}})$ une structure de groupe sur $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$, fonctorielle en $\mathbf{F}$.

(23) N.D.E. : On a corrigé l'original, en remplaçant l'inclusion $\rho(g)\mathbf{F}_{\mathrm{S}} \subset \mathbf{F}_{\mathrm{S}}$ par une égalité, afin d'assurer que $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{F})$ soit bien un groupe (voir $\mathrm{VI_B}$ 6.4 pour des conditions sous lesquelles le « *transporteur* » coïncide avec le « *transporteur strict* »).

Scholie 2.3.3.1. — [24] En particulier, soit $x \in \Gamma(\mathbf{E})$, i.e. (cf. 1.2) une collection d'éléments $x_{\mathrm{S}} \in \mathbf{E}(\mathrm{S})$, $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, telle que pour toute flèche $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ on ait $\mathbf{E}(f)(x_{\mathrm{S}}) = x_{\mathrm{S}'}$ (si $\mathscr{C}$ possède un objet final S_0 on a $\Gamma(\mathbf{E}) = \mathbf{E}(\mathrm{S}_0)$). Alors x définit un sous-foncteur de $\mathbf{E}$, qu'on notera $\mathbf{x}$, et l'on a $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}\, \mathbf{x} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}\, \mathbf{x}$. On notera $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(x)$ et l'on appellera *stabilisateur* de x ce foncteur ; pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ on a donc :

$$\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(x)(\mathrm{S}) = \{g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid \rho(g)x_{\mathrm{S}} = x_{\mathrm{S}}\}.$$

Supposons que les produits fibrés existent dans $\mathscr{C}$; si $\mathbf{G} = \mathbf{h}_{\mathrm{G}}$ (resp. $\mathbf{E} = \mathbf{h}_{\mathrm{E}}$), où G est un $\mathscr{C}$-groupe (resp. $\mathrm{E} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$), et si $\mathscr{C}$ possède un objet final S_0, de sorte que x est un morphisme $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{E}$, alors $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(x)$ est *représentable* par le produit fibré $\mathrm{G} \times_{\mathrm{E}} \mathrm{S}_0$, où $\mathrm{G} \to \mathrm{E}$ est le composé de $\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times x : \mathrm{G} = \mathrm{G} \times \mathrm{S}_0 \to \mathrm{G} \times \mathrm{E}$ et de $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}$.

Remarque 2.3.3.2. — [24] La formation de $\mathbf{E}^{\mathbf{G}}$, $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}\, \mathbf{F}$ et $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}\, \mathbf{F}$ *commute au changement de base*, c.-à-d., pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ on a

$$(\mathbf{E}^{\mathbf{G}})_{\mathrm{S}} = (\mathbf{E}_{\mathrm{S}})^{\mathbf{G}_{\mathrm{S}}}, \qquad (\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}\, \mathbf{F})_{\mathrm{S}} \simeq \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}_{\mathrm{S}}}\, \mathbf{F}_{\mathrm{S}}, \qquad (\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}\, \mathbf{F})_{\mathrm{S}} \simeq \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}_{\mathrm{S}}}\, \mathbf{F}_{\mathrm{S}}.$$

Définition 2.3.4. — Si G est un $\mathscr{C}$-groupe et $\mathbf{E}$ un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$ (resp. E un objet de $\mathscr{C}$) une structure de G-objet sur $\mathbf{E}$ (resp. sur E) est une structure de $\mathbf{h}_{\mathrm{G}}$-objet sur $\mathbf{E}$ (resp. $\mathbf{h}_{\mathrm{E}}$).

Vu cette définition, toutes les notions et notations définies ci-dessus se transportent à $\mathscr{C}$, lorsqu'elles ne font intervenir que des foncteurs représentables : par exemple si $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{h}_{\mathrm{G}}}(\mathbf{h}_{\mathrm{F}})$ est représentable, alors il existe un et un seul sous-objet de G qui le représente et qui est alors un sous-$\mathscr{C}$-groupe de G, on le note $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}}(\mathrm{F})$, etc.

Définition 2.3.5. — a) On dit que le $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{G}$ opère sur le $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{H}$ si $\mathbf{H}$ est muni d'une structure de $\mathbf{G}$-objet telle que, pour tout $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, l'automorphisme de $\mathbf{H}(\mathrm{S})$ défini par g soit un automorphisme de groupe.

Il revient au même de dire que pour tout $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, l'automorphisme $\rho(g)$ de $\mathbf{H}_{\mathrm{S}}$
19 est un automorphisme de $\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$-groupes, ou encore que le morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes $\mathbf{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{H})$ applique $\mathbf{G}$ dans $\underline{\mathrm{Aut}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{H})$.

b) Dans la situation ci-dessus, il existe sur le produit $\mathbf{H} \times \mathbf{G}$ une structure de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe unique telle que, pour tout S, $(\mathbf{H} \times \mathbf{G})(\mathrm{S})$ soit le produit semi-direct des groupes $\mathbf{H}(\mathrm{S})$ et $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ relativement à l'opération donnée de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ sur $\mathbf{H}(\mathrm{S})$. On notera ce $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{H} \cdot \mathbf{G}$ et on l'appellera *produit semi-direct de* $\mathbf{H}$ *par* $\mathbf{G}$. On a donc par définition

$$(\mathbf{H} \cdot \mathbf{G})(\mathrm{S}) = \mathbf{H}(\mathrm{S}) \cdot \mathbf{G}(\mathrm{S}).$$

Soit $\mathbf{G}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe. Pour toute flèche $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ de $\mathscr{C}$ et tout $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, soit $\mathrm{Int}(g)$ l'automorphisme de $\mathbf{G}(\mathrm{S}')$ défini par $\mathrm{Int}(g)h = ghg^{-1}$. Cette définition se prolonge en celle d'un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes

$$\mathrm{Int} : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-Gr.}}(\mathbf{G}) \subset \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{G}).$$

[24] N.D.E. : On a ajouté le scholie 2.3.3.1 et la remarque 2.3.3.2.

La définition 2.3.3 s'applique donc et on a des sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupes de $\mathbf{G}$

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{E}) \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{E})$$

pour tout sous-objet $\mathbf{E}$ de $\mathbf{G}$.

Définition 2.3.6. — On appelle *centre* de $\mathbf{G}$ et on note $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathbf{G})$ le sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{G})$ de $\mathbf{G}$. On dit que $\mathbf{G}$ est commutatif si $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$ ou, ce qui revient au même, si $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ est commutatif pour tout S.

On dit que le sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ est *invariant* dans $\mathbf{G}$ si $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \mathbf{G}$, ou, ce qui revient au même, si $\mathbf{H}(\mathrm{S})$ est invariant dans $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ pour tout S. [25]

Définition 2.3.6.1. — [26] Soit $f : \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes. On appelle *noyau* de f, et l'on note $\mathrm{Ker}\, f$ le sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe de $\mathbf{G}$ défini par

$$(\mathrm{Ker}\, f)(\mathrm{S}) = \{x \in \mathbf{G}(\mathrm{S}) \mid f(\mathrm{S})(x) = 1\} = \mathrm{Ker}\, f(\mathrm{S})$$

pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$; c'est un sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe *invariant.*

Notons que si $\mathbf{G} = \mathbf{h}_{\mathrm{G}}$ et $\mathbf{G}' = \mathbf{h}_{\mathrm{G}'}$, si $\mathscr{C}$ possède un objet final S_0 et si les produits fibrés existent dans $\mathscr{C}$, alors $\mathrm{Ker}(f)$ est *représentable* par $\mathrm{S}_0 \times_{\mathrm{G}'} \mathrm{G}$.

Définition 2.3.6.2. — [26] Soient $\mathbf{E} \in \widehat{\mathscr{C}}$ et $\mathbf{G}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe opérant sur $\mathbf{E}$. On dit que l'opération de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{E}$ est *fidèle* si le noyau du morphisme $\mathbf{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{E})$ est trivial, c.-à-d., si pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, la condition $g_{\mathrm{S}'} \cdot x = x$ pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x \in \mathbf{E}(\mathrm{S}')$, entraîne $g = 1$.

Beaucoup de définitions et de propositions de la théorie élémentaire des groupes se transposent aisément. Signalons simplement la suivante qui nous sera utile :

Proposition 2.3.7. — *Soit* $f : \mathbf{W} \to \mathbf{G}$ *un morphisme de* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes. Posons* $\mathbf{H}(\mathrm{S}) =$
$\mathrm{Ker}\, f(\mathrm{S})$*. Soit* $u : \mathbf{G} \to \mathbf{W}$ *un morphisme de* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes qui soit une section de* f **20**
(*et qui est alors nécessairement un monomorphisme*)*. Alors* $\mathbf{W}$ *s'identifie au produit semi-direct de* $\mathbf{H}$ *par* $\mathbf{G}$ *pour l'opération de* $\mathbf{G}$ *sur* $\mathbf{H}$ *définie par* $(g, h) \mapsto \mathrm{Int}(u(g))h$ *pour* $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$*,* $h \in \mathbf{H}(\mathrm{S})$*,* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$*.*

L'ensemble de ces définitions et propositions se transporte comme d'habitude à $\mathscr{C}$. On définit en particulier le produit semi-direct de deux $\mathscr{C}$-groupes H et G (G opérant sur H) lorsque le produit cartésien $\mathrm{H} \times \mathrm{G}$ existe, et on a l'analogue de la proposition 2.3.7 sous la forme suivante :

Proposition 2.3.8. — *Soit* $\mathrm{H} \xrightarrow{i} \mathrm{W} \xrightarrow{f} \mathrm{G}$ *une suite de morphismes de* $\mathscr{C}$*-groupes telle que pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$*,* $(\mathrm{H}(\mathrm{S}),\ i(\mathrm{S}))$ *soit un noyau de* $f(\mathrm{S}) : \mathrm{W}(\mathrm{S}) \to \mathrm{G}(\mathrm{S})$*. Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{W}$ *un morphisme de* $\mathscr{C}$*-groupes qui soit une section de* f*. Alors* W *s'identifie au produit semi-direct de* H *par* G *pour l'opération de* G *sur* H *telle que si* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$*, si* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ *et* $h \in \mathrm{H}(\mathrm{S})$*, on ait* $\mathrm{Int}(u(g))i(h) = i({}^{g}h)$*.*

---

[25] N.D.E. : De plus, on dit que $\mathbf{H}$ est *central* dans $\mathbf{G}$ si $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H}) = \mathbf{G}$, ou, ce qui revient au même, si $\mathbf{H}(\mathrm{S})$ est central dans $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ pour tout S.

[26] N.D.E. : On a ajouté les définitions 2.3.6.1 et 2.3.6.2.

3. La catégorie des O-modules, la catégorie des G-O-modules

Définition 3.1. — Soient $\mathbf{O}$ et $\mathbf{F}$ deux objets de $\widehat{\mathscr{C}}$. On dit que $\mathbf{F}$ est un $\widehat{\mathscr{C}}$-module sur le $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau $\mathbf{O}$, ou en abrégé un $\mathbf{O}$-module, si, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, on a muni $\mathbf{O}(\mathrm{S})$ d'une structure d'anneau et $\mathbf{F}(\mathrm{S})$ d'une structure de module sur cet anneau de telle manière que pour toute flèche $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}''$ de $\mathscr{C}$, $\mathbf{O}(\mathrm{S}'') \to \mathbf{O}(\mathrm{S}')$ soit un homomorphisme d'anneaux et $\mathbf{F}(\mathrm{S}'') \to \mathbf{F}(\mathrm{S}')$ un homomorphisme de groupes abéliens compatible avec cet homomorphisme d'anneaux.

Si $\mathbf{O}$ est fixé, on définit de manière habituelle un morphisme des $\mathbf{O}$-modules $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$, d'où le groupe commutatif $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$, et la catégorie des $\mathbf{O}$-modules notée ($\mathbf{O}$-Mod.).

Lemme 3.1.1. — (27) *($\mathbf{O}$-Mod.) est munie d'une structure de catégorie abélienne, définie « argument par argument ». De plus, ($\mathbf{O}$-Mod.) vérifie l'axiome* (AB 5) (cf. [**Gr57**, 1.5])*, c.-à-d., les sommes directes arbitraires existent et si $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}$-module, $\mathbf{N}$ un sous-module, et $(\mathbf{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille filtrante croissante de sous-modules de $\mathbf{M}$, alors*

$$\bigcup_{i\in\mathrm{I}}(\mathbf{F}_i \cap \mathbf{N}) = \Big(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathbf{F}_i\Big) \bigcap \mathbf{N}.$$

En effet, soit $f : \mathbf{F} \to \mathbf{F}'$ un morphisme de $\mathbf{O}$-modules. On définit les $\mathbf{O}$-modules $\mathrm{Ker}\, f$ (resp. $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Coker}\, f$) en posant, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $(\mathrm{Ker}\, f)(\mathrm{S}) = \mathrm{Ker}\, f(\mathrm{S})$ (resp. $\cdots$). Alors $\mathrm{Ker}\, f$ (resp. $\mathrm{Coker}\, f$) est un noyau (resp. conoyau) de f, et l'on a un isomorphisme de $\mathbf{O}$-modules $\mathbf{F}/\mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, f$. Ceci prouve que ($\mathbf{O}$-Mod.) est une catégorie abélienne.

Les sommes directes arbitraires existent et sont définies « argument par argument ». Enfin, si $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}$-module, $\mathbf{N}$ un sous-module, et $(\mathbf{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille *filtrante croissante* de sous-modules de $\mathbf{M}$, alors l'inclusion

$$\bigcup_{i\in\mathrm{I}}(\mathbf{F}_i \cap \mathbf{N}) \subset \Big(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathbf{F}_i\Big) \bigcap \mathbf{N}$$

est une égalité : en effet, si $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $x \in \mathbf{N}(\mathrm{S}) \cap \bigcup_i \mathbf{F}_i(\mathrm{S})$, il existe $i \in \mathrm{I}$ tel que $x \in \mathbf{N}(\mathrm{S}) \cap \mathbf{F}_i(\mathrm{S})$.

Proposition 3.1.2. — (27) *On suppose la catégorie $\mathscr{C}$* petite*, c.-à-d., que $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ est un ensemble. Alors $\mathbf{O}$ est un générateur de ($\mathbf{O}$-Mod.) ; par conséquent, ($\mathbf{O}$-Mod.) possède assez d'objets injectifs.*

Démonstration. Soit $\mathbf{F}$ un $\mathbf{O}$-module. Pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, soit $\mathbf{F}_0(\mathrm{S})$ un système de générateurs du $\mathbf{O}(\mathrm{S})$-module $\mathbf{F}(\mathrm{S})$. Comme, par hypothèse, $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ est un ensemble, on peut considérer l'ensemble $\mathrm{I} = \bigsqcup_{\mathrm{S}\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})} \mathbf{F}_0(\mathrm{S})$; alors on a un épimorphisme

$$\mathbf{O}^{\oplus \mathrm{I}} \twoheadrightarrow \mathbf{F}.$$

(27) N.D.E. : On a ajouté les énoncés 3.1.1 et 3.1.2 pour faire voir que la catégorie ($\mathbf{O}$-Mod.) est abélienne et vérifie l'axiome (AB 5), et de plus possède assez d'objets injectifs si la catégorie $\mathscr{C}$ est petite.

Ceci montre que $\mathbf{O}$ est un générateur de ($\mathbf{O}$-Mod.) (cf. [**Gr57**, 1.9.1]). Comme ($\mathbf{O}$-Mod.) vérifie (AB 5), il résulte alors de [**Gr57**, 1.10.1] que ($\mathbf{O}$-Mod.) possède assez d'objets injectifs.

Remarque 3.1.3. — Si $\mathbf{O}_0$ est le $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau défini par $\mathbf{O}_0(\mathrm{S}) = \mathbb{Z}$ (qu'il ne faut pas confondre avec le foncteur associé à l'objet constant $\mathbb{Z}$), alors la catégorie des $\mathbf{O}_0$-modules est isomorphe à la catégorie des $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes commutatifs.

Définition 3.1.4. — Remarquons que, si $\mathbf{F}$ est un $\mathbf{O}$-module, alors pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\mathbf{F}_\mathrm{S}$ est un $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module. On peut donc définir un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe abélien $\underline{\mathrm{Hom}}_\mathbf{O}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ par **21**

$$\underline{\mathrm{Hom}}_\mathbf{O}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}}(\mathbf{F}_\mathrm{S}, \mathbf{F}'_\mathrm{S}).$$

On définira de même des objets

$$\underline{\mathrm{Isom}}_\mathbf{O}(\mathbf{F}, \mathbf{F}'), \quad \underline{\mathrm{End}}_\mathbf{O}(\mathbf{F}) \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{Aut}}_\mathbf{O}(\mathbf{F}),$$

le dernier étant un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe pour la structure induite par la composition des automorphismes.

Définition 3.2. — Soient $\mathbf{O}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau, $\mathbf{F}$ un $\mathbf{O}$-module et $\mathbf{G}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe. On appelle structure de $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-module sur $\mathbf{F}$ une structure de $\mathbf{G}$-objet telle que pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et tout $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, l'automorphisme de $\mathbf{F}(\mathrm{S})$ défini par g soit un automorphisme de sa structure de $\mathbf{O}(\mathrm{S})$-module.

Il revient au même de dire que le morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes

$$\rho : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{F})$$

défini en 2.3 applique $\mathbf{G}$ dans le sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\underline{\mathrm{Aut}}_\mathbf{O}(\mathbf{F})$ de $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{F})$. Se donner une *structure de* $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-*module* sur le $\mathbf{O}$-module $\mathbf{F}$, c'est donc se donner un *morphisme de* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes*

$$\rho : \mathbf{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_\mathbf{O}(\mathbf{F}).$$

On définit de manière naturelle le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}}(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$, donc la catégorie additive des $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-modules notée ($\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-Mod.).

Remarque 3.2.1. — Le lecteur remarquera que ($\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-Mod.) peut également se définir comme la catégorie des $\mathbf{O}[\mathbf{G}]$-modules, où $\mathbf{O}[\mathbf{G}]$ est l'algèbre du $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe $\mathbf{G}$ sur le $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau $\mathbf{O}$, dont la définition est claire. [28] Par conséquent, d'après 3.1.1 et 3.1.2, ($\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-Mod.) est une catégorie abélienne vérifiant l'axiome (AB 5) ; de plus, si $\mathscr{C}$ est *petite*, ($\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-Mod.) possède assez d'objets injectifs.

Toutes les constructions de ce paragraphe se spécialisent aussitôt au cas où $\mathbf{G}$ (ou **22**
$\mathbf{O}$, ou les deux) sont représentables par des objets de $\mathscr{C}$ qui sont par là-même munis des structures algébriques correspondantes.

Nous avons traité succinctement le cas des principales structures algébriques rencontrées dans la suite de ce séminaire. Pour les autres (structure de $\mathbf{O}$-algèbre de Lie

[28] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit ; ceci sera utilisé dans la section 5.

par exemple), nous croyons que le lecteur aura eu suffisamment d'exemples dans ce paragraphe pour pouvoir dans chaque cas particulier faire fonctionner lui-même le mécanisme général esquissé dans 2.2.

Nous allons maintenant appliquer ce que nous venons de faire à la catégorie des schémas notée (**Sch**) et plus généralement aux catégories $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$ (qu'on notera aussi $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$).

4. Structures algébriques dans la catégorie des schémas

Nous nous permettrons, chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguïté, les abus de langage suivants : on désignera par T l'objet $\mathrm{T} \xrightarrow{f} \mathrm{S}$ de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, la donnée de f (« morphisme structural de T ») étant sous-entendue, et on identifiera $\mathscr{C}$ à une sous-catégorie de $\widehat{\mathscr{C}}$. Compte tenu des compatibilités énoncées aux paragraphes précédents, ces identifications peuvent se faire sans danger.

Nous simplifierons d'autre part les appellations sur le modèle suivant : un (**Sch**)-groupe sera aussi appelé *schéma en groupes*, un $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$-groupe *schéma en groupes sur* S, ou S-*schéma en groupes*, ou S-*groupe*, ou A-*groupe* lorsque S sera le spectre de l'anneau A.

4.1. Schémas constants. — La catégorie des schémas satisfait aux conditions exigées en 1.8. On peut donc y définir les objets constants ; pour tout ensemble E, on a un schéma $\mathrm{E}_{\mathbb{Z}}$ et pour tout schéma S, un S-schéma $\mathrm{E}_{\mathrm{S}} = (\mathrm{E}_{\mathbb{Z}})_{\mathrm{S}}$. Rappelons (cf. *loc. cit.*)
23 que pour tout S-schéma T, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{T}, \mathrm{E}_{\mathrm{S}})$ est l'ensemble des applications localement constantes de l'espace topologique T dans E.

Le foncteur $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{E}_{\mathrm{S}}$ commute aux limites projectives finies. En particulier si G est un groupe, G_{S} est un S-schéma en groupes ; si O est un anneau, O_{S} est un S-schéma en anneaux, etc.

4.2. S-groupes affines. — Rappelons un certain nombre de choses sur les S-schémas affines (EGA II, § 1). On dit que le S-schéma T est *affine sur* S si l'image réciproque de tout ouvert affine de S est affine. La $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre $f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{T}})$, que l'on désigne par $\mathscr{A}(\mathrm{T})$, est alors *quasi-cohérente* (f désigne le morphisme structural de T). Réciproquement, à toute $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A}$, on peut faire correspondre un S-schéma affine sur S noté $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$. Ces foncteurs $\mathrm{T} \mapsto \mathscr{A}(\mathrm{T})$ et $\mathscr{A} \mapsto \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ sont des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre entre la catégorie des S-schémas affines sur S et la catégorie opposée à celle des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres quasi-cohérentes.

Il en résulte que se donner une structure algébrique sur un S-schéma affine T est équivalent à se donner la structure correspondante sur $\mathscr{A}(\mathrm{T})$ dans la catégorie opposée à celle des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres quasi-cohérentes. En particulier, si G est un S-groupe affine sur S, $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est munie d'une structure de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-bigèbre augmentée, c'est-à-dire que l'on
24 a deux *morphismes de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-algèbres*

$$\Delta : \mathscr{A}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon : \mathscr{A}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$$

correspondant aux morphismes de S-schémas

$$\pi : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G} \qquad \text{et} \qquad e_{\mathrm{G}} : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{G}.$$

Les applications Δ et ε vérifient les conditions suivantes (qui expriment que G est un S-monoïde) :

(HA 1) Δ *est co-associatif* : le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[dr, "\mathrm{Id} \otimes \Delta"] & \\
\mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \\
& \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[ur, "\Delta \otimes \mathrm{Id}"'] & .
\end{tikzcd}$$

(HA 2) : Δ *est compatible avec* ε : les deux composés suivants sont l'identité

$$\mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\Delta} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes \varepsilon} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \quad ,$$
$$\mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\Delta} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\varepsilon \otimes \mathrm{Id}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \quad .$$

(29)

Profitons de la circonstance pour remarquer une fois encore qu'il résulte de la définition d'une structure de S-groupe que pour se donner une telle structure sur un S-schéma G affine sur S, *il n'est pas nécessaire de vérifier quoi ce soit sur* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$, mais simplement de munir chaque $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ pour S' au-dessus de S d'une structure de groupe fonctorielle en S'. Cette remarque s'applique *mutatis mutandis* aux morphismes. 25

4.3. Les groupes $\mathbb{G}_a$ et $\mathbb{G}_m$. L'anneau $\mathbb{O}$

4.3.1. — Soit $\mathbf{G}_a$ le foncteur de $(\mathbf{Sch})^\circ$ dans $(\mathbf{Ens})$ défini par

$$\mathbf{G}_a(\mathrm{S}) = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$$

muni de la structure de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$-groupe définie par la structure de groupe additif de l'anneau $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$. Il est représentable par un schéma affine que l'on notera $\mathbb{G}_a$, et qui est donc un *schéma en groupes*

$$\mathbb{G}_a = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\mathrm{T}].$$

En effet, $\mathbb{G}_a(\mathrm{S}) = \operatorname{Hom}(\mathrm{S}, \mathbb{G}_a) = \operatorname{Hom}_{\mathrm{Alg.}}(\mathbb{Z}[\mathrm{T}], \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})) \simeq \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$.

(29) N.D.E. : Et, bien sûr, le morphisme d'inversion $\mathrm{G} \to \mathrm{G}$ induit un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres $\tau : \mathscr{A}(\mathrm{G}) \to \mathscr{A}(\mathrm{G})$ qui, avec Δ et ε, fait de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*algèbre de Hopf*.

Pour tout schéma S, on a donc un S-groupe affine sur S noté $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$, qui correspond à la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-bigèbre $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{T}]$, avec l'application diagonale et l'augmentation définies par :

$$\Delta(\mathrm{T}) = \mathrm{T} \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{T}, \qquad \varepsilon(\mathrm{T}) = 0.$$

4.3.2. — Soit $\mathbf{G}_m$ le foncteur de $(\mathbf{Sch})^{\circ}$ dans $(\mathbf{Ens})$ défini par

$$\mathbf{G}_m(\mathrm{S}) = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})^{\times},$$

où $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})^{\times}$ désigne le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$, muni de sa structure naturelle de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$-groupe. Il est représentable par un schéma affine noté $\mathbb{G}_m$

$$\mathbb{G}_m = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}] = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}],$$

26 où $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ désigne l'algèbre du groupe $\mathbb{Z}$ sur l'anneau $\mathbb{Z}$. En effet

$$\mathbb{G}_m(\mathrm{S}) = \operatorname{Hom}_{\mathrm{Alg.}}(\mathbb{Z}[\mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}], \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})) \simeq \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})^{\times}.$$

Pour tout schéma S, on a donc un S-groupe affine sur S noté $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ qui correspond à la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathbb{Z}]$, avec l'application diagonale et l'augmentation définies par :

$$\Delta(x) = x \otimes x \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) = 1, \qquad \text{pour} \quad x \in \mathbb{Z}.$$

4.3.3. — Soit $\mathbf{O}$ le foncteur $\mathbf{G}_a$ muni de sa structure de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$-anneau. Il est représenté par le schéma $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\mathrm{T}]$ que l'on notera $\mathbb{O}$ lorsqu'on le considèrera comme muni de sa structure de *schéma d'anneaux.*

Pour tout schéma S, $\mathbb{O}_{\mathrm{S}} = \mathrm{S} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\mathrm{T}] = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{T}])$ est donc un S-schéma en anneaux, affine sur S. (*Nota* : dans EGA II 1.7.13, $\mathbb{O}_{\mathrm{S}}$ est noté S[T]).

4.3.3.1. — [30] Pour tout objet $\mathbf{X}$ de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$, $\mathbf{O}(\mathbf{X}) = \operatorname{Hom}(\mathbf{X}, \mathbf{O})$ est muni d'une structure d'anneau, fonctorielle en $\mathbf{X}$. En particulier, si X' est un schéma et si l'on se donne des morphismes $x : \mathrm{X}' \to \mathbf{X}$ et $f : \mathbf{X} \to \mathbf{O}$ (c.-à-d., $f \in \mathbf{O}(\mathbf{X})$), alors $f(x) = f \circ x$ est un élément de $\mathbf{O}(\mathrm{X}') = \Gamma(\mathrm{X}', \mathscr{O}_{\mathrm{X}'})$.

Définition. — Soit $\pi : \mathbf{M} \to \mathbf{X}$ un morphisme de $(\widehat{\mathbf{Sch}})$, et soit $\mathbf{O}_{\mathbf{X}} = \mathbf{O} \times \mathbf{X}$. On dit que $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_{\mathbf{X}}$-*module* si l'on s'est donné, pour tout $\mathbf{X}$-schéma X', une structure de $\mathbf{O}(\mathrm{X}')$-module sur $\operatorname{Hom}_{\mathbf{X}}(\mathrm{X}', \mathbf{M})$, fonctorielle en X'.

Ceci revient à se donner une loi de $\mathbf{X}$-groupe abélien $\mu : \mathbf{M} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ et une « loi externe »

$$\mathbf{O} \times \mathbf{M} = \mathbf{O}_{\mathbf{X}} \times_{\mathbf{X}} \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}, \qquad (f, m) \mapsto f \cdot m$$

qui est un $\mathbf{X}$-morphisme (i.e. $\pi(f \cdot m) = \pi(m)$) et qui, pour tout $x \in \mathbf{X}(\mathrm{S})$, munit $\mathbf{M}(x) = \{m \in \mathbf{M}(\mathrm{S}) \mid \pi(m) = x\}$ d'une structure de $\mathbf{O}(\mathrm{S})$-module.

Dans ce cas, pour tout $\mathbf{Y} \in \operatorname{Ob}(\widehat{\mathbf{Sch}})_{/\mathbf{X}}$ (non nécessairement représentable), $\operatorname{Hom}_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}, \mathbf{M}) = \Gamma(\mathbf{M}_{\mathbf{Y}}/\mathbf{Y})$ est un $\mathbf{O}(\mathbf{Y})$-module, de façon fonctorielle en $\mathbf{Y}$.

[30] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, qui sera utile plus loin (cf. II 1.3).

4.4. Groupes diagonalisables

4.4.1. — La construction de $\mathbb{G}_m$ se généralise comme suit : soit M un groupe commutatif et $\mathrm{M}_{\mathbb{Z}}$ le schéma en groupes qui lui est associé par le procédé de 4.1. Considérons le foncteur défini par

$$\mathbf{D}(\mathrm{M})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\text{groupes}}(\mathrm{M}, \mathbb{G}_m(\mathrm{S})) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{S-Gr.}}(\mathrm{M}_{\mathrm{S}}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}).$$

C'est un $(\widehat{\mathbf{Sch}})$-groupe commutatif qui est représentable par un *schéma en groupes* que l'on notera D(M) ; on aura donc par définition :

$$\mathrm{D}(\mathrm{M}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathbf{Sch})\text{-Gr.}}(\mathrm{M}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{G}_m).$$

Posons en effet **27**

$$\mathrm{D}(\mathrm{M}) = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\mathrm{M}],$$

où $\mathbb{Z}[\mathrm{M}]$ est l'algèbre du groupe M sur l'anneau $\mathbb{Z}$; on a

$$\mathrm{D}(\mathrm{M})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\text{Alg.}}(\mathbb{Z}[\mathrm{M}], \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{groupes}}(\mathrm{M}, \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})^{\times})$$

par définition même de l'algèbre $\mathbb{Z}[\mathrm{M}]$.

4.4.2. — Pour tout schéma S on a donc un S-schéma en groupes affine sur S

$$\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}) = \mathrm{D}(\mathrm{M})_{\mathrm{S}} = \underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathbf{Sch})\text{-Gr.}}(\mathrm{M}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{G}_m)_{\mathrm{S}} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-Gr.}}(\mathrm{M}_{\mathrm{S}}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}).$$

Il est associé à la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-bigèbre $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{M}]$, munie de l'application diagonale et de l'augmentation définies par

$$\Delta(x) = x \otimes x \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) = 1, \qquad \text{pour} \quad x \in \mathrm{M}.$$

4.4.3. — Si $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est un homomorphisme de groupes commutatifs, on définit de manière évidente un morphisme de S-groupes

$$\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(f) : \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}) ,$$

d'où un *foncteur*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{S}} : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$$

de la catégorie des *groupes abéliens* dans la catégorie des S-*groupes affines sur* S, que l'on peut aussi définir comme composé du foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}_{\mathrm{S}}$ et du foncteur $\mathrm{M}_{\mathrm{S}} \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-Gr.}}(\mathrm{M}_{\mathrm{S}}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$. Ce foncteur *commute aux extensions de la base.*

Un S-groupe isomorphe à un groupe de la forme $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ est dit *diagonalisable.* **28**
Notons que les éléments de M s'interprètent comme certains caractères de $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, c'est-à-dire certains éléments de $\mathrm{Hom}_{\text{S-Gr.}}(\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}), \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$. (*Confer* VIII 1).

4.4.4. — Donnons quelques exemples de groupes diagonalisables. On a d'abord

$$\mathrm{D}(\mathbb{Z}) = \mathbb{G}_m \quad \text{et} \quad \mathrm{D}(\mathbb{Z}^r) = (\mathbb{G}_m)^r.$$

On pose

$$\boldsymbol{\mu}_n = \mathrm{D}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

et on le nomme *groupe des racines n-ièmes de l'unité*. En effet, on a

$$\boldsymbol{\mu}_n(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\text{groupes}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})^*) = \{f \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}}) \mid f^n = 1\}.$$

Le S-groupe $\boldsymbol{\mu}_{n,\mathrm{S}}$ correspond à la $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-algèbre $\mathscr{O}_\mathrm{S}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^n-1)$. Supposons en particulier que S soit le spectre d'un corps k de caractéristique $p=n$. En posant $\mathrm{T}-1=s$, on trouve

$$k[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^p-1)=k[s]/(s^p),$$

ce qui montre que l'espace topologique sous-jacent à $\boldsymbol{\mu}_{p,k}$ est réduit à un point, l'anneau local de ce point étant la k-algèbre artinienne $k[s]/(s^p)$. (Dans le même ordre d'idées, signalons que les S-schémas $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$, $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$, $\mathbb{O}_\mathrm{S}$ sont *lisses* sur S, que $\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$ est *plat* sur S et qu'il est formellement lisse (resp. *lisse*) sur S si et seulement si aucune caractéristique résiduelle de S ne divise la torsion de M (resp. et si de plus M est de type fini), cf. Exp. VIII, 2.1).

29 **4.5. Autres exemples de groupes.** — Le procédé précédent s'applique aux « groupes classiques » (groupes linéaires $\mathbb{GL}_n$, symplectiques $\mathbb{Sp}_n$, orthogonaux $\mathbb{O}_n$, etc.). On définira par exemple $\mathbb{GL}_n$ comme représentant le foncteur $\mathbf{GL}_n$ tel que :

$$\mathbf{GL}_n(\mathrm{S})=\mathrm{GL}(n,\Gamma(\mathrm{S},\mathscr{O}_\mathrm{S}))=\mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\mathscr{O}_\mathrm{S}^n).$$

On pourra le construire par exemple comme l'ouvert de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\mathrm{T}_{ij}]$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$ défini par la fonction $f=\mathrm{dét}((\mathrm{T}_{ij})_{i,j=1}^n)$, c'est-à-dire $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\mathrm{T}_{ij},f^{-1}]$.

4.6. Foncteurs-modules dans la catégorie des schémas. — Nous nous proposons d'associer à tout $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module sur le schéma S, un $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module (où $\mathbf{O}_\mathrm{S}$ désigne le foncteur-anneau introduit en 4.3.3). Ceci peut se faire de deux manières différentes. De façon précise :

Définition 4.6.1. — Soit S un schéma. Pour tout $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module $\mathscr{F}$ on note $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ et $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ les foncteurs contravariants sur $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$ définis par :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathscr{F})(\mathrm{S}')&=\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}\mathscr{O}_{\mathrm{S}'},\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}),\\ \mathbf{W}(\mathscr{F})(\mathrm{S}')&=\Gamma(\mathrm{S}',\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}\mathscr{O}_{\mathrm{S}'})\end{aligned}$$

(où $\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ désigne l'image inverse sur S' du $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module $\mathscr{F}$).

Alors $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ et $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ sont munis de manière évidente d'une structure de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-*modules* (on rappelle que $\mathbf{O}_\mathrm{S}(\mathrm{S}')=\Gamma(\mathrm{S}',\mathscr{O}_{\mathrm{S}'})=\mathbf{W}(\mathscr{O}_\mathrm{S})(\mathrm{S}')$), de telle façon que l'on a en fait défini deux foncteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ de la catégorie des $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules dans la catégorie des $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules, $\mathbf{V}$ étant contravariant et $\mathbf{W}$ covariant.

Nous nous restreignons dans la suite de ce paragraphe au cas où les $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules
30 en question sont quasi-cohérents, c'est-à-dire que nous considérons $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ comme des foncteurs de la catégorie ($\mathscr{O}_\mathrm{S}$-Mod.q.c.) des $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules quasi-cohérents dans la catégorie des $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules

$$\begin{aligned}\mathbf{V}&:(\mathscr{O}_\mathrm{S}\text{-Mod.q.c.})^\circ\longrightarrow(\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-Mod.}),\\ \mathbf{W}&:(\mathscr{O}_\mathrm{S}\text{-Mod.q.c.})\longrightarrow(\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-Mod.}).\end{aligned}$$

Remarque 4.6.1.1. — [31] Le lecteur remarquera que, dans la suite, toutes les propositions qui ne font intervenir que le foncteur $\mathbf{W}$ sont valables pour des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules arbitraires, non nécessairement quasi-cohérents.

Proposition 4.6.2. — (i) *Les foncteurs* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{W}$ *commutent à l'extension de la base : si* S' *est au-dessus de* S *et si* $\mathscr{F}$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module quasi-cohérent, on a*

$$\mathbf{V}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}'})\simeq\mathbf{V}(\mathscr{F})_{\mathrm{S}'}\quad \textit{et}\quad \mathbf{W}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}'})\simeq\mathbf{W}(\mathscr{F})_{\mathrm{S}'}.$$

(ii) *Les foncteurs* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{W}$ *sont pleinement fidèles : les application canoniques*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F},\mathscr{F}')&\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{V}(\mathscr{F}'),\mathbf{V}(\mathscr{F}))\\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F},\mathscr{F}')&\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}),\mathbf{W}(\mathscr{F}'))\end{aligned}$$

sont bijectives.

(iii) *Les foncteurs* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{W}$ *sont additifs :*

$$\mathbf{V}(\mathscr{F}\oplus\mathscr{F}')\simeq\mathbf{V}(\mathscr{F})\underset{\mathrm{S}}{\times}\mathbf{V}(\mathscr{F}')\quad \textit{et}\quad \mathbf{W}(\mathscr{F}\oplus\mathscr{F}')\simeq\mathbf{W}(\mathscr{F})\underset{\mathrm{S}}{\times}\mathbf{W}(\mathscr{F}').$$

Les parties (i) et (iii) sont évidentes sur les définition. Pour (ii), on prend pour S' 31
des ouverts de S. Nous laissons la démonstration au lecteur (pour $\mathbf{V}$, utiliser EGA II, 1.7.14).

Rappelons (cf. 3.1.4) que si $\mathbf{F},\mathbf{F}'$ sont des $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{F},\mathbf{F}')$ désigne le S-foncteur (en groupes abéliens) qui à tout $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$ associe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathbf{F}_{\mathrm{S}'},\mathbf{F}'_{\mathrm{S}'})$.

Proposition 4.6.3. — [32] *On a des morphismes canoniques dans* ($\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.) *:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}),\mathbf{W}(\mathscr{F}')) \arrow[rr, equal] & & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{V}(\mathscr{F}'),\mathbf{V}(\mathscr{F})) \\
& \mathbf{W}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F},\mathscr{F}')) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}\quad .$$

Cela résulte immédiatement de 4.6.2 (i) et (ii).

Notation 4.6.3.1. — Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. On sait (EGA II, 1.7.8) que le S-foncteur $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ est représentable par un S-schéma affine sur S que l'on note $\mathbb{V}(\mathscr{F})$ et que l'on appelle *fibration vectorielle* [33] définie par $\mathscr{F}$:

$$\mathbb{V}(\mathscr{F})=\mathrm{Spec}(\mathcal{S}(\mathscr{F})),$$

[31] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.6.1.1, pour des références ultérieures.

[32] N.D.E. : On a ajouté l'isomorphisme $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}),\mathbf{W}(\mathscr{F}'))\cong\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{V}(\mathscr{F}'),\mathbf{V}(\mathscr{F}))$.

[33] N.D.E. : on a remplacé « fibré vectoriel » par « fibration vectorielle » ; l'usage actuel étant d'appeler « fibré vectoriel de rang r » une fibration vectorielle qui est *localement triviale* de rang r, c.-à-d., dont le faisceau des sections est localement isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}^{\oplus r}$.

où $\mathcal{S}(\mathscr{F})$ désigne l'algèbre symétrique du $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{F}$. [34]

Proposition 4.6.4. — *Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ deux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules quasi-cohérents, $\mathscr{A}$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre quasi-cohérente. On a un isomorphisme fonctoriel :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Spec}(\mathscr{A}), \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}'), \mathbf{W}(\mathscr{F}))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F}', \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}).$$

En effet, si on note $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$, le premier membre est canoniquement isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}'), \mathbf{W}(\mathscr{F}))(\mathrm{X})$, c'est-à-dire par définition à

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{X}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}')_{\mathrm{X}}, \mathbf{W}(\mathscr{F})_{\mathrm{X}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{X}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}' \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}), \mathbf{W}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}))$$

32 (cf. 4.6.2 (i)), ce qui par 4.6.2 (ii) peut aussi s'écrire

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}(\mathscr{F}' \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F}', \pi_*(\pi^*(\mathscr{F}))),$$

où on note $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural. Mais, par EGA II, 1.4.7, on a $\pi_*(\pi^*(\mathscr{F})) \simeq \mathscr{F} \otimes \mathscr{A}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.6.4.1. — *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{W}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Spec}(\mathscr{A}), \mathbf{W}(\mathscr{F})).$$

En effet, [35] soient $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un S-schéma et $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{S}' \arrow[r, "f"] & \mathrm{S} \end{tikzcd}$$

et d'après EGA II, 1.5.2, X′ est affine sur S′ et $\pi'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}) = f^*(\mathscr{A})$. On a donc

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Spec}(\mathscr{A}), \mathbf{W}(\mathscr{F}))(\mathrm{S}') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'}\big(\mathrm{Spec}(f^*(\mathscr{A})), \mathbf{W}(f^*(\mathscr{F}))\big)$$

et d'après 4.6.4 appliqué à $f^*(\mathscr{F})$, $\mathscr{F}' = \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ et $f^*(\mathscr{A})$, ceci égale

$$\Gamma(\mathrm{S}', f^*(\mathscr{F}) \otimes f^*(\mathscr{A})) = \Gamma(\mathrm{S}', f^*(\mathscr{F} \otimes \mathscr{A})) = \mathbf{W}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{A})(\mathrm{S}').$$

Proposition 4.6.5. — *Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont deux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules localement libres de type fini, les morphismes de* 4.6.3 *sont des isomorphismes.*

En effet, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, on a

$$\mathbf{W}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F}, \mathscr{F}'))(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F}, \mathscr{F}') \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}, \mathscr{F}' \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}).$$

Mais le second membre est bien isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}), \mathbf{W}(\mathscr{F}'))(\mathrm{S}')$ et à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{V}(\mathscr{F}'), \mathbf{V}(\mathscr{F}))(\mathrm{S}')$, par 4.6.2 (i) et (ii).

Corollaire 4.6.5.1. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre de type fini. Posons $\mathscr{F}^{\vee} =$*
33 *$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$. On a des isomorphismes canoniques :*

---

(34) N.D.E. : Signalons ici les articles [**Ni04**] (resp. [**Ni02**]) qui montrent que si S est *noethérien* et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module *cohérent*, alors $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ (resp. le S-groupe qui à tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ associe $\mathrm{Aut}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{T}})$) est représentable si et *seulement si* $\mathscr{F}$ est localement libre.

(35) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(\mathscr{F}^\vee) &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathscr{F}), \mathbf{O}_S) \simeq \mathbf{V}(\mathscr{F}),\\ \mathbf{V}(\mathscr{F}^\vee) &\simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{V}(\mathscr{F}), \mathbf{O}_S) \simeq \mathbf{W}(\mathscr{F}).\end{aligned}$$

On a enfin la proposition suivante :

Proposition 4.6.6. — *Soit $f : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ un morphisme de $\mathscr{O}_S$-modules localement libres de rang fini. Pour que $\mathbf{W}(f) : \mathbf{W}(\mathscr{F}) \to \mathbf{W}(\mathscr{F}')$ soit un monomorphisme, il faut et il suffit que f identifie $\mathscr{F}$ localement à un facteur direct de $\mathscr{F}'$.*

La proposition directe est essentiellement contenue dans EGA 0_{I}, 5.5.5. [36] Réciproquement, si $\mathscr{F}$ est localement facteur direct de $\mathscr{F}'$ alors, pour tout $\pi : S' \to S$, $\pi^*\mathscr{F}$ est un sous-module de $\pi^*\mathscr{F}'$ (car localement facteur direct), donc $\mathbf{W}(\mathscr{F})(S') = \Gamma(S', \pi^*\mathscr{F})$ est un sous-module de $\mathbf{W}(\mathscr{F}')(S') = \Gamma(S', \pi^*\mathscr{F}')$.

4.7. La catégorie des G-$\mathscr{O}_S$-modules. — Soient G un S-groupe et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module ; $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ est muni d'une structure de $\mathbf{O}_S$-module.

Définition 4.7.1. — On appelle structure de G-$\mathscr{O}_S$-module sur $\mathscr{F}$ une structure de $\mathbf{h}_G$-$\mathbf{O}_S$-module sur $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ (cf. 3.2). Un morphisme de G-$\mathscr{O}_S$-modules est par définition un morphisme des $\mathbf{h}_G$-$\mathbf{O}_S$-modules associés. On obtient ainsi la catégorie (G-$\mathscr{O}_S$-Mod.), et l'on note (G-$\mathscr{O}_S$-Mod.q.c.) la sous-catégorie pleine formée des G-$\mathscr{O}_S$-modules qui sont quasi-cohérents comme $\mathscr{O}_S$-modules.

Se donner une structure de G-$\mathscr{O}_S$-module sur $\mathscr{F}$, c'est donc par 3.2 se donner un morphisme de $(\widehat{\mathbf{Sch}})_{/S}$-groupes

$$\rho : \mathbf{h}_G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathscr{F})).$$

Remarque 4.7.1.0. — [37] Puisqu'on a, d'après 4.6.2, un *anti-isomorphisme* de S-foncteurs en groupes

$$(\dagger)\qquad \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathscr{F})) \simeq \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{V}(\mathscr{F})),$$

on voit qu'il est équivalent de se donner une structure de $\mathbf{h}_G$-$\mathbf{O}_S$-module sur $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ ou sur $\mathbf{V}(\mathscr{F})$. En effet, soit $\rho : \mathbf{h}_G \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_S}(\mathbf{W}(\mathscr{F}))$ comme ci-dessus. Pour tout $T \to S$ et $g \in G(T)$, notons $\rho^*(g)$ l'image de $\rho(g)$ par l'anti-isomorphisme (†) ; on a donc $\rho^*(gh) = \rho^*(h) \circ \rho^*(g)$, i.e. ρ^* définit une structure de $\mathbf{h}_G$-$\mathbf{O}_S$-module « *à droite* » sur $\mathbf{V}(\mathscr{F})$. En posant $\rho^\vee(g) = \rho^*(g^{-1})$, on obtient bien une structure de $\mathbf{h}_G$-$\mathbf{O}_S$-module sur $\mathbf{V}(\mathscr{F})$, dont la donnée équivaut à celle de ρ.

Remarque 4.7.1.1. — On peut dire que l'on a construit les catégories que l'on vient de définir par les carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
(G\text{-}\mathscr{O}_S\text{-Mod.q.c.}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & (G\text{-}\mathscr{O}_S\text{-Mod.}) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbf{h}_G\text{-}\mathbf{O}_S\text{-Mod.}) \arrow[d, "\text{oubli}"] \\
(\mathscr{O}_S\text{-Mod.q.c.}) \arrow[r, hook] & (\mathscr{O}_S\text{-Mod.}) \arrow[r, "\mathbf{W}"] & (\mathbf{O}_S\text{-Mod.})
\end{tikzcd}$$

[36] N.D.E. : On a détaillé la phrase qui suit.

[37] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, tirée de [DG], II, § 2, 1.1.

[38] Les catégories ($\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.) et ($\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.) sont abéliennes, mais on prendra garde qu'en général le foncteur $\mathbf{W}$ n'est pas exact, ni à gauche ni à droite.

Remarque 4.7.1.2. — [39] Soit $\mathscr{F}$ un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module. Le sous-faisceau des invariants $\mathscr{F}^{\mathrm{G}}$ est défini comme suit : pour tout ouvert U de S,

$$\mathscr{F}^{\mathrm{G}}(\mathrm{U}) = \mathbf{W}(\mathscr{F})^{\mathrm{G}}(\mathrm{U}) = \{x \in \mathscr{F}(\mathrm{U}) \mid g \cdot x_{\mathrm{S}'} = x_{\mathrm{S}'} \quad \text{pour tout } \mathrm{S}' \xrightarrow{f} \mathrm{U},\ g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')\},$$

où $x_{\mathrm{S}'}$ désigne l'image de x dans $\Gamma(\mathrm{S}', f^*(\mathscr{F})) = \Gamma(\mathrm{U}, f_* f^*(\mathscr{F}))$.

On prendra garde que le morphisme naturel $\mathbf{W}(\mathscr{F}^{\mathrm{G}}) \to \mathbf{W}(\mathscr{F})^{\mathrm{G}}$ n'est pas un isomorphisme en général. Par exemple, si $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et G est le groupe constant $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, \tau\}$ agissant sur $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ par $\tau \cdot 1 = -1$, on a $\mathscr{F}^{\mathrm{G}} = 0$ mais, si R est une $\mathbb{F}_2$-algèbre, $\mathbf{W}(\mathscr{F})^{\mathrm{G}}(\mathrm{Spec}(\mathrm{R})) = \mathrm{R}$.

34

4.7.2. — On suppose désormais, jusqu'à la fin du n°4.7, que G est *affine* sur S. [40] Alors, en vertu de 4.6.4, la donnée d'un morphisme de S-foncteurs

$$\rho : \mathbf{h}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}))$$

équivaut à celle d'un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules

$$\mu : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}).$$

Dire que ρ est un morphisme de $(\widehat{\mathbf{Sch}})_{/\mathrm{S}}$-groupes équivaut alors à dire que μ satisfait aux axiomes suivants :

(CM 1) *le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] \\ \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[r, "\mu \otimes \mathrm{id}"] & \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \end{tikzcd} .$$

(CM 2) *le composé ci-dessous est l'identité*

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\ \mu\ } \mathscr{F} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \varepsilon} \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{F}.$$

Ces axiomes (CM 1) et (CM 2) sont ceux de la structure de *comodule* (à droite) [41] sur la bigèbre $\mathscr{A}(\mathrm{G})$.

[38] N.D.E. : On a corrigé l'original, en supprimant l'assertion que la catégorie (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.) est abélienne, voir 4.7.2.1 plus bas.

[39] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

[40] N.D.E. : cf. VI_{B}, §§ 11.1–11.6 pour l'extension des résultats de 4.7.2 au cas où G n'est pas nécessairement affine, mais où G et $\mathscr{F}$ sont supposés *plats* sur S.

[41] N.D.E. : Les G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules *à gauche* correspondent de façon naturelle aux $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodules *à droite*.

Posons $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$. Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont des $\mathscr{A}$-comodules, un morphisme de comodules $f : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ est un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu_{\mathscr{F}}"'] & \mathscr{F}' \arrow[d, "\mu_{\mathscr{F}'}"] \\ \mathscr{F} \otimes \mathscr{A} \arrow[r, "f\otimes \mathrm{id}"] & \mathscr{F}' \otimes \mathscr{A}. \end{tikzcd}$$

On obtient ainsi la catégorie ($\mathscr{A}$-Comod.), et l'on notera ($\mathscr{A}$-Comod.q.c.) la sous-catégorie pleine formée des $\mathscr{A}$-comodules qui sont quasi-cohérents comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules. On a donc obtenu :

Proposition 4.7.2. — *Soit* G *un* S-*groupe* affine sur S. *On a des équivalences de catégories :* 35

$$(\mathrm{G}\text{-}\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.}) \cong (\mathscr{A}(\mathrm{G})\text{-Comod.})$$
$$(\mathrm{G}\text{-}\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.q.c.}) \cong (\mathscr{A}(\mathrm{G})\text{-Comod.q.c.})$$

[42] *Si de plus* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\Lambda)$ *est* affine *et si on note* $\Lambda[\mathrm{G}] = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{A}(\mathrm{G}))$, *on a une équivalence de catégories*

$$(\mathscr{A}(\mathrm{G})\text{-Comod.q.c.}) \cong (\Lambda[\mathrm{G}]\text{-Comod.}).$$

[43] Supposons de plus que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$ soit un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module *plat*. Soient $\mathscr{E}$ un $\mathscr{A}$-comodule et $\mathscr{F}$ un sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module de $\mathscr{E}$. Comme $\mathscr{A}$ est plat sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, on peut identifier $\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{F} \otimes \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$) à un sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module de $\mathscr{E} \otimes \mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{E} \otimes \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$). Supposons que $\mu_{\mathscr{E}}$ applique $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}$, alors sa restriction $\mu_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{A}$ munit $\mathscr{F}$ d'une structure de $\mathscr{A}$-comodule ; on dit que $\mathscr{F}$ est un *sous-comodule* de $\mathscr{E}$. Par passage au quotient, $\mu_{\mathscr{E}}$ définit un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mathscr{E}/\mathscr{F} \to \mathscr{E}/\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}$, qui munit $\mathscr{E}/\mathscr{F}$ d'une structure de $\mathscr{A}$-comodule. Si $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est un morphisme de $\mathscr{A}$-comodules, $\mathrm{Ker}\, f$ (resp. $\mathrm{Im}\, f$) est un sous-$\mathscr{A}$-comodule de $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{E}'$), et f induit un isomorphisme de $\mathscr{A}$-comodules : $\mathscr{E}/\,\mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, f$. De plus, si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules quasi-cohérents, il en est de même de $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$. Par conséquent, ($\mathscr{A}$-Comod.) et ($\mathscr{A}$-Comod.q.c.) sont des catégories *abéliennes*.

Corollaire 4.7.2.1. — *On suppose que* G *est* affine et plat sur S. *Alors la catégorie* (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) (*resp.* (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.)), *équivalente à la catégorie des* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-*comodules quasi-cohérents sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ (*resp.* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-*comodules*), *est* abélienne.

4.7.3. — Supposons maintenant que G soit un *groupe diagonalisable*, c'est-à-dire que $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ soit l'algèbre d'un groupe commutatif M sur le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module, on a

$$\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G}) = \coprod_{m \in \mathrm{M}} \mathscr{F} \otimes m\mathscr{O}_{\mathrm{S}}.$$

[42] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[43] N.D.E. : On a ajouté le paragraphe qui suit, tiré de [**Se68**, § 1.3].

Se donner un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules

$$\mu : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G})$$

est donc équivalent à se donner des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-endomorphismes $(\mu_m)_{m\in\mathrm{M}}$ de $\mathscr{F}$, tels que pour toute section x de $\mathscr{F}$ sur un ouvert de S, $(\mu_m(x))$ soit une section de la somme directe $\coprod_{m\in\mathrm{M}}\mathscr{F}$ (cela veut dire que sur tout ouvert suffisamment petit, il n'y ait qu'un nombre fini de restrictions des $\mu_m(x)$ qui soient non nulles).

Pour que μ définie par

$$\mu(x) = \sum_{m\in\mathrm{M}} \mu_m(x) \otimes m$$

vérifie (CM 1) (resp. (CM 2)) il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu_m \circ \mu_{m'} = \delta_{mm'}\mu_m, \quad (\text{resp. } \sum_{m\in\mathrm{M}} \mu_m = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}}),$$

36 ce qui signifie que les μ_m sont des projecteurs deux à deux orthogonaux de somme l'identité. On a donc prouvé :

Proposition 4.7.3. — *Si* $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ *est un* S*-groupe diagonalisable, la catégorie des* G*-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules quasi-cohérents* (*resp. des* G*-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules*) *est équivalente à la catégorie des* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules quasi-cohérents* (*resp. des* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules*) *gradués de type* M.

Remarque. — Si $\mathscr{F}$ est muni d'une structure de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*algèbre* conservée par les opérations de G, alors la graduation de $\mathscr{F}$ est une graduation d'algèbre. Plus précisément :

Corollaire 4.7.3.1. — *Le foncteur* $\mathscr{A} \mapsto \operatorname{Spec}\mathscr{A}$ *induit une équivalence entre la catégorie des* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-algèbres quasi-cohérentes graduées de type* M *et la catégorie opposée à celle des* S*-schémas affines sur* S *à* S*-groupe d'opérateurs* $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$.

Proposition 4.7.4. — *Soit* G *un* S*-groupe diagonalisable. Si* $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to 0$ *est une suite exacte de* G*-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules quasi-cohérents qui se scinde comme suite de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules, alors elle se scinde également comme suite de* G*-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules.*

En effet, si $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, chacun des $\mathscr{F}_i$ est gradué par des $(\mathscr{F}_i)_m$ et pour chaque $m \in \mathrm{M}$ la suite

$$0 \longrightarrow (\mathscr{F}_1)_m \longrightarrow (\mathscr{F}_2)_m \longrightarrow (\mathscr{F}_3)_m \longrightarrow 0$$

de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules est scindée. La proposition précédente entraîne alors le résultat.

5. Cohomologie des groupes

37

5.1. Le complexe standard. — [44] Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, $\mathbf{G}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe, $\mathbf{O}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau et $\mathbf{F}$ un $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-module. On pose, pour $n \geqslant 0$,

$$\mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}^n,\mathbf{F}) \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F}) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}^n,\mathbf{F}),$$

[44] N.D.E. : Ce complexe est souvent appelé « complexe de Hochschild » ; voir par exemple le § II.3 de [**DG70**].

où $\mathbf{G}^0$ est l'objet final $\underline{\mathrm{e}}$. Alors $\underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$ (resp. $\mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$) est muni de manière évidente d'une structure de $\mathbf{O}$-module (resp. de $\Gamma(\mathbf{O})$-module) et on a

$$\mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F}) \cong \Gamma(\underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})) \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})(\mathrm{S}) = \mathrm{C}^n(\mathbf{G}_\mathrm{S},\mathbf{F}_\mathrm{S}).$$

Se donner un élément de $\mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$, c'est se donner pour chaque $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ une n-cochaine de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$ dans $\mathbf{F}(\mathrm{S})$, fonctoriellement en S. L'opérateur bord

$$\partial : \mathrm{C}^n(\mathbf{G}(\mathrm{S}),\mathbf{F}(\mathrm{S})) \longrightarrow \mathrm{C}^{n+1}(\mathbf{G}(\mathrm{S}),\mathbf{F}(\mathrm{S})),$$

qui, rappelons-le, est donné par la formule

$$\begin{aligned}\partial f(g_1,\dots,g_{n+1}) = g_1 f(g_2,\dots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1,\dots,g_i g_{i+1},\dots,g_{n+1})\\ + (-1)^{n+1} f(g_1,\dots,g_n),\end{aligned}$$

est fonctoriel en S et définit donc un homomorphisme :

$$\partial : \mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F}) \longrightarrow \mathrm{C}^{n+1}(\mathbf{G},\mathbf{F})$$

tel que $\partial\circ\partial = 0$. On a donc défini un complexe de groupes abéliens (et même de $\Gamma(\mathbf{O})$-modules) noté $\mathrm{C}^*(\mathbf{G},\mathbf{F})$. On définit de la même manière le complexe de $\mathbf{O}$-modules $\underline{\mathrm{C}}^*(\mathbf{G},\mathbf{F})$ et on a : 38

$$\mathrm{C}^*(\mathbf{G},\mathbf{F}) = \Gamma(\underline{\mathrm{C}}^*(\mathbf{G},\mathbf{F})).$$

On note $\mathrm{H}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$ (resp. $\underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$) les groupes (resp. les $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes) d'homologie du complexe $\mathrm{C}^*(\mathbf{G},\mathbf{F})$ (resp. $\underline{\mathrm{C}}^*(\mathbf{G},\mathbf{F})$).

On a en particulier

$$\underline{\mathrm{H}}^0(\mathbf{G},\mathbf{F}) = \mathbf{F}^{\mathbf{G}} \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^0(\mathbf{G},\mathbf{F}) = \Gamma(\mathbf{F}^{\mathbf{G}}).$$

Remarque 5.1.1. — [45] La description « ensembliste » de ∂ donnée plus haut est commode pour vérifier que $\partial\circ\partial = 0$. On peut aussi définir ∂ en termes de la multiplication $m : \mathbf{G}\times\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ et de l'action $\mu : \mathbf{G}\times\mathbf{F} \to \mathbf{F}$ comme suit : pour tout $f \in \mathrm{C}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})$,

$$\partial f = \mu\circ(\mathrm{id}_{\mathbf{G}} \times f) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f\circ(\mathrm{id}_{\mathbf{G}^{i-1}} \times m \times \mathrm{id}_{\mathbf{G}^{n-i}}) + (-1)^{n+1} f\circ \mathrm{pr}_{[1,n]},$$

où $\mathrm{pr}_{[1,n]}$ désigne la projection de $\mathbf{G}^{n+1} = \mathbf{G}^n\times\mathbf{G}$ sur $\mathbf{G}^n$. De même, pour tout $\mathrm{S}\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $f \in \underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{G},\mathbf{F})(\mathrm{S}) = \mathrm{C}^n(\mathbf{G}_\mathrm{S},\mathbf{F}_\mathrm{S})$, on a

$$\partial f = \mu_\mathrm{S}\circ(\mathrm{id}_{\mathbf{G}_\mathrm{S}} \times f) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f\circ(\mathrm{id}_{\mathbf{G}_\mathrm{S}^{i-1}} \times m_\mathrm{S} \times \mathrm{id}_{\mathbf{G}_\mathrm{S}^{n-i}}) + (-1)^{n+1} f\circ \mathrm{pr}_{[1,n]},$$

où m_S et μ_S sont déduits de m et μ par changement de base.

[45] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

5.2. [46] On rappelle (cf. § 3) que (**G**-**O**-Mod.) est munie d'une structure de catégorie abélienne, définie « argument par argument » ; ainsi,

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}' \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de **G**-**O**-modules si, et seulement si, la suite de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}'(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathbf{F}(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathbf{F}''(\mathrm{S}) \longrightarrow 0$$

est exacte, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

[47] Supposons $\mathscr{C}$ *petite* ; alors, d'après 3.2.1, (**G**-**O**-Mod.) possède assez d'objets injectifs, de sorte que les foncteurs dérivés des foncteurs exacts à gauche $\underline{\mathrm{H}}^0$ et H^0 sont définis. Nous nous proposons maintenant de montrer que les foncteurs $\underline{\mathrm{H}}^n$ (resp. H^n) sont bien les foncteurs dérivés de $\underline{\mathrm{H}}^0$ (resp. H^0).

Définition 5.2.0. — [48] Pour tout **O**-module **P**, on note $\mathrm{E}(\mathbf{P})$ l'objet $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P})$ de $\widehat{\mathscr{C}}$ muni de la structure de **G**-**O**-module définie comme suit : pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ on a $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P})(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbf{G}_{\mathrm{S}}, \mathbf{P}_{\mathrm{S}})$, et on fait opérer $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$ et $a \in \mathbf{O}(\mathrm{S})$ sur $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbf{G}_{\mathrm{S}}, \mathbf{P}_{\mathrm{S}})$ par les formules

$$(g \cdot \phi)(h) = \phi(hg) \qquad \text{et} \qquad (a \cdot \phi)(h) = a\phi(h),$$

pour tout $h \in \mathbf{G}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. De plus, pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbf{G}_{\mathrm{S}}, \mathbf{P}_{\mathrm{S}})$ on pose

$$\varepsilon(\phi) = \phi(1) \in \mathbf{P}(\mathrm{S})$$

(où 1 désigne l'élément unité de $\mathbf{G}(\mathrm{S})$).

Ceci définit un foncteur $\mathrm{E} : (\mathbf{O}\text{-Mod.}) \to (\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.})$ et une transformation naturelle $\varepsilon : \mathrm{E} \to \mathrm{Id}$, où Id désigne le foncteur identique de (**O**-Mod.).

Remarque 5.2.0.1. — [48] Dans ce qui suit, désignons par $\mathbf{G}_1$ et $\mathbf{G}_2$ deux copies de **G**. Alors le morphisme

$$\mathbf{G}_1 \times \mathrm{E}(\mathbf{P}) \longrightarrow \mathrm{E}(\mathbf{P}), \qquad (g_1, \phi) \mapsto \Big(g_2 \mapsto \phi(g_2 g_1)\Big)$$

correspond via les isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_1 \times \mathrm{E}(\mathbf{P}), \mathrm{E}(\mathbf{P})) &\simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{E}(\mathbf{P}), \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}_1, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}_2, \mathbf{P}))) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{E}(\mathbf{P}), \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_1, \mathbf{P})) \end{aligned}$$

au morphisme $\phi \mapsto \Big((g_2, g_1) \mapsto \phi(g_2 g_1)\Big)$, i.e. au morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_1, \mathbf{P})$$

induit par la multiplication $\mu_{\mathbf{G}} : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, $(g_2, g_1) \mapsto g_2 g_1$.

[46] N.D.E. : On a ajouté le rappel qui suit.

[47] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[48] N.D.E. : On a modifié l'original, afin d'introduire 5.2.0.1 et 5.2.0.2, qui seront utiles dans la démonstration du théorème 5.3.1.

Lemme 5.2.0.2. — [48] (i) *Le foncteur* E *est adjoint à droite du foncteur d'oubli* ($\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-Mod.) $\to$ ($\mathbf{O}$-Mod.) *; plus précisément,* $\varepsilon : \mathrm{E} \to \mathrm{Id}$ *induit pour tout* $\mathbf{M} \in$ ($\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-Mod.) *et* $\mathbf{P} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{O}\text{-Mod.})$ *une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.}}(\mathbf{M}, \mathrm{E}(\mathbf{P})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}\text{-Mod.}}(\mathbf{M}, \mathbf{P})$$

fonctorielle en $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{P}$.

(ii) *Par conséquent, si* $\mathbf{I}$ *est un objet injectif de* ($\mathbf{O}$-Mod.) *alors* $\mathrm{E}(\mathbf{I})$ *est un objet injectif de* ($\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-Mod.).

Démonstration. À tout $\mathbf{O}$-morphisme $f : \mathbf{M} \to \mathbf{P}$, on associe l'élément ϕ_f de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}}(\mathbf{M}, \mathrm{E}(\mathbf{P}))$ défini comme suit. Pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $m \in \mathbf{M}(\mathrm{S})$, $\phi_f(m)$ est l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbf{G}_{\mathrm{S}}, \mathbf{P}_{\mathrm{S}})$ défini par : pour tout $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$,

$$\phi_f(m)(g) = f(gm) \in \mathbf{P}(\mathrm{S}').$$

Alors, pour tout $h \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$, on a $\phi_f(hm) = h \cdot f(m)$, i.e. ϕ_f est un élément de

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.}}(\mathbf{M}, \mathrm{E}(\mathbf{P})).$$

Si $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}\text{-}\mathbf{O}\text{-Mod.}}(\mathbf{M}, \mathrm{E}(\mathbf{P}))$ et si on note, pour tout $m \in \mathbf{M}(\mathrm{S})$, $f(m) = \phi(m)(1)$, alors

$$\phi_f(m)(g) = f(gm) = \phi(gm)(1) = \big(g \cdot \phi(m)\big)(1) = \phi(m)(g),$$

i.e. $\phi_f = \phi$. Réciproquement, il est clair que $\phi_f(m)(1) = f(m)$. Ceci prouve (i), et (ii) en découle aussitôt.

Définition 5.2.0.3. — Soit $\mathbf{M}$ un $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-module ; l'application identique de $\mathbf{M}$ (considéré comme $\mathbf{O}$-module) correspond par adjonction au morphisme de $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-modules

$$\mu_{\mathbf{M}} : \mathbf{M} \longrightarrow \mathrm{E}(\mathbf{M})$$

tel que pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $m \in \mathbf{M}(\mathrm{S})$, $\mu_{\mathbf{M}}(m)$ est le morphisme $\mathbf{G}_{\mathrm{S}} \to \mathbf{M}_{\mathrm{S}}$ défini par : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $g \in \mathbf{G}(\mathrm{S}')$, $\mu_{\mathbf{M}}(m)(g) = g \cdot m_{\mathrm{S}'} \in \mathbf{M}(\mathrm{S}')$.

Notons que $\mu_{\mathbf{M}}$ est un *monomorphisme.* En effet, $\varepsilon_{\mathbf{M}} : \mathrm{E}(\mathbf{M}) \to \mathbf{M}$ est un morphisme de $\mathbf{O}$-modules tel que $\varepsilon_{\mathbf{M}} \circ \mu_{\mathbf{M}} = \mathrm{id}_{\mathbf{M}}$; par conséquent $\mathbf{M}$ est facteur direct, comme $\mathbf{O}$-module, de $\mathrm{E}(\mathbf{M})$.

Proposition 5.2.1. — *On suppose que* $\mathscr{C}$ *est petite, que les produits finis y existent, et* 39
que $\mathbf{G}$ *est représentable. Alors, les foncteurs* $\mathrm{H}^n(\mathbf{G},\ \ )$ (*resp.* $\underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G},\ \ )$) *sont les foncteurs dérivés du foncteur exact à gauche* $\mathrm{H}^0(\mathbf{G},\ \ )$ (*resp.* $\underline{\mathrm{H}}^0(\mathbf{G},\ \ )$) *sur la catégorie des* $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-*modules.*

En vertu des résultats généraux bien connus [49], il suffit de vérifier que les $\mathrm{H}^n(\mathbf{G},\ \ )$ (resp. $\underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G},\ \ )$) forment un foncteur cohomologique effaçable en degrés > 0.

Soit

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}' \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de $\mathbf{G}$-$\mathbf{O}$-modules, et soit $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Par hypothèse, $\mathbf{G}$ est représentable par un objet $\mathrm{G} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, et les produits finis existent dans $\mathscr{C}$; en particulier $\mathscr{C}$

[49] N.D.E. : cf. [**Gr57**], 2.2.1 et 2.3. Par ailleurs, on a détaillé l'original dans ce qui suit.

possède un élément final e. Donc, chaque $\mathbf{G}^n \times \mathbf{h}_{\mathrm{S}}$ est représentable par $\mathrm{G}^n \times \mathrm{S}$ (avec $\mathrm{G}^0 = e$), et la suite

$$0 \longrightarrow \mathbf{F}'(\mathrm{G}^n \times \mathrm{S}) \longrightarrow \mathbf{F}(\mathrm{G}^n \times \mathrm{S}) \longrightarrow \mathbf{F}''(\mathrm{G}^n \times \mathrm{S}) \longrightarrow 0$$

est exacte. Ceci montre que la suite de **O**-modules

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{h}_{\mathrm{G}}, \mathbf{F}') \longrightarrow \underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{h}_{\mathrm{G}}, \mathbf{F}) \longrightarrow \underline{\mathrm{C}}^n(\mathbf{h}_{\mathrm{G}}, \mathbf{F}'') \longrightarrow 0$$

est exacte. Il en résulte que $\underline{\mathrm{C}}^*(\mathbf{G},\quad)$ considéré comme foncteur sur (**G**-**O**-Mod.) à valeurs dans la catégorie des complexes de (**O**-Mod.) est exact. Ceci montre que les $\underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G},\quad)$ forment bien un foncteur cohomologique. Comme le foncteur Γ est exact, il en est de même pour les $\mathrm{H}^n(\mathbf{G},\quad)$. Il nous suffira maintenant de démontrer :

Lemme 5.2.2. — *Pour tout* $\mathbf{P} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{O}\text{-Mod.})$*, on a :*

$$\mathrm{H}^n(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P})) = 0 \quad \textit{et} \quad \underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P})) = 0, \ \textit{pour}\ n > 0.$$

Il nous suffit de démontrer que $\underline{\mathrm{C}}^*(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$ et $\mathrm{C}^*(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$ sont homotopiquement triviaux en degrés > 0. Il suffit même de le faire pour le second, le résultat correspondant pour le premier s'en déduisant par changement de base. [50] Or, on définit pour tout $n \geqslant 0$ un morphisme

$$\sigma : \quad \mathrm{C}^{n+1}(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P})) \longrightarrow \mathrm{C}^n(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$$

comme suit. Soit $f \in \mathrm{C}^{n+1}(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$; pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $g_1, \ldots, g_n \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$, $\sigma(f)(g_1, \ldots, g_n)$ est l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbf{G}_{\mathrm{S}}, \mathbf{P}_{\mathrm{S}})$ défini par : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x \in \mathbf{G}(\mathrm{S}')$,

$$\sigma(f)(g_1, \ldots, g_n)(x) = f(x, g_1, \ldots, g_n)(e) \in \mathbf{P}(\mathrm{S}')$$

(où e désigne l'élément unité de $\mathbf{G}(\mathrm{S}')$). Alors, σ est un opérateur d'homotopie en degrés > 0. En effet, pour tout $g_1, \ldots, g_{n+1} \in \mathbf{G}(\mathrm{S})$ et $x \in \mathbf{G}(\mathrm{S}')$ on a, d'une part :

$$\begin{aligned}\partial\sigma(f)(g_1, \ldots, g_{n+1})(x) &= f(xg_1, g_2, \ldots, g_{n+1})(e) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(x, g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1})(e) + (-1)^{n+1} f(x, g_1, \ldots, g_n)(e),\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\sigma(\partial f)(g_1, \ldots, g_{n+1})(x) &= (xf(g_1, g_2, \ldots, g_{n+1}))(e) - f(xg_1, g_2, \ldots, g_{n+1})(e) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} f(x, g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) + (-1)^{n+2} f(x, g_1, \ldots, g_n)(e),\end{aligned}$$

d'où

$$\big(\partial\sigma(f) + \sigma(\partial f)\big)(g_1, \ldots, g_{n+1})(x) = f(g_1, \ldots, g_{n+1})(x),$$

i.e. $\partial\sigma + \sigma\partial$ est l'application identique de $\mathrm{C}^{n+1}(\mathbf{G}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{G}, \mathbf{P}))$, pour tout $n \geqslant 0$.

[50] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Remarque 5.2.3. — [51] L'hypothèse « $\mathscr{C}$ petite » n'est utilisée que pour assurer l'existence des foncteurs dérivés $\mathrm{R}^n\mathrm{H}^0$ et $\mathrm{R}^n\underline{\mathrm{H}}^0$. Dans tous les cas, ce qui précède montre que les foncteurs $\mathrm{H}^n(\mathbf{G},\ )$ (resp. $\underline{\mathrm{H}}^n(\mathbf{G},\ )$) forment un foncteur cohomologique, effaçable en degrés > 0, donc ce sont les foncteurs *satellites* (droits) du foncteur exact à gauche $\mathrm{H}^0(\mathbf{G},\ )$ (resp. $\underline{\mathrm{H}}^0(\mathbf{G},\ )$), au sens de [**Gr57**, 2.2] ; si (**G**-**O**-Mod.) possède assez d'objets injectifs (ce qui est le cas si $\mathscr{C}$ est petite), ils coïncident avec les foncteurs dérivés (*loc. cit.* 2.3).

5.3. Cohomologie des G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules. — Soient S un schéma, G un S-groupe et $\mathscr{F}$ un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. On définit les groupes de cohomologie de G à valeurs dans $\mathscr{F}$ par

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{G},\mathscr{F}) = \mathrm{H}^n(\mathbf{h}_{\mathrm{G}}, \mathbf{W}(\mathscr{F})).$$

(pour les notations, cf. 4.6).

Supposons G *affine* sur S. Alors, vu la proposition 4.6.4, cette cohomologie se calcule de la façon suivante : $\mathrm{H}^n(\mathrm{G},\mathscr{F})$ est le n-ième groupe d'homologie du complexe $\mathrm{C}^*(\mathrm{G},\mathscr{F})$ dont le n-ième terme est : 40

$$\mathrm{C}^n(\mathrm{G},\mathscr{F}) = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{F}\otimes \underbrace{\mathscr{A}(\mathrm{G})\otimes\cdots\otimes\mathscr{A}(\mathrm{G})}_{n\ \text{fois}}).$$

Si f (resp. a_i) est une section de $\mathscr{F}$ (resp. de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$) sur un ouvert de S, on a

$$\begin{aligned}\partial(f\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n) &= \mu_{\mathscr{F}}(f)\otimes a_1\otimes a_2\otimes\cdots\otimes a_n\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f\otimes a_1\otimes\cdots\otimes\Delta a_i\otimes\cdots\otimes a_n\\ &\quad+(-1)^{n+1} f\otimes a_1\otimes a_2\cdots\otimes a_n\otimes 1,\end{aligned}$$

où $\Delta : \mathscr{A}(\mathrm{G})\to\mathscr{A}(\mathrm{G})\otimes\mathscr{A}(\mathrm{G})$ et $\mu_{\mathscr{F}} : \mathscr{F}\to\mathscr{F}\otimes\mathscr{A}(\mathrm{G})$ décrivent la structure de cogèbre de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ et de comodule de $\mathscr{F}$. Remarquons en passant que la cohomologie de G à valeurs dans $\mathscr{F}$ ne dépend donc que de la structure de comodule de $\mathscr{F}$, et en particulier que de la structure de S-monoïde de G.

On a en particulier

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{G},\mathscr{F}) = \Gamma(\mathrm{S},\mathscr{F}^{\mathrm{G}}),$$

où $\mathscr{F}^{\mathrm{G}}$, le *faisceau des invariants de* $\mathscr{F}$, est défini comme le faisceau dont les sections sur l'ouvert U de S sont les sections de $\mathscr{F}$ sur U dont l'image inverse dans tout S′ au-dessus de U est invariante par G(S′) (cf. 4.7.1.2).

Théorème 5.3.1. — *Soient* S *un schéma* affine, G *un* S-*groupe* affine et plat *sur* S. *Les foncteurs* $\mathrm{H}^n(\mathrm{G},\ )$ *sont les foncteurs dérivés de* $\mathrm{H}^0(\mathrm{G},\ )$ *sur la catégorie des* G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*modules quasi-cohérents.* 41

[51] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

Démonstration. [52] Comme G est affine et plat sur S alors, d'après 4.7.2.1, la catégorie (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) est équivalente à la catégorie ($\mathscr{A}$(G)-Comod.q.c.) des $\mathscr{A}$(G)-comodules quasi-cohérents sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, et est donc abélienne. D'autre part, $\mathscr{A}$(G) étant un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module plat, chaque foncteur $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G})^{\otimes n}$ est exact ; comme de plus S est affine, on obtient que $\mathrm{C}^*(\mathrm{G}, \quad)$ est un foncteur exact sur (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.).

Notons Δ (resp. η) la comultiplication (resp. l'augmentation) de $\mathscr{A}$(G). Pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{P}$, on note $\mathrm{Ind}(\mathscr{P}) = \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G})$ muni de la structure de $\mathscr{A}$(G)-comodule définie par

$$\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \Delta : \quad \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G});$$

ceci définit un foncteur Ind : ($\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) $\to$ (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.).

Il résulte de 4.6.4.1, 5.2.0 et 5.2.0.1 que l'on a un isomorphisme de G-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules :

$$(*) \qquad \mathbf{W}(\mathrm{Ind}(\mathscr{P})) \simeq \mathrm{E}(\mathbf{W}(\mathscr{P})) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathscr{P})).$$

Via cette identification, le morphisme $\varepsilon : \mathrm{E}(\mathbf{W}(\mathscr{P})) \to \mathbf{W}(\mathscr{P})$ correspond au morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta : \mathrm{Ind}(\mathscr{P}) \to \mathscr{P}$.

On a déjà utilisé que le foncteur $\mathbf{W}$: ($\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.) $\to$ ($\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.) est pleinement fidèle ; il en est de même, d'après la définition 4.7.1, de sa restriction à (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.), i.e. si $\mathscr{M}, \mathscr{M}'$ sont des G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules, on a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}\text{-}\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.}}(\mathscr{M}, \mathscr{M}') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}\text{-}\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.}}(\mathbf{W}(\mathscr{M}), \mathbf{W}(\mathscr{M}')).$$

Par conséquent, on déduit du lemme 5.2.0.2 le

Corollaire 5.3.1.1. — (i) *Le foncteur* Ind *est adjoint à droite du foncteur d'oubli* (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) $\to$ ($\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.). *Plus précisément, l'application* $\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta$: $\mathrm{Ind}(\mathscr{P}) \to \mathscr{P}$ *induit pour tout objet* $\mathscr{M}$ *de* (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) *une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}\text{-}\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.}}(\mathscr{M}, \mathrm{Ind}(\mathscr{P})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M}, \mathscr{P}).$$

(ii) *Par conséquent, si* $\mathscr{I}$ *est un objet injectif de* ($\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) *alors* $\mathrm{Ind}(\mathscr{I})$ *est un objet injectif de* (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.).

Soient $\mathscr{F}$ un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module et $\mu_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathrm{Ind}(\mathscr{F})$ l'application définissant la structure de $\mathscr{A}$(G)-comodule. Il résulte de 5.2.0.3 (ou bien des axiomes (CM 1) et (CM 2) de 4.7.2) que $\mu_{\mathscr{F}}$ est un morphisme de G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules, et que $(\mathrm{id}_{\mathscr{F}} \otimes \eta) \circ \mu_{\mathscr{F}} = \mathrm{id}_{\mathscr{F}}$, donc que $\mathscr{F}$ est un facteur direct de $\mathrm{Ind}(\mathscr{F})$ comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module ; en particulier, $\mu_{\mathscr{F}}$ est un monomorphisme. Comme on a, d'après $(*)$ et 5.2.2,

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{Ind}(\mathscr{F}))) \simeq \mathrm{H}^n(\mathrm{G}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathscr{F}))) = 0 \qquad \text{pour } n > 0.$$

on obtient donc que $\mathrm{H}^n(\mathrm{G}, \quad)$ est effaçable pour $n > 0$.

Enfin, S étant affine, ($\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) possède assez d'objets injectifs. Soit donc $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{I}$ un monomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules, où $\mathscr{I}$ est un objet injectif de ($\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) ; alors, $\mathscr{A}$(G) étant plat sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, $\mathrm{Ind}(\mathscr{F})$ est un sous-G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module de $\mathrm{Ind}(\mathscr{I})$, d'où :

---

[52] N.D.E. : On a modifié l'original, pour faire voir que la catégorie (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) est abélienne et a assez d'objets injectifs. On pourra comparer avec [**Ja03**], Part I, 3.3-3.4, 3.9, 4.2 et 4.14-4.16 (où l'on prendra garde que « k-group scheme » signifie « *affine* k-group scheme », cf. *loc. cit.*, 2.1).

Corollaire 5.3.1.2. — *La catégorie abélienne* (G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Mod.q.c.) *possède assez d'objets injectifs.*

Compte tenu de [**Gr57**, 2.2.1 et 2.3] (déjà utilisé dans la preuve de 5.2.1), ceci achève la démonstration du théorème 5.3.1.

Remarque 5.3.1.3. — On peut aussi démontrer 5.3.1.1 par le calcul suivant. À tout morphisme de G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\phi : \mathscr{M} \to \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G})$ on associe le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-morphisme $(\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta) \circ \phi : \mathscr{M} \to \mathscr{P}$. Réciproquement, à tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-morphisme $f : \mathscr{M} \to \mathscr{P}$ on associe le morphisme de G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $(f \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{A}(\mathrm{G})}) \circ \mu_{\mathscr{M}} : \mathscr{M} \to \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G})$. On voit aussitôt que

$$(\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta) \circ (f \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{A}(\mathrm{G})}) \circ \mu_{\mathscr{M}} = (f \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}) \circ (\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta) \circ \mu_{\mathscr{M}} = f.$$

D'autre part, pour tout ϕ le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{M} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mu_{\mathscr{M}}"'] & \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \Delta"] \\
\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \arrow[r, "\phi \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{A}(\mathrm{G})}"] & \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) .
\end{tikzcd}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\Big(\big((\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta) \circ \phi\big) \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{A}(\mathrm{G})}\Big) \circ \mu_{\mathscr{M}} &= (\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{A}(\mathrm{G})}) \circ (\phi \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{A}(\mathrm{G})}) \circ \mu_{\mathscr{M}} \\
&= (\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \eta \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{A}(\mathrm{G})}) \circ (\mathrm{id}_{\mathscr{P}} \otimes \Delta) \circ \phi = \phi.
\end{aligned}$$

Ceci prouve 5.3.1.1 (i) (et (ii) en découle).

Soit $\mathscr{F}$ un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module ; on a vu plus haut que l'axiome (CM 2) de 4.7.2 montre que considéré comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module, $\mathscr{F}$ est un facteur direct de $\mathrm{E}(\mathscr{F})$. Cela entraîne :

Proposition 5.3.2. — *Soient* S *un schéma* affine *et* G *un* S-*groupe* affine et plat *; supposons que toute suite exacte* $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to 0$ *de* G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules quasi-cohérents, qui se scinde comme suite de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules, se scinde également comme suite de* G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules.*

Alors, les foncteurs $\mathrm{H}^n(\mathrm{G},\ \ )$ *sont nuls pour* $n > 0$ (*ou ce qui revient au même, le foncteur* $\mathrm{H}^0(\mathrm{G},\ \ )$ *est exact*).

En effet, d'après l'hypothèse, la suite de G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathrm{E}(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{E}(\mathscr{F})/\mathscr{F} \longrightarrow 0$$

est scindée ; $\mathscr{F}$ est donc facteur direct, comme G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module, dans $\mathrm{E}(\mathscr{F})$, or la cohomologie de ce dernier est nulle.

On tire immédiatement de là et de la proposition 4.7.4 :

Théorème 5.3.3. — *Soient* S *un schéma* affine *et* G *un* S-*groupe* diagonalisable. *Pour tout* G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$*, on a* $\mathrm{H}^n(\mathrm{G}, \mathscr{F}) = 0$*, pour* $n > 0$. 42

Remarque. — La proposition 5.3.2 reste valable, lorsque G n'est pas nécessairement plat sur S ; la démonstration fait alors appel à la cohomologie relative. [53]

6. Objets et modules G-équivariants

[54] Soit $\mathscr{C}$ une catégorie ayant un objet final et où les produits fibrés existent. Soit $\mathbf{G}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe, $\pi : \mathbf{M} \to \mathbf{X}$ un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$, et $\lambda = \lambda_{\mathrm{X}} : \mathbf{G} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ une action de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{X}$. Dans la suite, on notera $\mathbf{Y} \times_f \mathbf{M}$ le produit fibré de $\pi : \mathbf{M} \to \mathbf{X}$ et d'un $\mathbf{X}$-foncteur $f : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$.

Pour tout $\mathrm{U} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $x \in \mathbf{X}(\mathrm{U})$, on notera $\mathbf{M}_x = \mathrm{U} \times_x \mathbf{M}$, i.e. pour tout $\phi : \mathrm{U}' \to \mathrm{U}$, on a

$$\mathbf{M}_x(\mathrm{U}') = \{m \in \mathbf{M}(\mathrm{U}') \mid \pi(m) = x_{\mathrm{U}'} = \phi^*(x)\}.$$

Enfin, si $g \in \mathbf{G}(\mathrm{U})$ on notera aussi gx l'élément $\lambda(g, x)$ de $\mathbf{X}(\mathrm{U})$.

Définition 6.1. — a) On dit que $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{X}$-objet $\mathbf{G}$-*équivariant* si l'on s'est donné une action $\Lambda : \mathbf{G} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{M}$ relevant λ, i.e. telle que le carré ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G} \times \mathbf{M} \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{G}} \times \pi"'] & \mathbf{M} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbf{G} \times \mathbf{X} \arrow[r, "\lambda"] & \mathbf{X} \end{tikzcd} .$$

Ceci équivaut à se donner pour tout morphisme $(g, x) : \mathrm{U} \to \mathbf{G} \times \mathbf{X}$ des applications

$$\Lambda_x^{\mathrm{U}}(g) : \quad \mathbf{M}_x(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathbf{M}_{gx}(\mathrm{U}), \qquad m \mapsto g \cdot m$$

vérifiant $1 \cdot m = m$ et $g \cdot (h \cdot m) = (gh) \cdot m$ et fonctorielles en le $(\mathbf{G} \times \mathbf{X})$-objet U. Ceci équivaut encore à se donner des morphismes de U-objets :

$$\Lambda_x(g) : \quad \mathbf{M}_x \longrightarrow \mathbf{M}_{gx}$$

vérifiant $\Lambda_x(1) = \mathrm{id}$ et $\Lambda_{hx}(g) \circ \Lambda_x(h) = \Lambda_x(gh)$.

b) Soit maintenant $\mathbf{O}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-anneau et soit $\mathbf{O}_{\mathbf{X}} = \mathbf{O} \times \mathbf{X}$. Sous les conditions de (a), on dit que $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_{\mathbf{X}}$-*module* $\mathbf{G}$-*équivariant* si c'est un $\mathbf{O}_{\mathbf{X}}$-module (cf. la définition 4.3.3.1, valable pour tout foncteur en anneau sur une catégorie $\mathscr{C}$) et si l'action Λ est compatible avec la structure de $\mathbf{O}_{\mathbf{X}}$-module de $\mathbf{M}$, c.-à-d., si pour tout $(g, x) \in \mathbf{G}(\mathrm{U}) \times \mathbf{X}(\mathrm{U})$ ($\mathrm{U} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$), l'application $\Lambda_x(g) : \mathbf{M}_x \to \mathbf{M}_{gx}$, $m \mapsto g \cdot m$ est un morphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{U}}$-modules.

Remarque 6.2. — (i) Dans (a) ci-dessus, les conditions $\Lambda_x(1) = \mathrm{id}$ et $\Lambda_{hx}(g) \circ \Lambda_x(h) = \Lambda_x(gh)$ entraînent évidemment que chaque $\Lambda_x(g)$ est un *isomorphisme*, d'inverse $\Lambda_{gx}(g^{-1})$. Réciproquement, si l'on suppose que chaque $\Lambda_x(g)$ est un isomorphisme, la condition $\Lambda_{hx}(g) \circ \Lambda_x(h) = \Lambda_x(gh)$ appliquée à $h = 1$ donne $\Lambda_x(1) = \mathrm{id}$.

---

[53] N.D.E. : Les éditeurs n'ont pas cherché à développer cette remarque.

[54] N.D.E. : On a ajouté cette section.

(ii) Soit $\mathbf{M}$ un $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module. D'abord, on voit que se donner un morphisme Λ : $\mathbf{G} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ rendant commutatif le diagramme de 6.1 et tel que chaque morphisme $\Lambda_x(g) : \mathbf{M}_x \to \mathbf{M}_{gx}$, $m \mapsto g \cdot m$, soit un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{U}}$-modules, équivaut à se donner un *isomorphisme* de $\mathbf{O}_{\mathbf{G}\times\mathbf{X}}$-modules :

$$\begin{aligned} \theta : \quad \mathbf{G} \times \mathbf{M} = (\mathbf{G} \times \mathbf{X}) \times_{\mathrm{pr}_{\mathrm{X}}} \mathbf{M} &\xrightarrow{\sim} (\mathbf{G} \times \mathbf{X}) \times_{\lambda} \mathbf{M} \\ (g, x, m) &\longmapsto (g, x, g \cdot m)\,. \end{aligned}$$

Comme on a supposé que chaque $\Lambda_x(g)$ est un isomorphisme, l'égalité $\Lambda_x(1) = \mathrm{id}$ sera conséquence de l'égalité $\Lambda_{hx}(g) \circ \Lambda_x(h) = \Lambda_x(gh)$ appliquée à $h = 1$. On obtient donc que Λ est une *action* de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{M}$ (i.e. $g \cdot (h \cdot m) = (gh) \cdot m$) si et seulement si le diagramme de $(\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X})$-isomorphismes ci-dessous est commutatif (où on note μ la multiplication de $\mathbf{G}$ et $f^*(\theta)$ l'isomorphisme déduit de θ par un changement de base $f : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X} \to \mathbf{G} \times \mathbf{X}$) :

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \underset{\mathrm{pr}_{\mathbf{X}} \circ \mathrm{pr}_{2,3}}{\times} \mathbf{M} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{2,3}^*(\theta)", "\sim"'] \arrow[d, equal] & (\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \underset{\lambda \circ \mathrm{pr}_{2,3}}{\times} \mathbf{M} \arrow[d, equal] \\
(\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \underset{\mathrm{pr}_{\mathbf{X}} \circ (\mu \times \mathrm{id}_{\mathbf{X}})}{\times} \mathbf{M} \arrow[d, "(\mu \times \mathrm{id}_{\mathbf{X}})^*(\theta)"', "\wr"] & (\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \underset{\mathrm{pr}_{\mathbf{X}} \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{G}} \times \lambda)}{\times} \mathbf{M} \arrow[d, "(\mathrm{id}_{\mathbf{G}} \times \lambda)^*(\theta)", "\wr"'] \\
(\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \underset{\lambda \circ (\mu \times \mathrm{id}_{\mathbf{X}})}{\times} \mathbf{M} \arrow[r, equal] & (\mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \mathbf{X}) \underset{\lambda \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{G}} \times \lambda)}{\times} \mathbf{M}
\end{tikzcd} \; .$$

On voit donc que se donner une structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module $\mathbf{G}$-équivariant sur $\mathbf{M}$ équivaut à se donner un isomorphisme θ de $\mathbf{O}_{\mathbf{G}\times\mathbf{X}}$-modules comme plus haut, tel que le diagramme ci-dessus soit commutatif.

(iii) Tout ce qui précède s'étend au cas où $\mathbf{G}$ est seulement un *$\widehat{\mathscr{C}}$-monoïde* : dans ce cas, se donner une action $\Lambda : \mathbf{G} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ relevant λ et telle que chaque $\Lambda_x(g)$: $\mathbf{M}_x \to \mathbf{M}_{gx}$ soit un morphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{U}}$-modules, équivaut à se donner un *morphisme* θ de $\mathbf{O}_{\mathbf{G}\times\mathbf{X}}$-modules comme en (ii), tel que le diagramme ci-dessus (sans les signes $\sim$ sous les flèches) soit commutatif, et tel que $p_{\mathbf{M}} \circ \theta \circ (\varepsilon_{\mathrm{G}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$, où ε_{G} désigne la section unité de G et $p_{\mathbf{M}}$ la projection sur $\mathbf{M}$.

6.3. Morphismes G-équivariants. — Soit $\mathbf{Y}$ un second objet de $\widehat{\mathscr{C}}$, muni d'une action $\lambda_{\mathrm{Y}} : \mathbf{G} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$ de $\mathbf{G}$, et soit $\mathbf{N}$ un second $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module $\mathbf{G}$-équivariant. On dit qu'un $\widehat{\mathscr{C}}$-morphisme $f : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ (resp. un morphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-modules $\phi : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$) est $\mathbf{G}$-*équivariant* s'il commute à l'action de $\mathbf{G}$, i.e. si l'on a ensemblistement $f(g \cdot y) = g \cdot f(y)$ (resp. $\phi(g \cdot m) = g \cdot \phi(m)$), ce qui équivaut à dire que $f \circ \lambda_{\mathrm{Y}} = \lambda_{\mathrm{X}} \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{G}} \times f)$ (resp. $\phi \circ \Lambda_{\mathrm{M}} = \Lambda_{\mathrm{N}} \circ (\mathrm{id}_{\mathbf{G}} \times \phi)$).

On obtient alors aussitôt le lemme suivant :

Lemme 6.3.1. — *Soient $f : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ un morphisme $\mathbf{G}$-équivariant et $\mathbf{M}$ un $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module $\mathbf{G}$-équivariant. Alors l'image inverse $f^*(\mathbf{M}) = \mathbf{Y} \times_f \mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_{\mathrm{Y}}$-module $\mathbf{G}$-équivariant.*

D'autre part, $\mathbf{G}$ agit sur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$. En effet, soient $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $g \in \mathbf{G}(\mathrm{T})$ et ϕ un T-morphisme $\mathbf{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathbf{X}_{\mathrm{T}}$, alors g définit des automorphismes $\lambda_{\mathbf{Y}}(g)$ et $\lambda_{\mathbf{X}}(g)$ de $\mathbf{Y}_{\mathrm{T}}$ et $\mathbf{X}_{\mathrm{T}}$, et l'on notera $g \cdot \phi$ (ou aussi $g\phi g^{-1}$) le morphisme $\lambda_{\mathbf{X}}(g) \circ \phi \circ \lambda_{\mathbf{Y}}(g^{-1})$. Ceci définit une action de $\mathbf{G}(\mathrm{T})$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}(\mathbf{Y}_{\mathrm{T}}, \mathbf{X}_{\mathrm{T}})$, fonctorielle en T.

Définition 6.3.2. — Si $\phi : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ est un $\widehat{\mathscr{C}}$-morphisme arbitraire, on peut donc considérer son stabilisateur $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(\phi)$ (cf. 2.3.3.1) : pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(\phi)(\mathrm{T})$ est le sous-groupe $\mathbf{G}(\mathrm{T})$ formé des g tels que $g \circ \phi_{\mathrm{T}} = \phi_{\mathrm{T}} \circ g$, i.e. tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \arrow[r, "\phi_{\mathrm{T}}"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \arrow[d, "g"] \\ \mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \arrow[r, "\phi_{\mathrm{T}}"] & \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \end{tikzcd}$$

commute. Alors, le morphisme $\phi : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ est équivariant sous $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(\phi)$.

6.4. Sections globales. — Soit $\mathbf{M}$ un $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module $\mathbf{G}$-équivariant. Notons S_0 l'objet final de $\mathscr{C}$ et (cf. Exp. II, 1.1) $\prod_{\mathbf{X}/\mathrm{S}_0} \mathbf{M}$ le « foncteur des sections de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{X}$ » : c'est le foncteur qui à tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ associe

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}}, \mathbf{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{X}_{\mathrm{T}}}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}}, \mathbf{M}_{\mathrm{T}}) = \Gamma(\mathbf{M}_{\mathrm{T}}/\mathbf{X}_{\mathrm{T}}).$$

Rappelons d'autre part que tout morphisme $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Y}$ de $\widehat{\mathscr{C}}$-objets au-dessus de $\mathbf{X}$ induit un morphisme de groupes abéliens $\mathbf{M}(g) : \mathbf{M}(\mathbf{Y}) \to \mathbf{M}(\mathbf{Z})$, qui est compatible avec le morphisme d'anneaux $g^* : \mathbf{O}(\mathbf{Y}) \to \mathbf{O}(\mathbf{Z})$. En particulier, lorsque $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}$ (g étant alors un $\mathbf{X}$-endomorphisme de $\mathbf{Y}$), on obtient un morphisme de groupes abéliens

$$\mathbf{M}(g) : \quad \mathbf{M}(\mathbf{Y}) \longrightarrow \mathbf{M}(\mathbf{Y})$$

qui n'est pas en général un morphisme de $\mathbf{O}(\mathbf{Y})$-modules, mais qui vérifie, pour tout $m \in \mathbf{M}(\mathbf{Y})$ et $\alpha \in \mathbf{O}(\mathbf{Y})$:

$$\mathbf{M}(g)(\alpha \cdot m) = g^*(\alpha) \cdot \mathbf{M}(g)(m).$$

Ceci étant dit, on écrira simplement, dans la suite, g^* au lieu de $\mathbf{M}(g)$.

Soit $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et soient $\mathbf{X}_{\mathrm{T}} = \mathbf{X} \times \mathrm{T}$ et $\mathrm{pr}_{\mathbf{X}}$ la projection $\mathbf{X}_{\mathrm{T}} \to \mathbf{X}$. Pour tout $\alpha \in \mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$ et $g \in \mathbf{G}(\mathrm{T})$, posons $g(\alpha) = (g^{-1})^*(\alpha)$: c'est l'élément de $\mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$ défini ensemblistement par : pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $x \in \mathbf{X}(\mathrm{S})$, $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S})$,

$$g(\alpha)(x, t) = \alpha(g^{-1}x, t).$$

On obtient ainsi une action (à gauche) de $\mathbf{G}(\mathrm{T})$ par automorphismes d'anneaux sur $\mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$, fonctorielle en T, et telle que $g(\alpha) = \alpha$ si α est l'image dans $\mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$ d'un élément de $\mathbf{O}(\mathrm{T})$.

Notons maintenant ϕ le morphisme identité de $\mathbf{X}_{\mathrm{T}}$ (cf. 6.3 et la généralisation plus bas à un morphisme $\phi : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$) et désignons $\mathrm{Hom}_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}}, \mathbf{M})$ par $\mathbf{M}(\phi g^{-1})$ resp. $\mathbf{M}(\phi)$, selon que $\mathbf{X}_{\mathrm{T}}$ est regardé comme $\mathbf{X}$-objet via $\mathrm{pr}_{\mathbf{X}} \circ \lambda(g^{-1})_{\mathrm{T}}$, resp. $\mathrm{pr}_{\mathbf{X}}$.

Alors $\lambda(g^{-1})_{\mathrm{T}}$ est un $\mathbf{X}$-morphisme entre ces deux $\mathbf{X}$-objets donc, d'après ce qui précède, on obtient un morphisme de groupes abéliens

$$(g^{-1})^* : \quad \mathbf{M}(\phi) \longrightarrow \mathbf{M}(\phi g^{-1}), \qquad m \mapsto m \circ \lambda(g^{-1})_{\mathrm{T}}$$

qui vérifie $(g^{-1})^*(\alpha \cdot m) = (g\alpha) \cdot (g^{-1})^*(m)$ pour tout $m \in \mathbf{M}(\phi)$ et $\alpha \in \mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$. (Si m est une section de $\mathbf{M}_{\mathrm{T}}$ sur $\mathbf{X}_{\mathrm{T}}$ alors $(g^{-1})^*(m)$ est la section définie ensemblistement par $(x,t) \mapsto m(g^{-1}x, t)$.) En particulier, $(g^{-1})^*$ est un morphisme de $\mathbf{O}(\mathrm{T})$-modules.

D'après la fonctorialité des morphismes de $\mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$-modules $\Lambda_x(g)$, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{M}(\phi) \arrow[r, "(g^{-1})^*"] \arrow[d, "\Lambda_\phi(g)"'] & \mathbf{M}(\phi g^{-1}) \arrow[d, "\Lambda_{\phi g^{-1}}(g)"] \\
\mathbf{M}(g\phi) \arrow[r, "(g^{-1})^*"] & \mathbf{M}(g\phi g^{-1})
\end{tikzcd}$$

et $g\phi g^{-1} = \phi$, puisque ϕ est l'application identité. Notant $\mathrm{A}(g) = (g^{-1})^* \circ \Lambda_\phi(g)$, on obtient donc un morphisme de groupes abéliens

$$\mathrm{A}(g) : \quad \mathbf{M}(\phi) \longrightarrow \mathbf{M}(\phi)$$

qui est « compatible avec l'action de $\mathbf{G}(\mathrm{T})$ sur $\mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$ », i.e. qui vérifie

$$\mathrm{A}(g)(\alpha \cdot m) = (g\alpha) \cdot \mathrm{A}(g)(m).$$

Enfin, si h est un second élément de $\mathbf{G}(\mathrm{T})$, il résulte de la fonctorialité de $\mathbf{M}$ et des morphismes $\Lambda_x(g)$ que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{M}(\phi) \arrow[d, "\Lambda_\phi(g)"'] \arrow[dr, "\Lambda_\phi(hg)"] & & \\
\mathbf{M}(g\phi) \arrow[r, "\Lambda_\phi(h)"] \arrow[d, "(g^{-1})^*"'] & \mathbf{M}(hg\phi) \arrow[d, "(g^{-1})^*"'] \arrow[dr, "((hg)^{-1})^*"] & \\
\mathbf{M}(\phi) \arrow[r, "\Lambda_\phi(h)"] & \mathbf{M}(h\phi) \arrow[r, "(h^{-1})^*"] & \mathbf{M}(\phi)
\end{tikzcd}$$

d'où $\mathrm{A}(h) \circ \mathrm{A}(g) = \mathrm{A}(hg)$. Par conséquent, on a obtenu la proposition suivante

Proposition 6.4.1. — *Pour tout* T*, le* $\mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$*-module* $(\prod_{\mathbf{X}/\mathrm{S}_0} \mathbf{M})(\mathrm{T}) = \Gamma(\mathbf{M}_{\mathrm{T}}/\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$ *est muni, de façon fonctorielle en* T*, d'une action de* $\mathbf{G}(\mathrm{T})$ *« compatible avec l'action de* $\mathbf{G}(\mathrm{T})$ *sur* $\mathbf{O}(\mathbf{X}_{\mathrm{T}})$ *», i.e. qui vérifie*

$$\mathrm{A}(g)(\alpha \cdot m) = g(\alpha) \cdot \mathrm{A}(g)(m).$$

Comme $g(\alpha) = \alpha$ *pour* $\alpha \in \mathbf{O}(\mathrm{T})$ *ceci donne, en particulier, que* $\prod_{\mathbf{X}/\mathrm{S}_0} \mathbf{M}$ *est un* $\mathbf{G}$*-*$\mathbf{O}_{\mathrm{S}_0}$*-module.*

Plus généralement soient, comme en 6.3, $\mathbf{Y}$ un second $\widehat{\mathscr{C}}$-objet $\mathbf{G}$-équivariant, $\phi : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ un $\widehat{\mathscr{C}}$-morphisme et $\mathbf{H} = \underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(\phi)$. Alors le produit fibré $\mathbf{M}_\phi = \mathbf{Y} \times_\phi \mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_{\mathbf{Y}}$-module $\mathbf{H}$-équivariant. On obtient donc le :

Corollaire 6.4.2. — *Le foncteur* $\prod_{\mathbf{Y}/\mathrm{S}_0} \mathbf{M}_\phi$ *est un* $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathbf{G}}(\phi)$-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}_0}$*-module.*

6.5. $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules G-équivariants. — Appliquons ce qui précède dans la situation suivante. Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes opérant sur un S-schéma X, et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module (pas nécessairement quasi-cohérent).

Définition 6.5.1. — On dit que $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module G-*équivariant* si le $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module $\mathbf{M} = \mathbf{W}(\mathscr{F})$ est G-équivariant, c.-à-d., si on s'est donné, pour tout morphisme (g, x) : $\mathrm{U} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, des isomorphismes de $\mathbf{O}_{\mathrm{U}}$-modules

$$\Lambda_x(g) : \quad \mathbf{W}\big(x^*(\mathscr{F})\big) \xrightarrow{\sim} \mathbf{W}\big((gx)^*(\mathscr{F})\big),$$

fonctoriels en U et vérifiant $\Lambda_{hx}(g) \circ \Lambda_x(h) = \Lambda_x(gh)$. Comme le foncteur $\mathbf{W}$ est pleinement fidèle (cf. 4.6.1.1 et 4.6.2), on obtient donc des isomorphismes de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$-modules

$$\Lambda_x(g) : \quad x^*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} (gx)^*(\mathscr{F}),$$

où l'on rappelle que gx désigne le morphisme $\lambda \circ (g, x) : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$. En particulier, appliquant ceci au morphisme identité de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, on obtient un *isomorphisme de* $\mathscr{O}_{\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}}$*-modules*

$$(\star) \qquad \theta : \quad \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \lambda^*(\mathscr{F})$$

tel que le diagramme $(\star\star)$ de morphismes de faisceaux sur $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pr}_{2,3}^* \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F}) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{2,3}^*(\theta)", "\sim"'] \arrow[d, equal] & \mathrm{pr}_{2,3}^* \circ \lambda^*(\mathscr{F}) \arrow[r, equal] \arrow[d, phantom, "(\star\star)"] & (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times\lambda)^* \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F}) \arrow[d, "(\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times\lambda)^*(\theta)", "\wr"'] \\
(\mu \times \mathrm{id}_{\mathrm{X}})^* \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F}) \arrow[r, "(\mu\times\mathrm{id}_{\mathrm{X}})^*(\theta)", "\sim"'] & (\mu \times \mathrm{id}_{\mathrm{X}})^* \circ \lambda^*(\mathscr{F}) \arrow[r, equal] & (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times\lambda)^* \circ \lambda^*(\mathscr{F}) .
\end{tikzcd}$$

De plus, si $\mathscr{E}$ est un second $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module G-équivariant, on dit qu'un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules $\phi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est G-*équivariant* si le morphisme $\mathbf{W}(\phi) : \mathbf{W}(\mathscr{E}) \to \mathbf{W}(\mathscr{F})$ l'est. Avec les notations ci-dessus, ceci équivaut à dire que $\theta_{\mathscr{F}} \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\phi) = \lambda^*(\phi) \circ \theta_{\mathscr{E}}$.

Remarque 6.5.2. — Si $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est un morphisme G-équivariant, il résulte de 6.3.1 que $f^*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-module G-équivariant.

Remarque 6.5.3. — Supposons de plus $\mathscr{F}$ *quasi-cohérent*. Alors il résulte de ce qui précède que la donnée d'une structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module G-équivariant sur $\mathbf{M} = \mathbf{W}(\mathscr{F})$ *équivaut* à la donnée d'une telle structure sur $\mathbf{V}(\mathscr{F})$, ce qui équivaut encore à se donner une action de G sur la fibration vectorielle $\mathbb{V}(\mathscr{F})$, compatible avec l'action sur X et « linéaire » sur les fibres.

En effet, notons ϕ l'isomorphisme $\lambda^*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F})$ inverse de θ. Pour tout morphisme $(g, x) : \mathrm{U} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, on a un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$-modules $\phi_x(g) = \Lambda_x(g)^{-1} = \Lambda_{gx}(g^{-1})$ de $(gx)^*(\mathscr{F})$ vers $x^*(\mathscr{F})$, il induit un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{U}}$-modules

$$\mathbf{V}\big((gx)^*(\mathscr{F})\big) \xrightarrow{\sim} \mathbf{V}\big(x^*(\mathscr{F})\big)$$

qu'on notera ${}^t\phi_x(g)$. On a alors

$$ {}^t\phi_{gx}(h) \circ {}^t\phi_x(g) = {}^t\big(\Lambda_{gx}(h) \circ \phi_x(g)\big)^{-1} = {}^t\Lambda_x(hg)^{-1} = {}^t\phi_x(hg). $$

Comme, pour tout X-schéma $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$, on a $\mathbf{V}(\mathscr{F}) \times_f \mathrm{Y} \simeq \mathbf{V}(f^*(\mathscr{F}))$ (cf. 4.6.2), on obtient donc que l'isomorphisme

$$ \begin{aligned} {}^t\phi : \quad \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathbf{V}(\mathscr{F}) = (\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}) \times_{\mathrm{pr}_{\mathrm{X}}} \mathbf{V}(\mathscr{F}) &= \mathbf{V}(\mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F})) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathbf{V}(\lambda^*(\mathscr{F})) = (\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}) \times_{\lambda} \mathbf{V}(\mathscr{F}) \end{aligned} $$

munit $\mathbf{V}(\mathscr{F})$ d'une structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module G-équivariant. Enfin, identifiant chaque foncteur $\mathbf{V}(-)$ à la fibration vectorielle qui le représente, et composant ${}^t\phi$ avec la projection sur $\mathbb{V}(\mathscr{F})$, on obtient une action de G sur la fibration vectorielle $\mathbb{V}(\mathscr{F})$, compatible avec l'action sur X et « linéaire » sur les fibres.

On retrouve ainsi la définition donnée, par exemple, dans [**GIT**, Chap. 1, § 3], à ceci près que dans *loc. cit.* Mumford considère un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module localement libre de rang fini $\mathscr{E}$, et définit une action de G sur $\mathbf{V}(\mathscr{E}) = \mathbf{W}(\mathscr{E}^{\vee})$. En effet, le diagramme $(\star\star)$ précédent, avec θ remplacé par ϕ et le sens des flèches renversé, est exactement celui qu'on trouve dans *loc. cit.*, Def. 1.6, et l'isomorphisme ${}^t\phi$ ci-dessus coïncide avec l'isomorphisme Φ de *loc. cit.*, p. 31.

Remarque 6.5.4. — Considérons en particulier le cas où X = S, muni de l'action triviale de G. Dans ce cas, un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module G-équivariant $\mathscr{F}$ est la même chose qu'un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module (cf. 4.7.1). De plus, si l'on note f le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ (égal ici à pr_{X} et à λ), alors l'isomorphisme

$$ (\star) \qquad \theta : \quad f^*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathscr{F}) $$

est un élément de

$$ \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{F})) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{G}}}\big(\mathbf{W}(f^*(\mathscr{F})), \mathbf{W}(f^*(\mathscr{F}))\big) = \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathrm{W}(\mathscr{F}))(\mathrm{G}) $$

qui n'est autre que le morphisme $\rho : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{F}))$ définissant l'opération de G sur $\mathbf{W}(\mathscr{F})$. De plus, θ correspond par adjonction au morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $f_*(\theta) \circ \tau : \mathscr{F} \to f_*f^*(\mathscr{F})$, où $\tau : \mathscr{F} \to f_*f^*(\mathscr{F})$ est le morphisme « unité » de l'adjonction. (Ceci sera utilisé dans $\mathrm{VI_B}$, 11.10.bis.)

6.6. Les foncteurs $\prod_{\mathrm{X/S}} \mathbf{W}(\mathscr{F})$ et $\mathbf{W}\big(p_*(\mathscr{F})\big)$. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes opérant sur des S-schémas X et Y via les morphismes $\lambda : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ et $\mu : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$, et soit $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme G-équivariant. On suppose que les morphismes $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et $\nu_{\mathrm{Y}} : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ sont *quasi-compacts et quasi-séparés*, et que $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ est *plat*.

Alors la projection $\mathrm{pr}_{\mathrm{Y}} : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$ est plate, ainsi que μ (puisque μ est la composée de pr_{Y} et de l'automorphisme $(g, y) \mapsto (g, gy)$). Enfin, pour un S-schéma $f : \mathrm{T} \to$ variable, on notera $p^{\mathrm{T}} : \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{T}$ et $f_{\mathrm{X}} : \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{X}$ les morphismes déduits de p et f par changement de base.

Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module *quasi-cohérent* et G-équivariant, et soit θ l'isomorphisme $\mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \lambda^*(\mathscr{F})$ de 6.5.1 $(\star)$. Comme p est quasi-compact et quasi-séparé, alors $p_*(\mathscr{F})$ est quasi-cohérent (cf. EGA I, 9.2.1).

Lemme 6.6.1. — *Le $\mathscr{O}_Y$-module quasi-cohérent $p_*(\mathscr{F})$ est* G*-équivariant.*

En effet, on a les deux carrés cartésiens ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "\mathrm{pr}_X"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] & G \times_S X \arrow[l, "\lambda"'] \arrow[d, "q"] \\ G \times_S Y \arrow[r, "\mathrm{pr}_Y"] & Y & G \times_S Y. \arrow[l, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

Comme p est quasi-compact et quasi-séparé et pr_Y et μ plats, il résulte de EGA III, 1.4.15 (complété par EGA IV_1, 1.7.21) que l'on a $q_*\mathrm{pr}_X^*(\mathscr{F}) = \mathrm{pr}_Y^*\, p_*(\mathscr{F})$ et $q_*\lambda^*(\mathscr{F}) = \mu^* p_*(\mathscr{F})$. Par conséquent, θ induit un isomorphisme :

$$\theta_Y : \quad \mathrm{pr}_Y^*\, p_*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mu^* p_*(\mathscr{F}),$$

et l'on obtient de même que θ_Y vérifie la « condition de cocycle » 6.5.1 ($\star\star$) (puisque les morphismes $G \times_S G \times_S Y \to G \times_S Y$ qui interviennent sont plats). Ceci prouve le lemme.

En particulier, prenons $Y = S$ muni de l'action triviale de G. Tenant compte de la remarque 6.5.4, on obtient alors que $p_*(\mathscr{F})$ est un G-$\mathscr{O}_S$-module. Si de plus G est *affine* sur S et si l'on note $\mathscr{A}(G) = \pi_*(\mathscr{O}_G)$, alors $p_*(\mathscr{F})$ est donc un $\mathscr{A}(G)$-comodule, d'après 4.7.2.

D'autre part, d'après 6.4.1, le foncteur $\prod_{X/S} \mathbf{W}(\mathscr{F})$, qui à tout $f : T \to S$ associe

$$\mathbf{W}(f_X^*(\mathscr{F}))(X_T) = \Gamma(X_T, f_X^*(\mathscr{F})) = \Gamma(T, p_*^T f_X^*(\mathscr{F}))$$

est un G-$\mathbf{O}_S$-module. De plus, on a un morphisme canonique $\tau : \mathbf{W}(p_*(\mathscr{F})) \to \prod_{X/S} \mathbf{W}(\mathscr{F})$, qui est donné pour tout $f : T \to S$ par le morphisme canonique :

$$\Gamma(T, f^* p_*(\mathscr{F})) \longrightarrow \Gamma(T, p_*^T f_X^*(\mathscr{F}))$$

et qui est un isomorphisme lorsqu'on le restreint à la sous-catégorie pleine des schémas T *plats* sur S, et l'on vérifie sans difficultés que τ est un morphisme de G-$\mathbf{O}_S$-modules. Par conséquent, on a obtenu la proposition suivante (pour le point (ii), comparer avec [**GIT**], p. 32).

Proposition 6.6.2. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes opérant sur un* S*-schéma* X*, et $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent et* G*-équivariant. On suppose que* $\pi : G \to S$ *est* plat *et que* $p : X \to S$ *est* quasi-compact et quasi-séparé.

(i) *Alors $p_*(\mathscr{F})$ est un* G*-$\mathscr{O}_S$-module quasi-cohérent. D'autre part, le morphisme canonique $\mathbf{W}(p_*(\mathscr{F})) \to \prod_{X/S} \mathbf{W}(\mathscr{F})$ est un morphisme de* G*-$\mathbf{O}_S$-modules, et ces deux foncteurs coïncident sur la catégorie des* S*-schémas* plats.

(ii) *Si de plus* G *est* affine *sur* S *et si l'on note $\mathscr{A}(G) = \pi_*(\mathscr{O}_G)$, alors $p_*(\mathscr{F})$ est muni d'une structure de $\mathscr{A}(G)$-comodule.* [55]

---

[55] N.D.E. : Il en est de même si G plat, quasi-compact et quasi-séparé sur S et si $p_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_S$-module *plat*, cf. Exp. VI_B, 11.6.1 (ii).

6.7. Stabilisateurs. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes opérant sur un S-schéma X, et soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module quasi-cohérent G-équivariant. Soit Y un second S-schéma muni d'une action de G (éventuellement triviale), soit $\phi : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un S-morphisme, pas nécessairement G-équivariant, et soit $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathrm{G}}(\phi)$ le stabilisateur dans G de ϕ (cf. 6.3.2).

Signalons tout de suite (voir Exp. $\mathrm{VI_B}$, § 6) que $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathrm{G}}(\phi)$ est représentable par un sous-schéma en groupes fermé H de G si X est *séparé* sur S et si Y est *essentiellement libre* sur S (cf. *loc. cit.*, Déf. 6.2.1). En effet, considérons le morphisme $r : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ donné ensemblistement par $r(g, y) = \big(\phi(y), g\phi(g^{-1}y)\big)$, et soient $\mathrm{P} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ et P′ l'image inverse par r de la diagonale $\Delta_{\mathrm{X/S}}$. Alors on a (cf. *loc. cit.*, 6.2.4 (a))

$$\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathrm{G}}(\phi) = \prod_{\mathrm{P/G}} \mathrm{P}'$$

et donc, d'après *loc. cit.*, $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathrm{G}}(\phi)$ est représentable par un sous-schéma en groupes fermé H de G si X est séparé sur S et si Y est essentiellement libre sur S ; cette seconde condition étant automatiquement vérifiée si S est le spectre d'un corps, ou bien si Y = S. Sous ces hypothèses, $\phi^*(\mathscr{F})$ est alors un $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-module quasi-cohérent H-équivariant (cf. 6.5.2).

Donc, si de plus $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ et $p : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ sont quasi-compacts et quasi-séparés sur S, et π plat, alors $p_*\phi^*(\mathscr{F})$ est un H-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module, d'après 6.6.2. En particulier, on obtient le :

Corollaire 6.7.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S-*schéma en groupes opérant sur un* S-*schéma* X, *et* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-*module quasi-cohérent* G-*équivariant. On suppose que* $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ *est* plat *et que* $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *est* quasi-compact et séparé. *Soit* $\tau : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$ *une section de* X *sur* S.

(i) *Le stabilisateur* $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Stab}}_{\mathrm{G}}(\tau)$ *est un sous-schéma en groupes fermé de* G, *et* $\tau^*(\mathscr{F})$ *est un* H-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*module quasi-cohérent.*

(ii) *Si de plus* H *est* affine *sur* S (*par exemple, si* G *l'est*) *et si l'on note* $\mathscr{A}(\mathrm{H}) = \pi_*(\mathscr{O}_{\mathrm{H}})$, *alors* $\tau^*(\mathscr{F})$ *est un* $\mathscr{A}(\mathrm{H})$-*comodule.*

6.8. Faisceaux G-équivariants sur G. — Pour terminer, indiquons deux résultats (6.8.1 et 6.8.6 ci-dessous) qui seront utilisés dans les exposés II et III (cf. en particulier III, 4.25).

Proposition 6.8.1. — *Soient* S *un schéma,* $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ *un* S-*schéma en groupes,* $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ *la section unité. On considère l'action par translations à gauche de* G *sur lui-même. Alors les foncteurs* $\mathscr{E} \mapsto \pi^*(\mathscr{E})$ *et* $\mathscr{F} \mapsto \varepsilon^*(\mathscr{F})$ *induisent des équivalences, quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*modules quasi-cohérents et celle des* $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$-*modules quasi-cohérents* G-*équivariants.*

Démonstration. Notons μ la multiplication de G et pr_2 la deuxième projection $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$. Comme $\pi \circ \mu = \pi \circ \mathrm{pr}_2$ alors, pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{E}$, on a un isomorphisme canonique $\mu^*\pi^*(\mathscr{E}) = \mathrm{pr}_2^*\,\pi^*(\mathscr{E})$, et l'on vérifie facilement que cet isomorphisme satisfait à la « condition de cocycle » 6.5.1 ($\star\star$), i.e. $\pi^*(\mathscr{E})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$-module G-équivariant. Comme $\varepsilon^*\pi^*(\mathscr{E}) = \mathscr{E}$, le foncteur $\mathscr{E} \mapsto \pi^*(\mathscr{E})$ est pleinement fidèle ; il reste donc à voir que pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$-module G-équivariant $\mathscr{F}$, on a $\mathscr{F} \simeq \pi^*\varepsilon^*(\mathscr{F})$. Par hypothèse, on a un isomorphisme $\theta : \mathrm{pr}_2^*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mu^*(\mathscr{F})$; prenant l'image inverse de θ par le morphisme $\tau : \mathrm{G} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ de composantes $(\mathrm{id}_{\mathrm{G}}, \varepsilon \circ \pi)$, on obtient un isomorphisme $\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \pi^*\varepsilon^*(\mathscr{F})$.

Remarques 6.8.2. — (a) Considérons l'action de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ sur G définie par $(g_1, g_2) \cdot g = g_1 g g_2^{-1}$, alors le stabilisateur de la section unité $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ est le sous-groupe diagonal H de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$. Par conséquent, si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$-module quasi-cohérent $(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G})$-équivariant alors, d'après 6.5.2, $\mathscr{E} = \varepsilon^*(\mathscr{F})$ est muni d'une structure de H-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module.

(b) On peut montrer que $\mathscr{F} \mapsto \varepsilon^*(\mathscr{F})$ est une équivalence de catégories, entre la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$-modules quasi-cohérents $(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G})$-équivariants et celle des H-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules quasi-cohérents. Ceci est un cas particulier de résultats « de descente » (cf. Exp. IV, § 2 et SGA 1, VIII) plus généraux, voir par exemple [**Th87**], 1.2–1.3.

Remarque 6.8.3. — On conserve les notations de 6.8.1. Pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{E}$, notons $\pi_*^{\mathrm{G}}\pi^*(\mathscr{E})$ le sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module de $\pi_*\pi^*(\mathscr{E})$ dont les sections sur tout ouvert V de S sont les $\gamma \in \Gamma(\pi^{-1}(\mathrm{V}), \pi^*(\mathscr{E}))$ tels que $g \cdot \gamma_{\mathrm{S}'} = \gamma_{\mathrm{S}'}$ pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{V}$ et $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$. Alors le morphisme naturel $\mathscr{E} \to \pi_*^{\mathrm{G}}\pi^*(\mathscr{E})$ est un isomorphisme : ceci est immédiat si $\pi_*\pi^*(\mathscr{E}) = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \pi_*(\mathscr{O}_{\mathrm{G}})$ (par exemple si $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ est affine, ou si $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ est quasi-compact et quasi-séparé et $\mathscr{E}$ plat), et cela se vérifie sans difficultés dans le cas général.

Remarque 6.8.4. — Soient S un schéma, H un S-schéma en groupes opérant sur un S-schéma X, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module. On suppose H *plat* sur S et l'on note $\mathbf{W}_{\mathrm{P}}(\mathscr{F})$ la restriction du foncteur $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ à la sous-catégorie pleine formée des S-schémas *plats*. Comme, d'après 6.5.1, munir $\mathscr{F}$ d'une structure de module H-équivariant équivaut à se donner un isomorphisme $\theta : \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^*(\mathscr{F}) \to \lambda^*(\mathscr{F})$ de faisceaux sur $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, vérifiant la « condition de cocyle » $(\star\star)$, on voit que pour se donner une structure de module H-équivariant sur $\mathscr{F}$, il suffit de se donner une telle structure sur $\mathbf{W}_{\mathrm{P}}(\mathscr{F})$.

Rappel 6.8.5. — Soient X un S-schéma et Y un sous-S-schéma de X. On note $\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}}$ le faisceau conormal de l'immersion $i : \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{X}$ (cf. EGA IV_4, 16.1.2). Si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est un morphisme *plat* et si l'on note $i' : \mathrm{Y}' \hookrightarrow \mathrm{X}'$ l'immersion déduite de i par changement de base, alors d'après *loc. cit.*, 16.2.2 (iii), on a $\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'} = \mathscr{N}_{\mathrm{Y}'/\mathrm{X}'}$.

Proposition 6.8.6. — *Soient* S *un schéma,* X *un* S*-schéma en groupes,* Y *un sous-*S*-schéma en groupes de* X. *On suppose* Y plat *sur* S. *Alors le faisceau conormal* $\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}}$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$*-module* $(\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y})$*-équivariant.*

En effet, $\mathrm{H} = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ est plat sur S donc, d'après la remarque 6.8.4, il suffit de munir $\mathbf{W}_{\mathrm{P}}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}})$ d'une structure de module H-équivariant. Soit S' un S-schéma plat, soit $\mathrm{Y}' \hookrightarrow \mathrm{X}'$ l'immersion obtenue par changement de base, et soit $\mathscr{N}' = \mathscr{N}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}$. D'après 6.8.5, on a $\mathscr{N}' = \mathscr{N}_{\mathrm{Y}'/\mathrm{X}'}$.

Tout $h \in \mathrm{H}(\mathrm{S}')$ induit un automorphisme de Y' et l'on obtient donc, pour tout $y \in \mathrm{Y}'(\mathrm{S}')$, des isomorphismes

$$\Gamma(\mathrm{S}', y^*(\mathscr{N}')) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathrm{S}', y^*h^*(\mathscr{N}'))$$

qui munissent $\mathbf{W}_{\mathrm{P}}(\mathscr{N})$ d'une structure de module H-équivariant (cf. 6.1).

Bibliographie

[56]

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes Algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[Gr57] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. **9** (1957), 119-221.

[Ja03] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Academic Press, 1987 ; 2ème éd. Amer. Math. Soc., 2003.

[GIT] D. Mumford, *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, 1965 ; 2ème éd., avec J. Fogarty, 1982 ; 3ème éd., avec J. Fogarty & F. Kirwan, 1994.

[Ni02] N. Nitsure, *Representability of* GL_{E}, Proc. Indian Acad. Sci. **112** (2002), No. 4, 539-542.

[Ni04] N. Nitsure, *Representability of* Hom *implies flatness*, Proc. Indian Acad. Sci. **114** (2004), No. 1, 7-14.

[Se68] J.-P. Serre, *Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés*, Publ. math. I.H.É.S. **34** (1968), 37-52.

[Th87] R. W. Thomason, *Equivariant resolution, linearization, and Hilbert's fourteenth problem over arbitrary base schemes*, Adv. Maths. **65** (1987), 16-34.

[56] N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé

EXPOSÉ II

FIBRÉS TANGENTS – ALGÈBRES DE LIE
par M. Demazure

43

Nous nous proposons dans cet exposé de construire l'analogue en théorie des schémas des *fibrés tangents* et *algèbres de Lie* de la théorie classique. Il sera cependant utile de ne pas se restreindre aux schémas proprement dits, mais de s'intéresser aussi à certains foncteurs sur la catégorie des schémas qui ne sont pas nécessairement *représentables* (par exemple foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}$, $\underline{\mathrm{Norm}}$, etc.). Comme il a été annoncé dans l'exposé précédent (cf. I 1.1), nous identifierons un schéma avec le foncteur qui lui est associé.

D'un autre côté, les constructions exposées ci-après dépassent le cadre de la théorie des schémas. Elles sont également valables, par exemple, en théorie des *espaces analytiques* avec éléments nilpotents, modulo quelques modifications de détail.

Avant de commencer cette construction, il nous faut poser quelques définitions générales qui complètent celles de I 1.7.

1. Les foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$

Reprenons les notations de I 1.1. On identifie la catégorie $\mathscr{C}$ à une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}} = \mathbf{Hom}(\mathscr{C}^{\circ}, (\mathbf{Ens}))$ (en particulier on supprime les soulignements [1] qui nous permettaient de distinguer graphiquement un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$ d'un objet de $\mathscr{C}$).

Considérons la situation suivante : quatre objets de $\widehat{\mathscr{C}}$, notés S, X, Y, Z, le premier étant en fait un objet de $\mathscr{C}$, X et Y au-dessus de Z, Z au-dessus de S : 44

[1] N.D.E. : rendus dans cette édition par des caractères gras $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$, cf. Exposé I. Toutefois, pour des foncteurs tels que $\underline{\mathrm{Norm}}$ et $\underline{\mathrm{Centr}}$ (cf. 5.2) les soulignements ont été conservés dans l'original, et on les a rajoutés pour le foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}$, ceci afin de distinguer le foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$ de la $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-algèbre de Lie, $\mathrm{Lie}(\mathrm{G/S}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$, utilisée par exemple dans l'Exposé $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "p_X"'] & & Y \arrow[dl, "p_Y"] \\
& Z \arrow[d] & \\
& S &
\end{tikzcd}.$$

Définition 1.1. — On définit un objet de $\widehat{\mathscr{C}_{/S}}$, noté $\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)$ par :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)(S') = \mathrm{Hom}_{Z_{S'}}(X_{S'}, Y_{S'}) = \mathrm{Hom}_Z(X \underset{S}{\times} S', Y), \tag{1}$$

pour tout objet S' de $\mathscr{C}_{/S}$. On voit aussitôt que $\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)$ n'est autre que le sous-objet de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$ formé des morphismes compatibles avec p_X et p_Y, c'est-à-dire le noyau du couple de morphismes

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y) \rightrightarrows \underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Z)$$

définis, le premier par la composition avec p_Y, le second comme étant le morphisme constant dont « l'image » est p_X.

(2) D'autre part, on voit comme en I 1.7 que, pour tout objet T de $\widehat{\mathscr{C}}$ au-dessus de S, on a une bijection naturelle :

$$\mathrm{Hom}_S(T, \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_Z(X \underset{S}{\times} T, Y). \tag{2}$$

De plus, d'après I 1.7.1, si E, F sont des objets de $\widehat{\mathscr{C}}$ au-dessus de Z, on a :

$$\mathrm{Hom}_Z(E, \underline{\mathrm{Hom}}_Z(F, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_Z(E \times_Z F, Y) \simeq \mathrm{Hom}_Z(F, \underline{\mathrm{Hom}}_Z(E, Y)).$$

Appliquant ceci à $E = X$ et $F = Z \times_S T$, on obtient des bijections naturelles, pour tout objet T de $\widehat{\mathscr{C}}_{/S}$:

$$\mathrm{Hom}_S(T, \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_Z(X \underset{S}{\times} T, Y) \simeq \begin{cases} \mathrm{Hom}_Z(Z \underset{S}{\times} T, \underline{\mathrm{Hom}}_Z(X, Y)) \\ \mathrm{Hom}_Z(X, \underline{\mathrm{Hom}}_Z(Z \underset{S}{\times} T, Y)). \end{cases} \tag{3}$$

De plus, ces bijections sont fonctorielles en T, donc on obtient des isomorphismes de S-foncteurs :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}_S(T, \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, \underline{\mathrm{Hom}}_Z(Z \times_S T, Y)) \\
& \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X \times_S T, Y) \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd} \tag{4}$$

Signalons deux cas particuliers de la définition. Si $Z = S$, on a :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{S/S}(X, Y) = \underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y).$$

(2) N.D.E. : On a détaillé les points (2), (3), (4) ; en particulier, (4) sera utilisé en 3.11.

D'autre part, lorsque $\mathrm{X} = \mathrm{Z}$, on pose

$$\prod_{\mathrm{Z/S}} \mathrm{Y} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{Z}, \mathrm{Y}), \tag{5}$$

on a donc par définition **45**

$$\Big(\prod_{\mathrm{Z/S}} \mathrm{Y}\Big)(\mathrm{S}') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{Z} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}', \mathrm{Y}) \simeq \Gamma(\mathrm{Y}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{Z}_{\mathrm{S}'}).$$

Le foncteur $\prod_{\mathrm{Z/S}} : \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{Z}}} \to \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$ est *adjoint à droite* du foncteur de changement de base de S à Z : pour tout S-foncteur U on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \prod_{\mathrm{Z/S}} \mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Z}, \mathrm{Y}).$$

(Si $\mathscr{C} = (\mathbf{Sch})$ et si Z est un S-schéma, le foncteur $\prod_{\mathrm{Z/S}}$ est appelé « *restriction des scalaires à la Weil* ».) [(3)] Notons également que l'on a un isomorphisme :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{X/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y} \underset{\mathrm{Z}}{\times} \mathrm{X}) = \prod_{\mathrm{X/S}} (\mathrm{Y} \underset{\mathrm{Z}}{\times} \mathrm{X}), \tag{6}$$

qui donne en particulier pour $\mathrm{Z} = \mathrm{S}$ un isomorphisme :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \simeq \prod_{\mathrm{X/S}} \mathrm{Y}_{\mathrm{X}}. \tag{7}$$

Remarque 1.2. — Le foncteur $\mathrm{Y} \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ commute au produit au sens suivant : on a un isomorphisme fonctoriel

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y} \underset{\mathrm{Z}}{\times} \mathrm{Y}') \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}'). \tag{$*$}$$

Il en résulte que si Y est un Z-groupe, resp. un Z-anneau, etc., alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est un S-groupe, resp. un S-anneau, etc.

Remarque 1.3. — [(4)] De plus, soit $\pi : \mathrm{M} \to \mathrm{Y}$ un Y-foncteur en $\mathbf{O}_{\mathrm{Y}}$-modules (cf. I, 4.3.3.1). Posons $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Alors, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{M})$ est muni d'une structure naturelle de $\mathbf{O}_{\mathrm{H}}$-module ; plus précisément, pour tout H′ au-dessus de H, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}', \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{M}))$ est muni d'une structure naturelle de $\mathbf{O}(\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X})$-module.

En effet, notons $m : \mathrm{M} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ et $\lambda : \mathbf{O}_{\mathrm{Y}} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ les morphismes définissant les structures de Y-groupe (abélien) et de $\mathbf{O}_{\mathrm{Y}}$-module. Soit H′ un S-schéma au-dessus de $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, c.-à-d., on s'est donné un Z-morphisme $f : \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}' \to \mathrm{Y}$, qui fait donc de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}'$ un Y-objet. Alors,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}', \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{M}))$$

est l'ensemble des Z-morphismes $\phi : \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}' \to \mathrm{M}$ tels que $\pi \circ \phi = f$, c.-à-d., des Y-morphismes $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}' \to \mathrm{M}$.

(3) N.D.E. : On a ajouté les deux phrases précédentes.

(4) N.D.E. : On a ajouté cette remarque, utile pour le corollaire 3.11.1.

Si ϕ, ψ sont deux tels morphismes, on définit $\phi+\psi$ comme le Y-morphisme composé

$$\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}' \xrightarrow{\phi\times\psi} \mathrm{M} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{M} \xrightarrow{m} \mathrm{M}$$

et l'on vérifie que ceci munit $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{M})$ d'une structure de groupe abélien au-dessus de $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. [5]

De même, si a est un élément de $\mathbf{O}(\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{H}')$, i.e. un S-morphisme $a : \mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{H}' \to \mathbf{O}_{\mathrm{S}}$, on définit $a\phi$ comme la composée $\lambda \circ (a \times \phi)$, où $a \times \phi$ désigne le Y-morphisme de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}'$ vers $\mathbf{O}_{\mathrm{Y}} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{M} \simeq \mathbf{O}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{M}$ de composantes a et ϕ ; on vérifie que ceci munit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}', \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{M}))$ d'une structure de $\mathbf{O}(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}')$-module, fonctorielle en le H-objet H'.

2. Les schémas $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$

Définition 2.1. — Soient S un schéma et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. On note $\mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M})$ la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre quasi-cohérente $\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \oplus \mathscr{M}$ (*où* $\mathscr{M}$ *est considéré comme un idéal de carré nul*). On note $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ le S-schéma $\mathrm{Spec}\, \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M})$. [6]

En particulier on note $\mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} = \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$, $\mathrm{I}_{\mathrm{S}} = \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$ et on les nomme respectivement *algèbre des nombres duaux sur* S et *schéma des nombres duaux sur* S.

Alors $\mathscr{M} \mapsto \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ est un *foncteur contravariant* de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules quasi-cohérents dans celle des S-schémas. En particulier les morphismes $0 \to \mathscr{M}$ et $\mathscr{M} \to 0$ définissent respectivement le morphisme structural $\rho : \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(0) = \mathrm{S}$ et une section $\varepsilon_{\mathscr{M}}$ de celui-ci que l'on appelle *section zéro.* [7]

46 ***2.1.1.*** — [8] Comme $\mathscr{M} \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ est un foncteur contravariant, tout $a \in \mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M})$ définit un S-endomorphisme a^* de $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$, et l'on a $1^* = \mathrm{id}$, $(ab)^* = b^* \circ a^*$, $0^* = \varepsilon_{\mathscr{M}} \circ \rho$ et $a^* \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = \varepsilon_{\mathscr{M}}$. Par conséquent, le S-schéma $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ est muni d'une action à droite du *monoïde multiplicatif* de $\mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M})$, qui commute aux S-morphismes $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}')$ provenant de morphismes $\mathscr{M}' \to \mathscr{M}$; en particulier, les opérateurs a^* conservent la section zéro de $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$.

Pour tout $a \in \mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M})$ et $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $m \in \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}')$, on notera $m{\cdot}a = a^*(m)$; alors $m \cdot 1 = m$, $(m \cdot a) \cdot b = m \cdot (ab)$, $m \cdot 0 = \varepsilon_{\mathscr{M}}(\rho(m))$ et, si $m = \varepsilon_{\mathscr{M}}(f)$, alors $m \cdot a = m$. [9]

---

[5] N.D.E. : Bien entendu, si M est un Y-groupe (non nécessairement abélien) et si l'on pose $\phi \cdot \psi = m \circ (\phi \times \psi)$, ceci fait de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{M})$ un groupe au-dessus de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

[6] N.D.E. : Noter que $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ a même espace sous-jacent que S.

[7] N.D.E. : Comparer avec 3.1.1.

[8] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, et l'on a ajouté la numérotation 2.1.1 à 2.1.3.

[9] N.D.E. : Dans la suite, on s'intéressera principalement au cas où $a \in \mathbf{O}(\mathrm{S})$, agissant par homothéties par $\mathscr{M}$. Par exemple, si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module libre de rang r, alors, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}', \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$ s'identifie à l'ensemble des r-uplets $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \mathbf{O}(\mathrm{S}')$ tels que $\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$ pour tout i, j, et l'on a $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \cdot a = (a\varepsilon_1, \ldots, a\varepsilon_r)$ pour tout $a \in \mathbf{O}(\mathrm{S})$.

Remarque 2.1.2. — La formation des $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ *commute à l'extension de la base* : on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{S}'} \simeq \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}).$$

Pour simplifier, on notera $\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}) = \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{S}'}$; plus généralement, si X est un S-foncteur (non nécessairement représentable), on notera $\mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{M}) = \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$.

2.1.3. — [10] D'après ce qui précède, le monoïde multiplicatif de $\mathbf{O}(\mathrm{S}')$ opère sur le S'-schéma $\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})$, de façon fonctorielle en $\mathscr{M}$, i.e. le S-schéma $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ est muni d'une structure d'objet à monoïde d'opérateurs $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$, cette structure étant fonctorielle en $\mathscr{M}$. On a donc un morphisme de S-schémas

$$\lambda : \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathbf{O}_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}),$$

vérifiant des conditions évidentes. Pour tout S-foncteur X, on obtient par changement de base un morphisme de X-foncteurs :

$$\lambda_{\mathrm{X}} : \mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathbf{O}_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{M})$$

qui fait du S-foncteur $\mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{M})$ un objet à monoïde d'opérateurs $\mathbf{O}(\mathrm{X})$: tout élément a de $\mathbf{O}(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathbf{O}_{\mathrm{S}})$ définit un X-endomorphisme $a^* = \lambda_{\mathrm{X}} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{M})} \times (a \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}))$ de $\mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{M})$; explicitement, si $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ et $m \in \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}') = \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})(\mathrm{S}')$, alors $a(x) = a \circ x$ appartient à $\mathbf{O}(\mathrm{S}')$ et l'on a :

$$(m, x) \cdot a = (m \cdot a(x), x).$$

Cette opération est fonctorielle en $\mathscr{M}$ et conserve la section zéro $\varepsilon_{\mathscr{M}} : \mathrm{X} \to \mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{M})$, i.e. $a^* \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = \varepsilon_{\mathscr{M}}$ pour tout $a \in \mathbf{O}(\mathrm{X})$.

De plus, cette opération est « fonctorielle en X » au sens suivant : si $\pi : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est un morphisme de S-foncteurs et $u : \mathbf{O}(\mathrm{X}) \to \mathbf{O}(\mathrm{Y})$ le morphisme d'anneaux correspondant (i.e. $u(a) = a \circ \pi \in \mathbf{O}(\mathrm{Y})$ pour tout $a \in \mathbf{O}(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathbf{O}_{\mathrm{S}})$), alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{M}) \arrow[r, "a^*"] & \mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{M}) \\
\mathrm{I}_{\mathrm{Y}}(\mathscr{M}) \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "u(a)^*"] & \mathrm{I}_{\mathrm{Y}}(\mathscr{M}) \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd} .$$

2.2. Soient maintenant $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ deux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules quasi-cohérents. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{M} \oplus \mathscr{N} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathscr{M} \arrow[dr] & & \mathscr{N} \arrow[dl] \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

[10] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, qui sera utile en 3.4.2 et en 4.6.2.

définit un diagramme commutatif de S-schémas

$$(*)\qquad \begin{tikzcd}
 & \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}\oplus\mathscr{N}) & \\
\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[ur] & & \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{N}) \arrow[ul] \\
 & \mathrm{S} \arrow[ul, "\varepsilon_{\mathscr{M}}"] \arrow[uu, "\varepsilon_{\mathscr{M}\oplus\mathscr{N}}"'] \arrow[ur, "\varepsilon_{\mathscr{N}}"'] &
\end{tikzcd} .$$

Proposition 2.2. — *Pour tout* S-schéma X*, le diagramme de foncteurs au-dessus de* S
47 *obtenu en appliquant le foncteur* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(-,\mathrm{X})$ *au diagramme* $(*)$ *est cartésien :*

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}\oplus\mathscr{N}),\mathrm{X}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}),\mathrm{X}) \arrow[dr] & & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{N}),\mathrm{X}) \arrow[dl] \\
 & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S},\mathrm{X}) = \mathrm{X} &
\end{tikzcd} .$$

Il faut vérifier que pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, le diagramme d'ensembles obtenu en prenant la valeur des foncteurs sur S' est cartésien. Comme la formation de $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{P})$ commute à l'extension de la base au sens explicité plus haut, il suffit de le faire pour $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$, donc de vérifier que le diagramme d'ensembles suivant est cartésien :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{X}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}\oplus\mathscr{N})) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\mathrm{X}(\varepsilon_{\mathscr{M}\oplus\mathscr{N}})"] & \\
\mathrm{X}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})) \arrow[dr, "\mathrm{X}(\varepsilon_{\mathscr{M}})"'] & & \mathrm{X}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{N})) \arrow[dl, "\mathrm{X}(\varepsilon_{\mathscr{N}})"] \\
 & \mathrm{X}(\mathrm{S}) &
\end{tikzcd} .$$

Or, si $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$, il résulte de SGA 1, III 5.1 [(11)], que $\mathrm{X}(\varepsilon_{\mathscr{M}})^{-1}(x)$ est isomorphe, fonctoriellement en $\mathscr{M}$, à

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(x^*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}),\mathscr{M}),$$

où $\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ désigne le faisceau des différentielles relatives de X par rapport à S. Or ce dernier foncteur (en $\mathscr{M}$) transforme évidemment une somme directe de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules en le produit des ensembles correspondants, d'où le résultat.

(11) N.D.E. : voir aussi l'ajout 0.1.8 dans l'Exp. III.

Corollaire 2.2.1. — *Soient* X *un* S*-schéma et* $\mathscr{M}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module libre de type fini. Le foncteur* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}), \mathrm{X})$ *est isomorphe* (comme foncteur au-dessus de X) *à un produit fini* (au-dessus de X) *de copies de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}, \mathrm{X})$.

Nota 2.2.2. — Il résulte de la démonstration de la proposition que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}, \mathrm{X})$ est isomorphe comme X-foncteur à $\mathbf{V}(\Omega^1_{\mathrm{X/S}})$ (I 4.6.1) donc *représentable* par la fibration vectorielle [(12)] $\mathbb{V}(\Omega^1_{\mathrm{X/S}})$. 48

3. Le fibré tangent, la condition (E)

Dans ce paragraphe, sauf notification contraire, les lettres $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}'$, $\mathscr{N}$, etc., désigneront toujours des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules libres de type fini* (c'est-à-dire isomorphes à une somme directe finie de copies de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$).

Nous utiliserons systématiquement les identifications justifiées dans l'exposé I ; c'est ainsi que nous dirons « foncteur au-dessus de S » pour désigner indifféremment un foncteur muni d'un morphisme dans S (= $\mathbf{h}_{\mathrm{S}}$) ou un foncteur sur la catégorie des objets au-dessus de S. On dira de même « foncteur en groupes au-dessus de S », etc.

Définition 3.1. — Soient S un schéma et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module libre de type fini. Soit X un foncteur au-dessus de S. On appelle fibré tangent à X au-dessus de S relativement au $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{M}$ et on note $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ le S-foncteur

$$\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}), \mathrm{X}).$$

En particulier, on appelle *fibré tangent à* X *au-dessus de* S et on note $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}$ le foncteur

$$\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}} = \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}, \mathrm{X}).$$ [(13)]

Alors $\mathscr{M} \mapsto \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ est un *foncteur covariant* de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules libres de type fini dans la catégorie des S-foncteurs. En particulier les morphismes [(14)] $\mathscr{M} \to 0$ et $0 \to \mathscr{M}$ définissent respectivement un S-morphisme 49

$$\pi_{\mathscr{M}} : \quad \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(0) \simeq \mathrm{X}$$

et une section τ_0 de celui-ci appelée section zéro (ou *section nulle*).

Remarque 3.1.1. — [(15)] On notera que la projection $\pi_{\mathscr{M}} : \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{X}$ est induite par la section zéro $\varepsilon_{\mathscr{M}} : \mathrm{S} \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$, tandis que la section nulle $\tau_0 : \mathrm{X} \to \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ est induite par le morphisme structural $\rho : \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{S}$; c.-à-d., pour tout point $t \in \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}')$ (resp. $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$), correspondant à un S-morphisme $f : \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{X}$ (resp. $g : \mathrm{S}' \to \mathrm{X}$), on a $\pi(t) = f \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{S}'} \times \varepsilon_{\mathscr{M}})$ (resp. $\tau_0(x) = g \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{S}'} \times \rho)$).

---

(12) N.D.E. : cf. N.D.E. (33) de l'Exp. I.

(13) N.D.E. : Lorsque S = Spec(k) et X est un k-schéma, on a $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathrm{S}') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}' \otimes_k k[\varepsilon], \mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{S}' \otimes_k k[\varepsilon])$; on retrouve donc une des définitions usuelles du fibré tangent.

(14) N.D.E. : On a corrigé « $0 \to \mathscr{M}$ et $\mathscr{M} \to 0$ » en : « $\mathscr{M} \to 0$ et $0 \to \mathscr{M}$ ».

(15) N.D.E. : On a ajouté les paragraphes 3.1.1 et 3.1.2.

Il résulte de 3.1 que $\mathscr{M} \mapsto \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ est un *foncteur covariant de la catégorie des* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules libres de type fini dans celle des foncteurs au-dessus de* X. En particulier $\mathbf{O}(\mathrm{S})$ est un *monoïde d'opérateurs* du X-foncteur $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ qui respecte « la fonctorialité en $\mathscr{M}$ ».

Scholie 3.1.2. — [15] Ce qui précède signifie, en particulier, les choses suivantes. Pour tout S-morphisme $\phi : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$, posons

$$\Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}', \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})).$$

On a une action du monoïde multiplicatif $\mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M})$ sur $\Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M})$, notée $(\lambda, x) \mapsto \lambda * x$, telle que $\lambda*(\mu*x) = (\lambda\mu)*x$, $1*x = x$, et $0*x = \tau_0 \circ \phi$, où τ_0 est la section nulle $\mathrm{X} \to \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$. On a de même une action de $\mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{M})$ sur $\Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M} \oplus \mathscr{M})$. [16]

De plus, soient $m : \mathscr{M} \oplus \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ (resp. $\delta : \mathscr{M} \to \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}$) l'addition (resp. l'application diagonale) de $\mathscr{M}$, et notons $m_{\mathrm{X}'} : \Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}) \to \Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M})$ et $\delta_{\mathrm{X}'} : \Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M}) \to \Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M} \oplus \mathscr{M})$ les morphismes induits par m et δ. Pour $\lambda, \mu \in \mathbf{O}(\mathrm{S})$, notons ℓ_λ (resp. $\ell_{\lambda,\mu}$) la multiplication par λ dans $\mathscr{M}$ (resp. par (λ, μ) dans $\mathscr{M} \oplus \mathscr{M}$). Comme $m \circ \ell_{\lambda,\lambda} = \ell_\lambda \circ m$ et $m \circ \ell_{\lambda,\mu} \circ \delta = \ell_{\lambda+\mu}$, on a, pour tout $z \in \Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M} \oplus \mathscr{M})$ et $x \in \Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M})$:

$$(\dagger) \qquad \lambda * m(z) = m((\lambda, \lambda) * z), \qquad m((\lambda, \mu) * \delta(x)) = (\lambda + \mu) * x.$$

Définition 3.2. — Soit $u \in \mathrm{X}(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}, \mathrm{X}) = \Gamma(\mathrm{X/S})$. On appelle espace tangent à X au-dessus de S au point u relativement à $\mathscr{M}$, et on note $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$, le S-foncteur obtenu à partir du X-foncteur $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ par image réciproque par le morphisme $u : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{S} \arrow[r, "u"] & \mathrm{X}
\end{tikzcd}.$$

En particulier $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$ est noté $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}$. C'est l'*espace tangent à* X *au-dessus de* S *au point* u.

Remarque 3.2.1. — [17] Il résulte de 3.1.1 que, pour tout $t : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}')$ est l'ensemble des S-morphismes $f : \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}) \to \mathrm{X}$ tels que $f \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = u \circ t$, où $\varepsilon_{\mathscr{M}} : \mathrm{S}' \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})$ est la section zéro.

Notons immédiatement la

Proposition 3.3. — *Si* X *est représentable par un* S*-schéma noté* $\widetilde{\mathrm{X}}$*, alors* $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ *et* $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ *sont représentables. En particulier* $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}$ *et* $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}$ *sont représentables par des fibrations vectorielles sur* $\widetilde{\mathrm{X}}$ *et sur* S *qui sont respectivement* $\mathbb{V}(\Omega^1_{\widetilde{\mathrm{X}}/\mathrm{S}})$ *et* $\mathbb{V}(u^*(\Omega^1_{\widetilde{\mathrm{X}}/\mathrm{S}}))$.

[16] N.D.E. : En fait, on s'intéresse uniquement à l'action de $\mathbf{O}(\mathrm{S})$ (resp. $\mathbf{O}(\mathrm{S}) \times \mathbf{O}(\mathrm{S})$) sur $\Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M})$ (resp. $\Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M} \oplus \mathscr{M})$), cf. ci-dessous et la démonstration de 3.6.

[17] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

Il suffit évidemment de démontrer la proposition pour $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$, les résultats analogues pour $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ s'en déduisant par image réciproque. D'après le corollaire 2.2.1, il suffit même de le faire pour $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$, et en ce cas, la proposition n'est autre que la remarque signalée en 2.2.2.

Remarque 3.3.1. — Il résulte de cette proposition une description particulièrement simple de la fibration vectorielle représentant $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$: l'image de la section u de X sur **50**
S est localement fermée [18], donc définie par un idéal quasi-cohérent $\mathfrak{m}$ d'un schéma induit sur un ouvert de X. Le quotient $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ peut être considéré comme un module quasi-cohérent sur S. C'est celui-ci qui définit la fibration vectorielle cherchée.

Soit par exemple X un schéma algébrique sur un corps k et u un point de X *rationnel* sur k. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{X},u}$ et soit $\mathfrak{t}$ le k-espace vectoriel dual de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$; c'est l'espace tangent de Zariski de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},u}$ au point u. Alors, avec les notations de I 4.6.5.1, on a :

$$\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/k} = \mathbb{V}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \mathrm{W}(\mathfrak{t}).$$

Cette parenthèse fermée, revenons à la situation générale. Remarquons d'abord que $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ est un *foncteur covariant de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules libres de type fini dans celle des foncteurs au-dessus de* S. En particulier $\mathbf{O}(\mathrm{S})$ est un *ensemble d'opérateurs* du S-foncteur $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ qui respecte la fonctorialité en $\mathscr{M}$. [19]

Proposition 3.4. — *La formation de* $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ *et* $\mathrm{L}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ *commute à l'extension de la base : pour tout* S*-schéma* S′, *on a des isomorphismes fonctoriels en* $\mathscr{M}$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}'}(\mathscr{M}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{S}'},$$
$$\mathrm{L}^{u'}_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}'}(\mathscr{M}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{S}'}, \quad \text{où } u' = u_{\mathrm{S}'}\,.$$

Cela résulte immédiatement du fait que les $\underline{\mathrm{Hom}}$ commutent à l'extension de la base.

Corollaire 3.4.1. — *Le* X*-foncteur* $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ (*resp. le* S*-foncteur* $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$) *est muni naturellement d'une structure d'*objet à opérateurs $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$ (resp. $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$), *cette structure étant fonctorielle en* $\mathscr{M}$.

Montrons-le d'abord pour $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$. Pour chaque S′ au-dessus de S, $\mathbf{O}(\mathrm{S}')$ opère sur $\mathscr{M}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ donc sur $\mathrm{L}^{u'}_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}'}(\mathscr{M}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{S}'}$; or on vérifie que cette opération est fonctorielle en S′. Elle munit donc comme annoncé $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ d'une structure de foncteur à opérateurs $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$.

Pour $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ c'est un peu plus compliqué. Pour chaque X′ au-dessus de X, posons **51**
$\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{X}'} = \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})\times_{\mathrm{X}}\mathrm{X}'$; il faut munir $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{X}'}(\mathrm{X}') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}', \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$ d'une structure d'ensemble à monoïde d'opérateurs $\mathbf{O}(\mathrm{X}')$ de manière fonctorielle en

[18] N.D.E. : cf. EGA I, 5.3.11

[19] N.D.E. : cf. 3.1.2.

X'. Pour cela on construit le diagramme suivant, où $X_{X'}$ dénote $X \times_S X'$ et f' la section de $X_{X'}$ sur X' définie par $f : X' \to X$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{T}_{X_{X'}/X'}(\mathscr{M}) \arrow[dl] \arrow[dd] & \\
\mathrm{T}_{X/S}(\mathscr{M}) \arrow[dd] & & \mathrm{T}_{X/S}(\mathscr{M})_{X'} \arrow[ul] \arrow[ll] \arrow[dd] \\
& X_{X'} \arrow[dl] & \\
X \arrow[dr] & & X' \arrow[ul, "f'"'] \arrow[ll, "f"] \arrow[dl] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

[20] Ce diagramme, joint à 3.2.1, montre que $\mathrm{T}_{X/S}(\mathscr{M})_{X'}(X')$ s'identifie à

$$\mathrm{L}^{f'}_{X_{X'}/X'}(\mathscr{M})(X') = \{X'\text{-morphismes } \psi : \mathrm{I}_{X'}(\mathscr{M}) \longrightarrow X_{X'} \text{ tels que } \psi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = f'\},$$

sur lequel tout $a \in \mathbf{O}(X')$ opère via son action sur $\mathrm{I}_{X'}(\mathscr{M})$, c.-à-d., avec les notations de 2.1.1, on a : $a\psi = \psi \circ a^*$, i.e. pour tout $X'' \to X'$ et $x \in \mathrm{I}_{X'}(\mathscr{M})(X'')$, $(a\psi)(x) = \psi(x \cdot a)$. On vérifie alors facilement que cette construction est fonctorielle en X'.

Les isomorphismes de la proposition 3.4 sont alors par construction des isomorphismes pour les structures de $\mathbf{O}_{X_{S'}}$-objets, resp. $\mathbf{O}_{S'}$-objets.

Remarque 3.4.2. — [21] L'opération de $\mathbf{O}_X$ sur $\mathrm{T}_{X/S}(\mathscr{M})$ peut se voir, plus simplement, comme suit. Pour tout $f : X' \to X$, on a

$$\mathrm{Hom}_X(X', \mathrm{T}_{X/S}(\mathscr{M})) = \{\phi \in \mathrm{Hom}_S(\mathrm{I}_{X'}(\mathscr{M}), X) \mid \phi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = f\},$$

et l'on a vu en 2.1.3 que $\mathrm{I}_{X'}(\mathscr{M})$, *considéré comme* S-*foncteur*, est muni d'une opération du monoïde $\mathbf{O}(X')$ qui conserve la section zéro $\varepsilon_{\mathscr{M}} : X' \to \mathrm{I}_{X'}(\mathscr{M})$. Par conséquent, si l'on note a^* le X'-endomorphisme de $\mathrm{I}_{X'}(\mathscr{M})$ défini par $a \in \mathbf{O}(X')$, on a : $a\phi = \phi \circ a^*$, c.-à-d., pour tout $S' \to S$ et $(m, x') \in \mathrm{Hom}_S(S', \mathrm{I}_S(\mathscr{M}) \times_S X')$,

$$(a\phi)(m, x') = \phi(m \cdot a(x'), x')$$

(noter que $a^* \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = \varepsilon_{\mathscr{M}}$, d'où $(a\phi) \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = \phi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = f$).

De même, l'opération de $\mathbf{O}_S$ sur $\mathrm{L}^u_{X/S}(\mathscr{M})$ peut se décrire comme suit. Pour tout $t : S' \to S$, $\mathrm{L}^u_{X/S}(\mathscr{M})(S')$ est l'ensemble des S-morphismes $\phi : \mathrm{I}_{S'}(\mathscr{M}) \to X$ tels que $\phi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = u \circ t$; pour un tel ϕ et $a \in \mathbf{O}(S')$, on a : $a\phi = \phi \circ a^*$.

Remarque 3.4.3. — [21] Les observations de 3.1.2 valent également pour l'opération de $\mathbf{O}_S$ sur $\mathrm{L}^u_{X/S}(\mathscr{M})$ et celle de $\mathbf{O}_X$ sur $\mathrm{T}_{X/S}(\mathscr{M})$.

---

[20] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
[21] N.D.E. : On a ajouté les remarques 3.4.2 et 3.4.3.

Définition 3.5. — Soient S un schéma et X un S-foncteur. On dit que X *vérifie la condition* (E) *relativement à* S si, pour tout S' au-dessus de S et tous $\mathscr{O}_{S'}$-modules libres de type fini $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$, le diagramme d'ensembles

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X(I_{S'}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N})) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X(I_{S'}(\mathscr{M})) \arrow[dr] & & X(I_{S'}(\mathscr{N})) \arrow[dl] \\ & X(S') & \end{tikzcd},$$

obtenu en appliquant X au diagramme $(*)$ défini dans 2.1, est cartésien. [22] **52**

3.5.1. — Il revient au même de dire que *le foncteur* $\mathscr{M} \mapsto T_{X/S}(\mathscr{M})$ *transforme sommes directes de* $\mathscr{O}_S$*-modules libres de type fini en produits de* X*-foncteurs* ; [23] dans ce cas, il en est de même du foncteur $\mathscr{M} \mapsto L^u_{X/S}(\mathscr{M}) = S \times_X T_{X/S}(\mathscr{M})$, pour tout $u \in \Gamma(X/S)$.

La proposition 2.2 montre que *tout foncteur représentable vérifie la condition* (E).

Abréviation : au lieu de dire « X *vérifie la condition* (E) *par rapport à* S », on dira parfois « X/S *vérifie la condition* (E) ».

Si X/S vérifie la condition (E), le foncteur $\mathscr{M} \mapsto T_{X/S}(\mathscr{M})$ commute au produit donc transforme groupes en groupes. En particulier $T_{X/S}(\mathscr{M})$ est un X-groupe commutatif. Pour la même raison, $L^u_{X/S}(\mathscr{M})$ est un S-groupe commutatif.

Proposition 3.6. — *Si* X/S *vérifie* (E), *la structure de groupe abélien sur* $T_{X/S}(\mathscr{M})$ (*resp.* $L^u_{X/S}(\mathscr{M})$) *et l'opération de* $\mathbf{O}_X$ (*resp.* $\mathbf{O}_S$) *munissent* $T_{X/S}(\mathscr{M})$ (*resp.* $L^u_{X/S}(\mathscr{M})$) *d'une structure de* $\mathbf{O}_X$*-module* (*resp.* $\mathbf{O}_S$*-module*).

L'opération de $\mathbf{O}_X$ (resp. $\mathbf{O}_S$) est fonctorielle en $\mathscr{M}$; elle respecte donc la structure de groupe abélien qui est déduite par fonctorialité de celle de $\mathscr{M}$. [24] En effet, reprenons les notations de 3.1.2. La structure de X-groupe (abélien) de $T_{X/S}(\mathscr{M})$ est définie par la composée :

$$T_{X/S}(\mathscr{M}) \times_X T_{X/S}(\mathscr{M}) \simeq T_{X/S}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{M}) \xrightarrow{m} T_{X/S}(\mathscr{M}),$$

et d'autre part le morphisme

$$T_{X/S}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\delta} T_{X/S}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{M}) \simeq T_{X/S}(\mathscr{M}) \times_X T_{X/S}(\mathscr{M})$$

(22) N.D.E. : Pour des exemples de S-foncteurs et S-groupes ne vérifiant pas (E), voir 6.2 et 6.3.
(23) N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.
(24) N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

est le morphisme diagonal. Tenant compte de la remarque 3.4.3, on déduit des égalités (†) de 3.1.2 que
$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \qquad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x,$$
pour tout $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$, $x, y \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}', \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{O}(\mathrm{X}')$.

Remarque 3.6.1. — Si X est représentable, auquel cas, d'une part il vérifie (E), d'autre part $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ et $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ sont représentables par des fibrations vectorielles, les lois précédentes sont les mêmes que celles qui se déduisent des structures de fibration vectorielle (cf. I 4.6). [25]

Proposition 3.4. bis. — *Si* X/S *vérifie* (E)*, alors* $\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}'$ *vérifie* (E) *et les isomorphismes de* 3.4 *respectent les structures de* $\mathbf{O}_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}}$*-modules, resp. de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}'}$*-modules.*

Sans commentaires.

53 ***Proposition 3.7***. — *Les foncteurs* $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ *et* $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ *sont fonctoriels en* X*, c.-à-d., si* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ *est un* S*-morphisme, on a des diagrammes commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[r, "\mathrm{T}(f)"] \arrow[d] & \mathrm{T}_{\mathrm{X}'/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[d] \\ \mathrm{X} \arrow[r] & \mathrm{X}' \end{tikzcd} \quad , \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[rr, "\mathrm{L}(f)"] \arrow[dr] & & \mathrm{L}^{f\circ u}_{\mathrm{X}'/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[dl] \\ & \mathrm{S} & \end{tikzcd} \quad .$$

[26] *De plus, si f est un monomorphisme, il en est de même de* $\mathrm{T}(f)$ *et* $\mathrm{L}(f)$.

L'existence de $\mathrm{T}(f)$ et $\mathrm{L}(f)$, ainsi que la dernière assertion, se déduisent immédiatement des définitions. La commutativité des diagrammes résulte alors de la fonctorialité de ces morphismes par rapport à $\mathscr{M}$ et du fait que $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(0) = \mathrm{X}$.

Remarque 3.7.1. — [27] Supposons X et X′ *représentables* et soit r le rang du $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module libre $\mathscr{M}$. Alors, d'après 2.2.2, $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ est isomorphe au produit au-dessus de X de r copies de $\mathbb{V}(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})$, et de même pour $\mathrm{T}_{\mathrm{X}'/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$. Par conséquent, le carré ci-dessus est cartésien lorsque f est une *immersion ouverte*, plus généralement lorsque $f^*(\Omega^1_{\mathrm{X}'/\mathrm{S}}) = \Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$, par exemple si f est *étale* ; sous ces conditions, on a un isomorphisme de S-foncteurs
$$\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^{f\circ u}_{\mathrm{X}'/\mathrm{S}}(\mathscr{M}).$$

[25] N.D.E. : C.-à-d., pour tout S-morphisme $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$, l'action de $\mathbf{O}(\mathrm{X}')$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}', \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$ correspond, via l'identification
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}', \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}}(f^*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}), \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{X}'})$$
à l'action naturelle de $\mathbf{O}(\mathrm{X}')$ sur le terme de droite ; ceci résulte de la démonstration de SGA 1, III 5.1 (voir aussi l'ajout 0.1.8 dans l'Exp. III).

[26] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[27] N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse que X et X′ soient représentables, et l'on a détaillé ce qui suit.

En général, le carré cartésien de 3.7 définit un morphisme de X-foncteurs :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{T}_{\mathrm{X'/S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{X'}} \mathrm{X} \arrow[dl] \\ & \mathrm{X} & \end{tikzcd} .$$

Proposition 3.7. bis. — *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ *un* S-*morphisme ; si* X *et* X′ *vérifient* (E) *par rapport à* S, *alors*

$$\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\mathrm{T}(f)} \mathrm{T}_{\mathrm{X'/S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{X}} \qquad \text{resp.} \quad \mathrm{L}^{u}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\mathrm{L}(f)} \mathrm{L}^{f\circ u}_{\mathrm{X'/S}}(\mathscr{M})$$

est un morphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-*modules* (*resp. de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-*modules*).

Résulte de la proposition 3.7 par fonctorialité en $\mathscr{M}$.

Proposition 3.8. — *Soient* X *et* Y *deux foncteurs au-dessus de* S. *On a des isomorphismes fonctoriels en* $\mathscr{M}$ *:*

$$\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}_{\mathrm{Y/S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{(\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}), \tag{3.8.1}$$

$$\mathrm{L}^{u}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{L}^{v}_{\mathrm{Y/S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^{(u,v)}_{(\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}). \tag{3.8.2}$$

[28] Le premier isomorphisme découle de 1.2 ($*$), le second s'en déduit par le changement de base $(u, v) : \mathrm{S} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$. 54

Remarque 3.8.0. — Remarquons que (3.8.1) peut aussi s'interpréter comme un isomorphisme de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$-foncteurs

$$\big(\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \underset{\mathrm{X}}{\times} (\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y})\big) \underset{\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}}{\times} \big(\mathrm{T}_{\mathrm{Y/S}}(\mathscr{M}) \underset{\mathrm{Y}}{\times} (\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y})\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{(\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}).$$

Corollaire 3.8.1. — *Si* X/S *est muni d'une structure algébrique définie par produits cartésiens finis, alors* $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ *est muni d'une structure de même espèce et la projection* $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{X}$ *est un morphisme de cette espèce de structure.*

Proposition 3.8. bis. — *Si* X/S *et* Y/S *vérifient* (E), *alors* $(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y})/\mathrm{S}$ *vérifie* (E) *et* (3.8.1) (resp. (3.8.2)) *est un isomorphisme de* $\mathbf{O}_{\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}}$-*modules* (*resp.* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-*modules*).

Démonstration. [29] Supposons que X/S et Y/S vérifient (E). Alors, d'après 3.5.1 et (3.8.1), il en est de même de $(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y})/\mathrm{S}$. Montrons que (3.8.1) est un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}}$-modules.

---

[28] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.
[29] N.D.E. : On a ajouté cette démonstration.

Soit $(x,y) : \mathrm{Z} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ un S-morphisme ; tenant compte de 3.4.2, il suffit de voir que l'application

$$\{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{Z}}(\mathscr{M}), \mathrm{X}) \mid \phi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = x\} \times \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{Z}}(\mathscr{M}), \mathrm{Y}) \mid \psi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = y\}$$
$$\longrightarrow \{\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{Z}}(\mathscr{M}), \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}) \mid \theta \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = (x,y)\}$$

qui à (ϕ, ψ) associe $\phi \times \psi$ est un morphisme de $\mathbf{O}(\mathrm{Z})$-modules. Mais ceci est clair, car si $a \in \mathbf{O}(\mathrm{Z})$ alors $a \cdot (\phi, \psi) = (\phi \circ a^*, \psi \circ a^*)$ est envoyé sur

$$(\phi \circ a^*) \times (\psi \circ a^*) = (\phi \times \psi) \circ a^* = a \cdot (\phi \times \psi).$$

De même, en utilisant 3.2.1, on montre que (3.8.2) est un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules.

3.9.0. — [30] Si X est un S-groupe et si $e : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$ désigne sa section unité, on note :

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) = \mathrm{L}^{e}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}),$$

c.-à-d., $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ est défini par le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{S} \arrow[r, "e"] & \mathrm{X}.
\end{tikzcd}$$

D'après le corollaire 3.8.1, la projection $p : \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{X}$ est un morphisme de S-groupes, et il en résulte que $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ est muni d'une structure de S-groupe, et est isomorphe via i au noyau de p.

Si, de plus, X/S vérifie la condition (E), on va voir dans la proposition 3.9 que la structure de S-groupe de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$, induite par celle de X, *coïncide avec la structure de groupe abélien induite par la fonctorialité en* $\mathscr{M}$ (cf. 3.5.1). En fait, ce résultat est valable sous l'hypothèse plus faible que X soit un S-foncteur en monoïdes ou, plus généralement, un S-foncteur en H-ensembles (cf. la définition ci-dessous).

Définitions 3.9.0.1. — a) Introduisons la terminologie suivante : [31] un H-*ensemble* est un ensemble X muni d'une loi de composition à unité bilatère, notée e_{X} ou simplement e. Si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme de H-ensembles, son *noyau* $\mathrm{Ker}\, f$ est $f^{-1}(e_{\mathrm{Y}})$; c'est un sous-H-ensemble de X.

b) Un H-*objet* dans une catégorie $\mathscr{C}$ se définit de la manière habituelle : c'est donc un objet X de $\mathscr{C}$, muni d'un morphisme $\mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tel qu'il existe une section de X (au-dessus de l'objet final) possédant les propriétés d'une unité bilatère. Tout $\mathscr{C}$-monoïde, en particulier tout $\mathscr{C}$-groupe est donc un $\mathscr{C}$-H-objet. En particulier, un H-objet de la catégorie des foncteurs au-dessus du schéma S sera appelé S-H-*foncteur*.

[30] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, afin d'expliquer l'introduction de la notion de S-H-foncteur.
[31] N.D.E. : Ceci est inspiré de la notion de H-espace en topologie.

c) Si X est un S-H-foncteur (par exemple, un S-groupe), et si $e : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$ désigne la section unité de X, on note :

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) = \mathrm{L}^e_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S}).$$

Explicitons alors le cas particulier suivant de 3.8.1. [32]

Corollaire 3.9.0.2. — *Si* X *est un* S-H-*foncteur* (*resp. un* S-*groupe*), *alors* $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ *et* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ *sont aussi des* S-H-*foncteurs* (*resp. des* S-*groupes*) *et l'on a des morphismes de* S-H-*foncteurs* (*resp. de* S-*groupes*) *:*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathrm{X} \quad ,$$

où i est un isomorphisme de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S})(\mathscr{M})$ *sur* $\mathrm{Ker}\, p$ *et s est une section de p.*

55

Proposition 3.9. — *Soit* X *un* S-H-*foncteur vérifiant* (E) *par rapport à* S. *La structure de* S-H-*foncteur de* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ *provenant de celle de* X *coïncide avec la structure de* S-*groupe définie en* 3.5.1.

Il résulte de ce qu'on a dit plus haut que $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ est un H-objet dans la catégorie des $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules. La proposition résultera alors du lemme suivant : [33]

Lemme 3.10. — *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Soit* G *un* H-*objet dans la catégorie des $\mathscr{C}$*-H-*objets ;* G *est donc un $\mathscr{C}$*-H-*objet* (dont nous noterons la loi de composition f : $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$) *muni d'un morphisme de $\mathscr{C}$*-H-*objets* $h : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$. [34] *Alors $f = h$ et f est commutative.*

En prenant les valeurs des foncteurs sur un argument variable, on se ramène à la manière habituelle à vérifier le lemme lorsque $\mathscr{C}$ est la catégorie des ensembles. On a donc un ensemble G et deux applications f, $h : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ telles que

$$h(f(x,y), f(z,t)) = f(h(x,z), h(y,t)).$$

On a d'autre part deux éléments de G, soient e et u, avec $f(e,x) = f(x,e) = x$, $h(u,x) = h(x,u) = x$. On voit d'abord que

$$h(f(u,y), f(x,u)) = f(x,y) = h(f(x,u), f(u,y)).$$

En particulier, pour $y = e$, resp. $x = e$, on obtient, respectivement

$$x = f(x,e) = h(f(u,e), f(x,u)) = h(u, f(x,u)) = f(x,u),$$
$$y = f(e,y) = h(f(e,u), f(u,y)) = h(u, f(u,y)) = f(u,y)$$

d'où en reportant dans l'égalité originelle

$$h(y,x) = f(x,y) = h(x,y).$$

Ceci prouve le lemme, ainsi que la proposition 3.9. On déduit alors de 3.9 les corollaires suivants.

---

(32) N.D.E. : On a ajouté le corollaire 3.9.0.2, qui sera utile en 4.1.

(33) N.D.E. : inspiré par la démonstration standard prouvant que le groupe fondamental d'un H-espace est abélien.

(34) N.D.E. : $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ est muni de la loi $(\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \times (\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \to \mathrm{G} \times \mathrm{G}$, $((x,z),(y,t)) \mapsto (f(x,y), f(z,t))$.

Corollaire 3.9.1. — *Si* X *est un* S-H-*foncteur vérifiant* (E) *par rapport à* S*, tout élément de* $\mathrm{X}(\mathrm{I_S}(\mathscr{M}))$ *qui se projette sur l'élément unité de* X(S) *est inversible.*

Corollaire 3.9.2. — *Si* X *est un* S-*monoïde vérifiant* (E) *par rapport à* S*, un élément de* $\mathrm{X}(\mathrm{I_S}(\mathscr{M}))$ *est inversible si et seulement si son image dans* X(S) *l'est.*

56 ***Corollaire 3.9.3***. — *Si* X *est un* S-*groupe vérifiant* (E) *par rapport à* S*, les deux lois de* S-*groupe sur* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ *coïncident.*

Corollaire 3.9.4. — [35] *Soit* G *un* S-*groupe vérifiant* (E) *par rapport à* S*. Pour* $n \in \mathbb{Z}$*, soit* $n_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ *le morphisme de* S-*foncteurs défini par* $g \mapsto g^n$*. Alors le morphisme dérivé* $\mathrm{L}(n_{\mathrm{G}}) : \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ *est la « multiplication par* n *», i.e. l'application qui à tout* $x \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{S}')$ *associe* $n\,x$*.*

Remarquons d'abord que n_{G} n'est pas en général un morphisme de groupes, mais il préserve la section unité $e : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ donc le morphisme dérivé $\mathrm{L}(n_{\mathrm{G}})$ envoie bien $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) = \mathrm{L}^e_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ dans lui-même. Si l'on note i l'inclusion $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) \hookrightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}$, alors $\mathrm{L}(n_{\mathrm{G}})$ est défini par l'égalité $i(\mathrm{L}(n_{\mathrm{G}})(x)) = i(x)^n$, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{S}')$. Or, d'après 3.9, les deux lois de groupes sur $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ (provenant de la condition (E) et provenant de la loi de G) coïncident, i.e. on a $i(x)^n = i(n\,x)$, d'où $\mathrm{L}(n_{\mathrm{G}})(x) = n\,x$.

Avant de tirer d'autres conséquences de la proposition 3.9, démontrons un autre résultat de fonctorialité :

Proposition 3.11. — *Dans la situation de la section* 1*, on a un isomorphisme fonctoriel en* $\mathscr{M}$

$$\mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M})).$$

En effet, on a par définition (cf. 3.1) :

$$\mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I_S}(\mathscr{M}), \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})).$$

D'après l'isomorphisme (4) de 1.1, appliqué à $\mathrm{T} = \mathrm{I_S}(\mathscr{M})$, on a :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I_S}(\mathscr{M}), \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{I_S}(\mathscr{M}), \mathrm{Y})).$$

Tenant compte de l'isomorphisme $\mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{I_S}(\mathscr{M}) \simeq \mathrm{I_Z}(\mathscr{M})$, ceci donne

$$\mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{I_Z}(\mathscr{M}), \mathrm{Y})) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M})).$$

Corollaire 3.11.1. — *Si* Y/Z *vérifie* (E)*, alors* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})/\mathrm{S}$ *vérifie* (E) *et l'isomorphisme de* 3.11 *respecte les structures de* **O**-*modules au-dessus de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$*.* [36]

---

[35] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire, qui amplifie la remarque 4.1.1.2 plus loin.

[36] N.D.E. : Posant $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ ceci entraîne, en particulier, que $\mathrm{T}_{\mathrm{H}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ est muni d'une structure naturelle de module sur $\prod_{\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}/\mathrm{H}} \mathbf{O}_{\mathrm{H}}$. Ce résultat a paru un peu surprenant aux éditeurs ; pour cette raison on en a détaillé la démonstration.

Démonstration. Soient $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ deux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules libres de type fini. Si Y/Z vérifie (E), alors

$$\mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \simeq \mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{M}) \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{N}).$$

Le terme de droite est un sous-foncteur de $\mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{N})$ et via l'isomorphisme de 1.2 (∗), on obtient un isomorphisme

$$\begin{aligned}&\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N})) \simeq \\ &\qquad\qquad \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{M})) \underset{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{\times} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{N})).\end{aligned}$$

Combiné avec 3.11, ceci entraîne :

$$\mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \simeq \mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \underset{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{\times} \mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{N}),$$

donc $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ vérifie (E) par rapport à S. Ceci prouve la première assertion du corollaire.

Voyons la seconde. Notons $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et donnons-nous un S-morphisme $\Delta : \mathrm{H}' \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, c.-à-d., un Z-morphisme $\delta : \mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, qui fait donc de $\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ un Y-objet.

D'une part, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}', \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{M}))) & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}', \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{M}))) \\
\| & & \| \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{M})) & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{M})) \\
\| & & \| \\
\{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}}(\mathscr{M}), \mathrm{Y}) \mid \psi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = \delta\} & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}}(\mathscr{M}), \mathrm{Y})\,.
\end{array}$$

D'après 1.3, l'action de $\alpha \in \mathbf{O}(\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X})$ sur $\Psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{M}))$ est donnée par : pour tout $\mathrm{U} \to \mathrm{S}$ et $(h, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X})$ (U étant alors au-dessus de Y via $\delta \circ (h, x)$), on a :

$$(\alpha\Psi)(h, x) = \alpha(h, x)\Psi(h, x),$$

où $\alpha(h, x) \in \mathbf{O}(\mathrm{U})$ agit sur $\Psi(h, x) \in \mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{M})(\mathrm{U})$ via la structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{Y}}$-module de $\mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{M})$. D'après 3.4.2, cette dernière est donnée, via l'identification

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y/Z}}(\mathscr{M})) = \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}}(\mathscr{M}), \mathrm{Y}) \mid \psi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = \delta\},$$

par : pour tout $(m, h, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X})$,

$$(1) \qquad (\alpha\psi)(m, h, x) = \psi(m \cdot \alpha(h, x), h, x).$$

D'autre part, considérons l'espace tangent $\mathrm{T}_{\mathrm{H}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}), \mathrm{H})$; on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}', \mathrm{T}_{\mathrm{H}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}', \mathrm{T}_{\mathrm{H}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})) \arrow[d, equal] \\
\{\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}'}(\mathscr{M}), \mathrm{H}) \mid \Phi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = \Delta\} \arrow[r, hook] \arrow[d, equal, "(*)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}'}(\mathscr{M}), \mathrm{H}) \arrow[d, equal] \\
\{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}}(\mathscr{M}), \mathrm{Y}) \mid \phi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = \delta\} \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}}(\mathscr{M}), \mathrm{Y}) ,
\end{tikzcd}$$

où la bijection $(*)$ est donnée comme suit (cf. 1.1 (2) et I 1.7.1) : pour tout $\mathrm{U} \to \mathrm{S}$ et $(m, h, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X})$ (de sorte que U est au-dessus de Z via $\mathrm{U} \xrightarrow{x} \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$), on a $\Phi(m, h) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U}, \mathrm{Y})$ et

$$(\dagger) \qquad \phi(m, h, x) = \Phi(m, h) \circ (x \times \mathrm{id}_{\mathrm{U}}) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{U}, \mathrm{Y}).$$

D'après 3.4.2 (où l'on remplace X par $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et X′ par H′), l'action de $a \in \mathbf{O}(\mathrm{H}')$ sur $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}'}(\mathscr{M}), \mathrm{H})$ est donnée par : pour tout $\mathrm{U} \to \mathrm{S}$ et $(m, h) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}')$,

$$(a\Phi)(m, h) = \Phi(m \cdot a(h), h).$$

Par conséquent, si ϕ (resp. $a\phi$) est l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}}(\mathscr{M}), \mathrm{Y})$ associé à Φ (resp. $a\Phi$), on a, d'après (†),

$$(2) \qquad (a\phi)(m, h, x) = \Phi(m \cdot a(h), h) \circ (x \times \mathrm{id}_{\mathrm{U}}) = \phi(m \cdot a(h), h, x).$$

Joint à (1), ceci montre que l'isomorphisme $\mathrm{T}_{\mathrm{H}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M}))$ de 3.11.1 est un isomorphisme de $\mathbf{O}(\mathrm{H})$-modules ; de plus, pour tout $\mathrm{H}' \to \mathrm{H}$, la structure de $\mathbf{O}(\mathrm{H}')$-module de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}', \mathrm{T}_{\mathrm{H}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$ s'étend, de façon fonctorielle en H′, en une structure de $\mathbf{O}(\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X})$-module.

En particulier, pour Z = S, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.11.2. — *On a un isomorphisme fonctoriel en* $\mathscr{M}$

$$\mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})).$$

De plus, si Y/S *vérifie* (E)*, alors* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})/\mathrm{S}$ *vérifie* (E) *et l'isomorphisme précédent respecte les structures de* $\mathbf{O}$*-modules au-dessus de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

(37) Soit $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un S-morphisme ; on l'identifie au morphisme constant $\mathbf{u} : \mathrm{S} \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ tel que $\mathbf{u}(f) = u$ pour tout $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. On voit alors aussitôt que le produit fibré de $\mathbf{u}$ et de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ s'identifie à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$, où X est au-dessus de Y via u. Par conséquent, on déduit de la définition de $\mathrm{L}^{\mathbf{u}}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ et du corollaire précédent le :

(37) N.D.E. : On a ajouté les phrases qui suivent.

Corollaire 3.11.3. — *Soit* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* S*-morphisme. On a un isomorphisme fonctoriel en* $\mathscr{M}$ *(où dans le terme de droite* X *est au-dessus de* Y *via* u*) :*

$$\mathrm{L}^{\mathbf{u}}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})).$$

[(38)] *C'est un isomorphisme de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules si* Y/S *vérifie* (E).

En particulier, pour $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$, $\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})$ est un S-foncteur en monoïdes, donc *a fortiori* un S-H-foncteur ; rappelant que $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ désigne $\mathrm{L}^{e}_{\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$, où e est la section unité (cf. 3.9.0.1), on obtient :

Corollaire 3.11.4. — *On a un isomorphisme fonctoriel en* $\mathscr{M}$ 57

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M});$$

[(38)] *c'est un isomorphisme de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules si* Y/S *vérifie* (E).

Remarque 3.11.5. — [(39)] Supposons que X/S vérifie (E). Alors $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$ est muni d'une structure de $(\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathbf{O}_{\mathrm{X}})$-module, i.e. pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$,

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))(\mathrm{S}') = \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}, \mathrm{X}) \mid \psi \circ (\varepsilon_{\mathscr{M}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{X}}) = \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}\}$$

est muni d'une structure de $\mathbf{O}(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}')$-module, fonctorielle en S'. Ceci résulte, au choix, de 3.6 et des propriétés du foncteur $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ (cf. 1.2), ou bien de la démonstration de 3.11.1.

Nous allons maintenant interpréter géométriquement la définition du fibré tangent. [(40)] Soit U un S-foncteur ; d'après I 1.7.2, on a des isomorphismes fonctoriels en $\mathscr{M}$

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{U}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}), \mathrm{X})) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}), \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{X}))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}(\mathrm{U}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}, \mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}).\end{aligned}$$

En particulier, le morphisme $\mathscr{M} \to 0$ donne un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\pi_{\mathscr{M}}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}(\mathrm{U}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}, \mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{X}) \arrow[r, "\text{identité}"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{X})
\end{tikzcd} ,$$

où la seconde flèche verticale est obtenue par le changement de base $\varepsilon_{\mathscr{M}} : \mathrm{S} \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$. [(41)]

En conséquence :

[(38)] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[(39)] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

[(40)] N.D.E. : On a simplifié l'original dans ce qui suit.

[(41)] N.D.E. : via l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}(\mathrm{U}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}, \mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}), \mathrm{X})$, ceci équivaut à la remarque 3.1.1. De même, 3.12 équivaut à la première partie de la remarque 3.4.2.

Proposition 3.12. — *Soit* $h_0 : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ *un* S*-morphisme. Alors* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U}, \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$ *s'identifie à l'ensemble des* $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$*-morphismes de* $\mathrm{U}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ *dans* $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ *qui se restreignent à* h_0 *sur* U *(vu comme sous-objet de* $\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ *via* $\mathrm{id}_{\mathrm{U}} \times_{\mathrm{S}} \varepsilon_{\mathscr{M}}$*).*

(42) En particulier, pour $\mathrm{U} = \mathrm{X}$ et $h_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$, on obtient le

Corollaire 3.12.1. — *L'ensemble* $\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})/\mathrm{X})$ *s'identifie à l'ensemble des* $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$*-endomorphismes* ϕ *de* $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ *qui induisent l'identité sur* X*, i.e. tels que le diagramme ci-dessous soit commutatif :* (43)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{M}) \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{M}) \\ \mathrm{X} \arrow[u, "\varepsilon_{\mathscr{M}}"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathrm{X}. \arrow[u, "\varepsilon_{\mathscr{M}}"'] \end{tikzcd}$$

(44) D'autre part, d'après 3.11.2, $\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})/\mathrm{X}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S})$; si de
58 plus X/S vérifie (E) alors $\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}$ vérifie (E), donc $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ est un $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module, d'après 3.6 (et en fait un $(\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathbf{O}_{\mathrm{X}})$-module, d'après 3.11.5). Appliquant 3.9 on en déduit la

Proposition 3.13. — *Si* X/S *vérifie* (E)*, le groupe abélien* $\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})/\mathrm{X})$ *s'identifie à l'ensemble des* $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$*-endomorphismes de* $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ *qui induisent l'identité sur* X*. Par conséquent, tout* $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$*-endomorphisme de* $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ *qui induit l'identité sur* X *est un automorphisme.*

Corollaire 3.13.1. — *Soit* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* S*-isomorphisme,* Y/S *vérifiant* (E)*. Tout* $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$*-morphisme de* $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ *dans* $\mathrm{Y}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ *qui prolonge* u *est un isomorphisme.*

Corollaire 3.13.2. — *Si* Y/S *vérifie* (E)*, alors le monomorphisme* $\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *induit, pour tout* $u \in \mathrm{Isom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$*, un isomorphisme*

$$\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}).$$

(45) *Démonstration.* Il faut voir que $\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}') \to \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}')$ est une bijection, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Par changement de base (cf. 3.4), il suffit de le faire pour $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$. Dans ce cas, $\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S})$ (resp. $\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S})$) est l'ensemble des $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$-morphismes (resp. automorphismes) $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})} \to \mathrm{Y}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ qui prolongent u, et l'on applique le corollaire précédent.

---

(42) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
(43) N.D.E. : Lorsque $\mathscr{M} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}$, ceux-ci sont appelés « endomorphismes infinitésimaux » de X ; voir 6.2 à la fin de cet exposé.
(44) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
(45) N.D.E. : On a ajouté la démonstration qui suit.

Corollaire 3.13.3. — *Si* X/S *vérifie* (E), *le monomorphisme* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}) \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})$ *induit, pour tout* $u \in \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})$, *un isomorphisme* $\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$. *En particulier, on a*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}),$$

[46] *de sorte que* $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ *est muni d'une structure de* $(\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathbf{O}_{\mathrm{X}})$*-module.*

3.14. Supposons pour terminer X *représentable.* [47] Dans ce cas, on a vu en 2.2.2 que le X-foncteur $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ est représentable par $\mathbb{V}(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})$, d'où des bijections :

$$\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}/\mathrm{X}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \simeq \mathrm{Dér}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}).$$

Ceci se déduit aussi de ce qui précède, comme suit. D'après 3.13, $\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}/\mathrm{X})$ s'identifie à l'ensemble des endomorphismes infinitésimaux de X (i.e. des I_{S}-endomorphismes de $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}}$ induisant l'identité sur X). Or X et $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}}$ ont le même espace topologique sous-jacent, les faisceaux d'anneaux correspondants étant $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ et $\mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \oplus \mathscr{M}$, où $\mathscr{M} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ est considéré comme idéal de carré nul. Notant $\pi : \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-algèbres qui s'annule sur $\mathscr{M}$, on en déduit que se donner un endomorphisme infinitésimal de X équivaut à se donner un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres $\phi : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}$ tel que $\pi \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}$, ce qui équivaut à se donner une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-dérivation du faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$.

De plus, on voit facilement que si $\mathrm{D}, \mathrm{D}' \in \mathrm{Dér}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ et si l'on note ϕ_{D} l'endomorphisme infinitésimal correspondant à D, alors

$$\phi_{\mathrm{D}+\mathrm{D}'} = \phi_{\mathrm{D}} \circ \phi_{\mathrm{D}'}.$$

Ceci montre que l'identification

$$\{\text{endomorphismes infinitésimaux de X}\} \simeq \mathrm{Dér}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$$

est un isomorphisme de groupes abéliens. Tenant compte de 3.13 (et 3.11.5), on a donc fabriqué un isomorphisme de groupes abéliens (et même de $\mathbf{O}(\mathrm{X})$-modules) **59**

$$\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}/\mathrm{X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$$

ce qui redonne l'interprétation classique des champs de vecteurs tangents en termes de dérivations du faisceau structural. [48] Remarquons d'ailleurs que $\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}/\mathrm{X})$ est égal à $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathfrak{g}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})$, où $\mathfrak{g}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ est le dual de $\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$.

[46] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

[47] N.D.E. : On a ajouté le rappel de 2.2.2, et détaillé la suite.

[48] N.D.E. : De plus, cet isomorphisme est fonctoriel en S : si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, posant $\mathrm{X}' = \mathrm{X}_{\mathrm{S}'}$, on a $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S})(\mathrm{S}') \simeq \Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X}'/\mathrm{S}'}/\mathrm{X}') \simeq \mathrm{Dér}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}'})$.

4. Espace tangent à un groupe – Algèbres de Lie

4.1. Soit G un foncteur en groupes au-dessus de S. D'après 3.9.0.2, $\mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M})$ et $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$ sont munis de structures de groupes au-dessus de S et l'on a des morphismes de groupes

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M}) \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathrm{G} \quad ;$$

par définition i est un isomorphisme de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathscr{M})$ sur le noyau de p et s est une section de p. Il résulte alors de I 2.3.7 que cette suite de morphismes permet d'identifier $\mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M})$ au produit semi-direct de G par $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$.

Définition 4.1.A. — [49] L'opération correspondante de G sur $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$ est notée

$$\mathrm{Ad}: \quad \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}))$$

et appelée *représentation adjointe* (relativement à $\mathscr{M}$) de G ; on a donc par définition, pour $x \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ et $\mathrm{X} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}')$:

$$\mathrm{Ad}(x)\mathrm{X} = i^{-1}(s(x)i(\mathrm{X})s(x)^{-1}).$$

Si G est commutatif, alors $\mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M})$ l'est aussi et $\mathrm{Ad}(x)\mathrm{X} = \mathrm{X}$.

Définition 4.1.B. — [49] Si G et H sont deux foncteurs en groupes au-dessus de S et si $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est un morphisme de groupes, il s'en déduit par fonctorialité un morphisme de suites exactes compatible avec les sections canoniques :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{L}(f)"'] & \mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{T}(f)"'] & \mathrm{G} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{H/S}, \mathscr{M}) \arrow[r] & \mathrm{T}_{\mathrm{H/S}}(\mathscr{M}) \arrow[r] & \mathrm{H} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \quad ;$$

60 $\mathrm{L}(f)$ que l'on notera également $\underline{\mathrm{Lie}}(f)$ est le *morphisme dérivé de* f. [50]

Remarque 4.1.C. — [51] Si G/S et H/S vérifient (E), alors $\mathrm{L}(f)$ respecte les structures de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules déduites de la « fonctorialité en $\mathscr{M}$ » (cf. 3.6).

Proposition 4.1.1. — *Soit* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$. *Alors* $\mathrm{Ad}(g) : \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}) \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$ *est le morphisme dérivé de* $\mathrm{Int}(g) : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$.

En effet $\mathrm{Ad}(g)\mathrm{X} = i^{-1}(\mathrm{Int}(g)i(\mathrm{X}))$, ce qui n'est autre que $\mathrm{L}(\mathrm{Int}(g))(\mathrm{X})$ par la définition même du morphisme dérivé.

Supposons que G/S vérifie (E). Alors, d'après la proposition 3.9, la structure de groupe de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$ définie comme plus haut n'est autre que la structure induite par sa structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module (définie grâce à (E)). On déduit alors de la proposition précédente et de la fonctorialité de l'opération de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$ (cf. 3.6) le corollaire :

[49] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.1.A et 4.1.B pour mettre en évidence ces définitions.
[50] N.D.E. : Si f est un monomorphisme, il en est de même de $\mathrm{L}(f)$ et $\mathrm{T}(f)$, cf. 3.7.
[51] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

Corollaire 4.1.1.1. — *Supposons que* G/S *vérifie* (E). *Alors,* Ad *envoie* G *dans le sous-groupe*

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}))$$

de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}))$, *c.-à-d., pour tout* $g \in \mathrm{G(S')}$, $\mathrm{Ad}(g)$ *respecte la structure de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S'}}$*-module de* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G'/S'}, \mathscr{M})$ (*où* $\mathrm{G'} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S'}$). *Autrement dit,* Ad *est une* représentation linéaire (cf. I, 3.2) *de* G *dans le* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$.

Remarques 4.1.1.2. — a) Pour que G/S vérifie (E), il faut et il suffit que pour tout couple $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules libres de type fini, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}) \arrow[dr] & & \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{N}) \arrow[dl] \\
& \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, 0) = \mathrm{S} & ,
\end{tikzcd}$$

obtenu en appliquant le foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\ \ )$ au diagramme $(*)$ de 2.1, soit cartésien.

b) Supposons que G/S vérifie (E). Alors le morphisme dérivé de la loi de groupe
$\pi : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ n'est autre que la loi d'addition dans $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$. (N. B. π n'est **61**
pas un morphisme de groupes mais $\pi(e, e) = e$, donc le morphisme dérivé $\mathrm{L}(\pi)$ envoie $\mathrm{T}^{(e,e)}_{(\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$ dans $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$, cf. 3.7 et 3.8.) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on montre de même que si l'on note $n_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ le morphisme de S-foncteurs défini par $g \mapsto g^n$, alors le morphisme dérivé $\mathrm{L}(n_{\mathrm{G}})$ est la multiplication par n sur $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$, cf. 3.9.4.

4.1.2.0. — [52] Considérons maintenant le S-foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{G/S}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M}))$; pour tout $\mathrm{S'} \to \mathrm{S}$, on a $\mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{S'}} \simeq \mathrm{T}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S'}}/\mathrm{S'}}(\mathscr{M})$ (cf. 3.4) et donc :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{G/S}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M}))(\mathrm{S'}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S'}}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S'}}, \mathrm{T}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S'}}/\mathrm{S'}}(\mathscr{M})) = \Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S'}}/\mathrm{S'}}(\mathscr{M})/\mathrm{G}_{\mathrm{S'}}).$$

Notons d'abord que l'on a un isomorphisme, fonctoriel en S′,

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{S'}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S'}}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S'}}/\mathrm{S'}, \mathscr{M})) \xrightarrow{\ \sim\ } \Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S'}}/\mathrm{S'}}(\mathscr{M})/\mathrm{G}_{\mathrm{S'}})$$

qui associe à tout $f : \mathrm{G}_{\mathrm{S'}} \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S'}}/\mathrm{S'}, \mathscr{M})$ la section $s_f : \mathrm{G}_{\mathrm{S'}} \to \mathrm{T}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S'}}/\mathrm{S'}}(\mathscr{M})$ telle que, pour tout $\mathrm{S''} \to \mathrm{S'}$ et $g \in \mathrm{G(S'')}$:

$$s_f(g) = i(f(g))\, s(g).$$

[52] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, pour faire voir l'action de G sur les *foncteurs* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{G/S}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M}))$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}))$.

Soit h un automorphisme du foncteur $G_{S'}$ au-dessus de S', ne respectant pas nécessairement la structure de groupe. À toute section τ de $T_{G_{S'}/S'}(\mathscr{M})$, on peut associer $h(\tau)$ définie par transport de structure : c'est par exemple la seule section de $T_{G_{S'}/S'}(\mathscr{M})$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} G_{S'} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "h"'] & T_{G_{S'}/S'}(\mathscr{M}) \arrow[d, "T(h)"] \\ G_{S'} \arrow[r, "h(\tau)"] & T_{G_{S'}/S'}(\mathscr{M}) \end{tikzcd} .$$

En particulier, prenons pour h la translation à droite t_x par un élément x de $G(S')$, c.-à-d., $h(g) = t_x(g) = g \cdot x$, pour tout $g \in G(S'')$, $S'' \to S'$. Alors, on a immédiatement

$$t_x(s_f) = s_{t_x(f)}$$

où $t_x(f)$ désigne le morphisme de $G_{S'}$ dans $\underline{\mathrm{Lie}}(G_{S'}/S', \mathscr{M})$ défini par

$$t_x(f)(g) = f(g \cdot x^{-1}).$$

pour tout $g \in G(S'')$, $S' \to S'$.

62 Il en résulte que si l'on fait opérer G par translations à droite dans

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{G/S}(G, T_{G/S}(\mathscr{M})) \qquad \text{et} \qquad \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \underline{\mathrm{Lie}}(G/S, \mathscr{M}))$$

de la façon suivante : pour tout $S' \to S$, $x \in G(S')$, $\sigma \in \Gamma(T_{G_{S'}/S'}(\mathscr{M})/G_{S'})$ et $f \in \mathrm{Hom}_{S'}(G_{S'}, \underline{\mathrm{Lie}}(G_{S'}/S', \mathscr{M}))$,

$$(\sigma \cdot x)(g) = \sigma(g \cdot x^{-1}) \cdot s(x) \qquad \text{et} \qquad (f \cdot x)(g) = f(g \cdot x^{-1}),$$

pour tout $g \in G(S'')$, $S'' \to S'$, alors l'isomorphisme $(*)$ plus haut respecte les opérations de G.

En particulier, par cet isomorphisme, les éléments de $\underline{\mathrm{Hom}}_{G/S}(G, T_{G/S}(\mathscr{M}))^G(S')$ correspondent aux morphismes *constants* de $G_{S'}$ dans $\underline{\mathrm{Lie}}(G_{S'}/S', \mathscr{M})$ (i.e. se factorisant par la projection $G_{S'} \to S'$) ou encore aux éléments de $\underline{\mathrm{Lie}}(G_{S'}/S', \mathscr{M})(S') = \underline{\mathrm{Lie}}(G/S, \mathscr{M})(S')$.

Terminologie. — Les éléments de $\underline{\mathrm{Hom}}_{G/S}(G, T_{G/S}(\mathscr{M}))^G(S')$ seront appelés « sections de $T_{G_{S'}/S'}(\mathscr{M})$ *invariantes par translation à droite* ».

On obtient alors la :

Proposition 4.1.2. — (*) *L'application* $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S, \mathscr{M})(S) \to \Gamma(T_{G/S}(\mathscr{M})/G)$ *qui associe à* $X \in \underline{\mathrm{Lie}}(G/S, \mathscr{M})(S)$ *la section* $x \mapsto X \cdot x$ *est une bijection de* $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S, \mathscr{M})(S)$ *sur la partie de* $\Gamma(T_{G/S}(\mathscr{M})/G)$ *formée des sections invariantes par translation à droite.*

(*) Les énoncés 4.1.2, 4.1.3 et 4.1.4 s'obtiennent plus simplement en remarquant que les automorphismes de G invariants par translations à droite sont les translations à gauche. [53]

[53] N.D.E. : voir par exemple la démonstration des propositions 4.6 et 2.5 de [**DG70**], § II.4.

De même, on fait agir G à droite sur $\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{I_S}(\mathscr{M})/\mathrm{S}}(\mathrm{G}_{\mathrm{I_S}(\mathscr{M})})$ comme suit : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $x \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ et $u \in \underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{I_S}(\mathscr{M})/\mathrm{S}}(\mathrm{G}_{\mathrm{I_S}(\mathscr{M})})(\mathrm{S}') = \mathrm{End}_{\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M})}(\mathrm{G}_{\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M})})$,

$$(u \cdot x)(g) = u(g \cdot x^{-1}) \cdot x,$$

pour tout $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}'')$, $\mathrm{S}'' \to \mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M})$. Alors le morphisme de 3.12.1

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{G/S}}(\mathrm{G}, \mathrm{T_{G/S}}(\mathscr{M})) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{I_S}(\mathscr{M})/\mathrm{S}}(\mathrm{G}_{\mathrm{I_S}(\mathscr{M})})$$

respecte les opérations de G et induit donc pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ une bijection entre $\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{G_{S'}/S'}}(\mathscr{M})/\mathrm{G_{S'}})$ et l'ensemble des $\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M})$-endomorphismes u de $\mathrm{G}_{\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M})}$ qui induisent l'identité sur G et qui « *commutent aux translations à droite* », i.e. qui vérifient $u_{\mathrm{S}''} \cdot x = u_{\mathrm{S}''}$ pour tout $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$ et $x \in \mathrm{G}(\mathrm{S}'')$. On obtient donc :

Proposition 4.1.3. — (*) *Il existe une bijection fonctorielle en* G *entre l'ensemble* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})(\mathrm{S})$ *et l'ensemble des* $\mathrm{I_S}(\mathscr{M})$*-endomorphismes de* $\mathrm{G}_{\mathrm{I_S}}(\mathscr{M})$ *induisant l'identité sur* G *et* commutant aux translations à droite *de* G (au sens indiqué plus haut).

Tenant maintenant compte de 3.13 :

Théorème 4.1.4. — (*) *Soit* G *un* S*-foncteur en groupes ; supposons que* G/S vérifie (E)*. Alors le groupe* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})(\mathrm{S})$ *s'identifie, fonctoriellement en* G*, au groupe des* $\mathrm{I_S}(\mathscr{M})$*-automorphismes de* $\mathrm{G}_{\mathrm{I_S}(\mathscr{M})}$ *induisant l'identité sur* G *et* commutant aux translations à droite *de* G (au sens indiqué plus haut).

On retrouve ainsi (dans le cas $\mathscr{M} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$) une des définitions classiques de l'algèbre de Lie d'un groupe.

4.2.0. — [54] Avant d'aller plus loin, établissons de nouveaux corollaires à 3.11. Soient X, Y au-dessus de Z, Z au-dessus de S, comme dans la section 1. Comme on l'a vu en 3.11, les isomorphismes 1.1 (4) :

(1)
$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I_S}(\mathscr{M}), \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{I_Z}(\mathscr{M}),\mathrm{Y})) \\
& \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}} \mathrm{I_S}(\mathscr{M}),\mathrm{Y}) \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

induisent l'isomorphisme θ ci-dessous

(2)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}(\mathscr{M}) \arrow[rr, "\theta", "\sim"'] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T_{Y/Z}}(\mathscr{M})) \\
& \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}} \mathrm{I_S}(\mathscr{M}),\mathrm{Y}) \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$
.

[54] N.D.E. : On a ajouté le paragraphe 4.2.0, dont les résultats sont utilisés de façon implicite en 4.2 et 4.7 de l'original.

D'après 1.3, si Y est un Z-groupe, il en est de même de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{V},\mathrm{Y})$ pour tout $\mathrm{V} \to \mathrm{Z}$ (en particulier pour $\mathrm{V} = \mathrm{I}_{\mathrm{Z}}(\mathscr{M})$) ; explicitement, si $\mathrm{Z}'' \to \mathrm{Z}' \to \mathrm{Z}$ et $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{V}_{\mathrm{Z}'}, \mathrm{Y})$, alors $\phi \cdot \psi$ est défini par $(\phi \cdot \psi)(v) = \phi(v)\psi(v)$, pour tout $v \in \mathrm{V}_{\mathrm{Z}'}(\mathrm{Z}'')$.

Supposons maintenant que X et Y soient des Z-groupes et posons la définition suivante.

Définition 4.2.0.1. — Soit $\underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathrm{Z}/\mathrm{S})\text{-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ le sous-foncteur de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ défini par : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$,

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathrm{Z}/\mathrm{S})\text{-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})(\mathrm{S}') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}_{\mathrm{S}'}\text{-gr.}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{Y}_{\mathrm{S}'}). \tag{3}$$

Cette définition s'applique également lorsqu'on remplace Y par le Z-groupe $\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M})$.

On voit alors facilement que $\mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathrm{Z}/\mathrm{S})\text{-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}')$ correspond, dans les isomorphismes (2) précédents, aux $\mathrm{Z}_{\mathrm{S}'}$-morphismes

$$\phi : \mathrm{X}_{\mathrm{S}'} \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{Y}_{\mathrm{S}'}$$

qui sont « multiplicatifs en X », c.-à-d., qui vérifient $\phi(x_1x_2, m) = \phi(x_1, m)\phi(x_2, m)$, et ceux-ci correspondent aux morphismes de $\mathrm{Z}_{\mathrm{S}'}$-groupes $\mathrm{X}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M})_{\mathrm{S}'}$. On a donc obtenu :

Proposition 4.2.0.2. — *Soient* X, Y *des* Z*-groupes,* Z *au-dessus de* S*. On a des isomorphismes de* S*-foncteurs, fonctoriels en* $\mathscr{M}$ *:*

$$\mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathrm{Z}/\mathrm{S})\text{-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathrm{Z}/\mathrm{S})\text{-gr.}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M})).$$

En particulier, pour Z = S, on obtient le corollaire suivant. Avant de l'énoncer, remarquons que si Y est un S-groupe commutatif, il en est de même de $\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$, puis de $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$, et enfin de $\mathrm{T}_{\mathrm{H}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$.

Corollaire 4.2.0.3. — *Soient* X, Y *des* S*-groupes. On a des isomorphismes de* S*-foncteurs, fonctoriels en* $\mathscr{M}$ *:*

$$\mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})).$$

Si Y *est commutatif, ce sont de plus des isomorphismes de* S*-groupes abéliens.*

Définition 4.2.0.4. — [55] Si Y est un $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module, le foncteur $\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ (resp. $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$) est muni d'une structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module déduite de celle de Y. Muni de cette structure, on le notera $\mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ (resp. $\underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$).

Par conséquent, si X, Y sont des $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules, alors $\mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}), \mathrm{Y})$ et $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, puis $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$ et $\mathrm{T}'_{\mathrm{H}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$, sont munis d'une structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module, et l'on obtient le :

[55] N.D.E. : On a inséré ici cette définition, qui dans l'original apparaissait en 4.3.

Corollaire 4.2.0.5. — *Si* X, Y *sont des* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules, on a des isomorphismes de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules, fonctoriels en* $\mathscr{M}$ *:*

$$\mathrm{T}'_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})).$$

Définition 4.2.A. — [56] Soient X, L des S-groupes, X opérant sur L par automorphismes de groupes (cf. I 2.3.5). On définit le sous-foncteur $\underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{L})$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{L})$ comme suit : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$,

$$\underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{L})(\mathrm{S}') = \left\{ \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}, \mathrm{L}_{\mathrm{S}'}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi(x_1x_2) = \phi(x_1)(x_1 \cdot \phi(x_2)), \\ \text{pour tout } x_1, x_2 \in \mathrm{X}(\mathrm{S}''), \ \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}' \end{array} \right\}.$$

On l'appelle le « foncteur des homomorphismes croisés de X dans L ».

Remarque 4.2.B. — [56] a) Si L' est un second S-groupe sur lequel X opère par automorphismes de groupes, on a

$$\underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{L} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{L}') \simeq \underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{L}) \times_{\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{L}').$$

b) Si L est un G-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module, $\underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{L})$ coïncide avec le noyau de la différentielle $\partial : \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{L}) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}^2, \mathrm{L})$ définie en I 5.1 ; en particulier, $\underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{L})$ est dans ce cas un $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module.

4.2. Soit $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de S-groupes ; alors $\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ se décrit comme suit. D'abord, on a vu en 3.11.3 que l'on a un isomorphisme de S-foncteurs, fonctoriel en $\mathscr{M}$: 63

$$(\dagger) \qquad \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})).$$

D'autre part, comme Y est un S-groupe ; on a alors

$$\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \cdot \mathrm{Y} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})_{\mathrm{Y}} ;$$

il en résulte un isomorphisme de S-foncteurs, fonctoriel en $\mathscr{M}$:

$$\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})).$$

Pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, notons $u' : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ le morphisme déduit de u par changement de base. Considérons le S-foncteur défini comme suit : [57] pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$,

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathrm{Y}/\mathrm{S})\text{-gr.}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \cdot \mathrm{Y})(\mathrm{S}') &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Y}'\text{-gr.}}(\mathrm{X}', (\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \cdot \mathrm{Y})_{\mathrm{S}'}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Y}'\text{-gr.}}(\mathrm{X}', \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}'/\mathrm{S}', \mathscr{M}) \cdot \mathrm{Y}'). \end{aligned}$$

Alors on voit facilement que l'isomorphisme $(\dagger)$ induit un isomorphisme

$$(\dagger') \qquad \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathrm{Y}/\mathrm{S})\text{-gr.}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \cdot \mathrm{Y}).$$

D'autre part, le morphisme

$$\mathrm{X} \xrightarrow{\ u\ } \mathrm{Y} \xrightarrow{\ \mathrm{Ad}\ } \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}))$$

[56] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit ; en particulier, on a ajouté la définition 4.2.A et la remarque 4.2.B.

[57] N.D.E. : C'est la définition 4.2.0.1 appliquée à $\mathrm{Z} = \mathrm{Y}$ et aux Y-groupes $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et $\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$.

définit une opération de X sur $\mathrm{L} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ par automorphismes de groupes.

Si $\Phi \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \cdot \mathrm{Y})$ alors, pour tout $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$, on peut écrire de façon unique

$$\Phi(\mathrm{S}')(x) = \phi(\mathrm{S}')(x) \cdot u'(x), \qquad \text{où} \quad \phi(\mathrm{S}')(x) \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}'/\mathrm{S}', \mathscr{M})(\mathrm{S}'');$$

ceci détermine un élément ϕ de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}))$. Alors $\Phi(\mathrm{S}')$ est un morphisme de groupes si, et seulement si, pour tout $x_1, x_2 \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$ on a :

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{S}')(x_1x_2) &= \phi(\mathrm{S}')(x_1)\,\big(u(x_1)\,\phi(\mathrm{S}')(x_2)\,u(x_1)^{-1}\big)\\ &= \phi(\mathrm{S}')(x_1)\,(x_1 \cdot \phi(\mathrm{S}')(x_2)),\end{aligned}$$

c.-à-d., si et seulement si $\phi \in \underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}))$. On a donc obtenu la :

Proposition 4.2. — *Soit $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de* S*-groupes. On a un isomorphisme de* S*-foncteurs, fonctoriel en $\mathscr{M}$:*

$$\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})).$$

(58) Supposons de plus que Y/S vérifie (E). Alors il résulte de 4.2.0.3, exactement comme dans la démonstration de 3.11.1, que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})/\mathrm{S}$ vérifie (E). Donc on a (cf. 3.5.1) :

$$\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \simeq \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{N}).$$

(Ceci découle aussi de 4.2 et 4.2.B a)). Par conséquent, $\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ est muni, comme $\underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}))$ (cf. 4.2.B b)), d'une structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module, déduite de la fonctorialité en $\mathscr{M}$. On en déduit que l'isomorphisme de 4.2 est, dans ce cas, un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules :

Proposition 4.2. bis. — (58) *Soit $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de* S*-groupes ; on suppose que* Y/S *vérifie* (E). *On a un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules, fonctoriel en $\mathscr{M}$:*

$$\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})).$$

De plus, lorsque Y/S vérifie (E), on déduit de 3.13.1, exactement comme dans la démonstration de 3.13.2, que pour tout $u \in \mathrm{Isom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ on a un isomorphisme fonctoriel en $\mathscr{M}$:

$$(*) \qquad \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}).$$

On en déduit les deux corollaires suivants.

Corollaire 4.2.1. — *Soit $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de* S*-groupes ; si* Y/S *vérifie* (E), *on a un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules, fonctoriel en $\mathscr{M}$:*

$$\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})).$$

(58) N.D.E. : On a ajouté les phrases qui suivent et la proposition 4.2 bis, implicite dans l'original.

Corollaire 4.2.2. — *Soit* X *un* S-*groupe ; si* X/S *vérifie* (E), *on a un isomorphisme de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules, fonctoriel en* $\mathscr{M}$ *:*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M})).$$

[59] Par ailleurs, si Y est *commutatif*, l'action adjointe de Y sur $\mathrm{L} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ est triviale, d'où $\underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{L}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{X}, \mathrm{L})$. Donc :

Corollaire 4.2.3. — *Soit* Y *un* S-*groupe* commutatif *; on a un isomorphisme de* S-*foncteurs, fonctoriel en* $\mathscr{M}$ *:* 64

$$\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})).$$

4.3. Considérons maintenant le cas où X et Y sont des $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-*modules*. Rappelons (cf. 4.2.0.4) qu'on note $\mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ (resp. $\underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$) le foncteur $\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ (resp. $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$) muni de la structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module déduite de celle de Y.

Lorsque Y/S vérifie (E), on notera toujours $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ le foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ muni de la structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module définie pour tout foncteur vérifiant (E). Dans ce cas, nous savons (cf. 3.9) que les structures de groupes abéliens de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ et $\underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ coïncident, mais il n'en est pas de même a priori pour celles de module (voir un contre-exemple au paragraphe 6.3). Pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $a \in \mathbf{O}(\mathrm{S}')$, on notera $a \cdot' m$ (resp. $a \cdot m$) l'action de a sur $m \in \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}')$ (resp. sur $m \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}')$), et de même pour l'action de a sur $\mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ et $\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$.

On a $\mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \oplus \mathrm{Y}$ comme $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules ; par conséquent, on obtient, exactement comme pour les proposition 4.2 et 4.2 bis, la :

Proposition 4.3. — *Soit* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules. On a un isomorphisme de* S*-foncteurs, fonctoriel en* $\mathscr{M}$ *:*

$$(*) \qquad \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})).$$

[60] *Si* Y/S *vérifie* (E), *alors* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})/\mathrm{S}$ *vérifie* (E) *et* $(*)$ *est un isomorphisme de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules lorsqu'on munit les deux membres de la structure de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module déduite de la fonctorialité en* $\mathscr{M}$. [61]

Remarque 4.3. bis. — [62] Soit $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules ; notons τ_u l'application qui à tout morphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\phi : \mathrm{X} \to \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ associe le morphisme

$$u \oplus \phi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) = \mathrm{Y} \oplus \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}).$$

---

[59] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[60] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[61] N.D.E. : Noter que sur le terme de droite, c'est la structure définie par $(a\phi)(x) = a\cdot\phi(x)$, où $a\cdot\phi(x)$ désigne l'action de a sur $\phi(x) \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$. Ceci diffère de l'action $(a \cdot' \phi)(x) = a \cdot' \phi(x) = \phi(ax)$, mais coïncide avec celle-ci si $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$.

[62] N.D.E. : On a ajouté cette remarque qui sera utile en 4.5.1.

Alors l'isomorphisme de 4.3 s'insère dans le diagramme commutatif suivant, fonctoriel en $\mathscr{M}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})) \arrow[d, hook, "\tau_u"] \\
\mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[r, "\sim"] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})).
\end{tikzcd}$$

De plus, lorsque Y/S vérifie (E), on déduit de 3.13.1, exactement comme dans la démonstration de 3.13.2, que pour tout $u \in \mathrm{Isom}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, on a

$$(*) \qquad \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) = \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}).$$

Corollaire 4.3.1. — *Soit* X *un* $\mathbf{O}_\mathrm{S}$*-module vérifiant* (E) *par rapport à* S*. On un isomorphisme fonctoriel en* $\mathscr{M}$ *:*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M}))$$

qui respecte les structures de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$*-modules déduites de la fonctorialité en* $\mathscr{M}$*.* [(63)] *En particulier,* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}$ *vérifie* (E)*.*

Démonstration. La première assertion découle de $(*)$ et 4.3 ; démontrons la seconde. Comme X/S vérifie (E), on a des isomorphismes de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules $\underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \times_\mathrm{S} \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{N})$, et donc :

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{N}).$$

Compte tenu de 4.1.1.2 a), ceci prouve que $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}$ vérifie (E).

4.3.2. — Avant de continuer dans cette direction, examinons de plus près les relations entre Y, $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S})$ et $\underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S})$. Remarquons d'abord que

$$(1) \qquad \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) = \mathrm{W}(\mathscr{M})$$

(où $\mathrm{W}(\mathscr{M})$ est défini en I 4.6) et que l'on a donc un isomorphisme canonique

$$(2) \qquad d : \mathbf{O}_\mathrm{S} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}).$$

65 Soit maintenant F un $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module. Pour tout $\mathrm{S}_2 \to \mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}$ [(64)], on a un dihomomorphisme

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathrm{F}(\mathrm{S}_1) \to \mathrm{F}(\mathrm{S}_2) \\ \mathbf{O}(\mathrm{S}_1) \to \mathbf{O}(\mathrm{S}_2), \end{cases}$$

d'où un morphisme de $\mathbf{O}(\mathrm{S}_2)$-modules

$$\mathrm{F}(\mathrm{S}_1) \otimes_{\mathbf{O}(\mathrm{S}_1)} \mathbf{O}(\mathrm{S}_2) \longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{S}_2).$$

[(63)] N.D.E. : cf. N.D.E. (61). D'autre part, on a ajouté la phrase qui suit, ainsi que sa démonstration.

[(64)] N.D.E. : On a changé $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ en $\mathrm{S}_2 \to \mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}$, car on doit faire varier S_2 et S_1 (cf. plus bas). D'autre part, on a détaillé l'original dans ce qui suit.

En particulier, posant $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}'$ et $\mathrm{S}_2 = \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})$, on en déduit des morphismes de $\mathbf{O}(\mathrm{S}')$-modules, fonctoriels en $\mathscr{M}$

$$\mathrm{F}(\mathrm{S}') \otimes_{\mathbf{O}(\mathrm{S}')} \mathrm{T}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}') \longrightarrow \mathrm{T}'_{\mathrm{F}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}');$$

faisant varier S', on obtient des morphismes de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules, fonctoriels en $\mathscr{M}$

$$\mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \mathrm{T}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{T}'_{\mathrm{F}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}). \tag{4}$$

Ces morphismes sont fonctoriels en $\mathscr{M}$, donc compatibles avec les projections des fibrés tangents sur leurs bases ; ils définissent donc des morphismes de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules

$$\mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \tag{5}$$

tels qu'on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \mathrm{T}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \arrow[r] & \mathrm{T}'_{\mathrm{F}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[r] & \mathrm{F} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On peut considérer les morphismes (5) comme des morphismes de S-*groupes abéliens*

$$\mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M})\,; \tag{6}$$

en tensorisant F avec l'isomorphisme $d : \mathbf{O}_\mathrm{S} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S})$, on en déduit (pour 66
$\mathscr{M} = \mathscr{O}_\mathrm{S}$) un morphisme de S-groupes abéliens

$$\mathrm{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S}) \tag{7}$$

noté également $d : \mathrm{F} \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S})$.

Remarque 4.3.3. — [65] Lorsque F/S vérifie (E), les morphismes (6) et (7) ne sont pas nécessairement des morphismes de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules, lorsqu'on munit les deux membres des structures de modules déduites de celle de $\mathscr{M}$ à l'aide de la condition (E).

Par exemple, soient k un corps de caractéristique $p > 0$, $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(k)$, et F le $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module qui à tout S-schéma T associe $\mathrm{F}(\mathrm{T}) = \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{O}_\mathrm{T})$ muni de la structure de $\mathbf{O}(\mathrm{T})$-module obtenue en faisant opérer les scalaires par l'intermédiaire de la puissance p-ième, c.-à-d., $r \cdot f = r^p f$, pour $r \in \mathbf{O}(\mathrm{T})$, $f \in \mathrm{F}(\mathrm{T})$. Comme S-foncteur en groupes, F est isomorphe à $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$. Donc F vérifie (E) et $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S})$ s'identifie à $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}/\mathrm{S}) \cong \mathbf{O}_\mathrm{S}$. Alors, le morphisme canonique $d : \mathrm{F} \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S})$ est, pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, l'application identique $\mathrm{F}(\mathrm{T}) \to \mathbf{O}(\mathrm{T})$: il respecte bien la structure de groupe abélien mais pas la structure de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module.

[65] N.D.E. : On trouvait dans l'original l'assertion que lorsque F/S vérifie (E), les morphismes (6) (et donc (7)) sont des morphismes de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules, assertion contredite par un contre-exemple donné en 6.3. On a supprimé cette assertion, inséré ici l'exemple précité, et modifié en conséquence la définition 4.4. Ceci est sans conséquence pour la suite.

Remarque 4.3.4. — [66] On peut expliciter les morphismes (4) et (5) comme suit. Le morphisme $\Theta : \mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \mathrm{T}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{T}'_{\mathrm{F}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Hom}}_\mathrm{S}(\mathrm{I}_\mathrm{S}(\mathscr{M}), \mathrm{F})$ est défini par : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\alpha \in \mathbf{O}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}))$, et $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{F}$,

$$\Theta(f \otimes \alpha) = \alpha \cdot (\tau_0 \circ f) = \alpha \cdot (f \circ \rho)\,,$$

où τ_0 est la section nulle $\mathrm{F} \to \mathrm{T}'_{\mathrm{F}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ et ρ le morphisme structural $\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}) \to \mathrm{S}'$. Alors Θ induit un morphisme $\theta : \mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \to \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$; ceci résulte de la « fonctorialité en $\mathscr{M}$ » déjà évoquée après (4), et peut se voir explicitement comme suit. D'une part, on a

$$\underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}') = \{\phi \in \mathrm{Hom}_\mathrm{S}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}), \mathrm{F}) \mid \phi \circ \varepsilon_\mathscr{M} = e\},$$

où e désigne la section unité $\mathrm{S}' \to \mathrm{F}$. D'autre part, $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{M})$ est le noyau de l'augmentation $\eta : \mathbf{O}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) \to \mathbf{O}(\mathrm{S}')$, et il s'agit donc de voir que si $f \in \mathrm{F}(\mathrm{S}')$ et $\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{M})$, alors $\big(\alpha \cdot (f \circ \rho)\big) \circ \varepsilon_\mathscr{M} = e$.

Considérons le dihomomorphisme (3), dans le cas où $\mathrm{S}_2 \to \mathrm{S}_1$ est le S-morphisme $\varepsilon_\mathscr{M} : \mathrm{S}' \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})$; on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) \arrow[r, "\mathrm{F}(\varepsilon_\mathscr{M})"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathrm{F}(\mathrm{S}') \arrow[d, "\eta(\alpha)"] \\ \mathrm{F}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) \arrow[r, "\mathrm{F}(\varepsilon_\mathscr{M})"] & \mathrm{F}(\mathrm{S}') \end{tikzcd}\quad.$$

Pour tout $\phi : \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}) \to \mathrm{F}$, on a donc $(\alpha \cdot \phi) \circ \varepsilon_\mathscr{M} = \eta(\alpha) \cdot (\phi \circ \varepsilon_\mathscr{M})$, d'où $(\alpha \cdot \phi) \circ \varepsilon_\mathscr{M} = e$ si $\eta(\alpha) = 0$.

En particulier, prenant $\mathscr{M} = t\,\mathscr{O}_\mathrm{S}$, on a $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}) = t\,\mathbf{O}_\mathrm{S}$ et le morphisme $\mathrm{F} \to \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S})$ est donné par $f \mapsto t \cdot (f \circ \rho)$.

Remarque 4.3.5. — [67] Soit F un $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module, posons $\mathrm{E} = \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$ et notons d_F et d_E les morphismes de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules donnés par 4.3.2 (5) :

$$\begin{aligned} d_\mathrm{F} &: \mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M}), \\ d_\mathrm{E} &: \mathrm{E} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{E}/\mathrm{S}, \mathscr{M}). \end{aligned}$$

On déduit de 4.3.4 le diagramme commutatif suivant de morphismes de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \arrow[r, "d_\mathrm{E}"] \arrow[d, equal] & \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{E}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \\ \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}}(\mathrm{F}, \mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M})) \arrow[r, "d_\mathrm{F}"] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}}(\mathrm{F}, \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M})) \arrow[u, "\simeq"', "(*)"] \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de droite est l'isomorphisme $(*)$ de 4.3. Donc (*loc. cit.*), si F/S vérifie (E), alors E/S vérifie (E) et $(*)$ est aussi un isomorphisme de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules lorsqu'on munit les termes de droite de la structure de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module déduite de (E).

---

[66] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, qui sera utile en 4.6.2.
[67] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, qui sera utile en 4.5 et 4.7.

Remarque 4.4.0. — [68] Dans 4.3.2, les morphismes (4) sont des isomorphismes si et seulement si les morphismes (5) le sont. De plus, si ces conditions sont vérifiées, alors F/S vérifie (E). En effet, il suffit de vérifier que $\underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M}\oplus\mathscr{N}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{N})$. Or on a le diagramme commutatif ci-dessous, où par hypothèse les flèches horizontales sont des isomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}\otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M}\oplus\mathscr{N}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M}\oplus\mathscr{N}) \arrow[d] \\
\mathrm{F}\otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \big(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{N})\big) \arrow[r, "\sim"] & \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{N});
\end{tikzcd}$$

la seconde flèche verticale est donc aussi un isomorphisme, i.e. F/S vérifie (E).

Définition 4.4. — On dit que F est un *bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module* si les morphismes

$$\mathrm{F}\otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \mathrm{T}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{F}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$$

ou, de façon équivalente, $\mathrm{F}\otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$,

sont des isomorphismes de S-groupes abéliens (de sorte que F/S vérifie (E)) et si de plus ils respectent les structures de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules déduites de la condition (E).

Corollaire 4.4.1. — [69] *Soit* F *un* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module. Considérons les conditions suivantes :*

(i) F *est un bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module.*

(ii) F/S *vérifie* (E) *et* $d : \mathrm{F}\to\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S})$ *est un isomorphisme de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules.*

(iii) $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$.

Alors on a (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte de la définition. Pour prouver (ii) $\Rightarrow$ (i), il faut montrer que les morphismes de S-groupes abéliens (fonctoriels en $\mathscr{M}$)

$$\mathrm{F}\otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$$

sont des isomorphismes de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules. Comme F/S vérifie (E), les deux membres transforment sommes directes finies de copies de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ en produits finis de S-groupes abéliens. Ceci nous ramène au cas où $\mathscr{M} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, qui résulte de l'hypothèse.

Enfin (i) $\Rightarrow$ (iii) découle de la définition et du fait que les isomorphismes

$$\mathrm{F}\otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$$

de 4.3.2 (5) sont des morphismes de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules.

Exemples 4.4.2. — Pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$, les $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mathrm{V}(\mathscr{E})$ et **67**
$\mathrm{W}(\mathscr{E})$ définis en I 4.6 sont bons.

[68] N.D.E. : Compte tenu des modifications dans la définition 4.4 (cf. N.D.E. (65)), on a inséré ici cette remarque, qui dans l'original figurait dans la démonstration de 4.4.1.

[69] N.D.E. : L'original montrait que (i) implique (ii) et (iii) ; on a ajouté l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i).

[70] En effet, pour tout $f : S' \to S$, les morphismes

$$\mathrm{V}(\mathscr{E})(\mathrm{S}') \otimes_{\mathbf{O}(\mathrm{S}')} \mathbf{O}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{V}(\mathscr{E})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}')$$
$$\mathrm{W}(\mathscr{E})(\mathrm{S}') \otimes_{\mathbf{O}(\mathrm{S}')} \mathbf{O}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{W}(\mathscr{E})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}')$$

correspondent, respectivement, aux morphismes :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}\text{-mod.}}(f^*(\mathscr{E}), \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) \otimes_{\mathbf{O}(\mathrm{S}')} \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{M})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}\text{-mod.}}(f^*(\mathscr{E}), \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{M}))$$
$$\Gamma(\mathrm{S}', f^*(\mathscr{E})) \otimes_{\mathbf{O}(\mathrm{S}')} \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{M})) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{S}', f^*(\mathscr{E}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}} \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{M}));$$

ceux-ci sont des isomorphismes puisque $\mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{M})$ est isomorphe, comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$-module, à une somme directe finie de copies de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$.

Proposition 4.5. — *Soit* F *un* bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module. Alors :*

(i) $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}$ *vérifie* (E) *et l'on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M}))$$

qui respecte les structures de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules déduites de la condition* (E). *En particulier, on a un isomorphisme de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}).$$

(ii) [71] *De plus,* $\underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$ *est un bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module.*

En effet, d'après 4.4.1, F/S vérifie (E) et

(1) $$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \simeq \mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M}).$$

L'assertion (i) résulte alors de 4.3.1. Posons $\mathrm{E} = \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$. D'après (1) et la remarque 4.3.5, on a le diagramme commutatif suivant de morphismes de S-groupes abéliens :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}) \otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \arrow[r, "d_{\mathrm{E}}"] \arrow[d, equal] & \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \\
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathrm{F}, \mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M})) \arrow[r, "d_{\mathrm{F}}"] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathrm{F}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M})) \arrow[u, "\simeq"', "(*)"]
\end{tikzcd}$$

où d_{F} et $(*)$ sont des isomorphismes de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules ; par conséquent, il en est de même de d_{E}. Ceci prouve (ii).

Scholie 4.5.1. — [72] Posons (cf. 2.1) $\mathscr{O}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \oplus t\,\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ (avec $t^2 = 0$), et soit F un *bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module. Alors, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, le morphisme

$$\mathrm{F}(\mathrm{S}') \bigoplus t\,\mathrm{F}(\mathrm{S}') = \mathrm{F}(\mathrm{S}') \otimes_{\mathbf{O}(\mathrm{S}')} \mathbf{O}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}) \longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{F}(\mathrm{S}') \bigoplus \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S})(\mathrm{S}')$$

---

[70] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

[71] N.D.E. : On a ajouté le point (ii), conséquence immédiate de ce qui précède.

[72] N.D.E. : On a ajouté ce scholie, implicite dans l'original, qui sera utile en 4.7.1. (Ici et dans la suite, on note t, t', etc. des variables de carré nul, la lettre ε étant réservée à la section unité des groupes.)

(qui est l'identité sur $\mathrm{F(S')}$) induit un isomorphisme de $\mathbf{O}(\mathrm{S'})$-modules $t\,\mathrm{F(S')} \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F/S})(\mathrm{S'})$. Faisant varier S′, on obtient un isomorphisme qu'on pourra noter $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F/S}) \simeq t\,\mathrm{F}$.

Pour tout $\mathrm{S'} \to \mathrm{S}$, on a donc, d'après 4.5, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S'}}\text{-mod.}}(\mathrm{F_{S'}}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S'}}\text{-mod.}}(\mathrm{F_{S'}}, t\,\mathrm{F_{S'}}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S})(\mathrm{S'}) \arrow[d, hook] \\
& \mathrm{Aut}_{\mathbf{O}_{\mathrm{I_{S'}}}\text{-mod.}}(\mathrm{F_{I_{S'}}}) \arrow[r, equal] & \mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}}(\mathrm{S'})
\end{tikzcd}$$

et l'on déduit de 4.3 bis que tout $\mathrm{X} \in \mathrm{End}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S'}}\text{-mod.}}(\mathrm{F_{S'}})$ correspond à l'élément $\mathrm{id} + t\mathrm{X}$ de $\mathrm{Aut}_{\mathbf{O}_{\mathrm{I_{S'}}}\text{-mod.}}(\mathrm{F_{I_{S'}}})$.

Définition 4.6. — On dit que le S-*foncteur en groupes* G est *bon* si G/S vérifie la condition (E) et si $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$ est un bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module.

[73] Notons que si F est un bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module, c'est un bon S-groupe ; en effet F/S vérifie (E) et $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F/S}) \simeq \mathrm{F}$ est un bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module.

Exemple 4.6.1. — Si G est représentable, il est bon. En effet, G/S vérifie (E) et $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$ est de la forme $\mathrm{V}(\mathscr{E})$ donc bon, d'après 4.4.2.

Lemme 4.6.2. — [74] *Soit* G *un* S-*foncteur en groupes tel que* G/S *vérifie* (E), *et soit* $\mathrm{F} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$. *Alors* F *vérifie* (E) *et le morphisme de groupes abéliens* $d : \mathrm{F} \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F/S})$ *respecte les structures de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-*module.*

Par conséquent, G *est bon si et seulement si* $\mathrm{F} \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F/S})$ *est* bijectif.

Démonstration. Supposons que G/S vérifie (E). Soient $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules libres de rang fini. Notons $\mathrm{F}(\mathscr{N}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{N})$ et e la section unité de G.

Pour tout $\mathrm{S'} \to \mathrm{S}$, on a $\mathrm{F}(\mathscr{N})(\mathrm{S'}) = \{g \in \mathrm{Hom_S}(\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{N}), \mathrm{G}) \mid g \circ \varepsilon_{\mathscr{N}} = e\}$ et $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S'}) = \mathrm{Hom_S}(\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M}), \mathrm{F}(\mathscr{N}))$ s'identifie à

$$\left\{\Phi \in \mathrm{Hom_S}(\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{N}) \times_{\mathrm{S'}} \mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M}), \mathrm{G}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \Phi \circ (\varepsilon_{\mathscr{N}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M})}) = e \in \mathrm{G}(\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M})) \\ \Phi \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{N})} \times \varepsilon_{\mathscr{M}}) = e \in \mathrm{G}(\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{N})) \end{array}\right\}.$$

Ceci montre que

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{M})/\mathrm{S}, \mathscr{N}). \tag{1}$$

Comme G/S vérifie (E), on en déduit :

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2) &\simeq \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2)/\mathrm{S}, \mathscr{N}) \\ &\simeq \underline{\mathrm{Lie}}((\mathrm{F}(\mathscr{M}_1) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{F}(\mathscr{M}_2))/\mathrm{S}, \mathscr{N}).\end{aligned}$$

D'après 3.8, le terme de droite est isomorphe à

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{M}_1)/\mathrm{S}, \mathscr{N}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{M}_2)/\mathrm{S}, \mathscr{N}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M}_1) \underset{\mathrm{S}}{\times} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M}_2).$$

---

[73] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[74] N.D.E. : On a ajouté ce lemme.

Il en résulte

$$(2)\qquad \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M}_1) \times_{\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M}_2),$$

donc $\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}$ vérifie (E), d'après la remarque 4.1.1.2 a).

Montrons maintenant que le morphisme de groupes abéliens $d : \mathrm{F}(\mathscr{N}) \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S})$ respecte les structures de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module. Considérons le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module libre $\mathscr{M} = t\,\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, de sorte que

$$\mathbf{O}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) = \mathbf{O}(\mathrm{S}')[t]/(t^2) = \mathbf{O}(\mathrm{S}') \oplus t\,\mathbf{O}(\mathrm{S}')$$

et $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}) \simeq t\,\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$. On notera ρ_t le morphisme structural $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{S}$, qui correspond à l'injection $u_t : \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \hookrightarrow \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M}) = \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \oplus t\,\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$. Rappelons (cf. 3.4.2) que, pour tout S-foncteur X, $\mathrm{F}(\mathscr{N})(\mathrm{X}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{N})(\mathrm{X})$ est l'ensemble des S-morphismes $\phi : \mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{N}) \to \mathrm{G}$ tels que $\phi \circ \varepsilon_{\mathscr{N}} = e$, et que l'opération de $a \in \mathbf{O}(\mathrm{X})$ est donnée par $a \cdot \phi = \phi \circ a^*$, où a^* est l'endomorphisme de $\mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{N})$ associé à a, cf. 2.1.3.

Par conséquent, d'après 4.3.4, le morphisme $d : \mathrm{F}(\mathscr{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{F}(\mathscr{N}) \otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} t\,\mathbf{O}_{\mathrm{S}} \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S})$ est donné par : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}', \mathrm{F}(\mathscr{N}))$,

$$f \mapsto f \otimes t \mapsto t \cdot (f \circ \rho_t) = f \circ \rho_t \circ t^*,$$

où, dans le dernier terme, $f \circ \rho_t \in \mathrm{F}(\mathscr{N})(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}))$ est considéré comme un S-morphisme $\phi : \mathrm{I}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})}(\mathscr{N}) \to \mathrm{G}$ (tel que $\phi \circ \varepsilon_{\mathscr{N}} = e$). Il s'agit de voir que d est un morphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules, c.-à-d., que $d(a \cdot f) = u_t(a) \cdot d(f)$ pour tout $a \in \mathbf{O}(\mathrm{S}')$.

Considérant $f \in \mathrm{F}(\mathscr{N})(\mathrm{S}')$ comme un morphisme $\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{N}) \to \mathrm{G}$, on a de même $a \cdot f = f \circ a^*$. D'autre part, d'après la fonctorialité en X de l'opération de $\mathbf{O}(\mathrm{X})$ sur $\mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{N})$ (cf. 2.1.3), on a le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{N}) \arrow[r, "a^*"] & \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{N}) \\
\mathrm{I}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})}(\mathscr{N}) \arrow[u, "\rho_t"] \arrow[r, "u_t(a)^*"] & \mathrm{I}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})}(\mathscr{N}) \arrow[u, "\rho_t"']
\end{tikzcd}.$$

On a donc

$$d(a \cdot f) = f \circ a^* \circ \rho_t \circ t^* = f \circ \rho_t \circ u_t(a)^* \circ t^* = f \circ \rho_t \circ t^* \circ u_t(a)^* = u_t(a) \cdot d(f)$$

(l'avant-dernière égalité résultant du fait que $\mathbf{O}$ est commutatif). Ceci achève la démonstration du lemme 4.6.2.

Théorème 4.7. — *Si* F *est un bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module, le* S*-groupe* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$ *est bon.*

[75] En effet, d'après 4.5, $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}$ vérifie (E) et $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}) \simeq$
68 $\underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$ est un bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module.

[75] N.D.E. : On a simplifié l'original, en utilisant les ajouts faits dans 4.3.1 et 4.5 .

4.7.1. — [76] Soit maintenant G un S-groupe et F un *bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module. Supposons donnée une *représentation linéaire de* G *dans* F, c'est-à-dire (I 4.7.1), un morphisme de S-groupes

$$\rho : \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}).$$

Si G/S vérifie (E), on en déduit par 4.1.C et 4.5 un morphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules, noté ρ' ou $d\rho$:

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}) \simeq \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}).$$

[77] De plus, posant $\mathscr{O}_{\mathrm{I_S}} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \oplus t\,\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ (avec $t^2 = 0$), on déduit de 4.5.1 que, si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $\mathrm{X} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S}') \subset \mathrm{G}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'})$, alors on a dans $\mathrm{Aut}_{\mathbf{O}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}})$ l'égalité suivante :

$$(*) \qquad \rho(\mathrm{X}) = \mathrm{id} + t\,\rho'(\mathrm{X}),$$

i.e. pour tout $\mathrm{S}'' \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}$ et $f \in \mathrm{F}(\mathrm{S}'')$, on a dans $\mathrm{F}(\mathrm{S}'')$ l'égalité $\rho(\mathrm{X})(f) = f + t\rho'(\mathrm{X})(f)$.

Définition 4.7.2. — Soit G un *bon* S-groupe. Alors $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$ est un bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module, et on a un morphisme de S-groupes $\mathrm{Ad} : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}))$. On en déduit par 4.7.1 un morphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules

$$\mathrm{ad} : \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})),$$

où, ce qui revient au même, un morphisme $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-bilinéaire :

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}) \times_{\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}), \qquad (x, y) \mapsto [x, y] = \mathrm{ad}(x) \cdot y$$

(où x et y désignent deux éléments arbitraires de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S}') = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}')(\mathrm{S}'))$. Si **69**
G est commutatif, alors $[x, y] = 0$.

4.7.3. — On peut donner du crochet une définition équivalente comme suit : remarquons d'abord qu'il suffit de le faire pour $x, y \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$. Remarquons ensuite qu'il y a un isomorphisme canonique $\mathrm{I_S} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{I_S} \simeq \mathrm{I}_{\mathrm{I_S}}$; pour éviter des confusions, notons I et I′ deux exemplaires de $\mathrm{I_S}$ et posons $\mathscr{O}_{\mathrm{I}} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t]$, $\mathscr{O}_{\mathrm{I}'} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t']$, où $t^2 = 0 = t'^2$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I} \times \mathrm{I}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{I}' \arrow[d] \\ \mathrm{I} \arrow[r] & \mathrm{S} \end{tikzcd} \quad ,$$

les deux flèches partant de $\mathrm{I} \times \mathrm{I}'$ identifiant celui-ci au schéma des nombres duaux sur I ou sur I′. Il en résulte un diagramme commutatif de groupes (où on note $\mathrm{L} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$) :

[76] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.7.1, 4.7.2, 4.7.3.
[77] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

$$
(1)\qquad
\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
 & & \mathrm{L}(\mathrm{I}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{L}(\mathrm{S}) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{L}(\mathrm{I}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G}(\mathrm{I}\times\mathrm{I}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G}(\mathrm{I}') \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{L}(\mathrm{S}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G}(\mathrm{I}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G}(\mathrm{S}) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & .
\end{tikzcd}
$$

La neuvième pièce du puzzle n'est autre que Lie(L/S)(S). Si G est *bon*, c'est L(S) et on a donc le diagramme commutatif suivant, où les lignes et les colonnes sont
70 des suites exactes de groupes, les cinq L( ) sont commutatifs, [78] et où, compte tenu de l'identification $\mathrm{L}(\mathrm{I}) = \mathrm{L}(\mathrm{S}) \oplus t\,\mathrm{L}(\mathrm{S})$ (resp. $\mathrm{L}(\mathrm{I}') = \mathrm{L}(\mathrm{S}) \oplus t'\,\mathrm{L}(\mathrm{S})$), l'injection $\mathrm{L}(\mathrm{S}) \hookrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{I})$ (resp. $\mathrm{L}(\mathrm{S}) \hookrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{I}')$) est donnée par $u \mapsto t\,u$ (resp. $u \mapsto t'\,u$) :

$$
(2)\qquad
\begin{tikzcd}
z \in \mathrm{L}(\mathrm{S}) \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t'"'] & \mathrm{L}(\mathrm{I}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{L}(\mathrm{S}) \ni x \arrow[d] \\
\mathrm{L}(\mathrm{I}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G}(\mathrm{I}\times\mathrm{I}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G}(\mathrm{I}') \arrow[d] \\
y \in \mathrm{L}(\mathrm{S}) \arrow[r] & \mathrm{G}(\mathrm{I}) \arrow[r] & \mathrm{G}(\mathrm{S}) \quad .
\end{tikzcd}
$$

Or dans un tel diagramme, si on prend deux éléments x et y comme noté, et qu'on relève arbitrairement x resp. y en un élément $\widetilde{x} \in \mathrm{L}(\mathrm{I})$ resp. $y' \in \mathrm{L}(\mathrm{I}')$, le commutateur $\widetilde{x}y'\widetilde{x}^{-1}y'^{-1}$ dans $\mathrm{G}(\mathrm{I}\times\mathrm{I}')$ ne dépend pas des relèvements choisis et est l'image d'un élément z comme noté. Le lecteur vérifiera que l'on a $z = [x, y]$. [79]

En effet, si l'on note encore x l'image de x par la section canonique $\mathrm{L}(\mathrm{S}) \to \mathrm{L}(\mathrm{I})$ (et de même pour y), alors $\widetilde{x} = xu$ et $y' = yv$, avec $u, v \in \mathrm{L}(\mathrm{S}) = \mathrm{L}(\mathrm{I}) \cap \mathrm{L}(\mathrm{I}')$, et puisque L(I) et L(I′) sont commutatifs on a

$$\widetilde{x}y'\widetilde{x}^{-1}y'^{-1} = x\,u\,y\,v\,u^{-1}x^{-1}v^{-1}y^{-1} = x\,u\,y\,u^{-1}v\,x^{-1}v^{-1}y^{-1} = x\,y\,x^{-1}y^{-1}.$$

[78] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[79] N.D.E. : L'original indiquait en note de bas de page : « ($*$) Le rédacteur reconnaît, à la demande de Gabriel, que l'exercice n'est pas immédiat ; c'est d'ailleurs la raison pour laquelle il n'est pas dans le texte ». On a donné les détails, en tenant compte de l'ajout fait en 4.7.1 ; voir aussi [**DG70**], § II.4, 4.2.

De plus, cet élément s'envoie sur l'élément unité de $\mathrm{G(I)}$ et de $\mathrm{G(I')}$, donc provient d'un (unique) z comme indiqué. Enfin, considérant y (resp. x) comme un élément de $\mathrm{L_{I'}(I')}$ (resp. de $\mathrm{L(S)} \subset \mathrm{G(I')}$), on a d'après 4.7.1 $(*)$:

$$x\,y\,x^{-1} = \mathrm{Ad}(x)(y) = \big(\mathrm{id} + t'\ \mathrm{ad}(x)\big)(y) = y + t'\,[x,y]\,,$$

donc l'élément $x\,y\,x^{-1}y^{-1}$ de $\mathrm{L(I')}$ est l'image de l'élément $z = [x,y]$ de $\mathrm{L(S)}$.

Sur cette construction apparaissent les deux propriétés suivantes :

(i) le crochet est « fonctoriel en G » : de manière précise, $\mathrm{G} \mapsto \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$ est un foncteur de la catégorie des bons S-groupes dans la catégorie des bons $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules munis d'une loi de composition $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-bilinéaire.

(ii) On a $[x,y] + [y,x] = 0$: en effet le diagramme est symétrique par rapport à la première diagonale. [80]

Proposition 4.8. — *Soit* F *un bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module. Via l'identification*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$$

on a

$$\mathrm{Ad}(g)\cdot\mathrm{Y} = g\circ\mathrm{Y}\circ g^{-1} \qquad \textit{et} \qquad [\mathrm{X},\mathrm{Y}] = \mathrm{X}\circ\mathrm{Y} - \mathrm{Y}\circ\mathrm{X},$$

pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $g \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}'}\text{-mod.}}(\mathrm{F}_{\mathrm{S}'})$, *et* $\mathrm{X},\mathrm{Y} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S})(\mathrm{S}') = \mathrm{End}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}'}\text{-mod.}}(\mathrm{F}_{\mathrm{S}'})$.

Démonstration. [81] Par changement de base, on se ramène à $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$, ce qui permet d'alléger la notation. Posons $\mathrm{I} = \mathrm{I_S}$ et $\mathscr{O}_{\mathrm{I}} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t]$ (avec $t^2 = 0$). Rappelons (cf. 4.5.1) que l'inclusion $i : \mathrm{End}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{O}_{\mathrm{I}}\text{-mod.}}(\mathrm{F_I})$ envoie Y sur $\mathrm{id} + t\,\mathrm{Y}$. Alors, par définition de $\mathrm{Ad}(g)$ (cf. 4.1.A), on a :

$$\mathrm{id} + t\,\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{Y}) = g\circ(\mathrm{id} + t\,\mathrm{Y})\circ g^{-1} = \mathrm{id} + t\,(g\circ\mathrm{Y}\circ g^{-1}),$$

d'où $\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{Y}) = g\circ\mathrm{Y}\circ g^{-1}$.

Soit I' une seconde copie de $\mathrm{I_S}$, posons $\mathscr{O}_{\mathrm{I}'} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t']$ (avec $t'^2 = 0$). Appliquons les résultats de 4.7.3 à $\mathrm{G} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$ et $\mathrm{L} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}) = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$. On identifie X à son image par la section canonique $\mathrm{L(S)} \hookrightarrow \mathrm{L(I)}$; son image dans $\mathrm{G(I\times I')}$ est alors $\mathrm{id} + t'\,\mathrm{X}$, dont l'inverse est $\mathrm{id} - t'\,\mathrm{X}$. De même, Y se relève en $\mathrm{id} + t\,\mathrm{Y}$, dont l'inverse est $\mathrm{id} - t\,\mathrm{Y}$. Alors, le commutateur

$$(\mathrm{id} + t'\,\mathrm{X})\circ(\mathrm{id} + t\,\mathrm{Y})\circ(\mathrm{id} - t'\,\mathrm{X})\circ(\mathrm{id} - t\,\mathrm{Y}) = \mathrm{id} + tt'\,(\mathrm{X}\circ\mathrm{Y} - \mathrm{Y}\circ\mathrm{X})$$

est l'image dans $\mathrm{G(I\times I')}$ de l'élément $\mathrm{Z} = \mathrm{X}\circ\mathrm{Y} - \mathrm{Y}\circ\mathrm{X}$ de $\mathrm{L(S)}$ (en effet, Z est envoyé sur $t\,\mathrm{Z} \in \mathrm{L(I)}$, puis sur $\mathrm{id} + t't\,\mathrm{Z} \in \mathrm{G(I\times I')}$). D'après 4.7.3, ceci montre que $[\mathrm{X},\mathrm{Y}] = \mathrm{X}\circ\mathrm{Y} - \mathrm{Y}\circ\mathrm{X}$. 71

[80] N.D.E. : i.e. x et y jouent des rôles symétriques : l'image dans $\mathrm{G(I\times I')}$ de $[y,x]$ égale le commutateur $y'\widetilde{x}y'^{-1}\widetilde{x}^{-1}$, qui est l'inverse de $\widetilde{x}y'\widetilde{x}^{-1}y'^{-1} = [x,y]$. Par contre (cf. 4.10 plus loin), on ne sait pas si l'on a nécessairement $[x,x] = 0$: si l'on considère x comme un élément de $\widetilde{x} \in \mathrm{L(I)}$ (resp. $x' \in \mathrm{L(I')}$) il n'est pas clair *a priori* que $\widetilde{x}$ et x' commutent…

[81] N.D.E. : On a détaillé et simplifié l'original dans ce qui suit.

Corollaire 4.8.1. — *Soient* G *un bon* S*-groupe et* $x, y, z \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{S}')$. *On a :*

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

[82] En effet, comme G est bon, $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est un bon $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module et donc, d'après 4.7, $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}))$ est un bon S-groupe. Alors, le morphisme de S-groupes

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}))$$

donne par la fonctorialité 4.7.3 (i) : $\mathrm{ad}[x,y] = [\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y]$. Combiné avec 4.8, ceci donne :

$$\mathrm{ad}[x,y] = [\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y] = \mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y - \mathrm{ad}\, y \circ \mathrm{ad}\, x,$$

ce qui, appliqué à un élément z, donne la relation de Jacobi.

Corollaire 4.8.2. — *Soit* G *un* bon S*-groupe opérant linéairement sur un* bon $\mathbf{O}_\mathrm{S}$*-module* F (i.e. soit F un G-$\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module, G et F bons). *Alors l'application linéaire* $\rho' : \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$ *est une* représentation, *c'est-à-dire que l'on a*

$$\rho'([x,y]) = \rho'(x) \circ \rho'(y) - \rho'(y) \circ \rho'(x).$$

72

Scholie 4.9. — À tout bon S-groupe (par exemple représentable), on a associé un bon $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ muni fonctoriellement d'une application bilinéaire vérifiant

$$[x,y] + [y,x] = 0, \qquad [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

Nous appellerons $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ muni de cette structure l'« *algèbre de Lie* » *de* G *sur* S (les guillemets étant justifiés par le fait qu'on ne sait pas si $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est à strictement parler une $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-algèbre de Lie [83]). À toute représentation linéaire de G dans un bon $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module F est associée une représentation de son « algèbre de Lie ». En particulier, à la représentation adjointe de G est associée la représentation adjointe de son « algèbre de Lie ».

Définition 4.10. — Un foncteur en groupes G au-dessus de S est dit *très bon* s'il est bon et si $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est une $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-algèbre de Lie (c'est-à-dire si on a identiquement $[x,x] = 0$).

Exemples 4.10.1. — Les S-groupes suivants sont très bons : $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$ pour tout bon $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module F (cf. 4.7 et 4.8), tout groupe représentable (voir ci-après), tout bon S-groupe admettant un monomorphisme dans un très bon S-groupe, par exemple tout bon sous-foncteur en groupes d'un groupe représentable, ou tout bon-S-groupe admettant une représentation linéaire fidèle dans un bon $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module, par exemple tout bon S-groupe tel que Ad soit un monomorphisme ...

---

[82] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[83] N.D.E. : car on ne sait pas si $[x,x] = 0$, voir 4.10 qui suit.

4.11. Supposons maintenant que G soit un *schéma en groupes sur* S. D'après 4.1.4, $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{S})$ s'identifie au groupe des automorphismes infinitésimaux de G/S invariants à droite, c'est-à-dire par 3.14 au groupe des *dérivations de* $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$ *au-dessus de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ *invariantes par translation à droite.* De plus cette identification respecte la structure de module et est un [84] *anti-isomorphisme* d'algèbres de Lie, comme on le voit en **73**
raisonnant comme en 4.7.3 : posons $\mathscr{O}_{\mathrm{I}} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t]$ et $\mathscr{O}_{\mathrm{I}'} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t']$ et soient $x \in \mathrm{L}(\mathrm{I})$ et $y \in \mathrm{L}(\mathrm{I}')$. La translation à gauche λ_x (resp. λ_y) est un S-automorphisme de $\mathrm{G}_{\mathrm{I}\times\mathrm{I}'}$ qui induit l'identité sur $\mathrm{G}_{\mathrm{I}'}$ (resp. G_{I}) et qui correspond à un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-automorphisme

$$u = \mathrm{id} + t d_x \qquad \text{resp.} \qquad v = \mathrm{id} + t' d_y$$

de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}_{\mathrm{I}\times\mathrm{I}'}} = \mathscr{O}_{\mathrm{G}}[t,t']/(t^2,t'^2)$, où d_x, d_y sont des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-dérivations de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$ invariantes par translation à droite. Comme la correspondance entre S-automorphismes de $\mathrm{G}_{\mathrm{I}\times\mathrm{I}'}$ et $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-automorphismes de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}_{\mathrm{I}\times\mathrm{I}'}}$ est contravariante, $\lambda_x\lambda_y\lambda_x^{-1}\lambda_y^{-1}$ correspond à $v^{-1}u^{-1}v\,u = \mathrm{id} + tt'(d_y d_x - d_x d_y)$. On en déduit, d'après 4.7.3, que l'application $x \mapsto -d_x$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie (pour plus de détails, voir [**DG70**], § II.4, 4.4 et 4.6). Ce qui précède est valable pour $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{S}') = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}')(\mathrm{S}')$ pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. On retrouve alors la définition classique : [85]

Scholie 4.11.1. — *Via l'isomorphisme* $x \mapsto -d_x$, $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ *s'identifie au foncteur qui à tout* S′ *au-dessus de* S, *associe la* $\mathbf{O}(\mathrm{S}')$*-algèbre de Lie des dérivations de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *par rapport à* S′ *invariantes par translation à droite.*

Comme on sait déjà, d'après 4.6.1, que tout groupe représentable est bon, il résulte de ce qui précède :

Corollaire 4.11.2. — *Tout groupe représentable est très bon.*

Soit $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ la section unité de G. Posons $\omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}} = \varepsilon^*(\Omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}})$ et rappelons (cf. 3.3) que $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est représentable par la fibration vectorielle $\mathbb{V}(\omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}})$.

Scholie 4.11.3. — *On a donc associé fonctoriellement à tout* S*-schéma en groupes* G *une fibration vectorielle* $\mathbb{L}\mathrm{ie}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) = \mathbb{V}(\omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}})$ *sur* S, *qui représente le foncteur* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$, *donc est munie d'une structure de* S*-schéma en* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-algèbres de Lie. De plus* (*cf.* 3.4 *et* 3.8), *cette construction commute à l'extension de la base et aux produits finis.*

Remarques 4.11.4. — [86] Notons π le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$.

a) Le $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$-module $\Omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}$ est évidemment $(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G})$-équivariant (cf. I, § 6) et donc, d'après I 6.8.1, on a $\Omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}} \simeq \pi^*(\omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}})$. Il en résulte par exemple que $\Omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}$ *est localement libre* (resp. localement libre de type fini) si $\omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}$ l'est, ce qui est en particulier le cas *si* S *est le spectre d'un corps* (resp. si S est le spectre d'un corps et G localement de type fini sur S).

[84] N.D.E. : On a corrigé une erreur de signe dans l'original, cf. [**DG70**], § II.4, 4.4 et 4.6.

[85] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit ; en particulier, on a ajouté, pour des références ultérieures, la numérotation 4.11.1 à 4.11.8.

[86] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit, en tenant compte des ajouts faits dans l'Exp. I, § 6.8.

b) De plus, d'après I 6.8.2, $\omega^1_{G/S}$ est muni d'une structure canonique de G-$\mathscr{O}_S$-module, qui induit sur $\mathbb{V}(\omega^1_{G/S}) = \mathbb{L}\mathrm{ie}(G/S)$ l'opération adjointe. [87]

c) D'autre part (cf. EGA I, 5.3.11 et 5.4.6), ε est une immersion, et est une immersion fermée si G est séparé sur S. Donc $\omega^1_{G/S}$ s'identifie à $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$, où $\mathscr{I}$ est l'idéal quasi-cohérent définissant $\varepsilon(S)$ dans un ouvert U de G dans lequel $\varepsilon(S)$ est fermé (si $G \to S$ est séparé, on peut prendre $U = G$, et si $G = \operatorname{Spec} \mathscr{A}(G)$ est affine sur S, $\mathscr{I}$ n'est autre que l'idéal d'augmentation de $\mathscr{A}(G)$, i.e. le noyau de $\varepsilon^\natural : \mathscr{A}(G) \to \mathscr{O}_S$, cf. I 4.2). [88]

Remarque 4.11.5. — On peut déduire de l'isomorphisme $\Omega^1_{G/S} \simeq \pi^*(\omega^1_{G/S})$ que le $\mathscr{O}_S$-module $\omega^1_{G/S}$ s'identifie au faisceau $\pi^G_*(\Omega^1_{G/S})$ des « différentielles de G par rapport à S invariantes à droite », c'est-à-dire au faisceau dont les sections sur un ouvert U de S sont les sections de $\Omega^1_{G/S}$ sur $\pi^{-1}(U)$, invariantes par translation à droite (cf. I, 6.8.3, comparer aussi avec $\mathrm{VII_A}$, 2.4). [89]

74 ***Notation 4.11.6***. — On note $\mathscr{L}ie(G/S)$ le faisceau des sections de la fibration vectorielle $\mathbb{L}\mathrm{ie}(G/S) \to S$; c'est le $\mathscr{O}_S$-module $(\omega^1_{G/S})^\vee = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(\omega^1_{G/S}, \mathscr{O}_S)$ dual de $\omega^1_{G/S}$ (cf. EGA II 1.7.9). Il est muni d'une structure de $\mathscr{O}_S$-algèbre de Lie.

Comme cette construction ne commute pas à l'extension de la base (en général), la structure d'algèbre de Lie sur ce module ne permet pas de reconstituer la structure de S-schéma en $\mathbf{O}_S$-algèbres de Lie sur $\mathbb{L}\mathrm{ie}(G/S)$. [90]

Cependant on a :

Lemme 4.11.7. — *On suppose $\omega^1_{G/S}$ localement libre de type fini* (ce qui se produit en particulier si G est *lisse* sur S (cf. EGA IV_4, 17.2.4), ou si S est le spectre d'un corps et G localement de type fini sur S). *Alors $\mathscr{L}ie(G/S)^\vee \cong (\omega^1_{G/S})^{\vee\vee} \cong \omega^1_{G/S}$ et donc*

$$\mathbb{L}\mathrm{ie}(G/S) = \mathbb{V}(\omega^1_{G/S}) = \mathbb{V}(\mathscr{L}ie(G/S)^\vee) = \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(G/S))$$

(*la dernière égalité résultant de* I 4.6.5.1).

---

(87) N.D.E. : Pour cette raison, l'opération linéaire de G sur $\omega^1_{G/S}$ pourrait être appelée l'opération « pré-adjointe » ; en fait, par abus de langage, on parlera encore de « l'opération adjointe » sur $\omega^1_{G/S}$. Signalons ici une construction un peu plus générale, qui sera utilisée dans l'Exp. III (cf. en particulier III 0.8). Supposons donné, pour tout $Y \to S$, un $\mathscr{O}_Y$-module $\mathscr{N}(Y)$, et pour tout S-morphisme $\phi : Z \to Y$, un morphisme de $\mathscr{O}_Z$-modules $\mathscr{N}(\phi) : \phi^*\mathscr{N}(Y) \to \mathscr{N}(Z)$, qui soit fonctoriel en ϕ (ceci est le cas, par exemple, si $\mathcal{J}$ est un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_S$ et si l'on pose $\mathscr{N}(Y) = \mathcal{J}\mathscr{O}_Y$, cf. l'Exp. III) ; alors l'opération de G sur $\omega^1_{G/S}$ induit une « opération adjointe » (généralisée) de G sur le S-foncteur en groupes abéliens qui à tout $f : Y \to S$ associe $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(f^*(\omega^1_{G/S}), \mathscr{N}(Y))$.

(88) N.D.E. : On a ajouté la description qui précède de $\omega^1_{G/S}$, qui sera utile plus loin (par exemple, en $\mathrm{VII_A}$, 5.5).

(89) N.D.E. : Cette description de $\omega^1_{G/S}$ en termes de différentielles invariantes ne sera pas utilisée dans la suite.

(90) N.D.E. : car $\mathscr{L}ie(G/S) \cong (\omega^1_{G/S})^\vee$ ne détermine pas nécessairement $\omega^1_{G/S}$. Par exemple, si $S = \mathbb{A}^1_k$ (k un corps) et si G est le S-groupe dont la fibre en $s = 0$ est $\mathbb{G}_{a,k}$ et les autres fibres sont le groupe unité, alors $\mathscr{L}ie(G/S) = 0$ mais $\underline{\mathrm{Lie}}(G_s/k)(k) = k$.

Enfin, soit $G \to H$ un *monomorphisme* de foncteurs en groupes. Alors $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S) \to \underline{\mathrm{Lie}}(H/S)$ est également un *monomorphisme* (cf. 3.7). Comme tout monomorphisme vectoriel de fibrations vectorielles est une immersion fermée [(91)] on obtient :

Corollaire 4.11.8. — *Soit* $G \hookrightarrow H$ *un* monomorphisme de S-schémas en groupes.

(i) $\mathbb{L}\mathrm{ie}(G/S) \to \mathbb{L}\mathrm{ie}(H/S)$ *est une immersion fermée et donc* $\omega^1_{H/S} \to \omega^1_{G/S}$ *est un épimorphisme.*

(ii) *Si* $\omega^1_{G/S}$ *est* localement libre de type fini*, alors le morphisme correspondant* $\mathscr{L}ie(G/S) \to \mathscr{L}ie(H/S)$ *est un isomorphisme de* $\mathscr{L}ie(G/S)$ *sur un sous-module de* $\mathscr{L}ie(H/S)$ localement facteur direct.

5. Calcul de quelques algèbres de Lie

5.1. Exemples d'algèbres de Lie : les groupes diagonalisables. — Soit $G = D_S(M)$ un groupe diagonalisable sur S (I 4.4). La formation de $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$ commutant à l'extension de la base, il suffit de faire la construction pour $G = D(M)$. On a alors :

$$G(I_S) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(M, \Gamma(I_S, \mathscr{O}_{I_S})^\times) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(M, \Gamma(S, \mathscr{D}_{\mathscr{O}_S})^\times).$$

Or on a une suite exacte scindée

$$1 \longrightarrow \Gamma(S, \mathscr{O}_S) \longrightarrow \Gamma(S, \mathscr{D}_{\mathscr{O}_S})^\times \longrightarrow \Gamma(S, \mathscr{O}_S)^\times \longrightarrow 1,$$

ce qui donne que $\underline{\mathrm{Lie}}(G)(S)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(M, \mathbf{O}(S))$ muni de sa structure de 75
$\mathbf{O}(S)$-module évidente. On obtient donc après changement de base :

Proposition 5.1. — *On a des isomorphismes*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(M_S, \mathbf{O}_S) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(D_S(M)/S) \quad et \quad \mathscr{H}om_{\mathrm{gr.}}(\widetilde{M}_S, \mathscr{O}_S) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}ie(D_S(M)/S),$$

(*où, dans le second isomorphisme,* $\widetilde{M}_S$ *désigne le faisceau de groupes constant sur* S *défini par* M*, et* $\mathscr{H}om_{\mathrm{gr.}}$ *le faisceau des homomorphismes de faisceaux de groupes*)*.*

Corollaire 5.1.1. — *Si* M *est libre de type fini* (ou, comme nous dirons plus tard, si $D_S(M)$ est un tore déployé) *alors* (voir I, 4.6.5 pour la définition de W)

$$\begin{aligned} W(\mathscr{L}ie(D_S(M)/S)) &\xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(D_S(M)/S)\ , \\ M^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}_S &\xrightarrow{\sim} \mathscr{L}ie(D_S(M)/S)\ , \end{aligned}$$

où $M^\vee$ *désigne le dual du groupe abélien* M. *En particulier*

$$\mathbf{O}_S \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbb{G}_{m,S}/S) \quad et \quad \mathscr{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}ie(\mathbb{G}_{m,S}/S).$$

5.2. Normalisateurs et centralisateurs. — Démontrons d'abord quelques lemmes. Rappelons (cf. I 3.1.1) qu'une suite $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ de $\mathbf{O}_S$-modules est dite *exacte* si pour tout $S' \to S$ la suite $0 \to F'(S') \to F(S') \to F''(S') \to 0$ de 76
$\mathbf{O}(S')$-modules est exacte.

[(91)] N.D.E. : Soient $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ un morphisme de $\mathscr{O}_S$-modules et $\mathscr{P} = \mathrm{Coker}(f)$. Si $\mathbb{V}(\mathscr{N}) \to \mathbb{V}(\mathscr{M})$ est un monomorphisme, le morphisme surjectif $\mathrm{Sym}(\mathscr{N}) \to \mathrm{Sym}(\mathscr{P})$ se factorise par $\mathscr{O}_S$, donc $\mathscr{P} = 0$.

De même, une suite $1 \to G' \to G \to G'' \to 1$ de S-groupes est dite exacte si pour tout $S' \to S$ la suite de groupes $1 \to G'(S') \to G(S') \to G''(S') \to 1$ est exacte.

Lemme 5.2.1. — [92] *Soit* $1 \to G' \to G \to G'' \to 1$ *une suite exacte de* S*-groupes.*

(i) *Les suites* $1 \to T_{G'/S}(\mathscr{M}) \to T_{G/S}(\mathscr{M}) \to T_{G''/S}(\mathscr{M}) \to 1$ *et*

$$1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(G'/S, \mathscr{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(G/S, \mathscr{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(G''/S, \mathscr{M}) \longrightarrow 1$$

sont alors exactes.

(ii) *Soit* $1 \to H' \to H \to H'' \to 1$ *une seconde suite de groupes ; elle est exacte si et seulement si la suite ci-dessous est exacte :*

$$1 \longrightarrow G' \underset{S}{\times} H' \longrightarrow G \underset{S}{\times} H \longrightarrow G'' \underset{S}{\times} H'' \longrightarrow 1.$$

(iii) *Si deux des* S*-groupes* G', G, G'' *vérifient* (E)*, le troisième vérifie aussi* (E)*.*

(iv) *Si* $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ *est une suite exacte de* $\mathbf{O}_S$*-modules et si deux des modules* F', F, F'' *sont bons, le troisième l'est aussi.*

(v) *Si deux des* S*-groupes* G', G, G'' *sont bons, le troisième l'est aussi.*

[93] La première partie de (i) est immédiate, et la seconde partie en découle. De même, (ii) est immédiat. Démontrons (iii). Pour abréger, notons $L(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}(G, \mathscr{M})$, $L'(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}(G', \mathscr{M})$, etc. Alors, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & L'(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \arrow[r] \arrow[d] & L(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \arrow[r] \arrow[d] & L''(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & L'(\mathscr{M}) \underset{S}{\times} L'(\mathscr{N}) \arrow[r] & L(\mathscr{M}) \underset{S}{\times} L(\mathscr{N}) \arrow[r] & L''(\mathscr{M}) \underset{S}{\times} L''(\mathscr{N}) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

dans lequel la première (resp. la seconde) ligne est exacte d'après (i) (resp. (i) et (ii)). L'assertion (iii) en résulte.

Prouvons (iv). On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F' \otimes_{\mathbf{O}_S} T_{\mathbf{O}_S/S}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes_{\mathbf{O}_S} T_{\mathbf{O}_S/S}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d] & F'' \otimes_{\mathbf{O}_S} T_{\mathbf{O}_S/S}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_{F'/S}(\mathscr{M}) \arrow[r] & T_{F/S}(\mathscr{M}) \arrow[r] & T_{F''/S}(\mathscr{M}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

à lignes exactes (la première, car $T_{\mathbf{O}_S/S}(\mathscr{M})$ est un $\mathbf{O}_S$-module libre donc plat, la seconde d'après (i)). Il en résulte que si deux des modules F', F, F'' sont bons, le troisième l'est aussi. Enfin, (v) découle de (iii) et (iv).

Lemme 5.2.2. — *Soient* G *un* S*-groupe,* E, H *deux* G*-objets,* F *un* G-$\mathbf{O}_S$*-module.*

(i) *L'homomorphisme canonique* $E^G \times_S H^G \to (E \times_S H)^G$ *est un isomorphisme.*

(ii) *Si* F *est un bon* $\mathbf{O}_S$*-module, il en est de même de* F^G.

[92] N.D.E. : On a détaillé l'énoncé du lemme (et sa démonstration) ; ceci sera utile en 5.3.1.

[93] N.D.E. : On a ajouté la démonstration des points (iii) et (v).

[94] La première assertion est immédiate ; démontrons la seconde. Pour tout $S' \to S$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F^G(I_{S'}(\mathscr{M})) \arrow[r, hook] & F(I_{S'}(\mathscr{M})) \\ F^G(S') \otimes_{\mathbf{O}(S')} \mathbf{O}(I_{S'}(\mathscr{M})) \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, hook] & F(S') \otimes_{\mathbf{O}(S')} \mathbf{O}(I_{S'}(\mathscr{M})) \arrow[u, "\simeq"', "\phi_1"] \end{tikzcd}$$

et l'on doit démontrer que ϕ est bijectif ; or il est évidemment injectif ; montrons qu'il est surjectif. Soit $(t_0, \dots, t_n)$ une base du $\mathbf{O}(S')$-module libre $\mathbf{O}(I_{S'}(\mathscr{M}))$ et soit

$$u = \sum_{i=0}^{n} f_i \otimes t_i$$

un élément de $F(S') \otimes_{\mathbf{O}(S')} \mathbf{O}(I_{S'}(\mathscr{M}))$ tel que $\phi_1(u)$ appartienne à $F^G(I_{S'}(\mathscr{M}))$. Montrons que les f_i appartiennent à $F^G(S')$.

Soit $S'' \to S'$; on peut considérer S'' comme au-dessus de $I_{S'}(\mathscr{M})$ par la section zéro $\varepsilon_{\mathscr{M}}$. Alors, pour tout $g \in G(S'')$, on a :

$$u_{S''} = g \cdot u_{S''} = \sum_{i=0}^{n} g \cdot (f_i)_{S''} \otimes (t_i)_{S''}.$$

Comme les $(t_i)_{S''}$ forment une base de $\mathbf{O}(I_{S''}(\mathscr{M})) \simeq \mathbf{O}(I_{S'}(\mathscr{M})) \otimes_{\mathbf{O}(S')} \mathbf{O}(S'')$ sur $\mathbf{O}(S'')$, il en résulte que $g \cdot (f_i)_{S''} = (f_i)_{S''}$, d'où $f_i \in F^G(S')$ pour tout i.

Notations. — [95] Si E est un S-groupe et F un sous-S-groupe de E, on note E/F le S-*foncteur* qui à tout $S' \to S$ associe l'ensemble $E(S')/F(S')$ des classes $\overline{x} = x\,F(S')$, $x \in E(S')$. Si E est un S-groupe commutatif alors E/F est un S-groupe commutatif.

Soient maintenant G un S-groupe et K un sous-S-groupe de G ; posons $E = \underline{\mathrm{Lie}}(G/S, \mathscr{M})$ et $F = \underline{\mathrm{Lie}}(K/S, \mathscr{M})$. L'action adjointe de K sur E stabilise F, donc induit une action de K sur le S-foncteur E/F. Alors, pour tout $S' \to S$, on a :

$$(E/F)^K(S') = \left\{ \overline{x} \in E(S')/F(S') \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pour tout } f : S'' \to S' \text{ et } k \in K(S''), \\ f^*(x^{-1})\,\mathrm{Ad}(k)(f^*(x)) \in F(S'') \end{array} \right\},$$

où $f^*(x)$ désigne l'image de x dans $E(S'')$.

Théorème 5.2.3. — *Soient* G *un* S-*groupe,* K *un sous*-S-*groupe de* G. *Notons* (I 2.3.3) 77

$$N = \underline{\mathrm{Norm}}_G(K), \qquad Z = \underline{\mathrm{Centr}}_G(K).$$

Faisons opérer K *sur* $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S, \mathscr{M})$ *par l'intermédiaire de la représentation adjointe de* G.

[94] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
[95] N.D.E. : On a détaillé ces notations.

(i) *Si la loi de groupe de* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$ *est commutative* [(*)] [(96)], *alors*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{N/S}, \mathscr{M}) \Big/ \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K/S}, \mathscr{M}) = \Big(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}) \Big/ \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K/S}, \mathscr{M})\Big)^{\mathrm{K}}.$$

(ii) *Si la loi de groupe de* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$ *est commutative* [(*)], *alors*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Z/S}, \mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})^{\mathrm{K}}.$$

(iii) *Si* G *vérifie* (E) (*resp. si* G *et* K *vérifient* (E)), *alors* Z *vérifie* (E) (*resp.* N *vérifie* (E)).

(iv) *Supposons* G *bon, alors* Z *est bon ; si de plus* G *est très bon, alors* Z *est très bon.*

(v) *Supposons* G *et* K *bons, alors* N *est bon ; si de plus* G *est très bon, alors* N *est très bon.*

Pour démontrer (i) et (ii) [(97)] nous utiliserons le lemme suivant, qui résulte du diagramme de suites exactes considéré en 4.1.B (avec G et H intervertis).

Lemme 5.2.3.0. — *Soient* G *un* S*-groupe,* H *un sous-*S*-groupe de* G*, et* $\mathscr{M}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module libre de type fini. Alors* $\mathrm{T}_{\mathrm{H/S}}(\mathscr{M})$ *et* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$ *sont des sous-*S*-groupes de* $\mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M})$ *et l'on a :*

$$\mathrm{T}_{\mathrm{H/S}}(\mathscr{M}) \bigcap \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{H/S}, \mathscr{M}),$$

où l'on a posé $\mathrm{T}_{\mathrm{H/S}}(\mathscr{M}) \bigcap \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}) \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{T}_{\mathrm{H/S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M})} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$.

Comme les foncteurs considérés dans (i) et (ii) commutent à l'extension de la base, il suffit de montrer les égalités de S-points.

Posons H = N (resp. = Z) et soit $\alpha = \pm 1$. D'après le lemme précédent et la définition de N et Z (cf. I 2.3.3), on a : $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{H/S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}) =$

$$\left\{ \mathrm{X} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}) \subset \mathrm{G}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pour tout } f : \mathrm{S}' \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \text{ et } u \in \mathrm{K}(\mathrm{S}'), \\ \left.\begin{array}{l} f^*(\mathrm{X}^{\alpha}) \cdot u \cdot f^*(\mathrm{X}^{-\alpha}) \cdot u^{-1} \in \mathrm{K}(\mathrm{S}') \\ \text{resp. } \; f^*(\mathrm{X}) \cdot u \cdot f^*(\mathrm{X}^{-1}) \cdot u^{-1} = 1 \end{array}\right\} (*) \end{array} \right\},$$

où $f^*(\mathrm{X})$ désigne l'image de X dans $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$.

Pour simplifier l'écriture, notons

$$\mathfrak{g} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}), \quad \mathfrak{k} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K/S}, \mathscr{M}), \quad \mathfrak{n} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{N/S}, \mathscr{M}), \quad \mathfrak{z} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Z/S}, \mathscr{M}).$$

Si $\mathrm{X} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{H/S}, \mathscr{M})(\mathrm{S})$, les égalités $(*)$ sont valables pour tout $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, car $f = \rho \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} \circ f$ se factorise à travers $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ (où $\rho : \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{S}$ est le morphisme structural et $\varepsilon_{\mathscr{M}} : \mathrm{S} \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ la section zéro). On en déduit que

$$\mathfrak{n}(\mathrm{S})/\mathfrak{k}(\mathrm{S}) \subset (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^{\mathrm{K}}(\mathrm{S}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{z}(\mathrm{S}) \subset \mathfrak{g}^{\mathrm{K}}(\mathrm{S}).$$

[(*)] Condition automatiquement vérifiée si G vérifie (E) (cf. 3.9) par exemple si G est représentable.

[(96)] N.D.E. : Pour un exemple où le S-groupe $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$ n'est pas commutatif, voir 6.3.

[(97)] N.D.E. : On a détaillé la démonstration, ajoutant en particulier le lemme 5.2.3.0, implicite dans l'original.

Pour prouver les inclusions réciproques, supposons désormais $\mathfrak{g} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ commutative ; alors $\mathfrak{g}^{\mathrm{K}}$ et $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^{\mathrm{K}}$ sont des S-groupes commutatifs. Soient $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}(\mathrm{S})$ et $\overline{\mathrm{X}}$ son image dans $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})(\mathrm{S})$, supposons que $\overline{\mathrm{X}} \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^{\mathrm{K}}(\mathrm{S})$ (resp. $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}^{\mathrm{K}}(\mathrm{S})$) et montrons que $\mathrm{X} \in \mathfrak{n}(\mathrm{S})$ (resp. $\mathrm{X} \in \mathfrak{z}(\mathrm{S})$). **78**

Soit $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$; montrons que la condition $(*)$ précédente est vérifiée pour tout $u \in \mathrm{K}(\mathrm{S}')$. Considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\rho'"'] & \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[d, "\rho"] \\ \mathrm{S}' \arrow[r, "\rho\circ f"] & \mathrm{S} \end{tikzcd}$$

et soit h la section de ρ' définie par f. Il suffit de montrer que, pour tout $v \in \mathrm{K}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}))$, on a

$$\left.\begin{array}{rl} & p^*(\mathrm{X}^{\alpha}) \cdot v \cdot p^*(\mathrm{X}^{-\alpha}) \cdot v^{-1} \in \mathrm{K}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) \\ \text{resp.} & p^*(\mathrm{X}) \cdot v \cdot p^*(\mathrm{X}^{-1}) \cdot v^{-1} = 1 \end{array}\right\} (**)$$

En effet, prenant $v = \rho'^*(u)$ et appliquant h^* à $(**)$, on obtient $(*)$, puisque $\rho' \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{S}'}$ et $p \circ h = f$.

Montrons maintenant $(**)$; pour simplifier, on écrira X au lieu de $p^*(\mathrm{X})$. Tout $v \in \mathrm{K}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}))$ s'écrit de manière unique $\mathrm{Y} \cdot k$ où $\mathrm{Y} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}')$ et $k \in \mathrm{K}(\mathrm{S}')$. L'expression $\mathrm{X}^{\alpha} \cdot u \cdot \mathrm{X}^{-\alpha} \cdot u^{-1}$ devient alors $\mathrm{X}^{\alpha} \cdot \mathrm{Y} \cdot (k \cdot \mathrm{X}^{-\alpha} \cdot k^{-1}) \cdot \mathrm{Y}^{-1}$ qui, comme $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ est commutatif, s'écrit $\mathrm{X}^{\alpha} \operatorname{Ad}(k)(\mathrm{X}^{-\alpha})$. Or celui-ci est a priori dans $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}')$; tenant compte du lemme 5.2.3.0, la condition $(**)$ pour X devient donc : pour tout $k \in \mathrm{K}(\mathrm{S}')$,

$$\begin{cases} \operatorname{Ad}(k)(\mathrm{X}) = \mathrm{X} & \text{si} \quad \mathrm{H} = \mathrm{Z}; \\ \mathrm{X}^{\alpha} \operatorname{Ad}(k)(\mathrm{X}^{-\alpha}) \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}') & \text{si} \quad \mathrm{H} = \mathrm{N}. \end{cases}$$

Lorsque $\mathrm{H} = \mathrm{Z}$, cette condition est bien conséquence de l'hypothèse $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}^{\mathrm{K}}(\mathrm{S})$. Lorsque $\mathrm{H} = \mathrm{N}$, la condition s'écrit aussi :

$$(*') \qquad \operatorname{Ad}(k)(\overline{\mathrm{X}}) = \overline{\mathrm{X}} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ad}(k)(\overline{\mathrm{X}}^{-1}) = \overline{\mathrm{X}}^{-1},$$

or la seconde condition de $(*')$ est conséquence de la première, puisque l'opération de K sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ respecte la structure de groupe de ce dernier. Donc, lorsque $\mathrm{H} = \mathrm{N}$, la condition $(**)$ pour X est bien conséquence de l'hypothèse $\overline{\mathrm{X}} \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^{\mathrm{K}}(\mathrm{S})$. Ceci démontre (i) et (ii).

Pour prouver (iii)–(v), notons $\mathfrak{g}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ et définissons de même $\mathfrak{k}(\mathscr{M})$, $\mathfrak{z}(\mathscr{M})$ et $\mathfrak{n}(\mathscr{M})$. Si G/S vérifie (E), alors $\mathfrak{g}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \simeq \mathfrak{g}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathfrak{g}(\mathscr{N})$ et donc, d'après 5.2.2 (i),

$$\mathfrak{g}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N})^{\mathrm{K}} \simeq \mathfrak{g}(\mathscr{M})^{\mathrm{K}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathfrak{g}(\mathscr{N})^{\mathrm{K}}$$

d'où $\mathfrak{z}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \simeq \mathfrak{z}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathfrak{z}(\mathscr{S})$, donc Z vérifie (E). Si de plus K/S vérifie (E), on obtient successivement des isomorphismes :

$$\begin{aligned}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) &\simeq (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})(\mathscr{M}) \underset{\mathrm{S}}{\times} (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})(\mathscr{N})\\ (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^{\mathrm{K}}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) &\simeq (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})(\mathscr{M})^{\mathrm{K}} \underset{\mathrm{S}}{\times} (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})(\mathscr{N})^{\mathrm{K}},\end{aligned}$$

puis un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{k}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathfrak{n}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathfrak{n}/\mathfrak{k})(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{k}(\mathscr{M}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathfrak{k}(\mathscr{N}) \arrow[r] & \mathfrak{n}(\mathscr{M}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathfrak{n}(\mathscr{N}) \arrow[r] & (\mathfrak{n}/\mathfrak{k})(\mathscr{M}) \underset{\mathrm{S}}{\times} (\mathfrak{n}/\mathfrak{k})(\mathscr{N}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

d'où il résulte que $\mathfrak{n}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \simeq \mathfrak{n}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathfrak{n}(\mathscr{N})$, donc N vérifie (E).

Désormais, notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ et définissons de même $\mathfrak{k}, \mathfrak{z}, \mathfrak{n}$. Si G est bon, $\mathfrak{g}$ est un bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module donc, d'après 5.2.2 (ii), $\mathfrak{z} \simeq \mathfrak{g}^{\mathrm{K}}$ l'est aussi, donc Z (qui vérifie (E) d'après (iii)) est bon. Si de plus K est bon, alors $\mathfrak{k}$ est un bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module donc, d'après 5.2.1 (iv) et 5.2.2 (ii), il en est de même de $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ et $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^{\mathrm{K}}$. Compte tenu de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{n} \longrightarrow (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^{\mathrm{K}} \longrightarrow 0,$$

on obtient, d'après 5.2.1 (iv) à nouveau, que $\mathfrak{n}$ est bon. Enfin, si en plus des conditions précédentes, G est très bon, c.-à-d., si on a identiquement $[x, x] = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$, il est clair que Z et N sont très bons. Ceci prouve (iii), (iv) et (v).

Corollaire 5.2.3.1. — *On a* $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})/\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})^{\mathrm{G}}$ *si la loi de groupe de* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ *est commutative.*

Corollaire 5.2.3.2. — *Si la loi de groupe de* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ *est commutative et si* K *est un sous-groupe* invariant *de* G*, alors*

$$\Big(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) \Big/ \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K}/\mathrm{S})\Big)^{\mathrm{K}} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) \Big/ \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K}/\mathrm{S}).$$

79 **5.3. Représentations linéaires.** — Soit G un *bon* S-groupe opérant linéairement sur un *bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module F via

$$\rho : \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}).$$

On a défini (4.7.1 et 4.8.2) une représentation linéaire correspondante

$$\rho' : \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}).$$

Les sous-S-groupes $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})$ et $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})$ sont définis pour toute partie E de F, par exemple pour tout sous-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module E de F.

Définition 5.3.0. — On posera de manière analogue : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$,

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})}(\mathrm{E})(\mathrm{S}') = \{\mathrm{X} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{S}') \mid \rho'(\mathrm{X})\mathrm{E}_{\mathrm{S}'} \subset \mathrm{E}_{\mathrm{S}'}\};$$
$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})}(\mathrm{E})(\mathrm{S}') = \{\mathrm{X} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{S}') \mid \rho'(\mathrm{X})\mathrm{E}_{\mathrm{S}'} = 0\}.$$

(Notons que cette construction se fait pour toute représentation linéaire d'une $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-« algèbre de Lie » (au sens de 4.9) et que les deux sous-objets construits sont des sous-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules stables par le crochet).

Théorème 5.3.1. — *Soit* G *un* bon S-*groupe opérant linéairement sur un* bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-*module* F *et soit* E *un sous-*$\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module de* F.

(i) *On a* $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})/\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})}(\mathrm{E})$ *et* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})$ *est un bon* S-*groupe ; il est très bon si* G *l'est.*

(ii) *Supposons que* E *soit un* bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module. Alors* [98] $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})/\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})}(\mathrm{E})$ *et* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})$ *est un bon* S-*groupe ; il est très bon si* G *l'est.*

La démonstration est laissée au lecteur.

5.3.2. — Soit G un bon S-groupe ; ce qui précède s'applique en particulier au cas où
on prend pour ρ la représentation adjointe de G. Soit E un *bon* [99] sous-module de **80**
$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$; on lui associe donc deux sous-groupes de G, son centralisateur et son normalisateur. D'après 5.3.1, leurs algèbres de Lie sont respectivement le centralisateur et le normalisateur de E dans $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ calculés comme d'habitude à l'aide du crochet :

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})}(\mathrm{E})(\mathrm{S}') = \{\mathrm{X} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{S}') \mid [\mathrm{X}, \mathrm{E}_{\mathrm{S}'}] = 0\}.$$
$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})}(\mathrm{E})(\mathrm{S}') = \{\mathrm{X} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{S}') \mid [\mathrm{X}, \mathrm{E}_{\mathrm{S}'}] \subset \mathrm{E}_{\mathrm{S}'}\}.$$

5.3.3. — Soit K un sous-S-groupe de G, alors $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K}/\mathrm{S})$ est un sous-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$; supposons que $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K}/\mathrm{S})$ soit un *bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module [99] (ce qui est le cas si K est un bon S-groupe). On a évidemment

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{K}) \subset \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K}/\mathrm{S}))$$
$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{K}) \subset \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K}/\mathrm{S})),$$

d'où, d'après 5.3.1,

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{K})/\mathrm{S}) \subset \underline{\mathrm{Centr}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K}/\mathrm{S}))$$
$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{K})/\mathrm{S}) \subset \underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K}/\mathrm{S})),$$

mais aucune de ces quatre inclusions n'est a priori une identité ; nous en verrons par la suite bien des exemples.

Il résulte en particulier de ces inclusions que si K est un *sous-groupe invariant* de G, alors $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K}/\mathrm{S})$ est un *idéal* de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$.

---

(98) N.D.E. : On a corrigé l'original, qui énonçait l'égalité qui suit sans hypothèses sur E ; voir 6.5.1 pour des contre-exemples.

(99) N.D.E. : On a ajouté cette hypothèse ; cf. 6.5.1.

6. Remarques diverses

6.1. On peut définir le crochet de deux automorphismes infinitésimaux pour un S-
81 foncteur X qui ne soit pas nécessairement un groupe. Il suffit d'appliquer les résultats de cet exposé au groupe $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})$. Pour pouvoir aboutir à un formalisme agréable, on est conduit à supposer X *bon*, c'est-à-dire à supposer que le $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ est bon (si X est un S-groupe, cette définition coïncide évidemment avec la définition 4.6).

6.2. Il existe des foncteurs possédant des endomorphismes infinitésimaux qui ne soient pas des automorphismes, donc *a fortiori* ne vérifiant pas la condition (E). [100] Pour tout ensemble pointé (E, x_0), soit MA(E) le monoïde abélien libre engendré par E et soit $\mathrm{MA}_{\mathrm{P}}(\mathrm{E}, x_0)$ le monoïde abélien obtenu en quotientant MA(E) par la relation d'équivalence engendrée par la relation $m \sim x_0 + m$. Alors $(\mathrm{E}, x_0) \mapsto \mathrm{MA}_{\mathrm{P}}(\mathrm{E}, x_0)$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli de la catégorie des monoïdes abéliens vers celle des ensembles pointés ; on dira que $\mathrm{MA}_{\mathrm{P}}(\mathrm{E}, x_0)$ est le « monoïde abélien libre sur l'ensemble pointé (E, x_0) ».

Prenons alors pour X le foncteur qui à tout schéma S associe le monoïde abélien libre sur l'ensemble $\mathbf{O}(\mathrm{S})$, pointé par l'élément zéro. Chaque morphisme $f : \mathrm{S} \to \mathrm{I}_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\varepsilon])$ correspond à un élément de carré nul u_f de $\mathbf{O}(\mathrm{S})$, donc définit un endomorphisme de X(S) par $x \mapsto x + u_f$ (somme dans $\mathrm{MA}_{\mathrm{P}}(\mathbf{O}(\mathrm{S}), 0)$). On obtient ainsi un endomorphisme ϕ de $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathbb{Z}}} = \mathrm{X} \times_{\mathbb{Z}} \mathrm{I}_{\mathbb{Z}}$, défini comme suit. Pour tout $f \in \mathrm{I}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{S})$ et $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$,

$$\phi((x, f)) = (x + u_f, f).$$

Si $f_0 : \mathrm{S} \to \mathrm{I}_{\mathbb{Z}}$ est la composée du morphisme structural $\mathrm{S} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et de la section zéro de $\mathrm{I}_{\mathbb{Z}}$, l'élément correspondant est $u_{f_0} = 0$, et donc $\phi((x, f_0)) = (x, f_0)$, puisque $x + 0 = x$ dans $\mathrm{MA}_{\mathrm{P}}(\mathbf{O}(\mathrm{S}), 0)$. Ceci montre que ϕ induit l'identité sur X ; c'est donc un endomorphisme infinitésimal de X qui n'est évidemment pas un automorphisme.

6.3. Il existe des modules qui ne sont pas bons. D'une part, on peut modifier légèrement le contre-exemple précédent : [101] prenons pour F(S) le $\mathbf{O}(\mathrm{S})$-module libre de base les éléments de $\mathbf{O}(\mathrm{S})$, alors F ne vérifie pas la condition (E) par rapport à $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$; de plus, soit G le $\mathbb{Z}$-groupe défini par $\mathrm{G}(\mathrm{S}) = \mathrm{GL}_n(\mathrm{R}(\mathrm{S}))$, où $n \geqslant 2$ et R(S) est la $\mathbf{O}(\mathrm{S})$-algèbre du groupe abélien $\mathbf{O}(\mathrm{S})$, alors le $\mathbb{Z}$-groupe $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathbb{Z})$ n'est pas commutatif.

[102] D'autre part, on peut donner les contre-exemples suivants. Soit $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(k)$, k un corps de caractéristique $p > 0$.

a) Soit F le $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module qui à tout S-schéma T associe $\mathrm{F}(\mathrm{T}) = \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{O}_{\mathrm{T}})$ muni de la structure de $\mathbf{O}(\mathrm{T})$-module obtenue en faisant opérer les scalaires par l'intermédiaire de la puissance p-ième, c'est-à-dire, $r \cdot f = r^p f$, pour $r \in \mathbf{O}(\mathrm{T}), f \in \mathrm{F}(\mathrm{T})$. Comme S-foncteur en groupes, F est isomorphe à $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$. Donc F/S vérifie (E) et $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S})$ s'identifie à $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}/\mathrm{S}) \cong \mathbf{O}_{\mathrm{S}}$. Alors, le morphisme canonique $\mathrm{F} \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S})$ est,

[100] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit. En particulier, la définition correcte du « monoïde abélien libre sur un ensemble pointé » nous a été signalée par O. Gabber.

[101] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

[102] N.D.E. : Dans ce qui suit, on a détaillé l'exemple a) et ajouté l'exemple b).

pour tout $T \to S$, l'application identique $F(T) \to \mathbf{O}(T)$: il respecte bien la structure de groupe abélien mais pas la structure de module. Donc F n'est pas bon (cf. 4.4.1).

b) Soit $\boldsymbol{\alpha}_{p,k}$ le k-foncteur en groupes qui à tout S-schéma T associe

$$\boldsymbol{\alpha}_{p,k}(T) = \{x \in \mathscr{O}(T) \mid x^p = 0\},$$

il est représenté par $\mathrm{Spec}(k[X]/(X^p)$ donc c'est un très bon S-groupe ; il est aussi muni d'une structure de $\mathbf{O}_S$-module, mais ce n'est pas un bon $\mathbf{O}_S$-module, car le morphisme canonique $\boldsymbol{\alpha}_{p,k} \to \underline{\mathrm{Lie}}(\boldsymbol{\alpha}_{p,k}/k) = \mathbb{G}_{a,k}$ n'est pas bijectif.

6.4. Soit G un foncteur en groupes sur S. On a par définition les implications suivantes 82

$$(G/S \text{ vérifie (E)}) \Longleftarrow (G \text{ est bon}) \Longleftarrow (G \text{ est très bon}).$$ [103]

Il serait intéressant de démontrer ou de contre-exempler les implications en sens inverse.

6.5. [104] Soit Nil le $\mathbb{Z}$-foncteur en groupes défini comme suit : pour tout schéma S, Nil(S) est l'idéal de $\mathscr{O}(S)$ formé des éléments nilpotents, i.e.

$$\mathrm{Nil}(S) = \{x \in \mathscr{O}(S) \mid \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x^n = 0\}.$$

(N. B. Nil est très bon mais n'est pas représentable). Soient Nil^2, $\mathbf{O}_{\text{réd}}$ et F les $\mathbb{Z}$-foncteurs en groupes qui à tout schéma S associent, respectivement, l'idéal $\mathrm{Nil}(S)^2$ et

$$\mathbf{O}_{\text{réd}}(S) = \mathscr{O}(S)/\mathrm{Nil}(S), \qquad F(S) = \mathscr{O}(S)/\mathrm{Nil}(S)^2.$$

On voit facilement que $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\text{réd}}/\mathbb{Z}) = 0$, donc le $\mathbf{O}_{\mathbb{Z}}$-module $\mathbf{O}_{\text{réd}}$ n'est pas bon (bien que ce soit un bon $\mathbb{Z}$-groupe). Si $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de rang fini, on a

$$\mathrm{Nil}^2(I_S(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N})) \simeq \mathrm{Nil}^2(S) \oplus \mathrm{Nil}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{M} \oplus \mathrm{Nil}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{N}$$

et donc

$$F(I_S(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N})) \simeq F(S) \oplus \mathbf{O}_{\text{réd}}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{M} \oplus \mathbf{O}_{\text{réd}}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{N}.$$

On en déduit, d'une part, que le $\mathbb{Z}$-foncteur en groupes F vérifie la condition (E) et, d'autre part, que $\underline{\mathrm{Lie}}(F/\mathbb{Z}) = \mathbf{O}_{\text{réd}}$; comme ce dernier n'est pas un bon $\mathbf{O}_{\mathbb{Z}}$-module, ceci montre que F est un exemple de $\mathbb{Z}$-groupe qui vérifie (E) mais qui n'est pas bon.

6.5.1. — Donnons aussi les contre-exemples signalés en 5.3.1–5.3.3. Soient S un schéma, F le bon $\mathbf{O}_S$-module $\mathbf{O}_S^{\oplus 2}$ muni de l'action naturelle du bon S-groupe $G = \mathrm{GL}_{2,S}$, et E le sous-$\mathbf{O}_S$-module de F formé des couples (x_1, x_2) tels que x_2 soit nilpotent. Posons $N = \underline{\mathrm{Norm}}_G(E)$. Alors $\underline{\mathrm{Lie}}(N/S) = \underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$ tandis que, pour tout $S' \to S$, on a

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)}(E)(S') = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ x & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, x \in \mathscr{O}(S'),\ x \text{ nilpotent} \right\}$$

donc $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Norm}}_G(E)/S) \neq \underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)}(E)$.

---

[103] N.D.E. : Et G est très bon s'il est représentable (4.11). Pour des critères de représentabilité, voir par exemple [**MO67**]. D'autre part, pour les automorphismes d'un groupe algébrique affine (sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0), citons [**HM69**].

[104] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe.

En considérant le produit semi-direct $G_1 = F \cdot G$, on obtient un contre-exemple analogue où E est un sous-$\mathbf{O}_S$-module de $\underline{\mathrm{Lie}}(G_1/S)$; de plus, avec les notations introduites plus haut, $E = \underline{\mathrm{Lie}}(K/S)$ où K est le sous-groupe $\mathbf{O}_S \oplus \mathrm{Nil}^2$ de F (c.-à-d., pour tout $S' \to S$, $K(S')$ est formé des couples (x_1, x_2) tels que $x_2 \in \mathrm{Nil}(S')^2$).

Bibliographie

(105)

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes Algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[HM69] G. Hochschild, G. D. Mostow, *Automorphisms of affine algebraic groups*, J. Algebra **13** (1969), 535-543.

[MO67] H. Matsumura, F. Oort, *Representability of group functors and automorphisms of algebraic schemes*, Invent. math. **4** (1967), 1-25.

(105) N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé

EXPOSÉ III

EXTENSIONS INFINITÉSIMALES

par M. Demazure

Dans cet exposé, on se place dans la situation générale suivante. On a un schéma S et un idéal cohérent nilpotent $\mathcal{I}$ sur S. On désigne par S_n le sous-schéma fermé de S défini par l'idéal $\mathcal{I}^{n+1}$ ($n \geqslant 0$). En particulier S_0 est défini par $\mathcal{I}$. Comme $\mathcal{I}$ est nilpotent, S_n est égal à S pour n assez grand et les S_i ont même espace topologique sous-jacent. Un exemple typique de cette situation est le suivant : S est le spectre d'un anneau artinien local A, $\mathcal{I}$ est l'idéal défini par le radical de A, donc S_0 est le spectre du corps résiduel de A. **83**

Dans la situation précédente, on se donne un certain nombre de données au-dessus de S_0 et on cherche au-dessus de S des données qui les relèvent, c'est-à-dire qui les redonnent par changement de base de S à S_0. Ceci se fait de proche en proche, par l'intermédiaire des S_n. À chaque pas, on se propose de définir les obstructions rencontrées et de classifier, lorsqu'elles existent, les solutions obtenues.

Le passage de S_n à S_{n+1} peut se généraliser ainsi : on a un schéma S, deux idéaux $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ avec $\mathcal{I} \supset \mathcal{J}$, et $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = 0$ (dans le cas précédent S, $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont respectivement S_{n+1}, $\mathcal{I}/\mathcal{I}^{n+2}$, $\mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}$). On note S_0 (resp. $S_{\mathcal{J}}$) le sous-schéma fermé de S défini par $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{J}$) et on se pose un problème d'extension de $S_{\mathcal{J}}$ à S.

Dans SGA 1 III ont été traités les problèmes d'extension de morphismes de schémas et d'extension de schémas. Nous nous poserons ici les problèmes d'extension de morphismes de groupes, d'extension de structures de groupes et d'extension de sous-groupes. **84**

Nous avons rassemblé dans un n°0 les résultats de SGA 1 III qui nous seront utiles, pour les mettre sous la forme la plus pratique pour notre propos, et pour éviter au lecteur d'avoir à se reporter constamment à SGA 1 III. [1] Le n°1 rassemble des calculs de cohomologie des groupes utiles par la suite et qui n'ont rien à voir avec la théorie des schémas. Les numéros 2 et 3 traitent respectivement de l'*extension des morphismes de groupes* et de l'*extension des structures de groupes*. Dans le n°4, nous avons rappelé

[1] N.D.E. : Le lecteur pourra préférer commencer par la lecture de la section 1, plus facile, qui peut servir de motivation et de guide pour les résultats obtenus dans la section 0.

rapidement la démonstration d'un résultat énoncé dans TDTE IV concernant l'extension des sous-schémas et appliqué ce résultat au problème d'*extension des sous-groupes. Pour la suite du Séminaire, seul le résultat du* n°2, *concernant l'extension des morphismes de groupes, sera indispensable.* (2)

L'idée de ramener les problèmes d'extensions infinitésimales aux calculs habituels de cohomologie dans les extensions de groupes a été suggérée par J. Giraud lors de l'exposé oral (dont les calculs étaient nettement plus compliqués et moins transparents). Malheureusement, il semble que cette méthode ne s'applique bien qu'aux deux premiers problèmes étudiés, et nous n'avons pu échapper à des calculs assez pénibles dans le cas des extensions de sous-groupes.

Pour simplifier le langage, nous appellerons Y-foncteur, resp. Y-schéma, etc., un foncteur, resp. schéma, etc., muni d'un morphisme dans le foncteur Y, étendant ainsi les définitions de l'exposé I (qui ne concernaient que le cas d'un Y représentable).

0. Rappels de SGA 1 III et remarques diverses

85

Énonçons d'abord une définition générale.

Définition 0.1. — Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, X un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$, G un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe opérant sur X. On dit que X est *formellement principal homogène* (3) sous G si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) pour chaque objet S de $\mathscr{C}$, l'ensemble X(S) est vide ou principal homogène sous G(S) ;

(ii) le morphisme de foncteurs $\mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ défini ensemblistement par $(g, x) \mapsto (gx, x)$ est un isomorphisme.

Ceci fait, nous allons mettre les résultats de SGA 1 III § 5 (4) sous la forme qui nous sera la plus utile. Nous emploierons les notations générales suivantes dans tout ce numéro. On a un schéma S et sur S deux idéaux quasi-cohérents $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ tels que

$$\mathcal{I} \supset \mathcal{J} \quad \text{et} \quad \mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = 0.$$

On aura donc en particulier $\mathcal{J}^2 = 0$. On notera S_0 (resp. $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$) le sous-schéma fermé de S défini par l'idéal $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{J}$). Pour tout S-foncteur X, on désignera systématiquement par X_0 et $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$ les foncteurs obtenus par changement de base de S à S_0 et $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$. Mêmes notations pour un morphisme.

(2) N.D.E. : Toutefois, 3.10 est utilisé dans XXIV, 1.13. D'autre part, 4.37 est utilisé dans la preuve de IX, 3.2 bis et 3.6 bis, mais ceux-ci se déduisent aussi de résultats de l'Exp. X, n'utilisant pas 4.37.

(3) N.D.E. : On dit aussi « pseudo-torseur », cf. EGA IV_4, 16.5.15. D'autre part, la notion plus générale d'objet *formellement homogène* (pas nécessairement *principal* homogène), est définie dans l'Exp. IV, 6.7.1.

(4) N.D.E. : voir aussi EGA IV_4, 16.5.14–18.

Définition 0.1.1. — [5] Soit X un S-foncteur. Définissons un foncteur X^+ au-dessus de S par la formule :

$$\mathrm{Hom}_S(Y, X^+) = \mathrm{Hom}_{S_{\mathcal{J}}}(Y_{\mathcal{J}}, X_{\mathcal{J}}) = \mathrm{Hom}_S(Y_{\mathcal{J}}, X)$$

pour un S-schéma variable Y. Dans les notations de Exp. II, 1, on a

$$X^+ \simeq \prod_{S_{\mathcal{J}}/S} X_{\mathcal{J}}.$$

Le morphisme identique de $X_{\mathcal{J}}$ définit par construction un S-morphisme : 86

$$p_X : X \longrightarrow X^+.$$

[6] Explicitement, pour tout S-schéma Y, l'application

$$p_X(Y) : \quad \mathrm{Hom}_S(Y, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(Y, X^+) = \mathrm{Hom}_S(Y_{\mathcal{J}}, X)$$

est l'application induite par le morphisme $Y_{\mathcal{J}} \to Y$.

Remarque 0.1.2. — Remarquons maintenant que si X est un S-foncteur en groupes, $X_{\mathcal{J}}$ est un $S_{\mathcal{J}}$-foncteur en groupes ; alors la formule de définition de X^+ le munit d'une structure de S-foncteur en groupes, et la description de p_X ci-dessus montre que $p_X : X \to X^+$ est un morphisme de S-foncteurs en groupes.

Remarque 0.1.3. — D'autre part, pour tout S-foncteur en groupes Y, on a :

$$\mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(Y, X^+) = \mathrm{Hom}_{S_{\mathcal{J}}\text{-gr.}}(Y_{\mathcal{J}}, X_{\mathcal{J}}).$$

En effet, soit $f \in \mathrm{Hom}_S(Y, X^+)$, correspondant à $f_{\mathcal{J}} \in \mathrm{Hom}_{S_{\mathcal{J}}}(Y_{\mathcal{J}}, X_{\mathcal{J}})$; la condition pour que $f \in \mathrm{Hom}_{S\text{-gr.}}(Y, X^+)$ est que, pour tout $T \to S$ et $y, y' \in Y(T)$, on ait $f(y \cdot y') = f(y) \cdot f(y')$, et ceci équivaut à

$$f_{\mathcal{J}}(y_{\mathcal{J}}) \cdot f_{\mathcal{J}}(y'_{\mathcal{J}}) = f_{\mathcal{J}}((y \cdot y')_{\mathcal{J}});$$

comme $(y \cdot y')_{\mathcal{J}} = y_{\mathcal{J}} \cdot y'_{\mathcal{J}}$ (puisque $Y(T) \to Y(T_{\mathcal{J}}) = Y_{\mathcal{J}}(T_{\mathcal{J}})$ est un morphisme de groupes), ceci est la condition pour que $f_{\mathcal{J}}$ soit un morphisme de groupes. Appliquant ceci à $Y = X$, on retrouve que p_X, qui correspond à $\mathrm{id}_{X_{\mathcal{J}}}$, est un morphisme de S-foncteurs en groupes.

Revenons maintenant au cas général, mais supposons que X soit un S-*schéma*. Un S-morphisme d'un S-schéma variable Y dans X^+ étant par définition un $S_{\mathcal{J}}$-morphisme $g_{\mathcal{J}}$ de $Y_{\mathcal{J}}$ dans $X_{\mathcal{J}}$, on va définir un X^+-foncteur en groupes abéliens L_X comme suit.

Scholie 0.1.4. — [7] Si $\pi : Y \to S$ est un morphisme de schémas et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_S$-module, on note $\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_Y$ l'image inverse $\pi^*(\mathscr{M})$. Si $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathscr{O}_S$, on note $\mathcal{J}\mathscr{O}_Y$ l'idéal de $\mathscr{O}_Y$, image du morphisme

$$\pi^*(\mathcal{J}) = \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_Y \longrightarrow \mathscr{O}_Y .$$

[5] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 0.1.1, ..., 0.1.13 pour mettre en évidence les définitions et résultats qui s'y trouvent.

[6] N.D.E. : On a ajouté la phrase suivante, et détaillé les deux remarques qui suivent.

[7] N.D.E. : On a ajouté ce scholie.

Notons que, pour tout morphisme de S-schémas $f : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$, on a un épimorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$-modules :

$$f^*(\mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \longrightarrow \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}\,, \tag{0.1.4}$$

comme il résulte du diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Z}} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Z}} \arrow[d] \\
f^*(\mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) = (\mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Z}} \arrow[r] & \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}.
\end{tikzcd}$$

Définition 0.1.5. — [8] Soit X un S-*schéma*. Pour tout X^+-schéma Y, donné par un morphisme $g_{\mathcal{J}} : \mathrm{Y}_{\mathcal{J}} \to \mathrm{X}_{\mathcal{J}}$, on pose :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}^+}(\mathrm{Y}, \mathrm{L_X}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}}(g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}), \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}),$$

où $\Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}$ désigne le module des différentielles relatives de X_0 par rapport à S_0 (cf. SGA 1, I.1 ou EGA IV_4, 16.3), et où on regarde $\mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ comme un $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}$-module grâce au fait qu'il est annulé par $\mathcal{I}$.

Alors, $\mathrm{L_X}$ est un X^+-foncteur en groupes abéliens. [9] En effet, pour tout X^+-morphisme $f : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$, le foncteur f_0^* et le morphisme $f_0^*(\mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \to \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$ de (0.1.4) induisent un morphisme naturel de groupes abéliens $\mathrm{L_X}(f)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}}(g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}), \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Z}_0}}&(f_0^* g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}), f_0^*(\mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}))\\
&\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Z}_0}}(f_0^* g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}), \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}).\end{aligned}$$

Enfin, remarquons que $\mathrm{L_X}(f)$ se décrit de manière locale simplement comme suit. Notons d'abord que Y et $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ ont même espace topologique sous-jacent, et il en est de même de V et $\mathrm{V}_{\mathcal{J}}$, si V est un ouvert de Y. Soient alors $\mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ un ouvert affine de X au-dessus d'un ouvert affine $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ de S, $\mathrm{V} = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ un ouvert affine de Y tel que $g_{\mathcal{J}}(\mathrm{V}_{\mathcal{J}}) \subset \mathrm{U}$, et $\mathrm{W} = \mathrm{Spec}(\mathrm{C})$ un ouvert affine de $f^{-1}(\mathrm{V})$. Soient J et I les idéaux de Λ correspondant à $\mathcal{J}$ et $\mathcal{I}$. Alors f (resp. $g_{\mathcal{J}}$) induit un morphisme de Λ-algèbres $\theta : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ (resp. $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}/\mathrm{JB}$), et l'on a évidemment $\theta(\mathrm{JB}) \subset \mathrm{JC}$. D'autre part, $m \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}}(g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}, \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ induit un élément D de

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{V}_0}}(g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{U}/\mathrm{S}}), \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{V}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}/\mathrm{IB}}(\Omega^1_{\mathrm{A}/\Lambda} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}/\mathrm{IB}, \mathrm{JB}) = \mathrm{Dér}_{\Lambda}(\mathrm{A}, \mathrm{JB}),$$

et l'image de $\mathrm{L_X}(f)(m)$ dans

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{W}_0}}(f_0^* g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{U}/\mathrm{S}}), \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}/\mathrm{IC}}(\Omega^1_{\mathrm{A}/\Lambda} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}/\mathrm{IC}, \mathrm{JC}) = \mathrm{Dér}_{\Lambda}(\mathrm{A}, \mathrm{JC})$$

n'est autre que $\theta \circ \mathrm{D}$.

---

[8] N.D.E. : L'introduction du foncteur $\mathrm{L_X}$ conduit à une extension « fonctorielle en Y » (et en X) de SGA 1, III, Prop. 5.1 ; voir plus bas 0.1.8 et 0.1.9, ainsi que 0.1.10 et 0.2. De plus, lorsque X est un S-foncteur en groupes, $\mathrm{L_X}$ donne naissance, sous certaines hypothèses, à un S-foncteur en groupes L'_{X} et à une suite exacte $1 \to \mathrm{L}'_{\mathrm{X}} \to \mathrm{X} \to \mathrm{X}^+$ (cf. 0.4, 0.9 et 0.11), qui jouent un rôle essentiel dans cet exposé (cf. Théorèmes 2.1, 3.5 et 4.21).

[9] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

Remarque 0.1.6. — [10] Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{W}$ un S-morphisme. Il induit un S-morphisme $f^+ : \mathrm{X}^+ \to \mathrm{W}^+$ défini comme suit : si g est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}^+)$, correspondant à un S-morphisme $g_{\mathcal{J}} : \mathrm{Y}_{\mathcal{J}} \to \mathrm{X}$, alors $f^+(g)$ est l'élément $f \circ g_{\mathcal{J}}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{W}^+)$. Il est clair que le diagramme suivant est commutatif : 87

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{\mathrm{X}}"'] & \mathrm{W} \arrow[d, "p_{\mathrm{W}}"] \\ \mathrm{X}^+ \arrow[r, "f^+"] & \mathrm{W}^+ \end{tikzcd} .$$

Rappels 0.1.7. — [11] Dans ce paragraphe, étant donné un S-schéma X, on « rappelle » certaines propriétés fonctorielles du module des différentielles $\Omega^1_{\mathrm{X/S}}$ et du premier voisinage infinitésimal de la diagonale, $\Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}}$, propriétés qui découlent facilement de EGA IV_4, §§ 16.1–16.4, mais qui n'y figurent pas explicitement.

a) Commençons par rappeler les faits suivants (cf. EGA II, §§ 1.2–1.5). Soient $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme de schémas, $\pi : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ un X-schéma *affine*, $\mathscr{B}$ la $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-algèbre quasi-cohérente $\pi_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}'})$; alors le Y-schéma $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}'$ est affine et correspond à la $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-algèbre quasi-cohérente $g^*(\mathscr{B})$, et l'on a un diagramme commutatif de bijections :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}') \arrow[d, "\wr"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}\text{-alg.}}(\mathscr{B}, g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-alg.}}(g^*(\mathscr{B}), \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}). \end{tikzcd}$$

De plus, ces bijections sont fonctorielles en le couple $(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$, c.-à-d., si W' est un W-schéma affine, correspondant à la $\mathscr{O}_{\mathrm{W}}$-algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A}$, si l'on a un diagramme commutatif de morphismes de schémas :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{X}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & \mathrm{W}' \arrow[d] \\ \mathrm{Y} \arrow[ur, dashed, "g'"] \arrow[r, "g"] & \mathrm{X} \arrow[r, "f"] & \mathrm{W} \end{tikzcd}$$

et si l'on note $\phi : \mathscr{A} \to f_*(\mathscr{B})$ et $\phi^\sharp : f^*(\mathscr{A}) \to \mathscr{B}$ (resp. $\theta : \mathscr{B} \to g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ et $\theta^\sharp : g^*(\mathscr{B}) \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$) les morphismes d'algèbres associés à f' (resp. à un X-morphisme variable $g' : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}'$), alors on a le diagramme commutatif suivant (où Y est vu

[10] N.D.E. : On a détaillé cette remarque.
[11] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe (voir aussi [**DG70**], § I.4, n$^{\mathrm{os}}$ 1-2).

comme W-schéma via $f\circ g$) :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y},\mathrm{X}') \arrow[r, "g'\mapsto f'\circ g'"] \arrow[dd, "\wr"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{W}}(\mathrm{Y},\mathrm{W}') \arrow[dr, "\simeq"] & \\
 & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{W}}\text{-alg.}}(\mathscr{A}, f_*g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}\text{-alg.}}(\mathscr{B}, g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})) \arrow[urr, "\theta\mapsto f_*(\theta)\circ\phi"] \arrow[rr, "\theta\mapsto\theta\circ\phi^\sharp"] \arrow[d, "\wr"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}\text{-alg.}}(f^*(\mathscr{A}), g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-alg.}}(g^*(\mathscr{B}), \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \arrow[rr, "\theta^\sharp\mapsto\theta^\sharp\circ g^*(\phi^\sharp)"] & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-alg.}}(g^*f^*(\mathscr{A}), \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}).
\end{tikzcd}
$$

b) Soit maintenant X un S-schéma. Soient $\Omega^1_{\mathrm{X/S}}$ le module des différentielles de X sur S, et $\Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}}$ le premier voisinage infinitésimal de l'immersion diagonale $\delta_{\mathrm{X}}:\mathrm{X}\to\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}$; c'est un sous-schéma de $\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}$, dont la diagonale $\Delta_{\mathrm{X/S}}$ est un sous-schéma fermé. On note $\mathrm{pr}^i_{\mathrm{X}}$ ($i=1,2$) les deux projections $\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}$, et π_{X} la restriction de $\mathrm{pr}^1_{\mathrm{X}}$ à $\Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}}$.

D'une part, tout morphisme $f:\mathrm{X}\to\mathrm{W}$ de S-schémas induit un S-morphisme $\Delta^{(1)}f:\Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}}\to\Delta^{(1)}_{\mathrm{W/S}}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \arrow[r, "\delta_{\mathrm{X}}"] \arrow[d, "f"'] & \Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}} \arrow[r] \arrow[d, "\Delta^{(1)}f"] & \mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{pr}^i_{\mathrm{X}}"] \arrow[d, "f\times f"] & \mathrm{X} \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{W} \arrow[r, "\delta_{\mathrm{W}}"] & \Delta^{(1)}_{\mathrm{W/S}} \arrow[r] & \mathrm{W}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{W} \arrow[r, "\mathrm{pr}^i_{\mathrm{W}}"] & \mathrm{W}.
\end{tikzcd}
$$

D'autre part, $\Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}}$ est, via la projection π_{X}, un X-schéma affine, spectre de la $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-algèbre quasi-cohérente augmentée

$$\mathscr{P}^1_{\mathrm{X/S}}=\mathscr{O}_{\mathrm{X}}\oplus\Omega^1_{\mathrm{X/S}}\,,$$

où $\Omega^1_{\mathrm{X/S}}$ est un idéal de carré nul ; l'augmentation est le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-algèbres $\varepsilon_{\mathrm{X}}:\mathscr{P}^1_{\mathrm{X/S}}\to\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ qui s'annule sur $\Omega^1_{\mathrm{X/S}}$ et qui correspond à l'immersion fermée $\delta_{\mathrm{X}}:\mathrm{X}\hookrightarrow\Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}}$. Alors, tout morphisme de S-schémas $f:\mathrm{X}\to\mathrm{W}$ induit un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-algèbres augmentées

$$f^*(\mathscr{P}^1_{\mathrm{W/S}})=\mathscr{O}_{\mathrm{X}}\oplus f^*(\Omega^1_{\mathrm{W/S}})\longrightarrow\mathscr{P}^1_{\mathrm{X/S}}=\mathscr{O}_{\mathrm{X}}\oplus\Omega^1_{\mathrm{X/S}}$$

c.-à-d., de façon équivalente, un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules

$$f_{\mathrm{X/W/S}}:\quad f^*(\Omega^1_{\mathrm{W/S}})\longrightarrow\Omega^1_{\mathrm{X/S}},$$

cf. EGA IV_4 (16.4.3.6) (et (16.4.18.2) pour la notation $f_{\mathrm{X/W/S}}$).

Comme $\pi_{\mathrm{X}} : \Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}} \to \mathrm{X}$ est affine alors, d'après a), $\Delta^{(1)} f$ est entièrement déterminé par $f_{\mathrm{X/W/S}}$ et, pour tout X-schéma $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$, l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}, \Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-alg.}}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \oplus g^*(\Omega^1_{\mathrm{X/S}}), \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$$

s'identifie à un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}}(g^*(\Omega^1_{\mathrm{X/S}}), \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$, à savoir le sous-ensemble

$$\mathrm{Hom}^{\square}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}}(g^*(\Omega^1_{\mathrm{X/S}}), \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$$

formé des $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-morphimes $\psi : g^*(\Omega^1_{\mathrm{X/S}}) \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ tels que $\mathrm{Im}(\psi)$ soit un idéal de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ de carré nul. [12]

Par conséquent, appliquant a) au diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}} \arrow[r, "\Delta^{(1)} f"] \arrow[d] & \Delta^{(1)}_{\mathrm{W/S}} \arrow[d] \\ \mathrm{Y} \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "g'"] & \mathrm{X} \arrow[r, "f"] & \mathrm{W} \end{tikzcd}$$

et tenant compte du fait que $\Delta^{(1)} f$ est la restriction à $\Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}}$ de $f \times f$, on obtient le diagramme commutatif suivant, fonctoriel en le X-schéma $\mathrm{Y} \xrightarrow{g} \mathrm{X}$:

$$(0.1.7\,(*))\qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}) \arrow[r, "(g,g') \mapsto (f\circ g, f \circ g')"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{W}}(\mathrm{Y}, \Delta^{(1)}_{\mathrm{W/S}}) \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}, \Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "g' \mapsto (\Delta^{(1)} f) \circ g'"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{W}}(\mathrm{Y}, \Delta^{(1)}_{\mathrm{W/S}}) \arrow[u, hook] \arrow[d, "\simeq"'] \\ \mathrm{Hom}^{\square}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}}(g^*(\Omega^1_{\mathrm{X/S}}), \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \arrow[r, "\psi \mapsto \psi \circ g^*(f_{\mathrm{X/W/S}})"] & \mathrm{Hom}^{\square}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}}(g^* f^*(\Omega^1_{\mathrm{W/S}}), \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}). \end{tikzcd}$$

Remarque 0.1.7.1. — Terminons ce paragraphe avec la remarque suivante, qui sera utile plus loin (cf. 0.1.10). Si on note $\mathrm{L}^{\square}_{\mathrm{X}}$ le X-foncteur qui à tout X-schéma $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ associe $\mathrm{Hom}^{\square}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}}(g^*(\Omega^1_{\mathrm{X/S}}), \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$, et $\mathrm{L}^{\square}_{f} : \mathrm{L}^{\square}_{\mathrm{X}} \to \mathrm{L}^{\square}_{\mathrm{W}}$ le morphisme de foncteurs défini plus haut (qui à tout $\psi \in \mathrm{L}^{\square}_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})$ associe $\psi \circ g^*(f_{\mathrm{X/W/S}})$), ce qui précède montre que l'on a un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{L}^{\square}_{\mathrm{X}} \arrow[d, "f \times \mathrm{L}^{\square}_{f}"'] & \Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\Delta^{(1)} f"] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \arrow[d, "f \times f"] \\ \mathrm{W} \times_{\mathrm{W}} \mathrm{L}^{\square}_{\mathrm{W}} & \Delta^{(1)}_{\mathrm{W/S}} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, hook] & \mathrm{W} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{W}. \end{tikzcd}$$

---

(12) N.D.E. : Dans la démonstration de SGA 1, III 5.1, il faut corriger en conséquence la phrase « Or les homomorphismes d'algèbres $\mathscr{A} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ correspondent ... » (la suite de *loc. cit.* étant inchangée).

Théorème 0.1.8. — (SGA 1, III 5.1) [13] *Soient* Y, X *deux* S*-schémas,* $\mathfrak{J}$ *un idéal quasi-cohérent de* $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ *de carré nul,* $\mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}$ *le sous-schéma fermé de* Y *défini par* $\mathfrak{J}$*, et* $g_{\mathfrak{J}} : \mathrm{Y}_{\mathfrak{J}} \to \mathrm{X}$ *un* S*-morphisme.*

a) *L'ensemble* $\mathrm{P}(g_{\mathfrak{J}})$ *des* S*-morphismes* $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *qui prolongent* $g_{\mathfrak{J}}$ *est soit vide, soit principal homogène sous le groupe abélien*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}}}(g_{\mathfrak{J}}^{*}(\Omega^{1}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}), \mathfrak{J}).$$

b) *Si* $i : \mathrm{Y}_0 \hookrightarrow \mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}$ *est l'immersion fermée définie par un idéal quasi-cohérent* $\mathfrak{I} \supset \mathfrak{J}$ *tel que* $\mathfrak{I}\,\mathfrak{J} = 0$*, et si* $g_0 = g_{\mathfrak{J}} \circ i$*, le groupe abélien précédent est isomorphe à*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}}(g_0^{*}(\Omega^{1}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}), \mathfrak{J}).$$

Démonstration. (b) se déduit aussitôt de (a). En effet, $\mathfrak{J}$, étant annulé par $\mathfrak{I}$, peut être considéré comme un $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}$-module, d'où, par adjonction :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}}}(g_{\mathfrak{J}}^{*}(\Omega^{1}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}), \mathfrak{J}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}}(i^{*}g_{\mathfrak{J}}^{*}(\Omega^{1}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}), \mathfrak{J}).$$

Pour démontrer (a), on peut supposer $\mathrm{P}(g_{\mathfrak{J}}) \neq \varnothing$, i.e. qu'il existe un S-morphisme $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ prolongeant $g_{\mathfrak{J}}$. Notons j l'immersion $\mathrm{Y}_{\mathfrak{J}} \hookrightarrow \mathrm{Y}$. Alors, $\mathrm{P}(g_{\mathfrak{J}})$ est l'ensemble des S-morphismes $g' : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ tels que $g' \circ j = g_{\mathfrak{J}}$. La donnée d'un tel g' équivaut à la donnée d'un S-morphisme

$$h : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$$

tel que $\mathrm{pr}_1 \circ h = g$ et $h_{\mathfrak{J}} = \delta \circ g_{\mathfrak{J}}$, où $h_{\mathfrak{J}} = h \circ j$ et δ est l'immersion diagonale $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathrm{Y}_{\mathfrak{J}} \arrow[l, "h_{\mathfrak{J}} = \delta \circ g_{\mathfrak{J}}"'] \arrow[d, "j"] \\
\mathrm{X} & \mathrm{Y}. \arrow[l, "g"] \arrow[ul, dashed, "h"']
\end{tikzcd}$$

Comme $h_{\mathfrak{J}}$ se factorise par δ et que Y est dans le premier voisinage infinitésimal de l'immersion $j : \mathrm{Y}_{\mathfrak{J}} \to \mathrm{Y}$ (puisque $\mathfrak{J}^2 = 0$), alors, par fonctorialité (cf. EGA IV_4, 16.2.2 (i)), les h cherchés se factorisent, de façon unique, par $\Delta^{(1)}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ (cf. 0.1.7). Posons

$$\mathrm{Y}' = \Delta^{(1)}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y}'_{\mathfrak{J}} = \mathrm{Y}' \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}_{\mathfrak{J}} = \Delta^{(1)}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}.$$

Alors les h cherchés sont en bijection avec les sections u de $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ qui prolongent la section $u_{\mathfrak{J}} = (\delta \circ g_{\mathfrak{J}}, \mathrm{id})$ de $\mathrm{Y}'_{\mathfrak{J}} \to \mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}$. D'autre part, Y' (resp. $\mathrm{Y}'_{\mathfrak{J}}$) est un schéma *affine sur* Y (resp. $\mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}$), correspondant à l'algèbre quasi-cohérente

$$\mathscr{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \oplus g^{*}(\Omega^{1}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}), \qquad \text{resp.} \quad \mathscr{A}_{\mathfrak{J}} = \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}} = \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}} \oplus g_{\mathfrak{J}}^{*}(\Omega^{1}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}).$$

Notons $\varepsilon : \mathscr{A} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ l'augmentation canonique de $\mathscr{A}$ (i.e. le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-algèbres $\mathscr{A} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ qui s'annule sur $g^{*}(\Omega^{1}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})$), et définissons de même $\varepsilon_{\mathfrak{J}} : \mathscr{A}_{\mathfrak{J}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}}$. Alors,

$$\Gamma(\mathrm{Y}'/\mathrm{Y}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-alg.}}(\mathscr{A}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \qquad , \qquad \Gamma(\mathrm{Y}'_{\mathfrak{J}}/\mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}}\text{-alg.}}(\mathscr{A}_{\mathfrak{J}}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}})$$

---

[13] N.D.E. : On a repris ici l'énoncé *et la démonstration* de SGA 1, III 5.1, dont on a besoin pour démontrer la proposition 0.2 plus loin (voir déjà le corollaire 0.1.9 qui suit). D'autre part, $\mathfrak{J}$ (resp. $\mathfrak{I}$) est une autre calligraphie de la lettre J (resp. I) ; revenant aux notations antérieures ($\mathscr{J} \subset \mathscr{I}$ idéaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ tels que $\mathscr{I}\,\mathscr{J} = 0$), on appliquera ceci à $\mathfrak{J} = \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ (resp. $\mathfrak{I} = \mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$).

et, via ces isomorphismes, la section $u = (\delta \circ g, \mathrm{id})$ (resp. $u_{\mathfrak{J}}$) correspond à ε (resp. $\varepsilon_{\mathfrak{J}}$). Par conséquent, $\mathrm{P}(g_{\mathfrak{J}})$ est en bijection avec l'ensemble des morphismes d'algèbres $\mathscr{A} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ qui se réduisent selon $\varepsilon_{\mathfrak{J}}$, et via cette bijection, g correspond à ε.

Posons $\mathscr{M} = g^*(\Omega^1_{\mathrm{X/S}})$. Alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\text{-alg.}}(\mathscr{A}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ s'identifie à l'ensemble des $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-morphismes $\psi : \mathscr{M} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ tels que $\mathrm{Im}(\psi)$ soit un idéal de carré nul, et l'on s'intéresse à ceux qui induisent le morphisme nul $\mathscr{M} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}} = \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}/\mathfrak{J}$, i.e. qui appliquent $\mathscr{M}$ dans $\mathfrak{J}$. Réciproquement, comme $\mathfrak{J}^2 = 0$, tout $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-morphisme $\phi : \mathscr{M} \to \mathfrak{J}$ provient d'un (unique) morphisme d'algèbres $\mathscr{A} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$, se réduisant selon $\varepsilon_{\mathfrak{J}}$. Enfin, on a $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}}(g^*(\Omega^1_{\mathrm{X/S}}), \mathfrak{J}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}}}(g^*_{\mathfrak{J}}(\Omega^1_{\mathrm{X/S}}), \mathfrak{J})$ puisque $\mathfrak{J}^2 = 0$ (cf. la démonstration de (b) déjà vue). On obtient donc une bijection

$$\mathrm{P}(g_{\mathfrak{J}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}}}(g^*_{\mathfrak{J}}(\Omega^1_{\mathrm{X/S}}), \mathfrak{J})$$

par laquelle g correspond au morphisme nul.

Pour tout $m \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathfrak{J}}}}(g^*_{\mathfrak{J}}(\Omega^1_{\mathrm{X/S}}), \mathfrak{J})$, notons $m \cdot g$ l'élément de $\mathrm{P}(g_{\mathfrak{J}})$ associé à g et m par la bijection précédente. On a déjà vu que $0 \cdot g = g$; il reste à voir que

$$m' \cdot (m \cdot g) = (m + m') \cdot g. \tag{0.1.8 (∗)}$$

Ceci se vérifie localement. [14] En effet, les deux morphismes $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ précédents induisent la même application continue que g entre les espaces topologiques sous-jacents ; il suffit donc de vérifier que pour tout ouvert affine $\mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ de X au-dessus d'un ouvert affine $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ de S, et tout ouvert affine $\mathrm{V} = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ de $g^{-1}(\mathrm{U})$, ils induisent le même morphisme de Λ-algèbres $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$.

Soit $\mathrm{J} = \Gamma(\mathrm{V}, \mathfrak{J})$ et soient ϕ, ψ et η les morphismes $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ induits par g, $m \cdot g$ et $m' \cdot (m \cdot g)$ respectivement ; ils coïncident modulo J. On peut écrire de façon unique $\psi = \phi + \mathrm{D}$ (resp. $\eta = \psi + \mathrm{D}'$), où D (resp. D') est un élément de

$$\mathrm{Dér}_{\phi}(\mathrm{A}, \mathrm{J}) = \{\delta \in \mathrm{Hom}_{\Lambda}(\mathrm{A}, \mathrm{J}) \mid \delta(ab) = \phi(a)\delta(b) + \phi(b)\delta(a)\}$$

(resp. $\mathrm{Dér}_{\psi}(\mathrm{A}, \mathrm{J})$). Mais $\mathrm{Dér}_{\phi}(\mathrm{A}, \mathrm{J}) = \mathrm{Dér}_{\psi}(\mathrm{A}, \mathrm{J})$ puisque $\mathrm{J}^2 = 0$, et tous deux s'identifient à

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{B/J}}(\Omega^1_{\mathrm{A}/\Lambda} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B/J}, \mathrm{J}),$$

et via cette identification D correspond à m et D' à m'. Alors, $\eta = \phi + \mathrm{D} + \mathrm{D}'$ et $\mathrm{D} + \mathrm{D}'$ correspond à $m + m'$, d'où l'égalité $(*)$.

Corollaire 0.1.9. — [15] *Soit* X *un* S*-schéma ; reprenons les notations de* 0.1.5. *Alors* X *est muni d'une opération (à gauche) du* X^+*-groupe abélien* $\mathrm{L_X}$*, qui fait de* X *un objet* formellement principal homogène *sous* $\mathrm{L_X}$ *au-dessus de* X^+*, i.e. on a un* isomorphisme *de* X^+*-foncteurs :*

$$\mathrm{L_X} \underset{\mathrm{X}^+}{\times} \mathrm{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{X} \underset{\mathrm{X}^+}{\times} \mathrm{X}$$

(défini ensemblistement par $(m, x) \mapsto (x, m \cdot x)$).

[14] N.D.E. : Ce qui précède est repris presque mot-à-mot de SGA 1, III 5.1 ; on a détaillé ce qui suit.
[15] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire de SGA 1, III 5.1, qui démontre le point (i) de la proposition 0.2 plus loin.

Démonstration. Soit i_0 l'immersion $X_0 \hookrightarrow X$. Notons d'abord que, comme $X_0 = X \times_S S_0$, on a $i_0^*(\Omega^1_{X/S}) \simeq \Omega^1_{X_0/S_0}$ (cf. EGA IV, 16.4.5).

Soit Y un X^+-schéma, donné par un S-morphisme $g_{\mathcal{J}} : Y_{\mathcal{J}} \to X$, et soit $g_0 : Y_0 \to X_0$ le morphisme obtenu par changement de base. D'après 0.1.8, si $\mathrm{Hom}_{X^+}(Y, X)$ est non vide, c'est un ensemble principal homogène sous le groupe

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{Y_0}}(g_0^* i_0^*(\Omega^1_{X/S}), \mathscr{J}\mathscr{O}_Y)\,,$$

lequel s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{Y_0}}(g_0^*(\Omega^1_{X_0/S_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_Y) = L_X(Y)$. On a donc une bijection

$$L_X(Y) \times \mathrm{Hom}_{X^+}(Y, X) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{X^+}(Y, X \times_{X^+} X)$$

donnée par $(m, g) \mapsto (g, m \cdot g)$. Montrons que ceci est « fonctoriel en Y ».

Soit $f : Z \to Y$ un morphisme de S-schémas. Il s'agit de montrer que le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
L_X(Y) \times \mathrm{Hom}_{X^+}(Y, X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "L_X(f)\times f"'] & \mathrm{Hom}_{X^+}(Y, X \times_{X^+} X) \arrow[d, "f\times f"] \\
L_X(Z) \times \mathrm{Hom}_{X^+}(Z, X) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{X^+}(Z, X \times_{X^+} X).
\end{tikzcd}$$

Si $\mathrm{Hom}_{X^+}(Y, X) = \varnothing$, il n'y a rien à montrer. Il suffit donc de voir que, pour tout S-morphisme $g : Y \to X$ prolongeant $g_{\mathcal{J}}$ et tout $m \in L_X(Y)$, on a :

$$(0.1.9\,(*)) \qquad (m \cdot g) \circ f = L_X(f)(m) \cdot (g \circ f).$$

Ces deux S-morphismes $Z \to X$ coïncident sur $Z_{\mathcal{J}}$ avec $g_{\mathcal{J}} \circ f_{\mathcal{J}}$; en particulier, ils induisent la même application continue que $g \circ f$ entre les espaces topologiques sous-jacents. Par conséquent, il suffit de voir que, si $z \in Z$, $y = f(z)$, $x = g(y)$, et si A, B, C désignent respectivement les anneaux locaux $\mathscr{O}_{X,x}$, $\mathscr{O}_{Y,y}$, $\mathscr{O}_{Z,z}$, alors les morphismes $A \to C$ induits par $(m \cdot g) \circ f$ et $L_X(f)(m) \cdot (g \circ f)$ coïncident. Notons s l'image de x dans S, $\Lambda = \mathscr{O}_{S,s}$, J et I les idéaux de Λ correspondants à $\mathcal{J}$ et $\mathcal{I}$, et soient $\phi, \psi : A \to B$ et $\theta : B \to C$ les morphismes de Λ-algèbres induits par g, $m \cdot g$ et f. Alors, m induit un élément D de

$$\mathrm{Hom}_{B/IB}(\Omega^1_{A/\Lambda} \otimes_A B/IB, JB) = \mathrm{Dér}_\Lambda(A, JB)$$

et l'on a $\psi = \phi + D$; donc $(m \cdot g) \circ f$ correspond à $\theta \circ \psi = \theta \circ \phi + \theta \circ D$. Or, on a vu en 0.1.5 que $\theta \circ D$ est l'image de $L_X(f)(m)$ dans

$$\mathrm{Hom}_{C/IC}(\Omega^1_{A/\Lambda} \otimes_A C/IC, JC) = \mathrm{Dér}_\Lambda(A, JC);$$

par conséquent, $\theta \circ \phi + \theta \circ D$ est l'image de $L_X(f)(m) \cdot (g \circ f)$. Ceci prouve l'égalité (0.1.9 $(*)$).

Corollaire 0.1.10. — [16] a) L_X *dépend fonctoriellement de* X *: pour tout* S*-morphisme* $f : X \to W$*, il existe un* S*-morphisme* $L_f : L_X \to L_W$ *qui est un morphisme de groupes*

[16] N.D.E. : On a détaillé la « fonctorialité en X » de L_X, en particulier le point b) ci-dessous.

abéliens « au-dessus de f^+ », *c.-à-d., le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L_X} & \xrightarrow{\mathrm{L}_f} & \mathrm{L_W} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{X}^+ & \xrightarrow{f^+} & \mathrm{W}^+ \end{array}$$

est commutatif et, pour tout $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}^+$,

$$\mathrm{L}_f(\mathrm{Y}) : \quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}^+}(\mathrm{Y}, \mathrm{L_X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{W}^+}(\mathrm{Y}, \mathrm{L_W})$$

(*où* Y *est au-dessus de* W^+ *via* f^+) *est un morphisme de groupes abéliens.*

b) *De plus, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L_X} \times_{\mathrm{X}^+} \mathrm{X} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{X} \times_{\mathrm{X}^+} \mathrm{X} \\ {\scriptstyle \mathrm{L}_f \times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f \times f} \\ \mathrm{L_W} \times_{\mathrm{W}^+} \mathrm{W} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{W} \times_{\mathrm{W}^+} \mathrm{W} \end{array} .$$

Démonstration. a) L_f est induit par le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}$-modules $f_{\mathrm{X}_0/\mathrm{W}_0/\mathrm{S}_0}$: $f_0^*(\Omega^1_{\mathrm{W}_0/\mathrm{S}_0}) \to \Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}$ (cf. 0.1.7 b)) : pour tout X^+-schéma Y, donné par un S-morphisme $g_{\mathscr{J}} : \mathrm{Y}_{\mathscr{J}} \to \mathrm{X}$, on a un diagramme commutatif, fonctoriel en Y :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}}(g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_\mathrm{Y}) & \xrightarrow{\mathrm{L}_f(\mathrm{Y})} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}}(g_0^* f_0^*(\Omega^1_{\mathrm{W}_0/\mathrm{S}_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_\mathrm{Y}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{g_{\mathscr{J}}\} & \longrightarrow & \{f_{\mathscr{J}} \circ g_{\mathscr{J}}\} \end{array}$$

où $\mathrm{L}_f(\mathrm{Y})$ est l'application $\psi \mapsto \psi \circ g_0^*(f_{\mathrm{X}_0/\mathrm{W}_0/\mathrm{S}_0})$, qui est bien un morphisme de groupes abéliens. [17]

Démontrons (b). Soit Y un X^+-schéma ; si $\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}^+}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) = \varnothing$ il n'y a rien à montrer. Soit donc $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}^+}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$; il faut voir que pour tout $m \in \mathrm{L_X}(\mathrm{Y})$, on a :

$$(0.1.10\,(*)) \qquad f \circ (m \cdot g) = \mathrm{L}_f(\mathrm{Y})(m) \cdot (f \circ g).$$

Or, g étant fixé, $\mathrm{Hom_X}(\mathrm{Y}, \mathrm{X} \times_{\mathrm{X}^+} \mathrm{X})$ est un sous-ensemble de $\mathrm{Hom_X}(\mathrm{Y}, \Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}})$ et

$$\mathrm{L_X}(\mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}}(g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_\mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathrm{Y}}(g^*(\Omega^1_{\mathrm{X/S}}), \mathscr{J}\mathscr{O}_\mathrm{Y})$$

un sous-ensemble de $\mathrm{L}^\square_\mathrm{X}(\mathrm{Y})$ (cf. 0.1.7), enfin $\mathrm{L}_f(\mathrm{Y})$ est la restriction à $\mathrm{L_X}(\mathrm{Y})$ de l'application $\mathrm{L}^\square_f(\mathrm{Y})$. De plus, la bijection

$$\mathrm{L_X}(\mathrm{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom_X}(\mathrm{Y}, \mathrm{X} \times_{\mathrm{X}^+} \mathrm{X}), \qquad m \mapsto (g, m \cdot g)$$

est (l'inverse de) la restriction à $\mathrm{L_X}(\mathrm{Y}) \subset \mathrm{L}^\square_\mathrm{X}(\mathrm{Y})$ de la bijection $\mathrm{Hom_X}(\mathrm{Y}, \Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}}) \xrightarrow{\sim} \{g\} \times \mathrm{L}^\square_\mathrm{X}(\mathrm{Y})$ considérée dans 0.1.7.1. Par conséquent, l'égalité (0.1.10 (∗)) résulte de

[17] N.D.E. : On notera que L_f ne dépend que de $f_0 : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{W}_0$.

(0.1.7 $(*)$) ; en effet, si l'on note g' le X-morphisme $\mathrm{Y} \to \Delta^{(1)}_{\mathrm{X/S}}$ défini par $(g, m \cdot g)$, alors l'élément de $\mathrm{L_W(Y)}$ correspondant à $(f \circ g, f \circ g')$ est $\mathrm{L}^{\square}_f(\mathrm{Y})(m) = \mathrm{L}_f(\mathrm{Y})(m)$, c.-à-d., on a bien

$$\mathrm{L}_f(m) \cdot (f \circ g) = f \circ (m \cdot g).$$

Lemme 0.1.11. — *Soient* X, X′ *deux* S*-schémas. On a un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{L_X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{L_{X'}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{L}_{\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X'}} \arrow[d] \\ \mathrm{X}^+ \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X'}^+ \arrow[r, "\sim"] & (\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X'})^+ \end{tikzcd} \quad .$$

(18) *Démonstration.* D'abord, pour tout S-schéma Y, $\mathrm{Hom_S(Y, X^+ \times_S X'^+)}$ égale $\mathrm{Hom_S(Y, X^+) \times Hom_S(Y, X'^+)}$ et celui-ci est isomorphe à

$$\mathrm{Hom_S}(\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}, \mathrm{X}) \times \mathrm{Hom_S}(\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}, \mathrm{X'}) = \mathrm{Hom_S}(\mathrm{Y}, (\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X'})^+);$$

ceci prouve que $\mathrm{X^+ \times_S X'^+ \simeq (X \times_S X')^+}$.

Ensuite, soit Y un schéma au-dessus de $\mathrm{X^+ \times_S X'^+}$ via un morphisme $h : \mathrm{Y}_{\mathscr{J}} \to \mathrm{X \times_S X'}$; posons $f = p \circ h$ et $g = q \circ h$, où l'on a noté p, q les projections de $\mathrm{X \times_S X'}$ vers X et X′. Puisque $\Omega^1_{(\mathrm{X_0 \times_{S_0} X'_0})/\mathrm{S_0}} \cong p_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X_0/S_0}}) \oplus q_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X_0/S_0}})$ (cf. EGA IV_4, 16.4.23), on obtient un isomorphisme naturel :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y_0}}}(f_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X_0/S_0}}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y_0}}}(g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X'_0/S_0}}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \\ &\qquad\qquad \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y_0}}}(h_0^*(\Omega^1_{(\mathrm{X_0 \times_{S_0} X'_0})/\mathrm{S_0}}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \end{aligned}$$

c.-à-d., $\mathrm{L_X(Y) \times L_{X'}(Y) \simeq L_{X \times_S X'}(Y)}$.

Remarque 0.1.12. — (19) Soient $\mathscr{C}$ une catégorie stable par produits fibrés, S un objet de $\mathscr{C}$, $\mathrm{T_1, T_2}$ deux objets au-dessus de S et, pour $i = 1, 2$, L_i et X_i deux objets au-dessus de T_i :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathrm{L_1} \arrow[dr] & & \mathrm{X_1} \arrow[dl] & \mathrm{L_2} \arrow[dr] & & \mathrm{X_2} \arrow[dl] \\ & \mathrm{T_1} \arrow[drr] & & & \mathrm{T_2} \arrow[dl] & \\ & & & \mathrm{S} & & \end{tikzcd} \quad .$$

Alors, on a un isomorphisme naturel :

$$(\mathrm{L_1 \times_{T_1} X_1}) \times_{\mathrm{S}} (\mathrm{L_2 \times_{T_2} X_2}) \simeq (\mathrm{L_1 \times_S L_2}) \times_{\mathrm{T_1 \times_S T_2}} (\mathrm{X_1 \times_S X_2}).$$

Par conséquent, on déduit du lemme précédent le :

(18) N.D.E. : On a détaillé la démonstration.

(19) N.D.E. : On a ajouté cette remarque, ainsi que le corollaire qui suit.

Corollaire 0.1.13. — *Soient* X_1, X_2 *deux* S-*schémas. On a un diagramme commutatif d'isomorphismes :*

$$\begin{tikzcd}
L_{X_1\times_S X_2}\times_{(X_1\times_S X_2)^+}(X_1\times_S X_2) \arrow[d, "(0.1.11)"', "\simeq"] \arrow[dr, "\simeq"] & \\
(L_{X_1}\times_S L_{X_2})\times_{(X_1^+\times_S X_2^+)}(X_1\times_S X_2) \arrow[r, "\sim", "(0.1.12)"'] & (L_{X_1}\times_{X_1^+} X_1)\times_S(L_{X_2}\times_{X_2^+} X_2).
\end{tikzcd}$$

Nous pouvons maintenant énoncer : **88**

Proposition 0.2. — *Pour tout* S-*schéma* X, *on peut définir une opération* (*à gauche*) *du* X^+-*groupe abélien* L_X *sur le* X^+-*objet* X, *telle que :*

(i) *cette opération fasse de* X *un objet formellement principal homogène sous* L_X *au-dessus de* X^+, *i.e. le morphisme*

$$L_X \underset{X^+}{\times} X \longrightarrow X \underset{X^+}{\times} X$$

est un isomorphisme de X^+-*foncteurs ;*

(ii) *cette opération soit fonctorielle en le* S-*schéma* X, *c.-à-d., pour tout* S-*morphisme* $f : X \to W$, *le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
L_X\times_{X^+} X \arrow[r] \arrow[d, "L_f\times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
L_W\times_{W^+} W \arrow[r] & W
\end{tikzcd} ;$$

(iii) *cette opération « commute au produit fibré », i.e. pour tous* S-*schémas* X_1 *et* X_2, *le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
L_{X_1\times_S X_2}\times_{(X_1\times_S X_2)^+}(X_1\times_S X_2) \arrow[rr] \arrow[d, "\simeq"'] \arrow[drr, "\simeq"] & & X_1\times_S X_2 \\
(L_{X_1}\times_S L_{X_2})\times_{(X_1\times_S X_2)^+}(X_1\times_S X_2) \arrow[rr, "\sim"] & & (L_{X_1}\times_{X_1^+} X_1)\times_S(L_{X_2}\times_{X_2^+} X_2). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Démonstration. [20] (i) et (ii) découlent respectivement des corollaires 0.1.9 et 0.1.10. Pour prouver (iii), notons $P(X) = L_X \times_{X^+} X$, pour tout S-schéma X. Alors, d'après (ii) appliqué aux projections $p_i : X_1 \times_S X_2 \to X_i$, on obtient des carrés commutatifs **89**

$$\begin{tikzcd}
P(X_1\times_S X_2) \arrow[r] \arrow[d, "L_{p_i}\times p_i"'] & X_1\times_S X_2 \arrow[d, "p_i"] \\
P(X_i) \arrow[r] & X_i
\end{tikzcd}$$

[20]N.D.E. : On a modifié et détaillé l'original, en tenant compte des ajouts faits précédemment ; ceux-ci incorporent, en le détaillant, le contenu de la page 89 de l'original.

pour $i = 1, 2$, et donc un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{X}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_2 \arrow[d, equal] \\ \mathrm{P}(\mathrm{X}_1) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}(\mathrm{X}_2) \arrow[r] & \mathrm{X}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_2. \end{tikzcd}$$

Combinant ceci avec le corollaire 0.1.13, on obtient que la flèche verticale est un isomorphisme, et que l'on a le diagramme commutatif annoncé dans (iii).

90

Remarque 0.3. — Supposons le X^+-schéma Y *plat* sur S (cf. SGA 1, IV). On peut écrire alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}^+}(\mathrm{Y}, \mathrm{L}_{\mathrm{X}}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}}(g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}),\ \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}).$$

Remarque 0.4. — Notons $\pi_0 : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{S}_0$ le morphisme structural et supposons qu'il existe un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$-module $\omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}$ tel que $\Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0} \simeq \pi_0^*(\omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0})$ (le cas se présentera en particulier lorsque X_0 sera un S_0-groupe, cf. II, 4.11). Si on définit un foncteur L'_{X} au-dessus de S par la formule

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{L}'_{\mathrm{X}}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}}(\omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0},\ \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}), \tag{0.4.1}$$

on a alors $\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}^+}(\mathrm{Y}, \mathrm{L}_{\mathrm{X}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{L}'_{\mathrm{X}})$ pour tout X^+-schéma Y, c'est-à-dire

$$\mathrm{L}_{\mathrm{X}} = \mathrm{L}'_{\mathrm{X}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}^+.$$

(21) Alors, puisque $\mathrm{L}_{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{X}^+} \mathrm{X} = \mathrm{L}'_{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, l'opération de L_{X} sur X induit une opération de L'_{X} sur X, et cette opération respecte le morphisme $p_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^+$; en effet, si Y est un S-schéma, $h : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un S-morphisme et m un élément de $\mathrm{L}'_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})$, alors h et $m \cdot h$ ont même restriction à $\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}$, i.e. $p_{\mathrm{X}}(m \cdot h) = p_{\mathrm{X}}(h)$.

91

Remarque 0.5. — Conservons les hypothèses et notations de 0.4 et supposons de plus que Y soit un S-schéma *plat* sur S. On a alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}^+}(\mathrm{Y}, \mathrm{L}_{\mathrm{X}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{L}'_{\mathrm{X}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{Y}_0, \mathrm{L}_{0\mathrm{X}}),$$

où le S_0-foncteur en groupes abéliens $\mathrm{L}_{0\mathrm{X}}$ est défini par l'identité (par rapport au S_0-schéma variable T) suivante :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{T}, \mathrm{L}_{0\mathrm{X}}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}(\omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{T}},\ \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{T}}). \tag{0.5.1}$$

Dans les notations de II, 1, on a donc montré que les foncteurs L'_{X} et $\prod_{\mathrm{S}_0/\mathrm{S}} \mathrm{L}_{0\mathrm{X}}$ ont même restriction à la sous-catégorie pleine de $(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}}$ dont les objets sont les S-schémas Y *plats* sur S.

Remarque 0.6. — Conservons les hypothèses et notations de 0.5 (22) et supposons de plus qu'il existe une section ε_0 de $\pi_0 : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{S}_0$, on a alors $\omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0} \simeq \varepsilon_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0})$. D'abord, on a (indépendamment de l'hypothèse précédente) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{T}, \mathrm{L}_{0\mathrm{X}}) = \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}(\omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{T}},\ \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{T}})).$$

(21) N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

(22) N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse qui suit, implicite dans l'original.

Supposons maintenant que $\omega^1_{X_0/S_0}$ admette une présentation finie (cf. EGA 0_{I}, 5.2.5), ce qui sera en particulier le cas si X_0 est *localement de présentation finie* sur S_0 (cf. EGA IV_4, 16.4.22). Alors, si T est *plat* sur S_0, il résulte de EGA 0_{I}, 6.7.6 que

$$\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_T}(\omega^1_{X_0/S_0} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_T,\ \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_T) \cong \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_{S_0}}(\omega^1_{X_0/S_0}, \mathscr{J}) \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_T,$$

d'où

$$\mathrm{Hom}_{S_0}(T, L_{0X}) = \Gamma(T, \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_{S_0}}(\omega^1_{X_0/S_0}, \mathscr{J}) \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_T).$$

Introduisant la notation W( ) de I, 4.6.1, on a donc prouvé que pour tout S_0-schéma T *plat* sur S_0, on a

$$\mathrm{Hom}_{S_0}(T, L_{0X}) = \mathrm{Hom}_{S_0}(T, W(\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_{S_0}}(\omega^1_{X_0/S_0}, \mathscr{J}))).$$

En résumé, *si* $\omega^1_{X_0/S_0}$ *admet une présentation finie, et si on se restreint à la catégorie des* S*-schémas plats sur* S, on a **92**

$$L'_X = \prod_{S_0/S} W(\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_{S_0}}(\omega^1_{X_0/S_0}, \mathscr{J})), \tag{0.6.1}$$

et $\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_{S_0}}(\omega^1_{X_0/S_0}, \mathscr{J}))$ est un $\mathscr{O}_{S_0}$-module *quasi-cohérent*, par EGA I, 9.1.1.

Remarquons enfin que si $\omega^1_{X_0/S_0}$ est en outre localement libre (de rang fini), par exemple si X_0 est *lisse* sur S_0 (auquel cas il est automatiquement localement de présentation finie sur S_0), on a

$$\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_{S_0}}(\omega^1_{X_0/S_0}, \mathscr{J}) \simeq \mathscr{L}\!ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{J}, \tag{0.6.2}$$

où on note par abus de langage (X_0 n'étant pas nécessairement un S_0-groupe) $\mathscr{L}\!ie(X_0/S_0)$ le dual du $\mathscr{O}_{S_0}$-module $\omega^1_{X_0/S_0}$. (23)

La proposition 0.2 (et sa démonstration) a deux corollaires importants. (24)

Corollaire 0.7. — *Soit* X *un* S*-schéma.*

a) *Tout* S*-endomorphisme de* X *induisant l'identité sur* $X_{\mathscr{J}}$ *est un automorphisme.*

b) *On a une suite exacte de groupes :*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X_0}}(\Omega^1_{X_0/S_0}, \mathscr{J}\mathscr{O}_X) \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{Aut}_S(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{S_{\mathscr{J}}}(X_{\mathscr{J}}).$$

c) *De plus, si on fait opérer* $\mathrm{Aut}_S(X)$ *sur le premier groupe par transport de structure, on a, pour tous* $u \in \mathrm{Aut}_S(X)$ *et* $m \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X_0}}(\Omega^1_{X_0/S_0},\ \mathscr{J}\mathscr{O}_X)$ *:*

$$i(um) = u\, i(m)\, u^{-1}.$$

(23) N.D.E. : Ceci est justifié par II, 3.3 et 4.11. En effet, le foncteur $L^{\varepsilon_0}_{X_0/S_0}$, « espace tangent à X_0 sur S_0 au point ε_0 », est représenté par la fibration vectorielle $\mathbb{V}(\varepsilon_0^*(\Omega^1_{X_0/S_0})) = \mathbb{V}(\omega^1_{X_0/S_0})$ sur S_0, dont le faisceau des sections est le module dual $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{S_0}}(\omega^1_{X_0/S_0}, \mathscr{O}_{S_0})$; celui-ci est $\mathscr{L}\!ie(X_0/S_0)$ lorsque X_0 est un S_0-groupe et ε_0 la section unité.

(24) N.D.E. : On a ajouté à 0.7 le corollaire 0.7.bis, qui était utilisé implicitement dans la démonstration de 0.8. Signalons ici que les numéros 0.8 à 0.12, ainsi que 0.17, qui jouent un rôle technique important dans la suite de cet exposé, sont des conséquences de 0.7 et 0.7.bis .

93 *Démonstration.* D'après 0.2 (i), $\mathrm{Hom}_{X^+}(X, X)$ est un ensemble principal homogène sous $\mathrm{Hom}_{X^+}(X, L_X)$, car il est certainement non vide ; il contient en effet un point marqué : l'automorphisme identique de X. [(25)] Par conséquent, l'application $m \mapsto m \cdot \mathrm{id}_X$ induit une *bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X_0}}(\Omega^1_{X_0/S_0}, \mathscr{J}\mathscr{O}_X) = L_X(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{X^+}(X, X).$$

Soit $m \in L_X(X)$ et soit $f = m' \cdot \mathrm{id}_X$ un élément de $\mathrm{Hom}_{X^+}(X, X)$. Appliquant 0.2 (ii) à f, on obtient que :

$$f \circ (m \cdot \mathrm{id}_X) = L_f(X)(m) \cdot f = L_f(X)(m) \cdot (m' \cdot \mathrm{id}_X).$$

D'autre part, comme f est un X^+-endomorphisme de X, on a $f_{\mathscr{J}} = \mathrm{id}_{X_{\mathscr{J}}}$ et donc $f_0 = \mathrm{id}_{X_0}$; comme L_f ne dépend que de f_0 (cf. N.D.E. (17) dans 0.1.10), on a donc $L_f(X)(m) = m$. Par conséquent, l'égalité ci-dessus se récrit :

$$(m' \cdot \mathrm{id}_X) \circ (m \cdot \mathrm{id}_X) = m \cdot (m' \cdot \mathrm{id}_X) = (m + m') \cdot \mathrm{id}_X\,.$$

Ceci montre que la bijection $m \mapsto m \cdot \mathrm{id}_X$ transforme la loi de groupe de $\mathrm{Hom}_{X^+}(X, L_X)$ en la loi de composition des X^+-endomorphismes de X.

Il en résulte d'abord que tout élément de $\mathrm{Hom}_{X^+}(X, X)$ est inversible, ce qui est la première assertion de l'énoncé, puis que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{X^+}(X, L_X) \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{Aut}_S(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{S_{\mathscr{J}}}(X_{\mathscr{J}}),$$

ce qui est la seconde.

Remarquons maintenant que le morphisme i défini ci-dessus est fonctoriel en X pour les isomorphismes, car il est défini en termes structuraux à partir de l'opération de L_X sur X au-dessus de X^+, elle-même fonctorielle en X d'après l'assertion (ii) de la proposition 0.2. [(26)] Donc tout automorphisme u de X au-dessus de S induit par transport de structure des isomorphismes

$$h : \mathrm{Hom}_{X^+}(X, L_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{X^+}(X, L_X)$$

et $f : \mathrm{Aut}_S(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_S(X)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{X^+}(X, L_X) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{Aut}_S(X) \arrow[d, "f"'] \\
\mathrm{Hom}_{X^+}(X, L_X) \arrow[r, "i"] & \mathrm{Aut}_S(X)
\end{tikzcd}$$

94 i.e. tels que $f \circ i = i \circ h$. D'autre part, f est donné par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "u"'] \\
X \arrow[r, "f(a)"] & X
\end{tikzcd} \qquad ,$$

(25) N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.
(26) N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

c.-à-d., $f(a) = u \circ a \circ u^{-1}$, pour tout $a \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})$. En écrivant $i(h(m)) = f(i(m))$, on trouve la formule cherchée.

Corollaire 0.7.bis. — *Soit* X *un* S*-schéma tel que* $\mathrm{X}_{\mathscr{J}}$ *soit un* $\mathrm{S}_{\mathscr{J}}$*-monoïde. Alors* L_{X} *est muni d'une structure de* S*-monoïde, on a une suite exacte scindée de* S*-monoïdes :*

$$1 \longrightarrow \mathrm{L}'_{\mathrm{X}} \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{L}_{\mathrm{X}} \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathrm{X}^{+} \longrightarrow 1$$

et la loi de monoïde induite sur L'_{X} *coïncide avec sa structure de groupe abélien. En particulier, si* $\mathrm{X}_{\mathscr{J}}$ *est un* $\mathrm{S}_{\mathscr{J}}$*-groupe, alors* L_{X} *est un* S*-groupe et est le produit semi-direct de* X^{+} *et de* L'_{X}*.*

Démonstration. En effet, comme $\mathrm{X}_{\mathscr{J}}$ est un $\mathrm{S}_{\mathscr{J}}$-monoïde, alors $\mathrm{X}^{+} = \prod_{\mathrm{S}_{\mathscr{J}}/\mathrm{S}} \mathrm{X}_{\mathscr{J}}$ est un S-monoïde (en effet, on a $\mathrm{X}^{+}(\mathrm{Y}) = \mathrm{X}_{\mathscr{J}}(\mathrm{Y}_{\mathscr{J}})$ pour tout $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$). Pour tout S-schéma Y, notons $\widetilde{\mathrm{Y}}_{\mathscr{J}}$ le $\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}$-schéma affine correspondant à la $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}}$-algèbre quasi-cohérente $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}} \oplus \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ (i.e. l'algèbre graduée associée à la filtration $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \supset \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$). Alors $\mathrm{L}_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})$ s'identifie à $\mathrm{X}_{\mathscr{J}}(\widetilde{\mathrm{Y}}_{\mathscr{J}})$ et $\mathrm{L}'_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})$ au noyau du morphisme $p : \mathrm{X}_{\mathscr{J}}(\widetilde{\mathrm{Y}}_{\mathscr{J}}) \to \mathrm{X}_{\mathscr{J}}(\mathrm{Y}_{\mathscr{J}})$ induit par la « section nulle » $\mathrm{Y}_{\mathscr{J}} \to \widetilde{\mathrm{Y}}_{\mathscr{J}}$ (i.e. par le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}}$-algèbres $\mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}_{\mathscr{J}}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}}$ s'annulant sur l'idéal $\mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$). On a donc, pour tout $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$, une suite exacte scindée de monoïdes, fonctorielle en Y :

$$1 \longrightarrow \mathrm{L}'_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{L}_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathrm{X}^{+}(\mathrm{Y}) \longrightarrow 1\,.$$

Il reste à voir que loi de monoïde induite sur L'_{X} coïncide avec sa structure de groupe abélien. Notons μ la loi de monoïde de L_{X} et e sa section unité ; il faut montrer que pour tout $m, m' \in \mathrm{L}'_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})$, on a

$$\mu(m \cdot e, m' \cdot e) = (m + m') \cdot e\,.$$

Ceci peut se voir de l'une ou l'autre des façons suivantes. D'une part, on peut reprendre la démonstration de l'égalité (0.1.10 $(*)$) en remplaçant le morphisme $f : \mathrm{X} \to \mathrm{W}$ qui y figure par le morphisme $\mu : \mathrm{L}_{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{L}_{\mathrm{X}} \to \mathrm{L}_{\mathrm{X}}$. Identifiant $\mathrm{X}^{+}(\mathrm{Y}) = \mathrm{X}_{\mathscr{J}}(\mathrm{Y}_{\mathscr{J}})$ à son image par s dans $\mathrm{L}_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) = \mathrm{X}_{\mathscr{J}}(\widetilde{\mathrm{Y}}_{\mathscr{J}})$ on obtient que, pour tout $g, g' \in \mathrm{X}_{\mathscr{J}}(\mathrm{Y}_{\mathscr{J}})$ et $m, m' \in \mathrm{L}'_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})$, on a

$$(\star) \qquad \mu(m \cdot g, m' \cdot g') = \mathrm{L}_{\mu}^{(g,g')}(m, m') \cdot \mu(g, g'),$$

où $\mathrm{L}_{\mu}^{(g,g')}$ désigne le morphisme dérivé de μ au point (g, g') (i.e. $\widetilde{\mathrm{Y}}_{\mathscr{J}}$ est au-dessus de $\mathrm{L}_{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{L}_{\mathrm{X}}$ via (g, g')). En particulier, on a $\mu(m \cdot e, m' \cdot e) = \mathrm{L}_{\mu}^{(e,e)}(m, m') \cdot e$; or $\mathrm{L}_{\mu}^{(e,e)}(m, m') = \mathrm{L}_{\ell_e}(m') + \mathrm{L}_{r_e}(m)$, où ℓ_e (resp. r_e) désigne la translation à gauche (resp. à droite) par e, qui est l'application identique de $\mathrm{X}_{\mathscr{J}}$, d'où $\mathrm{L}_{\mu}^{(e,e)}(m, m') = m + m'$.

Ou bien, on peut procéder comme suit (cf. la démonstration de [**DG70**], § II.4, Th. 3.5). D'après le lemme 0.1.11, la formation de X^{+} et de L_{X} « commute au produit » et il en donc de même de L'_{X} ; il en résulte que le morphisme $\mu' : \mathrm{L}'_{\mathrm{X}} \times \mathrm{L}'_{\mathrm{X}} \to \mathrm{L}'_{\mathrm{X}}$, induit par μ, est un homomorphisme pour la structure de groupes abéliens. On déduit alors du lemme 3.10 de l'Exp. II que μ' coïncide avec la loi de groupe abélien.

0.8. [27] Soit maintenant X un S-schéma tel que $X_{\mathcal{J}}$ soit un $S_{\mathcal{J}}$-groupe. Supposons qu'il existe un S-morphisme
$$P : X \underset{S}{\times} X \longrightarrow X$$
tel que le morphisme obtenu par changement de base
$$P_{\mathcal{J}} : X_{\mathcal{J}} \underset{S_{\mathcal{J}}}{\times} X_{\mathcal{J}} \longrightarrow X_{\mathcal{J}}$$
soit la loi de groupe de $X_{\mathcal{J}}$. (Un cas particulier important de la situation précédente sera le cas où X est un S-groupe et où on prend pour P sa loi de groupe). On en déduit un morphisme
$$L_P : L_X \underset{S}{\times} L_X \cong L_{X \times_S X} \longrightarrow L_X$$
qui, en fait, ne dépend pas de P, car il se calcule à l'aide de la loi de groupe $P_{\mathcal{J}}$ de $X_{\mathcal{J}}$ comme nous allons le voir maintenant. [28] En effet, d'après (ii) et (iii) de 0.2, pour tout $Y \to S$ et $x, x' \in X(Y)$, $m, m' \in L'_X(Y)$, on a
$$P(m \cdot x, m' \cdot x') = P\big((m, m') \cdot (x, x')\big) = L_P^{(x,x')}(m, m') \cdot \mu(g, g')$$
où g (resp. g') est l'image de x (resp. x') dans $X^+(Y)$. De plus (cf. la démonstration de 0.10), $L_P^{(x,x')}$ égale $L_\mu^{(g,g')}$ et, d'après 0.7.bis ($\star$), celui-ci est l'élément de $L'_X(Y)$ défini par l'égalité suivante dans $L_X(Y)$:
$$L_\mu^{(g,g')}(m, m') \cdot \mu(g, g') = \mu(m \cdot g, m' \cdot g'),$$
c.-à-d., si on note $\times$ (au lieu de μ) la loi de groupe de L_X et Ad « l'opération adjointe » de X^+ sur L'_X (qui se factorise par X_0 et qui est induite par l'opération adjointe de X_0 sur $\omega^1_{X_0/S_0}$), on obtient que
$$L_\mu^{(g,g')}(m, m') \times g \times g' = m \times g \times m' \times g' = (m \times \mathrm{Ad}(g)(m')) \times g \times g'$$
95 d'où finalement $L_P^{(x,x')}(m, m') = m \times \mathrm{Ad}(g)(m')$. On obtient donc la :

Proposition 0.8. — *Soit* $P : X \times_S X \to X$ *un* S-*morphisme tel que* $P_{\mathcal{J}}$ *munisse* $X_{\mathcal{J}}$ *d'une structure de* $S_{\mathcal{J}}$-*groupe. Notons* $\times$ *la loi de groupe de* L'_X *et* $(m, x) \mapsto m \cdot x$ *le morphisme* $L'_X \times_S X \to X$ *définissant l'action de* L'_X *sur* X, *et soit* $\mathrm{Ad} : X^+ \to \mathrm{Aut}_{\text{S-gr.}}(L'_X)$ *« l'opération adjointe » de* X^+ *sur* L'_X *(qui est induite par l'opération adjointe de* X_0 *sur* $\omega^1_{X_0/S_0}$*). Alors, pour tout* $S' \to S$ *et* $x, x' \in X(S')$, $m, m' \in L'_X(S')$, *on a :*

$$P(m \cdot x, m' \cdot x') = \big(m \times \mathrm{Ad}\, p_X(x)(m')\big) \cdot P(x, x'). \tag{0.8.1}$$

Si X est un S-groupe, on notera $*$ sa loi, e sa section unité, et i le S-morphisme défini par :
$$i(m) = m \cdot e\,,$$
pour tout $S' \to S$ et $m \in L'_X(S')$.

---

[27] N.D.E. : On a ajouté ici le numéro 0.8 pour marquer le retour à l'original.
[28] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Corollaire 0.9. — *Soit* X *un* S*-groupe. Alors* X^+ *est muni naturellement d'une structure de* S*-groupe, et* p_X *est un morphisme de* S*-groupes. De plus, le* S*-morphisme*

$$i : L'_X \longrightarrow X, \qquad m \mapsto m \cdot e$$

est un isomorphisme de S-groupes *de* L'_X *sur* $\mathrm{Ker}(p_X)$*, et l'on a, pour tous* $S' \to S$, $x' \in X(S')$*,* $m \in L'_X(S')$ *:*

$$m \cdot x' = (m \cdot e) * x' = i(m) * x'. \tag{0.9.1}$$

Les deux premières assertions ont déjà été démontrées en 0.1.2. Comme X est formellement principal homogène au-dessus de X^+ sous $L_X = L'_X \times_S X^+$, le morphisme i est bien un isomorphisme de S-foncteurs de L'_X sur le noyau de p_X. Le fait que i soit un morphisme de groupes et la formule (0.9.1) résultent de la formule (0.8.1) appliquée respectivement à $x = x' = e$, et à $x = e$, $m' = 1$.

Corollaire 0.10. — *Soit* X *un* S*-groupe. Avec les notations précédentes, pour tout* $S' \to S$ *et tous* $x \in X(S')$ *et* $m' \in L'_X(S')$*, on a* 96

$$x * i(m') * x^{-1} = i\big(\mathrm{Ad}\, p_X(x)(m')\big). \tag{0.10.1}$$

Cela résulte de l'égalité $i(m') * x^{-1} = m' \cdot x^{-1}$ et de (0.8.1) appliquée à $m = 1$ et $x' = x^{-1}$.

Lorsque X est un S-groupe, nous avons donc déterminé explicitement le noyau de $X \to X^+$ et l'opération des automorphismes intérieurs de X sur ce noyau. Nous allons maintenant voir que l'on peut faire de même pour certains S-foncteurs en groupes non nécessairement représentables. Un cas nous sera utile, celui des foncteurs $\underline{\mathrm{Aut}}$ (I 1.7). Énonçons tout de suite :

Proposition 0.11. — *Soit* E *un* S*-schéma. Notons* $X = \underline{\mathrm{Aut}}_S(E)$*. Le noyau du morphisme de* S*-foncteurs en groupes*

$$p_X : X \longrightarrow X^+$$

s'identifie canoniquement au S*-foncteur en groupes commutatifs* L'_X *défini par*

$$\mathrm{Hom}_S(Y, L'_X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{E_0 \times_{S_0} Y_0}}(\Omega^1_{E_0/S_0} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_{Y_0},\ \mathscr{J}\mathscr{O}_{E \times_S Y}),$$

où Y *désigne un* S*-schéma variable.*

En effet, si Y est un S-schéma variable, on a $\mathrm{Hom}_S(Y, X) = \mathrm{Aut}_Y(E \times_S Y)$, et

$$\mathrm{Hom}_S(Y, X^+) = \mathrm{Hom}_S(Y_{\mathscr{J}}, X) = \mathrm{Aut}_{Y_{\mathscr{J}}}(E \underset{S}{\times} Y_{\mathscr{J}}) = \mathrm{Aut}_{Y_{\mathscr{J}}}((E \underset{S}{\times} Y) \underset{Y}{\times} Y_{\mathscr{J}}).$$

En appliquant 0.7 b) au Y-schéma $E \times_S Y$, on obtient un isomorphisme de groupes : 97

$$\mathrm{Hom}_S(Y, L'_X) \simeq \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}_S(Y, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(Y, X^+)\right),$$

isomorphisme que l'on vérifie aisément être fonctoriel en le S-schéma Y. On obtient donc un isomorphisme de S-groupes

$$L'_X \simeq \mathrm{Ker}(X \longrightarrow X^+),$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 0.11.

Corollaire 0.12. — [29] *On conserve les notations de* 0.11 : E *est un* S*-schéma et* $\mathrm{X} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{E})$. *On a une opération naturelle* f *de* X *sur* L'_{X} *définie de la manière suivante. Pour tout* S*-schéma* Y, *on a*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y},\mathrm{X}) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}) \\ \textit{et} \qquad &\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y},\mathrm{L}'_{\mathrm{X}}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}_0\times_{\mathrm{S}_0}\mathrm{Y}_0}}(\Omega^1_{\mathrm{E}_0\times_{\mathrm{S}_0}\mathrm{Y}_0/\mathrm{Y}_0}, \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}}) \end{aligned}$$

(N. B. $\Omega^1_{\mathrm{E}_0/\mathrm{S}_0}\otimes_{\mathrm{S}_0}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}\simeq\Omega^1_{\mathrm{E}_0\times_{\mathrm{S}_0}\mathrm{Y}_0/\mathrm{Y}_0}$, cf. EGA IV_4, 16.4.5) *; le premier groupe opère sur le second par transport de structure et cette opération est bien fonctorielle en* Y. *On a alors la formule :*

$$x\,i(m)\,x^{-1} = i(f(x)m), \tag{0.12.1}$$

pour tout $\mathrm{Y}\to\mathrm{S}$ *et tous* $x\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y},\mathrm{X})$, $m\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y},\mathrm{L}'_{\mathrm{X}})$.

En effet, ceci résulte de 0.7 c) appliqué au Y-schéma $\mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}$.

Rappel 0.13. — L'image directe d'un module quasi-cohérent par un morphisme de *présentation finie* est quasi-cohérente. Sous les mêmes conditions, la formation de l'image directe commute au changement de base *plat* : dans la situation

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T} \arrow[d, "f"'] & \mathrm{T}' = \mathrm{T}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ \mathrm{S} & \mathrm{S}' \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd},$$

98 si on suppose f (et donc f') de présentation finie et g (et donc g') plat, on a pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{T}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$

$$f_*(\mathscr{F})\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{O}_{\mathrm{S}'} = f'_*(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}),$$

où, de manière plus esthétique

$$g^*(f_*(\mathscr{F})) = f'_*(g'^*(\mathscr{F})).$$

Ces deux faits sont plus généralement valables pour un morphisme f quasi-compact et quasi-séparé, cf. EGA I, 9.2.1 et EGA III_1, 1.4.15 dans le cas quasi-compact séparé (compte tenu de EGA III_2, $\mathrm{Err}_{\mathrm{III}}$ 25) et EGA IV_1, 1.7.4 et 1.7.21.

Remarque 0.14. — [30] Reprenons les notations de 0.11 : soient E un S-schéma, $\mathrm{X} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{E})$ et L'_{X} le S-foncteur en groupes commutatifs défini par :

$$\begin{aligned} \mathrm{L}'_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}_0\times_{\mathrm{S}_0}\mathrm{Y}_0}}(\Omega^1_{\mathrm{E}_0/\mathrm{S}_0}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0},\ \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}}}(\Omega^1_{\mathrm{E}/\mathrm{S}}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}},\ \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}}) \\ &= \Gamma\big(\mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}, \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}}}(\Omega^1_{\mathrm{E}/\mathrm{S}}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}},\ \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}})\big). \end{aligned}$$

---

[29] N.D.E. : On a changé « Remarque » en « Corollaire ».

[30] N.D.E. : On a détaillé la première partie de cette remarque, et l'on a ajouté une deuxième partie.

Supposons Y plat sur S, alors on a des isomorphismes :

$$\mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}} \xleftarrow{\sim} (\mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \xrightarrow{\sim} (\mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}.$$

Supposons de plus E de présentation finie sur S ; alors $\Omega^1_{\mathrm{E}/\mathrm{S}}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{E}}$-module de présentation finie (cf. EGA IV_4, 16.4.22) et donc, d'après EGA 0_{I}, 6.7.6, on a :

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}}}(\Omega^1_{\mathrm{E}/\mathrm{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}},\ (\mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \simeq \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}}}(\Omega^1_{\mathrm{E}/\mathrm{S}},\ \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}.$$

Notons $\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{S}$ et $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ les morphismes structuraux ; appliquant 0.13 au diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y} \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "\pi'"] \\ \mathrm{S} & \mathrm{Y} \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd},$$

et au $\mathscr{O}_{\mathrm{E}}$-module $\mathscr{F} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}}}(\Omega^1_{\mathrm{E}/\mathrm{S}},\ \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}})$, on obtient

$$\Gamma(\mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y},\ g'^*\mathscr{F}) = \Gamma(\mathrm{Y}, \pi'_* g'^*\mathscr{F}) = \Gamma(\mathrm{Y}, g^*\pi_*\mathscr{F}) = \mathrm{W}(\pi_*\mathscr{F})(\mathrm{Y}).$$

On a donc montré que, si E est de présentation finie sur S, on a **99**

$$\mathrm{L}'_{\mathrm{X}} = \mathrm{W}\big(\pi_*\, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}}}(\Omega^1_{\mathrm{E}/\mathrm{S}}, \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}})\big) \tag{0.14.1}$$

sur la catégorie des S-schémas *plats* sur S. Notons de plus que le module dont on prend le W est *quasi-cohérent*, d'après EGA I, 9.1.1 et 9.2.1.

(31) Notons L_0 le S_0-foncteur

$$\mathrm{W}\big(\pi_{0*}\, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}_0}}(\Omega^1_{\mathrm{E}_0/\mathrm{S}_0}, \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}})\big).$$

Alors, revenant à la définition de $\mathrm{L}'_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})$ et tenant compte de l'isomorphisme

$$\mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}} \simeq (\mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0},$$

on obtient, en raisonnant comme plus haut, que

$$\mathrm{L}'_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) = \mathrm{L}_0(\mathrm{Y}_0) = \mathrm{L}_0(\mathrm{Y}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}_0) = \Big(\prod_{\mathrm{S}_0/\mathrm{S}} \mathrm{L}_0\Big)(\mathrm{Y}).$$

Donc, sur la catégorie des S-schémas *plats* sur S, on a :

$$\mathrm{L}'_{\mathrm{X}} = \prod_{\mathrm{S}_0/\mathrm{S}} \mathrm{W}\big(\pi_{0*}\, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}_0}}(\Omega^1_{\mathrm{E}_0/\mathrm{S}_0}, \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}})\big).$$

Il n'est pas évident que l'action de X sur L'_{X} définie en 0.12 provienne d'une action de $\mathrm{X}_0 = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{E}_0)$ sur L_0 ; c'est toutefois le cas lorsque, de plus, E est *plat* sur S.

(31) N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

En effet, on a dans ce cas des isomorphismes canoniques :

$$\mathcal{J}\mathcal{O}_{\mathrm{E}} \simeq \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}}} \mathcal{O}_{\mathrm{E}} \simeq \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{O}_{\mathrm{E}_0}.$$

$$\mathrm{L}_0 \simeq \mathrm{W}\big(\pi_{0*}\,\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{\mathrm{E}_0}}(\Omega^1_{\mathrm{E}_0/\mathrm{S}_0}, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{O}_{\mathrm{E}_0})\big),$$

$$\mathrm{L}'_{\mathrm{X}} = \prod_{\mathrm{S}_0/\mathrm{S}} \mathrm{W}\big(\pi_{0*}\,\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{\mathrm{E}_0}}(\Omega^1_{\mathrm{E}_0/\mathrm{S}_0}, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{O}_{\mathrm{E}_0})\big). \tag{0.14.2}$$

Alors, pour tout S_0-schéma T, on a

$$\mathrm{L}_0(\mathrm{T}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{E}_0\times_{\mathrm{S}_0}\mathrm{T}}}(\Omega^1_{\mathrm{E}_0\times_{\mathrm{S}_0}\mathrm{T}/\mathrm{T}}, \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{O}_{\mathrm{E}_0\times_{\mathrm{S}_0}\mathrm{T}})$$

et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{T}, \mathrm{X}_0) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{T}}(\mathrm{E}_0 \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{T})$ agit par transport de structure sur $\mathrm{L}_0(\mathrm{T})$, de façon fonctorielle en T, enfin pour tout S-schéma Y plat sur S, l'action par transport de structure de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{E} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y})$ sur $\mathrm{L}'_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) = \mathrm{L}_0(\mathrm{Y}_0)$ se factorise par $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Y}_0}(\mathrm{E}_0 \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{Y}_0)$.

Extrayons enfin de SGA 1 III les deux propositions suivantes.

Proposition 0.15. — (SGA 1 III, 6.8) [32] *Pour tout* $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$*-schéma* Y lisse *sur* $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$ *et* affine*, il existe un* S*-schéma* X lisse *sur* S *tel que* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{\mathcal{J}} \simeq \mathrm{Y}$*, et un tel* X *est unique à isomorphisme (non unique) près.*

Proposition 0.16. — (SGA 1 III, 5.5) [33] *Soit* X *un* S*-schéma* lisse *sur* S*. Pour tout* S*-schéma* Y affine*, l'application canonique*

$$p_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) : \quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}^+) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}(\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}, \mathrm{X}_{\mathcal{J}})$$

est surjective.

Corollaire 0.17. — *Soit* E *un* S*-schéma* lisse *sur* S *et* affine *; notons* $\mathrm{X} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{E})$*. Pour tout* S*-schéma* Y affine*, l'application canonique*

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{E} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}^+) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}(\mathrm{E}_{\mathcal{J}} \times_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}} \mathrm{Y}_{\mathcal{J}})$$

est surjective.

En effet, $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E}$ est affine sur Y, lui-même affine, donc affine. Appliquant 0.16, on en déduit que tout $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$-morphisme $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}} \times_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}} \mathrm{E}_{\mathcal{J}} \to \mathrm{E}_{\mathcal{J}}$ se prolonge en un S-morphisme
100 $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E} \to \mathrm{E}$.

[34] En d'autres termes, tout $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$-endomorphisme de $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}} \times_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}} \mathrm{E}_{\mathcal{J}}$ se relève en un Y-endomorphisme de $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E}$. Alors, 0.7 a) montre que tout $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$-*automorphisme* de $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}} \times_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}} \mathrm{E}_{\mathcal{J}}$ se relève en un Y-*automorphisme* de $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{E}$, ce qui est la propriété annoncée.

[32] N.D.E. : Ce résultat de relèvement « global » utilise le résultat de relèvement « local » de *loc. cit.*, 4.1, qui est énoncé pour S *localement noethérien* ; voir EGA IV_4 18.1.1 pour le cas général.

[33] N.D.E. : Ceci est une conséquence immédiate de la définition de (formellement) « lisse » adoptée dans EGA IV_4, 17.3.1 (et 17.1.1).

[34] N.D.E. : On a légèrement modifié l'original, pour être exactement sous les hypothèses de 0.7.

1. Extensions et cohomologie

1.1. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie stable par produits fibrés. [35] Soient S un objet de $\mathscr{C}$, G un S-groupe (*représentable*) et F un S-foncteur en groupes commutatifs sur lequel G opère. On a défini en I, 5.1 les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^n(\mathrm{G},\mathrm{F})$. On rappelle que ce sont les groupes d'homologie d'un complexe noté $\mathrm{C}^*(\mathrm{G},\mathrm{F})$ où, notant $(\mathrm{G}/\mathrm{S})^n = \mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\cdots\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G}$ (n facteurs),

$$\mathrm{C}^n(\mathrm{G},\mathrm{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}((\mathrm{G}/\mathrm{S})^n,\mathrm{F}).$$

Comme G et donc [35] les $(\mathrm{G}/\mathrm{S})^n$ sont représentables, on a aussi

$$\mathrm{C}^n(\mathrm{G},\mathrm{F}) = \mathrm{F}((\mathrm{G}/\mathrm{S})^n)\,;$$

de ceci, et de la définition de l'opérateur bord, on voit que le complexe $\mathrm{C}^*(\mathrm{G},\mathrm{F})$ ne dépend que de la restriction de F à la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ dont les objets sont les puissances cartésiennes de G sur S. En conséquence, on a le 101

Lemme 1.1.1. — *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie stable par produits fibrés* [35], S *un objet de* $\mathscr{C}$, G *un* S*-groupe* représentable. *Notons $\mathscr{C}(\mathrm{G})$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ dont les objets sont les puissances cartésiennes de* G *sur* S. *Soient* F *et* F′ *deux* S*-foncteurs en groupes commutatifs sur lesquels* G *opère. Si* F *et* F′ *ont même restriction à $\mathscr{C}(\mathrm{G})$, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{G},\mathrm{F}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{H}^*(\mathrm{G},\mathrm{F}').$$

1.1.2. Cohomologie et restriction des scalaires. — [36] Énonçons un autre résultat de comparaison. Soit maintenant $\mathrm{T}\to\mathrm{S}$ un morphisme de $\mathscr{C}$. Si F est un T-foncteur en groupes commutatifs, alors le foncteur obtenu par « restriction des scalaires » (cf. Exp. II, 1)

$$\mathrm{F}_1 = \prod_{\mathrm{T}/\mathrm{S}} \mathrm{F}$$

est un S-foncteur en groupes commutatifs et on a un morphisme de S-foncteurs en groupes

$$u:\quad \prod_{\mathrm{T}/\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{T-gr.}}(\mathrm{F}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{F}_1). \qquad [37]$$

Soit maintenant G un S-foncteur en groupes et soit

$$\mathrm{G}_{\mathrm{T}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{T-gr.}}(\mathrm{F})$$

---

[35] N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse que $\mathscr{C}$ soit stable par produits fibrés (ce qui est le cas dans les applications où $\mathscr{C}$ est la catégorie des schémas (**Sch**) ou celle des foncteurs $(\mathbf{Sch})^\circ\to(\mathbf{Ens})$). Si on omet cette hypothèse, il faut supposer dans la suite que les produits fibrés $\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\cdots\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G}$ sont représentables.

[36] N.D.E. : On a ajouté le titre de ce paragraphe.

[37] N.D.E. : En effet, soient $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$ et $\alpha\in\mathrm{Aut}_{(\mathrm{T}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}')\text{-gr.}}(\mathrm{F}_{\mathrm{T}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'})$, pour tout $\mathrm{U}\to\mathrm{T}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'$, notons $\alpha_{\mathrm{U}}\in\mathrm{Aut}_{\text{gr.}}(\mathrm{F}_{\mathrm{T}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'}(\mathrm{U}))$ l'élément défini par α ; alors $u(\mathrm{S}')(\alpha)$ est l'élément β de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{F}_1)(\mathrm{S}') = \mathrm{Aut}_{\mathrm{S}'\text{-gr.}}\big(\prod_{\mathrm{T}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'/\mathrm{S}'}\mathrm{F}_{\mathrm{T}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}'}\big)$ tel que $\beta_{\mathrm{S}''}=\alpha_{\mathrm{T}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{S}''}$ pour tout $\mathrm{S}''\to\mathrm{S}'$.

une opération de G_T sur F. Par définition du foncteur $\prod_{T/S}$, on en déduit un morphisme de S-foncteurs en groupes

$$G \longrightarrow \prod_{T/S} \underline{\mathrm{Aut}}_{T\text{-gr.}}(F)$$

d'où, par composition avec u, une opération de G sur $F_1 = \prod_{T/S} F$. [38]

102
Lemme 1.1.2. — *Sous les conditions précédentes, on a un isomorphisme canonique*

$$H^*(G, \prod_{T/S} F) \simeq H^*(G_T, F).$$

En effet, d'après la définition de la cohomologie, les complexes standard sont canoniquement isomorphes.

1.2. Relèvement de morphismes de groupes. — [39] Suivant les principes généraux, on pose la définition suivante :

Définition 1.2.1. — Soit $1 \to M \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} G$ une suite de morphismes de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes. On dit qu'elle est *exacte* si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, la suite de groupes ordinaires ci-dessous est exacte :

$$1 \longrightarrow M(S) \xrightarrow{u(S)} E(S) \xrightarrow{v(S)} G(S)$$

(ii) pour tout objet H de $\widehat{\mathscr{C}}$, la suite de groupes ordinaires ci-dessous est exacte :

$$1 \longrightarrow \mathrm{Hom}(H, M) \xrightarrow{u(H)} \mathrm{Hom}(H, E) \xrightarrow{v(H)} \mathrm{Hom}(H, G)$$

Faisant en particulier $H = G$ dans (ii), on voit que l'ensemble des sections de v (ne respectant pas *a priori* les structures de groupes) est vide ou principal homogène sous $\mathrm{Hom}(G, M)$. Supposons-le non vide ; soit donc

$$s : G \longrightarrow E$$

une section de v. Alors pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout $x \in G(S)$, l'élément $s(x)$ de
103 E(S) définit un automorphisme intérieur de E_S qui normalise M_S (plus correctement l'image de M_S par u_S), donc un automorphisme de M_S.

---

[38] N.D.E. : Explicitement, pour tout $S' \to S$, l'opération de $G(S')$ sur $F_1(S') = F(T \times_S S')$ est donnée par l'opération de $G_T(T \times_S S') = G(T \times_S S')$ sur $F(T \times_S S')$ et le morphisme de groupes $G(S') \to G(T \times_S S')$ correspondant à la projection $T \times_S S' \to S'$. On peut aussi dire que l'opération de G_T sur F est donnée par un morphisme $G_T \times_T F \to F$; appliquant le foncteur $\prod_{T/S}$ et notant G_1 le S-groupe $\prod_{T/S} G_T$, on obtient, compte tenu de II 1.2, un morphisme $G_1 \times_S F_1 \to F_1$ qui définit une opération de G_1 sur F. L'opération de G est alors obtenue via le morphisme naturel $G \to G_1$, qui correspond par adjonction à id_G.

[39] N.D.E. : On a ajouté ce titre.

Scholie 1.2.1.1. — [40] Si M est commutatif, on voit « ensemblistement » que cet automorphisme ne dépend pas de la section choisie, mais seulement de x, et qu'il en dépend multiplicativement. En résumé, à toute suite exacte

$$(\mathrm{E}) \qquad 1 \longrightarrow \mathrm{M} \xrightarrow{u} \mathrm{E} \xrightarrow{v} \mathrm{G}$$

telle que M soit *commutatif* et que v *possède une section*, est associée un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes

$$\mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-gr.}}(\mathrm{M})$$

que l'on appelle l'*opération de* G *sur* M *définie par l'extension* (E).

Définition 1.2.1.2. — On a vu en I, 2.3.7 que v possède une section qui est un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes si et seulement si l'extension (E) est isomorphe (« en tant qu'extension ») au produit semi-direct de M par G relativement à l'opération précédente. Une telle section de v sera appelée *section de l'extension* (E), ou simplement *section de* (E).

Si s est une section de (E) et si $m \in \Gamma(\mathrm{M}) \simeq \mathrm{Ker}(\Gamma(\mathrm{E}) \to \Gamma(\mathrm{G}))$ (pour la définition de Γ, voir I, 1.2), alors le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{E}$ défini par [41]

$$x \mapsto u(m)\, s(x)\, u(m)^{-1}$$

est également une section de (E) dite *déduite de s par l'automorphisme intérieur défini par m* (ou par $u(m)$).

Lemme 1.2.2. — *Soit* (E) : $1 \to \mathrm{M} \xrightarrow{u} \mathrm{E} \xrightarrow{v} \mathrm{G}$ *une suite exacte de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes telle que* M *soit* commutatif *et que* v possède une section. *Faisons opérer* G *sur* M *de la manière définie par* (E).

(i) *L'extension* (E) *définit canoniquement une classe* $c(\mathrm{E}) \in \mathrm{H}^2(\mathrm{G}, \mathrm{M})$ *dont l'annulation est nécessaire et suffisante à l'existence d'une section de* (E). **104**

(ii) *Si* $c(\mathrm{E}) = 0$, *l'ensemble des sections de* (E) *est principal homogène sous le groupe* $\mathrm{Z}^1(\mathrm{G}, \mathrm{M})$, *et l'ensemble des sections de* (E) *modulo l'action des automorphismes intérieurs définis par les éléments de* $\Gamma(\mathrm{M})$ *est principal homogène sous le groupe* $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{M})$.

(iii) [42] *Soit s une section de* (E), *l'ensemble des conjugués de s par les automorphismes intérieurs définis par* $\Gamma(\mathrm{M})$ *est en bijection avec* $\Gamma(\mathrm{M})/\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, \mathrm{M})$.

La démonstration se fait exactement comme dans le cas des groupes ordinaires, le fait que l'on parte d'une section de v assurant la fonctorialité des calculs ensemblistes. Indiquons brièvement les principales étapes de la démonstration.

a) À toute section s de v on associe le morphisme

$$\mathrm{D}s : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{M},$$

[40] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 1.2.1.1 et 1.2.1.2 pour mettre en évidence les notions qui y sont introduites.

[41] N.D.E. : Dans le terme de droite, on a corrigé x en $s(x)$.

[42] N.D.E. : On a ajouté ce point, pendant de 1.2.4 (iii). Notons d'autre part que l'assertion est valable pour *toute section de v*, cf. la démonstration.

défini ensemblistement par

$$u(\mathrm{D}s(x,y)) = s(xy)s(y)^{-1}s(x)^{-1}.$$

On montre que Ds est un 2-cocycle par le calcul suivant. [(43)] D'après la définition de la différentielle du complexe standard (I, 5.1), l'on a :

$$(\partial^2\mathrm{D}s)(x,y,z) = (s(x)\mathrm{D}s(y,z)s(x)^{-1})\cdot \mathrm{D}s(x,y)^{-1}\cdot \mathrm{D}s(xy,z)^{-1}\cdot \mathrm{D}s(x,yz);$$

il suffit de reporter la définition de Ds dans cette formule pour trouver (sans utiliser aucune commutativité) $\mathrm{D}s \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{G},\mathrm{M})$.

b) Si s et s' sont deux sections de v, il existe $f : \mathrm{G} \to \mathrm{M}$ tel que $s(x) = f(x)s'(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{D}s'(x,y) &= f^{-1}(xy)\mathrm{D}s(x,y)s(x)f(y)s(x)^{-1}f(x),\\ &= \mathrm{D}s(x,y)\cdot f^{-1}(xy)\cdot (s(x)f(y)s(x)^{-1})\cdot f(x),\end{aligned}$$

105 soit

$$\mathrm{D}s' = \mathrm{D}s\cdot \partial^1 f.$$

[(44)] Ceci montre que la classe de Ds dans $\mathrm{H}^2(\mathrm{G},\mathrm{M})$ ne dépend pas de la section s de v choisie ; c'est la classe c(E) de l'extension (E).

c) Soient s et s' deux sections de v et soit $m \in \Gamma(\mathrm{M})$. Alors, l'égalité $s(x) = m^{-1}s'(x)m$ (pour tout $x \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$, $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$) équivaut à

$$s(x) = m^{-1}s'(x)m\, s'(x)^{-1}s'(x), \qquad \text{i.e.} \qquad s = \partial^0 m\cdot s'.$$

En particulier, le stabilisateur de s dans $\Gamma(\mathrm{M})$ est le sous-groupe des $m \in \Gamma(\mathrm{M})$ tels que $\partial^0 m = e_{\mathrm{M}}$, i.e. le sous-groupe $\mathrm{H}^0(\mathrm{G},\mathrm{M})$. Ceci prouve déjà (iii).

d) Le raisonnement est maintenant habituel : [(45)] Soit s_0 une section arbitraire de v ; il existe une section s, nécessairement de la forme $s = f\cdot s_0$, qui est un morphisme de groupes, i.e. qui vérifie $\mathrm{D}s = 0$, si et seulement si $(\mathrm{D}s_0)^{-1} = \partial^1 f$, c.-à-d., si et seulement si la classe c(E) est nulle. Ceci prouve (i).

Dans ce cas, l'ensemble des sections de (E) est formé des sections $s' = h\cdot s$, où $h : \mathrm{G} \to \mathrm{M}$ vérifie $\partial^1 h = 0$, i.e. $h \in \mathrm{Z}^1(\mathrm{G},\mathrm{M})$. De plus, d'après le point c), deux telles sections $h_1\cdot s$ et $h_2\cdot s$ sont conjuguées sous $\Gamma(\mathrm{M})$ si et seulement si h_1 et h_2 ont même image dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathrm{M})$. Ceci prouve (ii).

Soit toujours

$$\text{(E)} \qquad 1 \longrightarrow \mathrm{M} \xrightarrow{u} \mathrm{E} \xrightarrow{v} \mathrm{G}$$

une suite exacte de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes avec M *commutatif.* Soit

$$f : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G}$$

un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes. Considérons $\mathrm{E}_f = \mathrm{H}\times_{\mathrm{G}}\mathrm{E}$; c'est un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe et la projection $v_f : \mathrm{E}_f \to \mathrm{H}$ est un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes. De même pour $e_f : \mathrm{E}_f \to \mathrm{E}$. D'autre part, si on envoie M dans E par u et dans H par le morphisme unité, on

[(43)] N.D.E. : on a corrigé l'original, pour le rendre compatible avec I, 5.1.
[(44)] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[(45)] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

définit un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes $u_f : \mathrm{M} \to \mathrm{E}_f$. On a donc construit un diagramme commutatif de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{E}) & 1 \arrow[r] & \mathrm{M} \arrow[r, "u"] & \mathrm{E} \arrow[r, "v"] & \mathrm{G} \\
(\mathrm{E}_f) & 1 \arrow[r] & \mathrm{M} \arrow[r, "u_f"] \arrow[u, "\mathrm{id}"] & \mathrm{E}_f \arrow[r, "v_f"] \arrow[u, "e_f"] & \mathrm{H} \arrow[u, "f"]
\end{tikzcd} .$$

On a immédiatement : 106

Lemme 1.2.3. — (i) *La suite* (E_f) *est exacte.*

(ii) *L'application* $s \mapsto e_f \circ s = f'$ *réalise une correspondance bijective entre les morphismes*

$$s : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E}_f$$

tels que $v_f \circ s = id$ (*c'est-à-dire les sections de* v_f) *et les morphismes*

$$f' : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E}$$

tels que $v \circ f' = f$ (*c'est-à-dire les morphismes* f' « *relevant* » f).

(iii) *Dans la correspondance précédente, sections de* (E_f) *et morphismes de groupes* f' *relevant* f *se correspondent.*

Appliquant le lemme 1.2.2 à l'extension (E_f) et tenant compte de 1.2.3, on obtient la proposition suivante (qui contient formellement 1.2.2) :

Proposition 1.2.4. — *Soit* $(\mathrm{E}) : 1 \to \mathrm{M} \to \mathrm{E} \xrightarrow{v} \mathrm{G}$ *une suite exacte de* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes avec* M commutatif. *Soit*

$$f : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G}$$

un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes ; supposons qu'il se relève en un morphisme* (*non nécessairement de groupes*) $f' : \mathrm{H} \to \mathrm{E}$. *Faisons opérer* H *sur* M *par le morphisme composé* (*multiplicatif et indépendant du choix de* f'),

$$\mathrm{H} \xrightarrow{f'} \mathrm{E} \xrightarrow{\mathrm{int}} \underline{\mathrm{Aut}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-gr.}}(\mathrm{M}).$$

(i) *Le morphisme* f *définit canoniquement une classe* $c(f) \in \mathrm{H}^2(\mathrm{H}, \mathrm{M})$ *dont l'annulation est nécessaire et suffisante à l'existence d'un morphisme de* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes*

$$f' : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E}$$

relevant f.

(ii) *Si* $c(f) = 0$, *l'ensemble des morphismes de* $\widehat{\mathscr{C}}$*-groupes* f' *relevant* f, *modulo* 107
l'action des automorphismes intérieurs définis par les éléments de $\Gamma(\mathrm{M})$ (*i.e. par les éléments* m *de* $\Gamma(\mathrm{E})$ *tels que* $v(m) = e$) *est principal homogène sous* $\mathrm{H}^1(\mathrm{H}, \mathrm{M})$.

(iii) *Si* $f' : \mathrm{H} \to \mathrm{E}$ *est un morphisme de groupes relevant* f, *l'ensemble des transformés de* f' *par les automorphismes intérieurs définis par les éléments de* $\Gamma(\mathrm{M})$ *est isomorphe à* $\Gamma(\mathrm{M})/\Gamma(\mathrm{M}^{\mathrm{H}}) = \Gamma(\mathrm{M})/\mathrm{H}^0(\mathrm{H}, \mathrm{M})$.

1.3. Extensions de lois de groupes. — Considérons la situation suivante : on a un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$

$$(\dagger) \qquad p : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$$

et un $\widehat{\mathscr{C}}$-groupe commutatif M opérant sur X, tels que X soit formellement principal homogène au-dessus de Y sous $\mathrm{M_Y}$.

Si $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ est un morphisme quelconque de $\widehat{\mathscr{C}}$, alors $g \circ p : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ est invariant par M : pour chaque $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $(g \circ p)(\mathrm{S})$ est invariant sous l'action de M(S) opérant sur X(S). Réciproquement, nous supposerons vérifiée la condition suivante pour $n = 1, 2, 3, 4$.

$(+)_n$: *Tout morphisme de* X^n *dans* M, *invariant sous l'action de* M^n *opérant sur* X^n, *se factorise de manière unique par* $p^n : \mathrm{X}^n \to \mathrm{Y}^n$ (où les puissances n désignent des puissances cartésiennes).

Lemme 1.3.1. — (i) *Si h est un morphisme de* Y *dans* M, *l'automorphisme u_h de* X *défini ensemblistement par $x \mapsto h(p(x)) \cdot x$ préserve les fibres de p et commute aux opérations de* M *sur* X, [46] *i.e. pour tous* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *et* $x \in \mathrm{X(S)}$, $m \in \mathrm{M(S)}$, *on a*

$$p\big(h(p(x)) \cdot x\big) = p(x), \qquad m \cdot h(p(x)) \cdot x = h(p(m \cdot x)) \cdot m \cdot x\,.$$

(ii) *Cette construction réalise une correspondance bijective entre morphismes de* Y *dans* M *et automorphismes de* X *préservant les fibres de p et commutant aux opérations de* M.

La première partie est claire, puisque $p(m \cdot x) = p(x)$ et que M est commutatif.
108 Réciproquement, un automorphisme u de X préservant les fibres de p s'écrit ensemblistement $x \mapsto g(x)x$, où g est un certain morphisme de X dans M. Si u commute aux opérations de M, le morphisme g est invariant par M [47] et on conclut par la condition $(+)_1$.

Nous supposons maintenant que sont données en plus une loi de groupe sur Y et une opération de Y sur M, c'est-à-dire un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes :

$$(\ddagger) \qquad f : \mathrm{Y} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-gr.}}(\mathrm{M}).$$

Définition 1.3.2. — Une loi de composition sur X

$$\mathrm{P} : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$$

est dite *admissible* si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(i) P relève la loi de groupe de Y, i.e. le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \times \mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{P}"] \arrow[d, "(p,p)"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{Y} \times \mathrm{Y} \arrow[r] & \mathrm{Y}
\end{tikzcd}$$

[46] N.D.E. : Ici et dans la suite, on a remplacé « commute à p et aux opérations de M » par « préserve les fibres de p et commute aux opérations de M ». D'autre part, on a ajouté les égalités qui suivent.

[47] N.D.E. : En effet, l'égalité $mg(x)x = mu(x) = u(mx) = g(mx)mx$ entraîne $g(mx) = g(x)$.

est commutatif.

(ii) Pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tous $x, y \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$, $m, n \in \mathrm{M}(\mathrm{S})$, on a la relation suivante

$$(++) \qquad \mathrm{P}(m \cdot x, n \cdot y) = m \cdot f(p(x))(n) \cdot \mathrm{P}(x, y).$$

Proposition 1.3.3. — *Pour qu'une* loi de groupe $*$ *sur* X *soit admissible, il faut et il suffit que les quatre conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *est un morphisme de groupes.*

(ii) *Le morphisme* $i : \mathrm{M} \to \mathrm{X}$ *défini par* $i(m) = m \cdot e_{\mathrm{X}}$ *est un isomorphisme de* **109**
groupes de M *sur* $\mathrm{Ker}(p)$*, c'est-à-dire : on a ensemblistement* $(m \cdot e_{\mathrm{X}}) * (n \cdot e_{\mathrm{X}}) = (mn) \cdot e_{\mathrm{X}}$.

(iii) *On a* $m \cdot x = (m \cdot e_{\mathrm{X}}) * x = i(m) * x$ *pour chaque* $m \in \mathrm{M}(\mathrm{S})$, $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$.

(iv) *Les automorphismes intérieurs de* X *opèrent sur* $\mathrm{Ker}(p)$ *suivant la formule ensembliste :*

$$x * i(m) * x^{-1} = i(f(p(x))m).$$

La démonstration est immédiate.

Lemme 1.3.4. — [48] *Soient* h *un morphisme* $\mathrm{Y} \to \mathrm{M}$ *et* u_h *l'automorphisme* $x \mapsto h(p(x)) \cdot x$ *de* X (*cf.* 1.3.1). *Soit* P *une loi de composition* (*resp. une loi de groupe*) *admissible sur* X *et soit* P' *la loi de composition sur* X *déduite de* P *par l'intermédiaire de* u_h*, c.-à-d.,* $\mathrm{P}'(x, y) = u_h^{-1}(\mathrm{P}(u_h(x), u_h(y)))$*. Alors :*

(i) P' *est une loi de composition* (*resp. une loi de groupe*) *admissible.*

(ii) *Pour tout* $x, y \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$ $(\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C})$*, posons* $v = p(x)$ *et* $w = p(y)$*, alors*

$$\mathrm{P}'(x, y) = h(vw)^{-1} \cdot h(v) \cdot f(v)(h(w)) \cdot \mathrm{P}(x, y) = (\partial^1 h)\big(p(x), p(y)\big) \cdot \mathrm{P}(x, y).$$

Démonstration. On a $u_h^{-1} = u_{h^\vee}$, où $h^\vee : \mathrm{Y} \to \mathrm{M}$ est défini par $h^\vee(y) = h(y)^{-1}$. D'après 1.3.2 (i) et (ii), on a $\mathrm{P}(h(v) \cdot x, h(w) \cdot y) = h(v) \cdot f(v)(h(w)) \cdot \mathrm{P}(x, y)$ et $p(\mathrm{P}(x, y)) = vw$, d'où

$$\mathrm{P}'(x, y) = h(vw)^{-1} \cdot h(v) \cdot f(v)(h(w)) \cdot \mathrm{P}(x, y) = (\partial^1 h)\big(p(x), p(y)\big) \cdot \mathrm{P}(x, y).$$

Il est alors immédiat que P' vérifie les conditions (i) et (ii) de 1.3.2.

Définition 1.3.5. — Deux lois de composition admissibles déduites l'une de l'autre par le procédé de 1.3.4 sont dites *équivalentes.* [49]

Proposition 1.3.6. — *Supposons qu'il existe une loi de composition admissible sur* X. *Alors :*

(i) *Il existe une classe* $c \in \mathrm{H}^3(\mathrm{Y}, \mathrm{M})$ (*déterminée canoniquement*)*, dont la nullité est nécessaire et suffisante à l'existence d'une loi de composition admissible* associative *sur* X.

---

[48] N.D.E. : On a détaillé l'énoncé ainsi que sa démonstration, en vue du point (e) de la démonstration de 1.3.6.

[49] N.D.E. : C'est bien une relation d'équivalence, puisque $u_h^{-1} = u_{h^\vee}$.

(ii) *Si* $c = 0$*, l'ensemble des lois de composition admissibles et* associatives (*resp. des* classes d'équivalence *de lois de composition admissibles et* associatives) *sur* X *est principal homogène sous* $\mathrm{Z}^2(\mathrm{G}, \mathrm{M})$ (*resp.* $\mathrm{H}^2(\mathrm{G}, \mathrm{M})$).

110 La démonstration se fait en plusieurs étapes.

a) Soit P une loi de composition admissible sur X. Comme P relève la loi de composition de Y qui est associative, il existe un morphisme unique $a : \mathrm{X}^3 \to \mathrm{M}$ tel que

$$(*) \qquad \mathrm{P}(x, \mathrm{P}(y, z)) = a(x, y, z)\, \mathrm{P}(\mathrm{P}(x, y), z).$$

En appliquant les conditions 1.3.2 (i) et (ii), on voit aussitôt que a est invariant sous l'action de M^3 sur X^3, [(50)] d'où en appliquant l'hypothèse $(+)_3$ le résultat suivant :

(1) *Il existe un morphisme unique* $\mathrm{DP} : \mathrm{Y}^3 \to \mathrm{M}$ *tel que*

$$\mathrm{P}(x, \mathrm{P}(y, z)) = \mathrm{DP}(p(x), p(y), p(z))\, \mathrm{P}(\mathrm{P}(x, y), z),$$

et P *est associative si et seulement si* $\mathrm{DP} = 0$*.*

b) Calculons de proche en proche $\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathrm{P}(x, y), z), t)$ à l'aide de la formule précédente. En posant $p(x) = u$, $p(y) = v$, $p(z) = w$, $p(t) = h$, on obtient [(51)] le diagramme pentagonal suivant, où une flèche $a \xrightarrow{m} b$ signifie que $b = m \cdot a$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{P}(x, \mathrm{P}(y, \mathrm{P}(z, t))) \arrow[dl, "\mathrm{DP}(u,v,wh)"'] \arrow[dr, "f(u)(\mathrm{DP}(v,w,h))"] & \\
\mathrm{P}(\mathrm{P}(x, y), \mathrm{P}(z, t)) \arrow[d, "\mathrm{DP}(uv,w,h)"'] & & \mathrm{P}(x, \mathrm{P}(\mathrm{P}(y, z), t)) \arrow[d, "\mathrm{DP}(u,vw,h)"] \\
\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathrm{P}(x, y), z, t) & & \mathrm{P}(\mathrm{P}(x, \mathrm{P}(y, z)), t) \arrow[ll, "\mathrm{DP}(u,v,w)"']
\end{tikzcd}$$

donc on trouve

$$\mathrm{DP}(u, v, w) \cdot \mathrm{DP}(u, vw, h) \cdot f(u)\mathrm{DP}(v, w, h) \cdot \mathrm{DP}(u, v, wh)^{-1} \cdot \mathrm{DP}(uv, w, h)^{-1} = e_{\mathrm{M}}$$

c.-à-d., $\partial^3\mathrm{DP}(u, v, w, h) = e_{\mathrm{M}}$. Comme d'autre part le premier membre de la formule précédente peut s'écrire à l'aide de P et de a comme l'expression en (x, y, z, t) d'un certain morphisme $\mathrm{X}^4 \to \mathrm{M}$, il résulte de l'hypothèse d'unicité dans $(+)_4$ que $\partial^3\mathrm{DP}$ et e_{M}, qui factorisent le même morphisme, sont égaux, donc

(2) DP *est un cocycle*, i.e. *on a* $\mathrm{DP} \in \mathrm{Z}^3(\mathrm{Y}, \mathrm{M})$.

[(50)] N.D.E. : Pour $x, y, z \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$, posons $u = p(x), v = p(y)$ et $w = p(z)$. Alors

$$\mathrm{P}\big(mx, \mathrm{P}(m'y, m''z)\big) = \mathrm{P}\big(mx, m'f(v)(m'')\mathrm{P}(y, z)\big) = mf(u)(m')f(uv)(m'')\mathrm{P}\big(x, \mathrm{P}(y, z)\big).$$

D'autre part, comme $p(\mathrm{P}(x, y)) = uv$, on a aussi

$$\mathrm{P}\big(\mathrm{P}(mx, m'y), m''z)\big) = \mathrm{P}\big(mf(u)(m')\mathrm{P}(x, y), m''z\big) = mf(u)(m')f(uv)(m'')\mathrm{P}\big(\mathrm{P}(x, y), z\big)$$

et la comparaison de ces égalités avec $(*)$ donne $a(mx, m'y, m''z) = a(x, y, z)$.

[(51)] N.D.E. : On a ajouté le diagramme qui suit.

c) Si P et P′ sont deux lois de composition admissibles sur X, il existe un morphisme unique

$$b : X^2 \longrightarrow M$$

tel que $P'(x,y) = b(x,y)P(x,y)$. Appliquant 1.3.2 (ii) à P et P′, on voit que b est invariant par M^2, d'où, d'après $(+)_2$: **111**

(3) *Pour tout couple de lois de compositions admissibles* (P, P'), *il existe un unique* $d(P,P') : Y^2 \to M$ *tel que*

$$P'(x,y) = d(P,P')\big(p(x), p(y)\big)\, P(x,y),$$

et l'ensemble des lois de compositions admissibles devient ainsi principal homogène sous $\operatorname{Hom}(Y^2, M) = C^2(Y, M)$.

d) Sous les conditions précédentes, on a la formule :

$$DP' - DP = \partial^2 d(P,P'). \tag{4}$$

e) P et P′ sont équivalentes si et seulement si il existe un morphisme $h \in C^1(Y,M) = \operatorname{Hom}(Y,M)$ tel que $d(P,P') = \partial^1 h$; cela résulte de la définition de l'équivalence et de 1.3.4 (ii).

f) Il n'y a plus qu'à conclure : on cherche un P′ qui soit associatif, i.e. tel que $DP' = e_M$. Or DP est un cocycle dont la classe dans $H^3(Y,M)$ ne dépend pas de la loi de composition admissible P choisie (par (3) et (4)). Cette classe est l'obstruction c demandée. On pourra choisir un P′ répondant aux conditions si et seulement si $c = 0$; en effet, choisissant un P quelconque, on aura à résoudre, par (1) :

$$0 = DP' = DP + \partial^2 d(P,P'),$$

ce qui est possible par (3) et (4) si et seulement si $c = 0$. L'ensemble des P′ *associatifs* est principal homogène sous $Z^2(Y,M)$, toujours par (3) et (4). L'ensemble des P′ associatifs à équivalence près est principal homogène sous $H^2(Y,M)$ d'après (e).

2. Extensions infinitésimales d'un morphisme de schémas en groupes

112

Reprenons les notations du n°0. Soient Y et X deux S-foncteurs en groupes. Soit M le noyau du morphisme de groupes $p_X : X \to X^+$. On a donc une suite exacte de S-foncteurs en groupes

$$1 \longrightarrow M \longrightarrow X \xrightarrow{p_X} X^+.$$

Par définition de X^+, on a des isomorphismes

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_S(Y, X^+) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{S_{\mathcal{J}}}(Y_{\mathcal{J}}, X_{\mathcal{J}}) \\ \operatorname{Hom}_{S\text{-gr.}}(Y, X^+) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{S_{\mathcal{J}}\text{-gr.}}(Y_{\mathcal{J}}, X_{\mathcal{J}}), \end{aligned}$$

et le morphisme

$$\operatorname{Hom}_S(Y, p_X) : \operatorname{Hom}_S(Y, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(Y, X^+)$$

associe à un S-morphisme $f : Y \to X$, le S-morphisme $f^+ : Y \to X^+$ correspondant par les isomorphismes précédents au $S_{\mathcal{J}}$-morphisme $f_{\mathcal{J}} : Y_{\mathcal{J}} \to X_{\mathcal{J}}$ obtenu par changement de base à partir de f. Si M est *commutatif*, on peut appliquer à cette situation la proposition 1.2.4.

2.0. — [52] Dans la suite, nous nous intéresserons au cas suivant : Y est *plat* sur S, et X est un S-foncteur en groupes de l'une des deux espèces suivantes :

a) X est un S-schéma en groupes,

b) $X = \underline{\mathrm{Aut}}_S(E)$ où E est un S-schéma, *de présentation finie sur* S.

Notons $(\mathbf{Plats})_{/S}$ la catégorie des S-schémas *plats* sur S. Dans le cas (a) (resp. (b)), le S-foncteur en groupes $M = \mathrm{Ker}(X \to X^+)$, sa restriction L à $(\mathbf{Plats})_{/S}$, et les opérations des automorphismes intérieurs de X sur M, ont été calculés en 0.9, 0.5, et 0.10 (resp. 0.11, 0.14, et 0.12). C'est-à-dire, dans le cas (a), soit L_0 le S_0-foncteur en groupes commutatifs défini par : pour tout S_0-schéma T_0,

$$\mathrm{Hom}_{S_0}(T_0, L_0) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{T_0}}(\omega^1_{X_0/S_0} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_{T_0}, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_{T_0}),$$

sur lequel X_0 opère via sa représentation adjointe dans $\omega^1_{X_0/S_0}$, alors $L = \prod_{S_0/S} L_0$, i.e. pour tout S-schéma T, on a $L(T) = L_0(T \times_S S_0)$.

Dans le cas (b), notons π le morphisme structural $E \to S$, alors L est le foncteur en groupes abéliens sur $(\mathbf{Plats})_{/S}$ défini par

$$\mathrm{Hom}_S(T, L) = \Gamma(T, \pi_*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_E}(\Omega^1_{E/S}, \mathcal{J}\mathscr{O}_E)) \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_T),$$

sur lequel X, considéré comme foncteur sur $(\mathbf{Plats})_{/S}$, opère comme on l'a vu en 0.12.

Alors, on a une suites exacte de foncteurs en groupes sur $(\mathbf{Plats})_{/S}$:

$$\text{(E)} \qquad 1 \longrightarrow L \longrightarrow X \longrightarrow X^+.$$

D'autre part, Y étant supposé *plat* sur S, les groupes $H^i(Y, M)$ ne dépendent, d'après 1.1.1, que de la restriction L de M à $(\mathbf{Plats})_{/S}$. Comme $L = \prod_{S_0/S} L_0$ dans le
113 cas (a), alors d'après 1.1.2, on a dans ce cas des isomorphismes $H^i(Y, L) \simeq H^i(Y_0, L_0)$.

Alors, compte tenu de ce qui précède, on déduit de la proposition 1.2.4 le [53]

Théorème 2.1. — *Soient* S *un schéma,* $\mathcal{I}$ *et* $\mathcal{J}$ *deux idéaux quasi-cohérents tels que* $\mathcal{I} \supset \mathcal{J}$ *et* $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = 0$*, définissant les sous-schémas fermés* S_0 *et* $S_{\mathcal{J}}$*, et soient :*

– X *un* S*-foncteur en groupes de type* (a) *ou* (b)*, et* L_0, L *comme ci-dessus ;*

114 – Y *un* S*-schéma en groupes* plat *sur* S *et* $f_{\mathcal{J}} : Y_{\mathcal{J}} \to X_{\mathcal{J}}$ *un morphisme de* $S_{\mathcal{J}}$*-groupes.*

Alors :

(i) *Pour que* $f_{\mathcal{J}}$ *se relève en un morphisme de* S*-groupes* $Y \to X$*, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :*

(i_1) $f_{\mathcal{J}}$ *se relève en un morphisme de* S*-foncteurs* $Y \to X$ (*d'après* 1.2.4*, ceci définit une opération de* Y *sur* L*, qui ne dépend pas du relèvement choisi ; de plus, dans le cas* (*a*)*, l'opération ainsi obtenue de* Y_0 *sur* L_0 *provient du morphisme* $f_0 : Y_0 \to X_0$ *et de « l'action adjointe » de* X_0 *sur* L_0) *;*

[52] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 2.0, pour des références ultérieures.

[53] N.D.E. : On a placé plus haut les définitions qui figuraient dans l'original dans l'énoncé du théorème 2.1 et formaient l'essentiel de la page 113 de l'original.

(i$_2$) *Une certaine obstruction* $c(f_{\mathcal{J}})$*, définie canoniquement par* $f_{\mathcal{J}}$*, est nulle, où* $c(f_{\mathcal{J}})$ *est une classe dans* $\mathrm{H}^2(\mathrm{Y},\mathrm{L})$ $(\simeq \mathrm{H}^2(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_0)$ *dans le cas* (a)).

(ii) *Si les conditions de* (i) *sont satisfaites, l'ensemble* E *des morphismes de* S-*foncteurs en groupes* $\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$ *prolongeant* $f_{\mathcal{J}}$ *est principal homogène sous* $\mathrm{Z}^1(\mathrm{Y},\mathrm{L})$ $(\simeq \mathrm{Z}^1(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_0)$ *dans le cas* (a))*, et* E *modulo l'action des automorphismes intérieurs de* X *définis par les sections de* X *sur* S *induisant la section unité de* $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$ *sur* $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$*, est principal homogène sous* $\mathrm{H}^1(\mathrm{Y},\mathrm{L})$ $(\simeq \mathrm{H}^1(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_0)$ *dans le cas* (a)).

(iii) *Si* $f:\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$ *est un morphisme de* S-*foncteurs en groupes prolongeant* $f_{\mathcal{J}}$*, l'ensemble des morphismes* $\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$ *transformés de* f *par les automorphismes intérieurs définis par les sections de* X *sur* S *induisant la section unité de* $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$ *sur* $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$*, est isomorphe à* $\Gamma(\mathrm{L})/\mathrm{H}^0(\mathrm{Y},\mathrm{L})$ $(\simeq \Gamma(\mathrm{L}_0)/\mathrm{H}^0(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_0)$ *dans le cas* (a)).

Remarque 2.1.1. — [54] Si $f,f':\mathrm{Y}\to\mathrm{X}$ sont des morphismes de S-foncteurs en groupes prolongeant $f_{\mathcal{J}}$, on obtient donc un cocycle $d(f,f')\in\mathrm{Z}^1(\mathrm{Y},\mathrm{L})$ $(\simeq \mathrm{Z}^1(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_0)$ dans le cas (a)), tel que

$$(*)\qquad f' = d(f,f')\cdot f \quad . \qquad {}^{(55)}$$

On notera $\overline{d}(f,f')$ l'image de $d(f,f')$ dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{Y},\mathrm{L})$ $(\simeq \mathrm{H}^1(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_0)$ dans le cas (a)).

Remarque 2.2. — On conserve les notations précédentes ; en particulier, Y est *plat* sur S. Dans le cas (b), L est, d'après (0.14.1), la restriction à $(\mathbf{Plats})_{/\mathrm{S}}$ du foncteur 115

$$\mathrm{W}\big(\pi_*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}}}(\Omega^1_{\mathrm{E}/\mathrm{S}},\mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}}))\big),$$

où $\pi:\mathrm{E}\to\mathrm{S}$ est le morphisme structural. Dans le cas (a), supposons de plus que X soit *localement de présentation finie* sur S ; alors d'après (0.6.1), L est la restriction à $(\mathbf{Plats})_{/\mathrm{S}}$ du foncteur

$$\prod_{\mathrm{S}_0/\mathrm{S}}\mathrm{W}\big(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}(\omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0},\mathcal{J})\big).$$

Dans les deux cas, le module dont on prend le W est quasi-cohérent, d'après EGA I, 9.1.1. Supposons de plus Y *affine* sur S [56]. Alors, d'après I, 5.3, on obtient :

a) $\mathrm{H}^i(\mathrm{Y},\mathrm{L}) = \mathrm{H}^i(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_0) = \mathrm{H}^i(\mathrm{Y}_0,\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}(\omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0},\mathcal{J}))$,

b) $\mathrm{H}^i(\mathrm{Y},\mathrm{L}) = \mathrm{H}^i(\mathrm{Y},\pi_*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}}}(\Omega^1_{\mathrm{E}/\mathrm{S}},\mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{E}})))$.

---

[54] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, analogue de 4.5.1, pour introduire les notations $d(f,f')$ et $\overline{d}(f,f')$, utilisées en 4.38 ; par conséquent, on a aussi ajouté dans 2.1 (ii) ci-dessus, la partie concernant E lui-même.

[55] N.D.E. : On s'est conformé aux conventions de signe de l'original. On aurait pu choisir d'écrire $f' = d(f',f)\cdot f$, mais alors pour avoir en 4.27 l'égalité $d^1(d(i,i')) = d(\mathrm{Y},i'(\mathrm{Y}))$ lorsque i,i' sont deux immersions $\mathrm{Y}\hookrightarrow\mathrm{X}$, il aurait fallu changer le signe de la classe $d(\mathrm{Y},\mathrm{Y}')$ introduite en 4.5.1, et cela aurait conduit à des changements de signes dans les formules de 4.8, 4.14, 4.17. On a préféré garder les signes donnés dans l'original (tous corrects !).

[56] N.D.E. : On a ajouté cette hypothèse, ainsi que la référence à I, 5.3.

Remarque 2.3. — 1) D'après 0.16 et 0.17, la condition (i_1) est automatiquement vérifiée lorsque Y est un schéma *affine* et

$$(*)\qquad \begin{cases} \text{dans le cas (a), X est } \textit{lisse} \text{ sur S ;} \\ \text{dans le cas (b), E est } \textit{lisse et affine} \text{ sur S.} \end{cases}$$

2) De plus, sous ces conditions (Y étant toujours supposé *plat* sur S, cf. 2.0), on peut écrire dans le cas (a), d'après 2.2 a) et (0.6.2),

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{Y},\mathrm{L}) = \mathrm{H}^i(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_0) = \mathrm{H}^i(\mathrm{Y}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{J}),$$

[57] et dans le cas (b), d'après (0.14.2), 1.1.2 et I, 5.3,

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{Y},\mathrm{L}) = \mathrm{H}^i(\mathrm{Y}_0, \pi_{0*}\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{E}_0}}(\Omega^1_{\mathrm{E}_0/\mathrm{S}_0}, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{E}_0})).$$

Énonçons maintenant un certain nombre de corollaires concernant le cas où Y est un S-groupe *diagonalisable* (I, 4.4) ; on sait alors (*loc. cit.* 5.3.3) que si S est affine, $\mathrm{H}^n(\mathrm{Y},\mathscr{F}) = 0$ pour $n > 0$ et tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$. D'abord un cas particulier :

Corollaire 2.4. — *Soient* S *un schéma et* S_0 *un sous-schéma fermé défini par un idéal nilpotent. Soit* Y *un* S-*groupe* diagonalisable *et soit :*

a) X *un* S-*groupe localement de présentation finie sur* S*,*

b) $\mathrm{X} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{E})$ *où* E *est un* S-*schéma localement de présentation finie.*

Soit $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *un morphisme de* S-*groupes tel que le morphisme* $f_0 : \mathrm{Y}_0 \to \mathrm{X}_0$ *obtenu par changement de base soit le morphisme unité. Alors* f *est le morphisme unité.*

116 En effet, la question est locale sur S et (dans (b)) sur E. On peut donc supposer S affine et (dans (b)) E de présentation finie sur S. En introduisant maintenant les sous-schémas fermés S_n de S définis par les puissances de l'idéal définissant S_0, on est ramené au cas où S_0 est défini par un idéal de carré nul, et en ce cas l'assertion énoncée résulte du théorème, via 2.2.

Dans le cas où on ne suppose pas nécessairement que f_0 soit le morphisme unité, on a :

Corollaire 2.5. — *Soient* S *et* S_0 *comme dans* 2.4. *Supposons de plus* S affine*. Soient* Y *un* S-*groupe* diagonalisable*,* X *un* S-*foncteur en groupes et* $f_0 : \mathrm{Y}_0 \to \mathrm{X}_0$ *un morphisme de* S_0-*foncteurs en groupes.*

(i) [58]

[57] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit, cf. la N.D.E. (31) dans 0.14.

[58] N.D.E. : L'original énoncait : « Supposons que l'on ait l'une des deux propriétés suivantes : (a) X est un S-groupe localement de présentation finie ; (b) $\mathrm{X} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{E})$ où E est de présentation finie sur S. Alors f_0 se prolonge en un morphisme de S-groupes $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ si et seulement si il se prolonge en un morphisme de S-foncteurs $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$. » et indiquait : « (i) résulte de proche en proche de la partie (ii) du théorème. ». Cette démonstration ne semble pas suffisante : si par exemple $\mathcal{I}^3 = 0$ et $\mathcal{J} = \mathcal{I}^2$, et si $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est un morphisme de S-foncteurs relevant f_0, alors f_0 se relève en un morphisme de $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$-groupes $g_{\mathcal{J}} : \mathrm{Y}_{\mathcal{J}} \to \mathrm{X}_{\mathcal{J}}$; ensuite, $g_{\mathcal{J}}$ se relève-t-il en un morphisme de S-foncteurs $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$? En tout état de cause, cette assertion (i) n'est pas utilisée dans la suite, où X est partout supposé *lisse* sur S.

(ii) *Supposons que l'on ait l'une des deux propriétés suivantes :*

(a) X *est un* S*-groupe* lisse *sur* S *;*

(b) $X = \underline{\mathrm{Aut}}_S(E)$ *où* E *est* lisse *et* affine *sur* S.

Alors f_0 *se prolonge en un morphisme de* S*-groupes* $Y \to X$*, deux tels prolongements sont conjugués par un automorphisme intérieur de* X *défini par une section de* X *sur* S *induisant la section unité de* X_0 *sur* S_0*.*

Introduisons les S_n comme ci-dessus. (59) Pour (ii), notons d'abord qu'un schéma lisse sur S est nécessairement localement de présentation finie sur S ; donc, dans le cas (b), E étant lisse et affine sur S est nécessairement de présentation finie sur S, i.e. on est bien sous l'hypothèse (b) de 2.0.

Alors, sous les hypothèses de (ii), la condition (i_1) de 2.1 est automatiquement vérifiée d'après 0.16 et 0.17 ; en outre toute section de X_{S_n} sur S_n se relève en une **117**
section de $X_{S_{n+1}}$ sur S_{n+1}, d'après la définition de « lisse sur S » dans le cas (a), et d'après 0.17 dans le cas (b). Par conséquent, si f et f' sont deux relèvements de f_0, on peut supposer de proche en proche $f_n = f'_n$ en relevant l'automorphisme intérieur dont l'existence est affirmée par la partie (ii) du théorème, ce qui achève la démonstration.

En raisonnant de même, on obtient en tenant compte de la remarque 2.3 :

Corollaire 2.6. — *Soient* S *un schéma,* $\mathcal{I}$ *un idéal nilpotent définissant le sous-schéma fermé* S_0*,* Y *un* S*-groupe* plat *sur* S *et* affine*,* X *un* S*-groupe* lisse *sur* S*.*

(i) *Si, pour tout* $n \geqslant 0$*, on a* $H^2(Y_0, \mathscr{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}) = 0$*, tout morphisme de* S_0*-groupes* $f_0 : Y_0 \to X_0$ *se relève en un morphisme de* S*-groupes* $f : Y \to X$*.*

(ii) *Si, pour tout* $n \geqslant 0$*, on a* $H^1(Y_0, \mathscr{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}) = 0$*, deux tels relèvements sont conjugués par un automorphisme intérieur de* X *défini par une section de* X *sur* S *induisant la section unité de* X_0 *sur* S_0*.*

Or on a le lemme suivant :

Lemme 2.7. — *Soient* S *un schéma* affine*,* G *un* S*-groupe* affine*,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_S$*-module quasi-cohérent,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathscr{O}_S$*-module localement libre. Supposons que l'on ait une opération de* G *sur* $\mathscr{F}$ *au sens de l'exposé* I*, ce qui définit une opération de* G *sur* $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{L}$ (60)*. Notons* Λ *l'anneau de* S*,* L *le* Λ*-module définissant* $\mathscr{L}$ (qui est donc un module projectif)*. On a un isomorphisme canonique* **118**

$$H^*(G, \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{L}) \simeq H^*(G, \mathscr{F}) \otimes_\Lambda L.$$

(61) En effet, notons $\mathscr{A}$ la $\mathscr{O}_S$-algèbre $\mathscr{A}(G)$ et considérons le complexe $\mathscr{C}$ de $\mathscr{O}_S$-modules quasi-cohérents :

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A} \longrightarrow \cdots$$

(59) N.D.E. : Dans ce qui suit, on a légèrement modifié et détaillé l'original.

(60) N.D.E. : où $\mathscr{L}$ est muni de l'action triviale de G.

(61) N.D.E. : On a détaillé (et simplifié) la démonstration de l'original (celui-ci invoquait en plus les isomorphismes $\mathscr{H}^n(\mathscr{C} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{L}) \simeq \mathscr{H}^n(\mathscr{C}) \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{L}$ et $H^n(\Gamma(-)) \simeq \Gamma(\mathscr{H}^n(-))$, où les $\mathscr{H}^n(\mathscr{C})$ désignent les faisceaux de cohomologie du complexe $\mathscr{C}$).

D'après I, 5.3, $\mathrm{H}^*(\mathrm{G}, \mathscr{F})$ (resp. $\mathrm{H}^*(\mathrm{G}, \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{L})$) est la cohomologie du complexe $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{C})$ (resp. $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{C} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{L})$). Or, comme S est affine, on a (cf. EGA I, 1.3.12)

$$\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{C} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{L}) \simeq \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{C}) \otimes_\Lambda \mathrm{L}\,.$$

Comme L est un Λ-module projectif (donc plat), on a aussi $\mathrm{H}^*(\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{C}) \otimes_\Lambda \mathrm{L}) \simeq \mathrm{H}^*(\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{C})) \otimes_\Lambda \mathrm{L}$, d'où le résultat annoncé.

En utilisant le lemme, on transforme 2.6 en :

Corollaire 2.8. — *Soient* S *un schéma affine,* $\mathcal{I}$ *un idéal nilpotent sur* S *définissant le sous-schéma fermé* S_0*. Supposons les* $\mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}$ *localement libres sur* S_0*. Soient* Y *un* S*-groupe* plat *sur* S *et* affine*,* X *un* S*-groupe* lisse *sur* S*, et* $f_0 : \mathrm{Y}_0 \to \mathrm{X}_0$ *un morphisme de* S*-groupes.*

(i) *Si* $\mathrm{H}^2(\mathrm{Y}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)) = 0$*,* f_0 *se relève en un morphisme de* S*-groupes* $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$.

(ii) *Si* $\mathrm{H}^1(\mathrm{Y}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)) = 0$*, deux tels relèvements sont conjugués par un automorphisme intérieur de* X *défini par une section de* X *sur* S *induisant la section unité de* X_0 *sur* S_0*.*

En particulier, faisant Y = X :

Corollaire 2.9. — *Soient* S *et* S_0 *comme ci-dessus. Soit* X *un* S*-groupe* lisse *sur* S *et* affine.

(i) *Si* $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)) = 0$*, tout endomorphisme de* X *au-dessus de* S *induisant l'identité sur* X_0 *est l'automorphisme intérieur défini par une section de* X *sur* S *induisant la section unité de* X_0 *sur* S_0*.*

119 (ii) *Si* $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)) = 0$*, tout* S_0*-automorphisme de* X_0 *se prolonge en un* S*-automorphisme de* X*.* (62)

Remarque 2.10. — Les assertions concernant les H^1 ont des réciproques d'après le théorème. Signalons comme exemple la suivante : si $\mathrm{S} = \mathrm{I}_{\mathrm{S}_0}$ est le schéma des nombres duaux sur S_0 (II, 2.1) et si X est un S-groupe plat tel que tout automorphisme de X sur S induisant l'identité sur S_0 soit l'automorphisme intérieur défini par une section de X sur S induisant la section unité de X_0 sur S_0, alors $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)) = 0$. (63)

Corollaire 2.11. — *Soient* S*,* $\mathcal{I}$ *et* $\mathcal{J}$ *comme en* 2.1*. Soient* Y *un* S*-schéma en groupes* plat *sur* S*,* X *un* S*-schéma en groupes,* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *un morphisme de* S*-groupes. L'ensemble des morphismes de* Y *dans* X *déduits de* f *par conjugaison par des* $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$ *induisant l'unité de* $\mathrm{X}(\mathrm{S}_\mathcal{J})$ *est isomorphe au quotient*

$$\mathrm{E} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}(\omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}, \mathcal{J}) \big/ \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}(\omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}, \mathcal{J})^{\mathrm{ad}(\mathrm{Y}_0)},$$

(62) N.D.E. : En effet, soit f_0 un S_0-automorphisme de X_0 et soit g_0 son inverse. D'après 2.8 (i), f_0 (resp. g_0) se relève en un S-*endomorphisme* f (resp. g) de X. Alors, $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des endomorphismes de X induisant l'identité sur X_0 ; ce sont donc, d'après 0.7, des S-*automorphismes* de X, et il en est donc de même de f et g.

(63) N.D.E. : Ceci est utilisé dans XXIV, 1.13.

où le second groupe est formé des $\mathscr{O}_{S_0}$*-morphismes* $\omega^1_{X_0/S_0} \to \mathscr{J}$*, qui par tout changement de base* $S' \to S_0$ *donnent des morphismes* $\omega^1_{X_0/S_0} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_{S'} \to \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_{S'}$ *invariants sous l'action de* $Y_0(S')$ *sur le premier facteur.*

Par 2.1 (iii), on sait que l'ensemble cherché est isomorphe à $\Gamma(L_0)/H^0(Y_0, L_0)$. Or $\Gamma(L_0) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{S_0}}(\omega^1_{X_0/S_0}, \mathscr{J})$ et $H^0(Y_0, L_0)$ n'est évidemment autre que $\Gamma(L_0)^{\mathrm{ad}(Y_0)}$ au sens de l'énoncé précédent.

120

Corollaire 2.12. — *Sous les conditions de* 2.11*, supposons de plus* $\omega^1_{X_0/S_0}$ *localement libre de rang fini. Alors*

$$E \simeq \Gamma(S_0, \mathscr{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{J}) / H^0(Y_0, \mathscr{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{J}).$$

[64] En effet, si $\omega^1_{X_0/S_0}$ est localement libre de rang fini, on a $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{S_0}}(\omega^1_{X_0/S_0}, \mathscr{J}) \simeq \mathscr{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{J}$.

Corollaire 2.13. — *Supposons de plus* Y_0 diagonalisable*. Alors*

$$E \simeq \Gamma(S_0, \mathscr{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{J}) / \Gamma(S_0, \mathscr{L}ie(X_0/S_0)^{\mathrm{ad}(Y_0)} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{J})$$

où $\mathscr{L}ie(X_0/S_0)^{\mathrm{ad}(Y_0)}$ *peut être construit comme le facteur de la décomposition de* I, 4.7.3*, correspondant au caractère nul de* Y_0*.*

En effet, si $Y_0 \simeq D_{S_0}(M)$, on a par *loc. cit.* une décomposition en somme directe :

$$\mathscr{L}ie(X_0/S_0) = \mathscr{L}ie(X_0/S_0)_0 \oplus \bigoplus_{\substack{m \in M \\ m \neq 0}} \mathscr{L}ie(X_0/S_0)_m.$$

En tensorisant par $\mathscr{J}$, on trouve une décomposition analogue pour $\mathscr{L}ie(X_0/S_0) \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{J}$, d'où la relation

$$H^0(Y_0, \mathscr{L}ie(X_0/S_0) \otimes \mathscr{J}) \simeq \Gamma(S_0, \mathscr{L}ie(X_0/S_0)_0 \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{J}).$$

Corollaire 2.14. — *Supposons de plus* S_0 affine*. Alors*

$$E \simeq \Gamma\Big(S_0, \Big[\mathscr{L}ie(X_0/S_0) / \mathscr{L}ie(X_0/S_0)^{\mathrm{ad}(Y_0)}\Big] \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{J}\Big).$$

3. Extensions infinitésimales d'un schéma en groupes

121

Toujours dans les notations du n° 0 (S, $\mathcal{I}$, $\mathscr{J}$, etc.), donnons-nous un S-schéma X et supposons $X_{\mathscr{J}}$ muni d'une structure de groupe. Nous nous proposons de trouver les structures de S-groupe sur X induisant sur $X_{\mathscr{J}}$ la structure donnée.

À partir de maintenant, nous supposons X *plat* sur S. Soit $\mathscr{C}$ la catégorie des S-schémas *plats* sur S. On a donc $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Nous noterons Y, resp. M, le foncteur sur $\mathscr{C}$ défini par X^+, resp. L'_X. Le morphisme canonique $p_X : X \to X^+$ définit un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$

$$p : X \longrightarrow Y$$

[64] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

et l'opération de L'_X sur X dans $\widehat{(\mathbf{Sch})}_{/S}$ définit une opération de M sur X dans $\widehat{\mathscr{C}}$. On vérifie aussitôt que X devient bien ainsi formellement principal homogène sous M_Y au-dessus de Y (cf. 0.2 (i) et 0.4).

L'opération de X^+ sur L'_X définie en 0.8 (notée Ad en *loc. cit.*) définit une opération notée f de Y sur M. On sait, d'autre part (0.5), que

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(Z, M) \simeq \mathrm{Hom}_{S_0}(Z_0, L_0), \qquad Z \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C},$$

où L_0 est le foncteur défini en 0.5.

Lemme 3.1. — (i) *La condition* $(+)_n$ *de* 1.3 *est vérifiée pour tout entier positif* n.

(ii) *Si on fait opérer le* S_0*-groupe* X_0 *sur le* S_0*-foncteur* L_0 *par l'intermédiaire de sa représentation adjointe, on a un isomorphisme canonique*

$$H^*(X_0, L_0) \simeq H^*(Y, M),$$

122 (*la première cohomologie est calculée dans* $(\mathbf{Sch})_{/S_0}$, *la seconde dans* $\mathscr{C}$).

Les deux parties du lemme résultent de la relation :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(Y, M) &\simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{(\mathbf{Sch})}_{/S_0}}(X^+ \underset{S}{\times} S_0, L_0)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{S_0}(X_0, L_0)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(X, M),\end{aligned}$$

qui provient aussitôt de la définition de M comme un $\prod_{S_0/S}$. Cette relation étant plus généralement vérifiée en remplaçant X, Y par X^n, Y^n, on en déduit que tout morphisme $X^n \to M$ se factorise de manière unique par Y^n, ce qui entraîne $(+)_n$. On en déduit aussi la relation $C^*(Y, M) = C^*(X_0, L_0)$ ce qui entraîne (ii).

Nous pouvons donc appliquer les constructions de 1.3. En particulier :

Lemme 3.2. — *Soit* $P : X \times_S X \to X$ *un morphisme. Pour que* P *induise la loi de groupe de* $X_{\mathscr{J}}$, *il faut et il suffit que* P *soit une loi de composition* admissible (cf. 1.3.2) *sur* X.

En effet, pour que P induise la loi de groupe de $X_{\mathscr{J}}$, il faut et il suffit que P relève la loi de groupe de X^+, ou encore celle de Y. Il n'y a donc qu'à montrer que tout morphisme P relevant la loi de groupe de $X_{\mathscr{J}}$ vérifie l'identité (++) de 1.3.2 (ii), ce qui est exactement ce qu'on a vu en 0.8.

Proposition 3.3. — *Soient* S *un schéma et* S_0 *un sous-schéma fermé défini par un idéal nilpotent. Soit* X *un* S*-schéma* plat, *et quasi-compact ou localement de présentation finie sur* S. *Soit* $P : X \times_S X \to X$ *une loi de composition sur* X. *Pour que* P *soit une loi de groupe, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) P *est associatif.*

123 (ii) P *induit sur* $X_0 = X \times_X S_0$ *une loi de groupe.*

Ces conditions sont évidemment nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. Supposons d'abord que $X \to S$ possède une section. Comme $X(S')$ est alors non vide pour chaque $S' \to S$, il suffit [(65)] de montrer que, pour tout $x \in X(S')$, les translations *à gauche et à droite* par x sont des isomorphismes de $X_{S'}$. [(66)]

On peut évidemment supposer $S' = S$; la translation en question t induit sur X_0 une translation t_0 de X_0, qui est donc un automorphisme puisque X_0 est un groupe. On conclut par platitude (SGA 1 III 4.2). [(67)]

Ne supposant plus maintenant que X possède une section sur S, supposons qu'il existe un $S' \to S$ tel que $X_{S'}$ possède une section sur S'. Alors $X_{S'}$ est un S'-groupe d'après ce qu'on vient de voir ; considérons sa section unité e'. L'image inverse de e' par $\mathrm{pr}_i : S' \times_S S' \to S'$ $(i = 1, 2)$ est la section unité de $X_{S''}$ pour la loi de groupe image inverse de $P_{S'}$ par pr_i. Mais comme P est « défini sur S », ces deux lois de groupes coïncident, donc aussi leur section unité. On a donc $\mathrm{pr}_1^*(e') = \mathrm{pr}_2^*(e')$.

Si $S' \to S$ est un morphisme de descente (cf. Exp. IV n°2), il existera une section de X donnant e' par extension de la base, et on aura terminé. Comme X_X possède une section sur X (la section diagonale), on voit qu'il suffit maintenant de prouver que $X \to S$ est un morphisme de descente. Or il est plat et surjectif, et quasi-compact ou localement de présentation finie, donc couvrant pour (fpqc), donc un morphisme de descente (Exp. IV, n°6).

Remarque. — En fait l'hypothèse $X \to S$ quasi-compact ou localement de présentation finie est superflue, en vertu du résultat suivant que le lecteur démontrera comme exercice sur l'exposé IV :

Sous les conditions du texte sur S et S_0, si $X \to S$ est un morphisme plat et $X_0 \to S_0$ un morphisme couvrant pour (fpqc), alors $X \to S$ est un morphisme de descente. 124

(65) N.D.E. : On a corrigé l'original, en supprimant la référence inadéquate à un exercice de Bourbaki sur les semi-groupes (cf. [**BAlg**], § I.2, Exercices 9 à 13) et en indiquant le rôle des translations à gauche *et à droite*, voir la N.D.E. suivante.

(66) N.D.E. : Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition associative, telle que toute translation à gauche ℓ_x soit bijective ; fixons $x_0 \in E$. Il existe un unique $e \in E$ tel que $x_0 \cdot e = x_0$; alors $x_0 \cdot e \cdot x = x_0 \cdot x$ entraîne $e \cdot x = x$, pour tout $x \in E$. D'autre part, pour tout x il existe un unique x' tel que $x \cdot x' = e$. *Supposons de plus* qu'il existe $b \in E$ tel que la translation *à droite* r_b soit injective. Alors, pour tout x, l'égalité $x \cdot e \cdot b = x \cdot b$ donne $x \cdot e = x$ (i.e. e est élément neutre), et $x \cdot x' \cdot x = x = x \cdot e$ entraîne $x' \cdot x = e$, i.e. x' est l'inverse de x à gauche et à droite, donc E est un groupe.
Noter que l'hypothèse « r_b injective » est nécessaire : sur tout ensemble E on peut définir une loi de composition par $x \cdot y = y$, pour tous $x, y \in E$; alors toute translation à gauche est l'identité (d'où l'associativité de la loi), mais pour tout y on a $r_y(E) = \{y\}$, donc E n'est pas un groupe si $|E| > 1$.

(67) N.D.E. : Puisque X et X_0 ont même espace topologique sous-jacent et que t_0 est un automorphisme, t est un homéomorphisme, donc un morphisme *affine*, cf. Exp. $\mathrm{VI_B}$, 2.9.1 ou EGA IV_4, 18.12.7.1. Il suffit donc de voir que si J est un idéal nilpotent d'un anneau Λ, et $\phi : A \to B$ un morphisme de Λ-algèbres, avec B *plate* sur Λ, tel que $\phi \otimes_\Lambda (\Lambda/J)$ soit bijectif, alors ϕ est bijectif. D'après le « lemme de Nakayama nilpotent », ϕ est surjectif ; de plus, B étant plate sur Λ, on a aussi $\mathrm{Ker}(\phi) \otimes_\Lambda (\Lambda/J) = 0$, d'où $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$, donc ϕ est bijectif.

Lemme 3.4. — *Pour que deux lois de compositions admissibles sur* X *soient équivalentes* (cf. 1.3.5)*, il faut et il suffit qu'elles soient déduites l'une de l'autre par un automorphisme de* X *au-dessus de* S *induisant l'identité sur* $X_{\mathscr{J}}$*.*

En effet, les morphismes construits en 1.3.1 sont exactement ceux de l'énoncé précédent (par 0.7). (68)

Compte tenu de tous les résultats précédents, la proposition 1.3.6 donne :

Théorème 3.5. — *Soient* S *un schéma,* $\mathcal{I}$ *et* $\mathcal{J}$ *deux idéaux sur* S *tels que* $\mathcal{I} \supset \mathcal{J}$*,* $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = 0$*,* S_0 *et* $S_{\mathcal{J}}$ *les sous-schémas fermés de* S *qu'ils définissent. Soit* X *un* S*-schéma* plat *sur* S (*et localement de présentation finie ou quasi-compact sur* S)*,* X_0 *et* $X_{\mathcal{J}}$ *les schémas obtenus par changement de base. Supposons* $X_{\mathcal{J}}$ *muni d'une structure de* $S_{\mathcal{J}}$*-groupe et notons* L_0 *le* S_0*-foncteur en groupes abéliens défini par la formule*

$$\mathrm{Hom}_{S_0}(T, L_0) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\omega^1_{X_0/S_0} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_T, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_T)$$

sur lequel X_0 *opère par l'intermédiaire de sa représentation adjointe.*

(i) *Pour qu'il existe une structure de* S*-groupe sur* X *induisant la structure donnée sur* $X_{\mathcal{J}}$*, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

(i_1) *Il existe un morphisme de* S*-schémas* $X \times_S X \to X$ *induisant la loi de groupe de* $X_{\mathcal{J}}$*.*

(i_2) *Une certaine classe d'obstruction appartenant à* $H^3(X_0, L_0)$ (*définie canoniquement par la donnée de* X *et de la loi de groupe de* $X_{\mathcal{J}}$) *est nulle.*

(ii) *Si les conditions de* (i) *sont satisfaites, l'ensemble* E *des lois de groupe sur* X *induisant la loi donnée de* $X_{\mathcal{J}}$ *est un ensemble principal homogène sous* $Z^2(X_0, L_0)$*,*
125 *et* E *modulo les* S*-automorphismes de* X *induisant l'identité sur* $X_{\mathcal{J}}$*, est un ensemble principal homogène sous* $H^2(X_0, L_0)$*.*

(69) En effet, tout morphisme de S-schémas $f : X \times_S X \to X$ induisant la loi de groupe de $X_{\mathcal{J}}$ est, d'après 3.2, une loi de composition *admissible* sur X ; alors, d'après 1.3.6 (i), l'existence d'une loi de composition admissible $P : X \times_S X \to X$ *associative* équivaut à la nullité d'une certaine classe $c(f) \in H^3(X_0, L_0)$, et dans ce cas, d'après 3.3, P est une loi de groupe. Ceci prouve (i), et (ii) découle alors de 3.3 et 1.3.6 (ii).

Remarque 3.5.1. — (70) Si μ, μ' sont des lois de groupe sur X induisant la loi donnée de $X_{\mathcal{J}}$, on obtient donc un cocycle $\delta(\mu, \mu') \in Z^2(X_0, L_0)$, la convention de signe choisie

(68) N.D.E. : En effet, d'après la démonstration de 0.7, les S-endomorphismes de X induisant l'identité sur $X_{\mathcal{J}}$ sont les automorphismes $m \cdot \mathrm{id}_X$, pour m parcourant $M(X) = \mathrm{Hom}_S(X, M)$ (pour tout $S' \to S$ et $x \in X(S')$, on a $(m \cdot \mathrm{id}_X)(x) = m(x) \cdot x$). Or, d'après la démonstration de 3.1, chaque $m : X \to M$ se factorise de façon unique en un morphisme h de $Y = X^+$ vers M, et donc $m \cdot \mathrm{id}_X$ est l'automorphisme u_h introduit en 1.3.1. Le lemme découle alors de la définition de l'équivalence, cf. 1.3.4 et 1.3.5.

(69) N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

(70) N.D.E. : On a ajouté cette remarque, analogue de 4.5.1, pour introduire la notation $\delta(\mu, \mu')$ (ou $\delta(X, X')$), utilisée en 4.38 ; par conséquent, on a aussi ajouté dans 3.5 (ii) ci-dessus, la partie concernant E lui-même.

étant que $\mu' = \delta(\mu, \mu') \cdot \mu$, c.-à-d., pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x, y \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$,

$$\mu'(x, y) = \delta(\mu, \mu')(x_0, y_0) \cdot \mu(x, y).$$ [71]

On notera $\overline{\delta}(\mu, \mu')$ l'image de $\delta(\mu, \mu')$ dans $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_0, \mathrm{L}_0)$. Enfin, si X muni de la loi de groupe μ (resp. μ') est désigné simplement par X (resp. X′), on écrira $\delta(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$ au lieu de $\delta(\mu, \mu')$, et de même pour $\overline{\delta}(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$.

Remarque 3.6. — Soit $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$ un $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$-schéma *lisse* sur $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$ et *affine*. Par 0.15, il existe à isomorphisme près un unique S-schéma X, *lisse* sur S, et se réduisant suivant $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$. Si $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$ est muni d'une structure de $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$-groupe, il résulte de 0.16 que la condition (i_1) est automatiquement vérifiée. De plus, d'après 0.6 la définition de L_0 se simplifie et on obtient :

Corollaire 3.7. — *Soient* S, $\mathcal{I}$ *et* $\mathcal{J}$ *comme dans* 3.1. *Soit* $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$ *un* $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$*-groupe* lisse *sur* $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$ *et* affine.

(i) *L'ensemble des* S*-groupes* lisses *sur* S *et se réduisant suivant* $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$, *à isomorphisme* (*induisant l'identité sur* $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$) *près, est vide ou principal homogène sous le groupe*

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{J}).$$

(ii) *Il existe un* S*-groupe* lisse *sur* S *se réduisant suivant* $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$ *si et seulement si une certaine obstruction dans*

$$\mathrm{H}^3(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{J})$$

est nulle.

On en déduit comme d'habitude les corollaires suivants :

Corollaire 3.8. — *Soient* S *un schéma et* S_0 *un sous-schéma fermé défini par un idéal nilpotent* $\mathcal{I}$. *Soit* X_0 *un* S_0*-groupe* lisse *sur* S *et* affine.

(i) *Si* $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *deux* S*-groupes* **126**
lisses *sur* S *se réduisant suivant* X_0 *sont isomorphes* (*par un isomorphisme induisant l'identité sur* X_0).

(ii) *Si* $\mathrm{H}^3(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *il existe un* S*-groupe* lisse *sur* S, *se réduisant suivant* X_0.

Corollaire 3.9. — *Soient* S *un schéma* affine *et* S_0 *un sous-schéma fermé défini par un idéal nilpotent* $\mathcal{I}$. *Supposons les* $\mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}$ localement libres *sur* S_0. *Soit* X_0 *un* S_0*-groupe* lisse *et* affine *sur* S_0

(i) *Si* $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)) = 0$, *deux* S*-groupes* lisses *sur* S *se réduisant suivant* X_0 *sont isomorphes.*

(ii) *Si* $\mathrm{H}^3(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)) = 0$, *il existe un* S*-groupe* lisse *sur* S *se réduisant suivant* X_0.

[71] N.D.E. : On s'est conformé aux conventions de signe de l'original, afin d'avoir en 4.38 (5) l'égalité $\partial^1\overline{d}(\mathrm{X}, \mathrm{X}') = \overline{\delta}(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$ (voir aussi la N.D.E. (54)).

Corollaire 3.10. — *Soient* S_0 *un schéma et* $\mathrm{S} = \mathrm{I}_{\mathrm{S}_0}$ *le schéma des nombres duaux sur* S_0. *Soit* X_0 *un* S_0*-groupe* lisse *sur* S_0. *Pour que tout* S*-groupe* Y, lisse *sur* S, *tel que* Y_0 *soit* S_0*-isomorphe à* X_0, *soit* S*-isomorphe à* $\mathrm{X} = \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{S}$, *il faut et il suffit que* $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)) = 0$. (72)

En effet, en vertu de 3.5 l'ensemble des classes, à un isomorphisme de S-groupes près « induisant l'identité sur X_0 », de tels groupes Y, est en bijection avec $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0))$, donc l'ensemble des classes, à un isomorphisme de S-groupes quelconque près, est en bijection avec

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0))/\Gamma_0\,,$$

où

$$\Gamma_0 = \mathrm{Aut}_{\mathrm{S}_0\text{-gr.}}(\mathrm{X}_0)$$

(qui opère de façon évidente sur le H^2). La conclusion résulte aussitôt de là. (73)

4. Extensions infinitésimales de sous-groupes fermés

127

Énonçons d'abord un résultat valable dans une *catégorie abélienne* quelconque.

Lemme 4.1. — *Soient* $0 \longrightarrow \mathrm{A}' \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{A} \xrightarrow{\ p\ } \mathrm{A}'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte,* ϕ : $\mathrm{A}' \to \mathrm{Q}$ *un morphisme et* $\pi : \mathrm{A}'' \to \mathrm{P}$ *un* épimorphisme *de noyau* C. *Soit* E *l'ensemble* (*à isomorphisme près*) *des quadruplets* (B, f, g, h) *tels que la suite*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Q} \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{B} \xrightarrow{\ g\ } \mathrm{P} \longrightarrow 0$$

soit exacte et le diagramme ci-dessous commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{A}' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{A} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{A}'' \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Q} \arrow[r, "f"] & \mathrm{B} \arrow[r, "g"] & \mathrm{P} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

(i) *Pour que* E *soit non vide, il faut et il suffit que l'image dans* $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{C}, \mathrm{Q})$ *de l'élément* A *de* $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{A}'', \mathrm{A}')$ *soit nulle.*

(ii) *Sous ces conditions,* E *est un ensemble principal homogène sous le groupe abélien* $\mathrm{Hom}(\mathrm{C}, \mathrm{Q})$.

(72) N.D.E. : Ceci est utilisé dans XXIV, 1.13.

(73) N.D.E. : En effet, $\mathrm{Aut}_{\mathrm{S}_0\text{-gr.}}(\mathrm{X}_0)$ opère par automorphismes de groupe sur le groupe abélien $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0))$, donc l'orbite de 0 est le singleton $\{0\}$; par conséquent l'ensemble quotient est un singleton si et seulement si $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)) = \{0\}$.

Introduisons la somme amalgamée $B' = A\coprod^{A'} Q$. On a alors un diagramme commutatif où les lignes sont exactes : [74]

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "j"] & B' \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

et il est clair que la catégorie des solutions du problème posé est canoniquement 128
isomorphe à la catégorie des solutions du problème correspondant pour la suite

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow B' \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

et les morphismes id_Q et $\pi : A'' \to P$. [75] Dans ce cas, l'ensemble E est en bijection avec l'ensemble des sous-objets N de B' tels que $B' \to A''$ induise un isomorphisme de N avec le noyau C de $A'' \to P$, c'est-à-dire l'ensemble des morphismes $e : C \to B'$ relevant le morphisme canonique $C \to A''$. Le groupe abélien $G = \mathrm{Hom}(C, Q)$ agit sur E par $g \cdot e = g + e$ (addition dans $\mathrm{Hom}(C, B')$), et si $E \neq \varnothing$ ceci fait de E un ensemble principal homogène sous G.

On en déduit :

Proposition 4.2. — [76] *Soient* S *un schéma,* $S_{\mathscr{J}}$ *le sous-schéma fermé défini par un idéal quasi-cohérent* $\mathscr{J}$ *de carré nul,* X *un* S*-schéma,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-module,* $X_{\mathscr{J}} = X \times_S S_{\mathscr{J}}$*,* $\mathscr{F}_{\mathscr{J}} = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{S_{\mathscr{J}}}$*, et* $\mathscr{G}_{\mathscr{J}} = \mathscr{F}_{\mathscr{J}}/\mathscr{H}_{\mathscr{J}}$ *un module quotient de* $\mathscr{F}_{\mathscr{J}}$*. Donnons-nous un morphisme de* $\mathscr{O}_{X_{\mathscr{J}}}$*-modules*

$$f : \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{S_{\mathscr{J}}}} \mathscr{G}_{\mathscr{J}} \longrightarrow \mathscr{Q}.$$

Soit $\mathscr{E}$ *le faisceau d'ensembles sur* X *défini comme suit : pour chaque ouvert* U *de* X*,* $\mathscr{E}(U)$ *est l'ensemble des modules quotients* $\mathscr{G}$ *de* $\mathscr{F}|_U$*, tels que* $\mathscr{G}/\mathscr{J}\mathscr{G} = \mathscr{G}_{\mathscr{J}}|_U$ *et qu'il existe un isomorphisme*

$$h : \mathscr{J}\mathscr{G} \xrightarrow{\sim} \mathscr{Q}|_U$$

rendant commutatif le diagramme 129

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{S_{\mathscr{J}}}} (\mathscr{G}_{\mathscr{J}}|_U) \arrow[r, "f|_U"] \arrow[d, "\mathrm{can.}"'] & \mathscr{Q}|_U \\
\mathscr{J}\mathscr{G} \arrow[ur, "h"', "\simeq"] &
\end{tikzcd}.$$

(74) N.D.E. : On a $\mathrm{Coker}(j) = B' \coprod^{Q} 0 = A \coprod^{A'} 0 = A''$, et l'on voit que $\mathrm{Ker}(j) \simeq \mathrm{Ker}(i) = 0$ en raisonnant « comme si $\mathscr{C}$ était une catégorie de modules » ; pour une démonstration uniquement en termes de flèches, voir par exemple [**Fr64**], Th. 2.5.4 ($*$).

(75) N.D.E. : Dans ce qui suit, on a remplacé A par B', et détaillé la fin de l'argument.

(76) N.D.E. : On a récrit l'énoncé pour être exactement dans le cadre de l'application qui en est faite dans 4.3 ; d'autre part, on a détaillé la démonstration, selon les indications données par M. Demazure.

(h est alors unique, puisque $\mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_\mathscr{J}}} (\mathscr{G}_\mathscr{J}|_\mathrm{U}) \to \mathscr{J}\mathscr{G}$ est un épimorphisme). *Alors $\mathscr{E}$ est un faisceau* formellement principal homogène *sous le faisceau en groupes commutatifs*

$$\mathscr{A} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{H}_\mathscr{J}, \mathscr{Q}) = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}_\mathscr{J}}}(\mathscr{H}_\mathscr{J}, \mathscr{Q}).$$

Démonstration. Si $\mathscr{E}(\mathrm{U}) = \varnothing$ il n'y a rien à démontrer ; on peut donc supposer que $\mathscr{E}(\mathrm{U})$ contient un élément $\widetilde{\mathscr{G}}$. Alors, dans le diagramme ci-dessous, h est un isomorphisme et toutes les flèches sont des épimorphismes :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_\mathscr{J}}} (\mathscr{F}_\mathscr{J}|_\mathrm{U}) \arrow[r] \arrow[d, "\text{can.}"'] & \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_\mathscr{J}}} (\mathscr{G}_\mathscr{J}|_\mathrm{U}) \arrow[r, "f|_\mathrm{U}"] \arrow[d, "\text{can.}"'] & \mathscr{Q}|_\mathrm{U} \\
\mathscr{J}\mathscr{F}|_\mathrm{U} \arrow[r] & \mathscr{J}\widetilde{\mathscr{G}} \arrow[ur, "h", "\simeq"'] &
\end{tikzcd}.$$

Donc, le morphisme $\mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_\mathscr{J}}} (\mathscr{F}_\mathscr{J}|_\mathrm{U}) \to \mathscr{Q}|_\mathrm{U}$ induit un épimorphisme (nécessairement unique) $\phi : \mathscr{J}\mathscr{F}|_\mathrm{U} \to \mathscr{Q}|_\mathrm{U}$, et si $\mathscr{G}$ est un $\mathscr{O}_\mathrm{U}$-module tel que $\mathscr{G}/\mathscr{J}\mathscr{G} = \mathscr{G}_\mathscr{J}|_\mathrm{U}$ et qu'on ait un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{J}\mathscr{F}|_\mathrm{U} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & \mathscr{F}|_\mathrm{U} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}_\mathscr{J}|_\mathrm{U} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{Q}|_\mathrm{U} \arrow[r] & \mathscr{G} \arrow[r, "p_\mathscr{J}"] & \mathscr{G}_\mathscr{J}|_\mathrm{U} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(où $p_\mathscr{J}$ est la projection $\mathscr{G} \to \mathscr{G}/\mathscr{J}\mathscr{G} = \mathscr{G}_\mathscr{J}|_\mathrm{U}$, de sorte que $\mathscr{Q}|_\mathrm{U} = \mathrm{Ker}(p_\mathscr{J}) = \mathscr{J}\mathscr{G}$), alors on peut identifier $\mathscr{G}$ à un *module quotient* de $\mathscr{F}|_\mathrm{U}$. Par conséquent, d'après 4.1 (ii), l'ensemble $\mathscr{E}(\mathrm{U})$ est principal homogène sous le groupe abélien

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{H}_\mathscr{J}, \mathscr{Q})(\mathrm{U}) = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}_\mathscr{J}}}(\mathscr{H}_\mathscr{J}, \mathscr{Q})(\mathrm{U}).$$

Proposition 4.3. — (TDTE IV 5.1) *Soient* S *un schéma,* $\mathrm{S}_\mathscr{J}$ *le sous-schéma fermé défini par un idéal quasi-cohérent* $\mathscr{J}$ *de carré nul,* X *un* S*-schéma,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_\mathrm{X}$*-module quasi-cohérent,* $\mathrm{X}_\mathscr{J} = \mathrm{X} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}_\mathscr{J}$, $\mathscr{F}_\mathscr{J} = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}_\mathscr{J}}$. *Soit* $\mathscr{G}_\mathscr{J} = \mathscr{F}_\mathscr{J}/\mathscr{H}_\mathscr{J}$ *un module quotient quasi-cohérent de* $\mathscr{F}_\mathscr{J}$, plat *sur* $\mathrm{S}_\mathscr{J}$.

Pour tout ouvert U *de* X*, soit* $\mathscr{E}(\mathrm{U})$ *l'ensemble des modules quotients quasi-cohérents* $\mathscr{G}$ [(77)] *de* $\mathscr{F}|_\mathrm{U}$, plats *sur* S *et tels que* $\mathscr{G}/\mathscr{J}\mathscr{G} \simeq \mathscr{G}_\mathscr{J}|_\mathrm{U}$. *Alors les* $\mathscr{E}(\mathrm{U})$ *forment un faisceau d'ensembles* $\mathscr{E}$ *sur* X*, qui est* formellement principal homogène *sous le faisceau en groupes commutatifs*

$$\mathscr{A} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}_\mathscr{J}}}(\mathscr{H}_\mathscr{J}, \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_\mathscr{J}}} \mathscr{G}_\mathscr{J}).$$

[(77)] N.D.E. : Pour alléger l'énoncé, on a ajouté ici l'hypothèse que $\mathscr{G}$ soit *quasi-cohérent*, et reporté à la démonstration la remarque que cette hypothèse est automatiquement vérifiée ; on a détaillé la démonstration en conséquence.

Démonstration. — Notons $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural. Soient U un ouvert de X et $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$-module *plat* sur S et tel que $\mathscr{G}/\mathcal{J}\mathscr{G} \simeq \mathscr{G}_{\mathcal{J}}|_{\mathrm{U}}$. Alors, pour tout $x \in \mathrm{U}$, $\mathscr{G}_x$ est un module plat sur l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ (où $s = \pi(x)$), et donc le morphisme

$$\mathcal{J}_s \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}} (\mathscr{G}/\mathcal{J}\mathscr{G})_x = \mathcal{J}_s \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}} \mathscr{G}_x \longrightarrow (\mathcal{J}\mathscr{G})_x$$

est bijectif ; on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} (\mathscr{G}_{\mathcal{J}}|_{\mathrm{U}}) \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{G}_{\mathcal{J}}|_{\mathrm{U}} \longrightarrow 0$$

et comme $\mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} (\mathscr{G}_{\mathcal{J}}|_{\mathrm{U}})$ et $\mathscr{G}_{\mathcal{J}}|_{\mathrm{U}}$ sont des $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$-modules quasi-cohérents, $\mathscr{G}$ l'est aussi (cf. EGA III, 1.4.17).

Réciproquement, puisqu'on a supposé $\mathscr{G}_{\mathcal{J}}$ plat sur $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$, si $\mathscr{G}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$-module quasi-cohérent tel que $\mathscr{G}/\mathcal{J}\mathscr{G} \simeq \mathscr{G}_{\mathcal{J}}$ et que le morphisme $\mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{G}_{\mathcal{J}} \to \mathcal{J}\mathscr{G}$ soit bijectif, alors $\mathscr{G}$ est *plat* sur S, d'après le « critère fondamental de platitude » (cf. SGA 1 IV, **130**
5.5 [78]).

Par conséquent, l'ensemble $\mathscr{E}(\mathrm{U})$ considéré ici coïncide avec l'ensemble considéré dans 4.2, en prenant pour f le morphisme identique de $\mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{G}_{\mathcal{J}}$, et la conclusion découle donc de 4.2. C.Q.F.D.

[79] On conserve les notations précédentes. Soit $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ un sous-schéma fermé de $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$, défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}$. On suppose $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ *plat* sur $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$. Alors, appliquant 4.3 à $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ et $\mathscr{G}_{\mathcal{J}} = \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathcal{J}}}/\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.1. — *Soient* S, $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$, $\mathcal{J}$, X, $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$, $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ *et* $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}$ *comme ci-dessus ; on suppose* $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ plat *sur* $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$. *Notons* $\mathscr{A}_{\mathcal{J}}$ *le faisceau en groupes commutatifs*

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathcal{J}}}}(\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}})$$

sur $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$ *et* $\mathscr{A} = i_*(\mathscr{A}_{\mathcal{J}})$, *où* i *est l'immersion* $\mathrm{X}_{\mathcal{J}} \hookrightarrow \mathrm{X}$.

Pour tout ouvert U *de* X, *soit* $\mathscr{E}(\mathrm{U})$ *l'ensemble des sous-schémas fermés* Y *de* U, plats *sur* S, *tels que* $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{\mathcal{J}} = \mathrm{Y}_{\mathcal{J}} \cap \mathrm{U}$. *Alors* $\mathscr{E}$ *est un* $\mathscr{A}$-pseudo-torseur.

Si de plus un Y existe localement (c.-à-d., si tout $x \in \mathrm{X}$ possède un voisinage ouvert U tel que $\mathscr{E}(\mathrm{U}) \neq \varnothing$), alors $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{A}$*-torseur.* Or on sait (voir par exemple EGA IV_4, 16.5.15) que les $\mathscr{A}$-torseurs sur X sont paramétrés par le groupe $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathscr{A}) = \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\mathcal{J}}, \mathscr{A}_{\mathcal{J}})$, et que $\mathscr{E}$ possède une section globale (c.-à-d., $\mathscr{E}(\mathrm{X}) \neq \varnothing$) si et seulement si la classe de cohomologie correspondant à $\mathscr{E}$ est nulle. On obtient donc le :

Corollaire 4.4. — *Soient* S, $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$, $\mathcal{J}$, X, $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$, $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ *et* $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}$ *comme ci-dessus ; on suppose* $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ plat *sur* $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$. *Soit* E *l'ensemble des sous-schémas fermés* Y *de* X, plats *sur* S, *tels que* $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{\mathcal{J}} = \mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$.

(i) *L'ensemble* E *est vide ou principal homogène sous le groupe abélien*

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathscr{A}) = \mathrm{H}^0(\mathrm{X}_{\mathcal{J}}, \mathscr{A}_{\mathcal{J}}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathcal{J}}}}(\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}).$$

---

[78] N.D.E. : voir aussi [**BAC**], § III.5, th. 1.

[79] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit et ajouté le corollaire 4.3.1. D'autre part, on rappelle que « *pseudo-torseur* » est synonyme de « formellement principal homogène ».

(ii) *Pour que* E *soit non vide, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

(a) *Il existe localement sur* X *une solution du problème.*

(b) *Une certaine obstruction est nulle, qui se trouve dans*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{\mathcal{J}}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathcal{J}}}}(\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}})).$$

Complément 4.4.1. — [80] Conservons les notations de 4.4 et supposons que E contienne un élément Y. Notons $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}}$ l'idéal de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ définissant Y, et $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}$ son image dans $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathcal{J}}}$. Alors, comme on l'a vu dans la démonstration de 4.2, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathcal{J}}} \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{X}} \arrow[d, two heads] \arrow[dl, dashed] \\
\mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}
\end{tikzcd}$$

donc un épimorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules $\phi : \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}$; notons $\mathscr{K}$ son noyau. Alors, pour tout élément Y' de E, le morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}$ se factorise par $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}/\mathscr{K}$ (qui est la somme amalgamée B' de la démonstration du lemme 4.1) et, notant $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}'}$ l'idéal de Y' dans $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathscr{I}_{\mathrm{Y}'}/\mathscr{K} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & (\mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{X}})/\mathscr{K} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathscr{O}_{\mathrm{X}}/\mathscr{K} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathcal{J}}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & .
\end{tikzcd}$$

Donc, remplaçant X par le sous-schéma fermé défini par $\mathscr{K}$, on se ramène à $\mathscr{K} = 0$. Alors, la donnée de Y' équivaut à celle du sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}'}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$, s'envoyant bijectivement sur $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}$ par la projection $p : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathcal{J}}}$; notons $f' : \mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{I}_{\mathrm{Y}'}$ (resp. $f : \mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{I}$) l'isomorphisme réciproque. Alors $f' - f$ est un élément de

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathcal{J}}}}(\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathcal{J}}}}(\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}, \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$$

qu'on notera $d(\mathrm{Y}', \mathrm{Y})$. (Noter que $d(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}') = -d(\mathrm{Y}', \mathrm{Y})$.)

[80] N.D.E. : On a ajouté ce complément, utile pour démontrer le point (ii) de la proposition 4.8.

Pour notre Y fixé et Y′ variable, considérons le morphisme :

$$\mathscr{I}_{\mathrm{Y}'} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{Y}} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}/\mathscr{I}_{\mathrm{Y}};$$

puisque la composée avec $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}$ est nulle, on sait qu'il est à valeurs dans $\mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}} = \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}$. Plus précisément, si V est un ouvert de X, x' une section de $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}'}$ sur V et $x_{\mathcal{J}}$ son image dans $\Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}})$, alors

$$x' = f'(x_{\mathcal{J}}) = f(x_{\mathcal{J}}) + (f' - f)(x_{\mathcal{J}}) = f(x_{\mathcal{J}}) + d(\mathrm{Y}', \mathrm{Y})(x_{\mathcal{J}}).$$

Par conséquent : *le morphisme* $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}'} \to \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ *est donné par* $d(\mathrm{Y}', \mathrm{Y})$.

4.5.0. — [81] Conservons les notations de 4.3.1 et 4.4 et effectuons un certain nombre de transformations : $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}/\mathscr{I}^2_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathcal{J}}}$-module quasi-cohérent annulé par $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}$ donc est l'image directe d'un $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}$-module quasi-cohérent noté $\mathscr{N}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}/\mathrm{X}_{\mathcal{J}}}$, et appelé le *faisceau conormal* à $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ dans $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$. [82] Comme $\mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}$ est annulé par $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}$, le faisceau en groupes commutatifs $\mathscr{A}_{\mathcal{J}}$ de 4.3.1 s'identifie à : **131**

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}}(\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}/\mathscr{I}^2_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}) = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}/\mathrm{X}_{\mathcal{J}}}, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}),$$

d'où, pour tout $i \geqslant 0$:

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{X}_{\mathcal{J}}, \mathscr{A}_{\mathcal{J}}) = \mathrm{H}^i(\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}/\mathrm{X}_{\mathcal{J}}}, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}})).$$

[83] On peut alors supprimer l'hypothèse « Y fermé », comme suit. Notons d'abord que tout ouvert $\mathrm{U}_{\mathcal{J}}$ de $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$ provient par changement de base du sous-schéma ouvert U de X ayant même espace topologique sous-jacent que $\mathrm{U}_{\mathcal{J}}$. Soit maintenant $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ un sous-schéma fermé de $\mathrm{U}_{\mathcal{J}}$, plat sur $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$, et $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}$ l'idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_{\mathcal{J}}}$ définissant $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$. Si $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ se relève en un sous-schéma Y de X, alors Y, ayant même espace topologique sous-jacent que $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$, est un sous-schéma fermé de U ; par conséquent, l'obstruction pour relever $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ en un sous-schéma, plat sur S, de X ou de U est « la même », elle réside dans

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}/\mathrm{X}_{\mathcal{J}}}, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}})).$$

Enfin, revenons aux notations du n°0 : soit $\mathcal{I}$ un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ tel que $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ et $\mathcal{I}\mathcal{J} = 0$, et soit S_0 le sous-schéma fermé de $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$ défini par $\mathcal{I}$. Pour tout S-schéma Z, on note $\mathrm{Z}_{\mathcal{J}} = \mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{\mathcal{J}}$ et $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$. Alors, comme $\mathcal{J}$ est annulé par $\mathcal{I}$, on a, avec les notations de 4.4 :

$$\mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}} = \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}$$
$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}/\mathrm{X}_{\mathcal{J}}}, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}) = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}/\mathrm{X}_{\mathcal{J}}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}),$$

etc. On obtient donc :

[81] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.5.0 pour marquer le retour à l'original.
[82] N.D.E. : On a corrigé la phrase suivante.
[83] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

Proposition 4.5. — *Soient* S *un schéma,* S_0 *et* $S_{\mathscr{J}}$ *les sous-schémas fermés définis par les idéaux quasi-cohérents* $\mathscr{I}$ *et* $\mathscr{J}$*, tels que* $\mathscr{I} \supset \mathscr{J}$ *et* $\mathscr{I} \cdot \mathscr{J} = 0$*. Soient* X *un* S*-schéma et* $Y_{\mathscr{J}}$ *un sous-schéma de* $X_{\mathscr{J}}$*, plat sur* $S_{\mathscr{J}}$*. Soit* $\mathscr{A}_0$ *le* $\mathscr{O}_{Y_0}$*-module défini par*

$$\mathscr{A}_0 = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{Y_0}}(\mathscr{N}_{Y_{\mathscr{J}}/X_{\mathscr{J}}} \otimes_{\mathscr{O}_{Y_{\mathscr{J}}}} \mathscr{O}_{Y_0}, \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_{Y_0}).$$

(i) *Pour qu'il existe un sous-schéma* Y *de* X*, se réduisant suivant* $Y_{\mathscr{J}}$*,* plat *sur* S*, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

(a) *Un tel* Y *existe* localement *sur* X.

(b) *Une certaine obstruction dans* $R^1\Gamma(Y_0, \mathscr{A}_0)$ *est nulle.* [84]

(ii) *Sous ces conditions, l'ensemble des* Y *répondant aux conditions exigées est principal homogène sous le groupe commutatif* $\Gamma(Y_0, \mathscr{A}_0)$*.*

Remarque 4.5.1. — [85] Il résulte de 4.5 (ii) la donnée pour tout couple (Y, Y') de sous-schémas [86] de X, plats sur S et se réduisant suivant $Y_{\mathscr{J}}$, d'une « *déviation* »

$$d(Y', Y) \in \Gamma(Y_0, \mathscr{A}_0) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{Y_0}}(\mathscr{N}_{Y_{\mathscr{J}}/X_{\mathscr{J}}} \otimes_{\mathscr{O}_{Y_{\mathscr{J}}}} \mathscr{O}_{Y_0},\ \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_{Y_0})\,;$$

la convention de signe adoptée dans 4.4.1 étant que $d(Y', Y)$ correspond au morphisme de $\mathscr{O}_X$-modules

$$\mathscr{I}_{Y'} \hookrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_Y$$

(qui est à valeurs dans $\mathscr{J}\mathscr{O}_Y \simeq \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_{Y_0}$ et se factorise par $\mathscr{I}_{Y'_{\mathscr{J}}} = \mathscr{I}_{Y_{\mathscr{J}}}$ puis par $\mathscr{N}_{Y_{\mathscr{J}}/X_{\mathscr{J}}}$).

Remarque 4.6. — [87] Si X est plat sur S et si $Y_{\mathscr{J}}$ est localement *intersection complète*
132 dans $X_{\mathscr{J}}$, alors la condition (a) est toujours satisfaite et tout Y plat sur S relevant $Y_{\mathscr{J}}$ est alors localement intersection complète dans X. Si de plus Y_0 est *affine*, la condition (b) est également satisfaite.

Définition 4.6.1. — (cf. SGA 6, VII 1.1) Soient B un anneau commutatif, $f : E \to B$ un morphisme B-linéaire, où E est un B-module libre de rang fini d, et I l'idéal $f(E)$ (si on choisit une base de E, f est donné par un d-uplet $(f_1, \dots, f_d)$ d'éléments de B, et I est l'idéal engendré par les f_i). Le *complexe de Koszul* $K_\bullet(f)$ est le B-module gradué $\bigwedge_B^\bullet E$, muni de la différentielle (de degré -1) :

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_i \mapsto \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-1} f(x_j)\, x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_i.$$

[84] N.D.E. : Ici, on a noté $R^1\Gamma(Y_0, \mathscr{A}_0)$ le groupe de cohomologie « cohérente » $H^1(Y_0, \mathscr{A}_0)$ du $\mathscr{O}_{Y_0}$-module $\mathscr{A}_0$, afin de le distinguer de groupes de cohomologie « de Hochschild » $H^i(Y_0, \mathscr{M}_0)$ (Y_0 un S_0-groupe, $\mathscr{M}_0$ un $\mathscr{O}_{S_0}$-module) qui seront considérés à partir de 4.16.

[85] N.D.E. : On a placé ici cette remarque, qui remplace la remarque 4.7 de l'original.

[86] N.D.E. : On a corrigé « sous-schémas fermés » en « sous-schémas ».

[87] N.D.E. : On a conservé, pour mémoire, la remarque 4.6 de l'original, où ne figure pas la définition de « localement intersection complète ». On a ajouté à la suite la « bonne » définition, tirée de SGA 6, VII 1.4 (qui *remplace* celle de EGA IV_4, 16.9.2), et la démonstration des trois résultats énoncés dans la remarque.

On a donc un complexe de chaînes augmenté (B/I étant en degré -1) :

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^2 \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{B}/\mathrm{I} \longrightarrow 0$$

qui par définition est exact en degré 0, puisque $\mathrm{I} = f(\mathrm{E})$. On dit que f est *régulier* si $\mathrm{K}_\bullet(f)$ est acyclique en degrés > 0, c.-à-d., si le complexe augmenté ci-dessus est une *résolution* de $\mathrm{C} = \mathrm{B}/\mathrm{I}$.

Dans ce cas, la démonstration de SGA 6, VII 1.2 b) montre que les C-modules $\mathrm{I}^n/\mathrm{I}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sont libres, I/I^2 étant de rang d.

Définition 4.6.2. — (cf. SGA 6, VII 1.4) Soient X un schéma, Y un sous-schéma, U un ouvert de X tel que Y soit un sous-schéma fermé de U, défini par l'idéal quasi-cohérent $\mathscr{I}_\mathrm{Y}$.

On dit que Y est *localement intersection complète* dans X si $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{X}$ est une *immersion régulière* au sens de SGA 6, VII 1.4, c.-à-d., si pour tout $y \in \mathrm{Y}$ il existe un voisinage ouvert affine V de y dans U, un $\mathscr{O}_\mathrm{V}$-module fini libre $\mathscr{E}$, et un morphisme *régulier* $f : \mathscr{E} \to \mathscr{O}_\mathrm{V}$ d'image $\mathscr{I}_\mathrm{Y}|_\mathrm{V}$, i.e. tel que $\mathrm{K}_\bullet(f)$ soit une résolution de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}\cap\mathrm{V}}$.

Ceci implique que l'immersion $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{X}$ est *localement de présentation finie*, et, d'après 4.6.1, que le faisceau conormal $\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} = \mathscr{I}_\mathrm{Y}/\mathscr{I}_\mathrm{Y}^2$ est un $\mathscr{O}_\mathrm{Y}$-module *fini localement libre.*

Lemme 4.6.3. — [88] *Soient* A *un anneau,* J *un idéal de* A de carré nul*,* $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}/\mathrm{J}$*,* B *une* A*-algèbre* plate*,* E *un* B*-module libre de rang fini,* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{B}$ *un morphisme de* B*-modules. On suppose que le morphisme* $g : \overline{\mathrm{E}} = \mathrm{E} \otimes_\mathrm{A} \overline{\mathrm{A}} \to \overline{\mathrm{B}} = \mathrm{B} \otimes_\mathrm{A} \overline{\mathrm{A}}$ *induit par* f *est* régulier *et que* $\overline{\mathrm{B}}/g(\overline{\mathrm{E}})$ *est* plate *sur* $\overline{\mathrm{A}}$.

Alors f *est* régulier *et* $\mathrm{B}/f(\mathrm{E})$ *est* plate *sur* A*.*

Démonstration. Posons $\mathrm{C} = \mathrm{B}/f(\mathrm{E})$ et $\overline{\mathrm{C}} = \mathrm{C} \otimes_\mathrm{A} \overline{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{B}}/g(\overline{\mathrm{E}})$. D'abord, les $\bigwedge^i_\mathrm{B}(\mathrm{E})$ sont des B-modules libres, donc des A-modules plats, puisque B est plat sur A. Comme $\bigwedge^\bullet_\mathrm{B} \mathrm{E} \otimes_\mathrm{A} \overline{\mathrm{A}} \simeq \bigwedge^\bullet_{\overline{\mathrm{B}}} \overline{\mathrm{E}}$, on obtient donc une suite exacte de complexes :

$$0 \longrightarrow \mathrm{J} \otimes_\mathrm{A} \bigwedge^\bullet_\mathrm{B} \mathrm{E} \longrightarrow \bigwedge^\bullet_\mathrm{B} \mathrm{E} \longrightarrow \bigwedge^\bullet_{\overline{\mathrm{A}}} \overline{\mathrm{E}} \longrightarrow 0\ .$$

De plus, comme $\mathrm{J}^2 = 0$, on a $\mathrm{J} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{M} = \mathrm{J} \otimes_{\overline{\mathrm{A}}} \overline{\mathrm{A}} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{M}$ pour tout A-module M. Notant $\dashrightarrow$ les flèches d'augmentation, et d le rang de E, on obtient donc le bicomplexe qui suit, où les lignes sont exactes :

[88] N.D.E. : Afin de démontrer les résultats énoncés dans la remarque 4.6, on a ajouté les lemmes 4.6.3, 4.6.4 et la proposition 4.6.5, ainsi que la remarque 4.6.6.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{J} \otimes_{\overline{\mathrm{A}}} \bigwedge^d_{\overline{\mathrm{B}}} \overline{\mathrm{E}} \arrow[r] \arrow[d] & \bigwedge^d_{\mathrm{B}} \mathrm{E} \arrow[r] \arrow[d] & \bigwedge^d_{\overline{\mathrm{B}}} \overline{\mathrm{E}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{J} \otimes_{\overline{\mathrm{A}}} \overline{\mathrm{E}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes g"'] & \mathrm{E} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \overline{\mathrm{E}} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{J} \otimes_{\overline{\mathrm{A}}} \overline{\mathrm{B}} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathrm{B} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \overline{\mathrm{B}} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
 & \mathrm{J} \otimes_{\overline{\mathrm{A}}} \overline{\mathrm{C}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{C} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\mathrm{C}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & .
\end{tikzcd}
$$

De plus, les colonnes de droite et de gauche sont exactes, puisque $\mathrm{K}_\bullet(g)$ est une résolution de $\overline{\mathrm{C}}$ et que celui-ci est plat sur $\overline{\mathrm{A}}$. Donc, considérant la suite exacte longue d'homologie associée à la suite exacte de complexes non augmentés on obtient que $\mathrm{K}_\bullet(f)$ est acyclique en degrés > 0, et qu'on a en degré 0 une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{C} \longrightarrow \overline{\mathrm{C}} \longrightarrow 0.$$

Donc C est plat sur A, d'après le « critère fondamental de platitude » (cf. [**BAC**], § III.5, th. 1).

Lemme 4.6.4. — (88) *Soient* A *un anneau commutatif,* J *un idéal nilpotent,* $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}$ *des* A*-modules tels que* M/N *soit* plat *sur* A. *Si* $x_1, \ldots, x_n$ *sont des éléments de* N *dont les images engendrent l'image* $\overline{\mathrm{N}}$ *de* N *dans* M/JM, *alors ils engendrent* N.

En effet, notons N′ le sous-module de N engendré par les x_i, et $\mathrm{Q} = \mathrm{N}/\mathrm{N}'$. Alors le morphisme $\mathrm{N}' \otimes (\mathrm{A}/\mathrm{J}) \to \overline{\mathrm{N}}$ est surjectif. D'autre part, comme M/N est plat sur A, le morphisme $\mathrm{N} \otimes (\mathrm{A}/\mathrm{J}) \to \overline{\mathrm{N}}$ est bijectif. On obtient donc que $\mathrm{Q} \otimes (\mathrm{A}/\mathrm{J}) = 0$, d'où $\mathrm{Q} = 0$ d'après le « lemme de Nakayama nilpotent » (on a $\mathrm{Q} = \mathrm{JQ} = \mathrm{J}^2\mathrm{Q} = \cdots = 0$).

On peut maintenant démontrer la :

Proposition 4.6.5. — (88) *Soient* $\mathrm{S}, \mathcal{I}, \mathcal{J}$ *et* $\mathrm{X}, \mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ *comme en* 4.5. *Supposons de plus* X plat *sur* S *et* $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ localement intersection complète *dans* $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$.

a) *Alors, la condition* (a) *de* 4.5 (i) *est satisfaite ; de plus, tout* Y plat *sur* S *relevant* $Y_{\mathcal{J}}$ *est* localement intersection complète *dans* X.

b) *Si de plus* Y_0 *est* affine*, la condition* (b) *de loc. cit. est également satisfaite.*

Démonstration. La première assertion de (a) découle du lemme 4.6.3 ; la seconde résulte alors du lemme 4.6.4. D'autre part, l'hypothèse entraîne (cf. 4.6.2) que $\mathscr{N}_{Y_{\mathcal{J}}/X_{\mathcal{J}}}$ est un $\mathscr{O}_{Y_{\mathcal{J}}}$-module fini localement libre, donc le $\mathscr{O}_{Y_0}$-module

$$\mathscr{A}_0 = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{Y_0}}(\mathscr{N}_{Y_{\mathcal{J}}/X_{\mathcal{J}}} \otimes_{\mathscr{O}_{Y_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{Y_0}, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_{Y_0}).$$

est quasi-cohérent (cf. EGA I, 1.3.12), d'où $R^1\Gamma(Y_0, \mathscr{A}_0) = 0$ si Y_0 est affine.

Remarque 4.6.6. — [88] Terminons ce paragraphe par l'exemple suivant, qui montre que, sous les hypothèses du lemme 4.6.3, si (g_1, g_2) est une suite régulière engendrant l'idéal $\overline{I} = g(\overline{E})$, elle ne se relève pas nécessairement en une suite régulière dans B.

Soient k un corps, $\overline{A} = k[X, Y]$, notons $k\varepsilon$ le $\overline{A}$-module $\overline{A}/(X, Y)$ (i.e. $P{\cdot}\varepsilon = P(0, 0)\,\varepsilon$ pour tout $P \in \overline{A}$), et soit $A = \overline{A} \oplus k\varepsilon$, où $J = k\varepsilon$ est un idéal de carré nul. On a $A/J = \overline{A}$.

L'algèbre $B = A \otimes_k k[Z, T]$ est libre sur A, donc plate ; on a $\overline{B} = k[X, Y, Z, T]$. Posons $g_1 = XZ - YT$ et $g_2 = XZ - 1$. Comme le polynôme g_1 est irréductible, $\overline{B}/(g_1)$ est intègre, et donc (g_1, g_2) est une suite régulière dans $\overline{B}$, engendrant l'idéal $\overline{I} = (XZ - 1, YT - 1)$. Donc

$$\overline{C} = \overline{B}/\overline{I} = k[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}] = A[X^{-1}, Y^{-1}]$$

est une $\overline{A}$-algèbre plate (et aussi une A-algèbre plate). Mais tout relèvement dans B de g_1 est de la forme $XY - ZT + \lambda\varepsilon$, où $\lambda \in k[Z, T]$, donc annule ε.

4.7. On a supprimé ici la remarque 4.7, placée en 4.5.1.

Remarque 4.8.0. — [89] Soient S un schéma, S′ un sous-schéma *fermé*, X un S-schéma, Y un sous-S-schéma de X, et $X' = X \times_S S'$, $Y' = Y \times_S S'$. Alors, on a un morphisme *surjectif* de $\mathscr{O}_{Y'}$-modules

$$\mathscr{N}_{Y/X} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_{Y'} \xrightarrow{\text{surj.}} \mathscr{N}_{Y'/X'} .$$

En effet, quitte à remplacer X par un certain ouvert, on peut supposer que Y est fermé, défini par un idéal $\mathscr{I}_Y$ de $\mathscr{O}_X$; alors l'image de $\mathscr{I}_Y$ dans $\mathscr{O}_{X'}$ est l'idéal $\mathscr{I}_{Y'}$ définissant Y′, et l'on a un morphisme surjectif de $\mathscr{O}_{Y'}$-modules

$$\pi : \quad (\mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Y^2) \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_{Y'} \xrightarrow{\text{surj.}} \mathscr{I}_{Y'}/\mathscr{I}_{Y'}^2 .$$

Supposons de plus que $\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_X/\mathscr{I}_Y$ soit *plat* sur $\mathscr{O}_S$; alors le morphisme naturel

$$\mathscr{I}_Y \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X'} \longrightarrow \mathscr{I}_{Y'}$$

[89] N.D.E. : On a inséré ici cette remarque, utilisée dans la proposition qui suit ; elle figurait en 4.10 de l'original.

est bijectif (cf. EGA IV_2, 2.1.8). On a alors le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{I}_{\mathrm{Y}}^2 \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}} \mathscr{O}_{\mathrm{X}'} \arrow[r] \arrow[d, "\text{surj.}"'] & \mathscr{I}_{\mathrm{Y}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}} \mathscr{O}_{\mathrm{X}'} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (\mathscr{I}_{\mathrm{Y}}/\mathscr{I}_{\mathrm{Y}}^2) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"', "\text{surj.}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{I}_{\mathrm{Y}'}^2 \arrow[r] & \mathscr{I}_{\mathrm{Y}'} \arrow[r] & \mathscr{I}_{\mathrm{Y}'}/\mathscr{I}_{\mathrm{Y}'}^2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

d'où l'on déduit, d'après le lemme du serpent : [90]

(4.8.0) $$\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'} \xrightarrow{\sim} \mathscr{N}_{\mathrm{Y}'/\mathrm{X}'} \qquad \text{si Y est } \textit{plat} \text{ sur S.}$$

Proposition 4.8. — *Soient* $\mathrm{S}, \mathrm{S}_0, \mathrm{S}_{\mathcal{J}}$ *et* $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ *comme en* 4.5. [91] *Soient* X *un* S-*schéma,* Y *un sous-schéma de* X*, et* i *l'immersion* $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{X}$.

(i) *Pour tout* S-*morphisme* $f : \mathrm{T} \to \mathrm{X}$ *tel que* $f_{\mathcal{J}} : \mathrm{T}_{\mathcal{J}} \to \mathrm{X}_{\mathcal{J}}$ *se factorise par* $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$, *on peut définir une* obstruction

$(*)$ $$c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(f_0^*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}), \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}})$$

dont la nullité équivaut à l'existence d'une factorisation de f *par* Y.

(ii) *Soit* Y′ *un second sous-schéma de* X. *Supposons que* $\mathrm{Y}'_{\mathcal{J}} = \mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ *et que* Y, Y′ *soient* plats *sur* S. *On a alors des isomorphismes* (*cf.* 4.8.0) *:*

$$\mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \simeq \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0} \simeq \mathcal{J}\mathscr{O}'_{\mathrm{Y}} \qquad \textit{et} \qquad \mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{N}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}/\mathrm{X}_{\mathcal{J}}}$$

d'où un isomorphisme :

$$u : \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}/\mathrm{X}_{\mathcal{J}}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}, \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}, \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}).$$

133 *Notant* $i' : \mathrm{Y}' \to \mathrm{X}$ *l'immersion canonique et* $d(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}')$ *la déviation de* 4.5.1, *on a :* [92]

$(**)$ $$c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, i') = u(d(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}')).$$

(iii) *Le morphisme canonique* $\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \xrightarrow{\mathrm{D}} i^*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})$ (cf. SGA 1 II, formule 4.3) [93] *induit un morphisme :*

$$\mathrm{D}_0 : \mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0} \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}$$

---

[90] N.D.E. : Dans l'original, ceci était indiqué dans la remarque 4.10, sous l'hypothèse additionnelle que Y′ soit localement intersection complète dans X′. Cette hypothèse figurait aussi, par suite, dans les énoncés 4.12–4.14 ; elle semble en fait superflue, et on l'a supprimée des énoncés précités.

[91] N.D.E. : On a supprimé l'hypothèse que $\mathcal{I}$ soit *nilpotent*, qui paraît superflue (cf. la démonstration).

[92] N.D.E. : voir aussi 4.27 plus loin.

[93] N.D.E. : voir aussi EGA IV_4, 16.4.21. Rappelons que si U est un ouvert affine de X tel que $\mathrm{Y} \cap \mathrm{U}$ soit défini par l'idéal I de $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$, si on note d la différentielle $\mathrm{A} \to \Gamma(\mathrm{U}, \Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})$, et si $x \in \mathrm{I}$, alors $\mathrm{D}(x + \mathrm{I}^2)$ est l'élément $d(x) \otimes 1$ de $\Gamma(\mathrm{U}, \Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathrm{I})$.

et donc, pour tout S*-morphisme* $f : \mathrm{T} \to \mathrm{X}$ *comme en* (i)*, un morphisme :*

$$v_{f_0} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(f_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}), \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(f_0^*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}), \mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}}),$$
$$a \mapsto a \circ f_0^*(\mathrm{D}_0)$$

où ci-dessus le premier groupe est $\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}^+}(\mathrm{T}, \mathrm{L}_{\mathrm{X}})$*, cf.* 0.1.5*. Pour* $a \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}^+}(\mathrm{T}, \mathrm{L}_{\mathrm{X}})$*, on a :*

$$(***) \qquad c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, a \cdot f) - c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, f) = v_{f_0}(a),$$

où l'on a noté $a \cdot f$ *le morphisme composé* $\mathrm{T} \xrightarrow{a \times f} \mathrm{L}_{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{X}^+} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$.

Nous allons démontrer la partie (i) de la proposition, laissant au lecteur le soin de (ne pas) vérifier les assertions (ii) et (iii) ; cette vérification se fait par réduction au cas affine, puis par comparaison des définitions explicites. [94]

Démontrons donc (i). Le morphisme $f : \mathrm{T} \to \mathrm{X}$ définit un morphisme de faisceaux d'anneaux $\phi : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{T}})$. [95] Soit U un sous-schéma ouvert de X dans lequel Y est fermé ; comme T (resp. $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$) a même espace sous-jacent que $\mathrm{T}_{\mathcal{J}}$ (resp. Y), l'application continue sous-jacente à f envoie T dans U, et comme U est un ouvert de X, ϕ induit un morphisme de faiceaux d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathrm{U}} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}|_{\mathrm{U}} \to f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{T}})$, i.e. f se factorise par U.

134

Donc, on peut se restreindre au cas où Y est fermé, donc défini par un faisceau d'idéaux $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}}$. Pour que f se factorise par Y, il faut et il suffit que l'application composée $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{T}})$ soit nulle. Comme $f_{\mathcal{J}}$ se factorise par $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$, l'application composée $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathcal{J}}} \to f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{T}_{\mathcal{J}}})$ est nulle. Considérant le diagramme commutatif où la première ligne est exacte :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f_*(\mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}}) \arrow[r] & f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{T}}) \arrow[r] & f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{T}_{\mathcal{J}}}) \\
 & & \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \arrow[u, "\phi"'] \arrow[r] & \mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathcal{J}}} \arrow[u, "\phi_{\mathcal{J}}"'] \\
 & & \mathscr{I}_{\mathrm{Y}} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[uul, dashed, "\phi"] & \mathscr{I}_{\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

on en déduit que ϕ applique $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}}$ dans $f_*(\mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}})$. [96] Puisque $\mathcal{J}^2 = 0$, il en résulte que **135**
$f_*(\mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}})$, vu comme $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module via ϕ, est annulé par $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}}$; par conséquent, ϕ induit un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules

$$h : \quad i_*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}}) = \mathscr{I}_{\mathrm{Y}}/\mathscr{I}_{\mathrm{Y}}^2 \longrightarrow f_*(\mathcal{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}}).$$

---

[94] N.D.E. : On a fait ces vérifications plus bas.

[95] N.D.E. : D'une part, on a supprimé l'hypothèse que $\mathcal{I}$ soit nilpotent, i.e. que X_0 ait même espace topologique sous-jacent que X ; d'autre part, on a détaillé la phrase qui suit.

[96] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

D'autre part, on a des carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\tau_{\mathrm{T}_0}"] & \mathrm{X}_0 \arrow[d, "\tau_{\mathrm{X}_0}"] & \mathrm{Y}_0 \arrow[l, "i_0"'] \arrow[d, "\tau_{\mathrm{Y}_0}"] \\ \mathrm{T} \arrow[r, "f"] & \mathrm{X} & \mathrm{Y}. \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

où i_{T_0} etc. sont les immersions fermées déduites par changement de base de $\mathrm{S}_0 \hookrightarrow \mathrm{S}$. Comme $\mathcal{J}\mathscr{O}_\mathrm{T}$ est un $\mathscr{O}_\mathrm{T}$-module quasi-cohérent annulé par $\mathcal{I}$, on a un isomorphisme

$$\mathcal{J}\mathscr{O}_\mathrm{T} \simeq (\tau_{\mathrm{T}_0})_* \, \tau_{\mathrm{T}_0}^*(\mathcal{J}\mathscr{O}_\mathrm{T}),$$

d'où $f_*(\mathcal{J}\mathscr{O}_\mathrm{T}) \simeq (\tau_{\mathrm{X}_0})_*(f_0)_* \, \tau_{\mathrm{T}_0}^*(\mathcal{J}\mathscr{O}_\mathrm{T})$. Donc h correspond, par adjonction, à un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$-modules

$$h_0 : \quad f_0^* \tau_{\mathrm{X}_0}^* i_*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}}) \longrightarrow i_{\mathrm{T}_0}^*(\mathcal{J}\mathscr{O}_\mathrm{T}).$$

Or, $\tau_{\mathrm{X}_0}^* i_*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}}) \simeq (i_0)_* \, \tau_{\mathrm{Y}_0}^*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}}) = \mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{Y}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}$. Donc, revenant à l'abus de notation $i_{\mathrm{T}_0}^*(\mathcal{J}\mathscr{O}_\mathrm{T}) = \mathcal{J}\mathscr{O}_\mathrm{T}$ constamment utilisé, h_0 s'identifie à un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$-modules

$$h_0 : \quad f_0^*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{Y}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}) \longrightarrow \mathcal{J}\mathscr{O}_\mathrm{T}$$

qui est l'obstruction $c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, f)$ cherchée. Ceci prouve (i).

Lorsque f est l'immersion $i' : \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{X}$, on voit que $c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, i')$ provient du morphisme $\mathscr{I}_\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{O}_\mathrm{X} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}$ donc correspond, d'après 4.4.1 et 4.5.1, à la classe $d(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}')$. Ceci prouve (ii).

Démontrons (iii). D'abord, $\mathrm{D} : \mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \to i^*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})$ induit un morphisme

$$\mathrm{D}_0 : \quad \tau_{\mathrm{Y}_0}^*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}}) \longrightarrow \tau_{\mathrm{Y}_0}^* i^*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}) = i_0^* \tau_{\mathrm{X}_0}^*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})$$

et, comme $\mathrm{X}_0 = \mathrm{X} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}_0$, on a $\tau_{\mathrm{X}_0}^*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}) \simeq \Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}$ (cf. EGA IV_4, 16.4.5). On obtient donc le morphisme annoncé

$$\mathrm{D}_0 : \quad \mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{Y}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0} \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}.$$

Enfin, on va vérifier l'égalité $(***)$ après la remarque ci-dessous.

Remarque 4.9. — L'obstruction $c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, f)$ se calcule localement sur T. Soit $\mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{C})$ un ouvert affine de T au-dessus d'un ouvert affine Spec(A) de X, lui-même au-dessus d'un ouvert affine $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ de S, soient $\mathrm{J} \subset \mathrm{I} \subset \Lambda$ (resp. $\mathrm{I}_\mathrm{Y} \subset \mathrm{A}$) les idéaux correspondant à $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ (resp. à $\mathscr{I}_\mathrm{Y}$), soit $\mathrm{B} = \mathrm{A}/\mathrm{I}_\mathrm{Y}$ et soit $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ le morphisme de Λ-algèbres correspondant à $f : \mathrm{T} \to \mathrm{X}$; comme $f(\mathrm{T}_\mathrm{J}) \subset \mathrm{Y}_\mathrm{J}$ on a $\phi(\mathrm{I}_\mathrm{Y}) \subset \mathrm{JC}$ et donc ϕ induit un morphisme de Λ-algèbres $\mathrm{B} \to \mathrm{C}/\mathrm{JC} \to \mathrm{C}_0 = \mathrm{C}/\mathrm{IC}$. Alors, l'obstruction $c = c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, f)$ se calcule par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I}_\mathrm{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{A} \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{C} \\ \mathrm{I}_\mathrm{Y}/\mathrm{I}_\mathrm{Y}^2 \arrow[r] & \mathrm{I}_\mathrm{Y}/\mathrm{I}_\mathrm{Y}^2 \otimes_\mathrm{B} \mathrm{C}_0 \arrow[r, "c"] & \mathrm{JC} \arrow[u] \end{tikzcd} \quad ,$$

c.-à-d., elle est définie, au-dessus de l'ouvert U, comme l'unique élément de

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}_0}(\mathrm{I}_{\mathrm{Y}}/\mathrm{I}_{\mathrm{Y}}^2 \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{C}_0, \mathrm{JC}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}_0}(\mathrm{I}_{\mathrm{Y}}/\mathrm{I}_{\mathrm{Y}}^2 \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{B}_0, \mathrm{JC})$$

tel que, avec les notations évidentes, on ait $c(\overline{x} \otimes_{\mathrm{B}} 1) = \phi(x)$, pour tout $x \in \mathrm{I}_{\mathrm{Y}}$.

(97) On peut maintenant achever la démonstration de 4.8 (iii). L'égalité $(***)$ se vérifie localement sur T, on est donc ramené à la situation affine décrite ci-dessus. Notons $d_{\mathrm{A}/\Lambda}$ la différentielle $\mathrm{A} \to \Omega^1_{\mathrm{A}/\Lambda}$. Alors a correspond, au-dessus de U, à un élément a_{U} de

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}_0}(\Omega^1_{\mathrm{A}_0/\Lambda_0} \otimes_{\mathrm{A}_0} \mathrm{C}_0, \mathrm{JC}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}_0}(\Omega^1_{\mathrm{A}/\Lambda} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}_0, \mathrm{JC}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\Omega^1_{\mathrm{A}/\Lambda}, \mathrm{JC}).$$

Alors, d'une part, $v_{f_0}(a)$ correspond au-dessus de U à l'élément $a_{\mathrm{U}} \circ \mathrm{D}_0$, où D_0 est le morphisme de B-modules (98)

$$\mathrm{I}_{\mathrm{Y}}/\mathrm{I}_{\mathrm{Y}}^2 \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{A}/\Lambda} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}_0, \qquad x + \mathrm{I}_{\mathrm{Y}}^2 \mapsto d_{\mathrm{A}/\Lambda}(x) \otimes 1.$$

D'autre part (cf. la démonstration de 0.1.8 et 0.1.9), le morphisme de Λ-algèbres $\phi' : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ correspondant à $a \cdot f$ diffère de ϕ par la Λ-dérivation $\mathrm{A} \to \mathrm{JC}$ associée à a_{U}, i.e. on a :

$$\phi' = \phi + a_{\mathrm{U}} \circ d_{\mathrm{A}/\Lambda} = \phi + a_{\mathrm{U}} \circ (d_{\mathrm{A}/\Lambda} \otimes 1).$$

Par conséquent, notant $c' = c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, a \cdot f)$, on a pour tout $x \in \mathrm{I}_{\mathrm{Y}}$, en notant $\overline{x}$ son image dans $\mathrm{I}_{\mathrm{Y}}/\mathrm{I}_{\mathrm{Y}}^2$:

$$(c' - c)(\overline{x} \otimes 1) = a_{\mathrm{U}}(d_{\mathrm{A}/\Lambda}(x) \otimes 1) = (a_{\mathrm{U}} \circ \mathrm{D}_0)(\overline{x}) = v_{f_0}(a)(\overline{x})\,.$$

Ceci montre que $c' - c = v_{f_0}(a)$.

4.10. On a supprimé la remarque 4.10 de l'original, rendue obsolète par l'ajout de la remarque 4.8.0. 136

4.11. Nous nous proposons maintenant d'étudier la situation suivante. Soient S, $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$ et S_0 comme en 4.8 ; on a trois S-schémas $\mathrm{X}, \mathrm{X}', \mathrm{T}$, un sous-schéma Y de X (resp. Y′ de X′), et des morphismes $f : \mathrm{T} \to \mathrm{X}'$ et $g : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Y}' \arrow[d, hook, "i'"'] & \mathrm{Y} \arrow[d, hook, "i"'] \\ \mathrm{T} \arrow[r, "f"] & \mathrm{X}' \arrow[r, "g"] & \mathrm{X} \end{tikzcd} .$$

(97) N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.
(98) N.D.E. : cf. N.D.E. (93).

On suppose que par réduction modulo $\mathscr{J}$, ce diagramme se complète en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Y}'_{\mathscr{J}} \arrow[r, dashed] \arrow[d, hook, "i'_{\mathscr{J}}"'] & \mathrm{Y}_{\mathscr{J}} \arrow[d, hook, "i_{\mathscr{J}}"'] \\ \mathrm{T}_{\mathscr{J}} \arrow[r, "f_{\mathscr{J}}"] \arrow[ur, dashed] & \mathrm{X}'_{\mathscr{J}} \arrow[r, "g_{\mathscr{J}}"] & \mathrm{X}_{\mathscr{J}} \end{tikzcd} .$$

137 On a donc par 4.8 des obstructions :

$$\begin{aligned} c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, g \circ i') &\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'_0}}(i_0'^{*} g_0^{*}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}), \\ c(\mathrm{X}', \mathrm{Y}', f) &\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(f_0^{*}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}'/\mathrm{X}'} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}}), \\ c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, g \circ f) &\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(f_0^{*} g_0^{*}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}}), \end{aligned}$$

dont on cherche à calculer les relations. (99)

Lemme 4.12. — *Supposons* Y' plat *sur* S, *de sorte que* $\mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'_0} = \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}$.

(i) *On a un morphisme naturel*

$$b_{f_0} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'_0}}(i_0'^{*} g_0^{*}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(f_0^{*} g_0^{*}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}}).$$

(ii) *On a aussi un morphisme naturel, fonctoriel en* T (100)

$$a_{g_0}(f_0) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(f_0^{*}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}'/\mathrm{X}'} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(f_0^{*} g_0^{*}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}}).$$

Démonstration. — (101) Remarquons d'abord que, $\mathrm{X}, \mathrm{X}', \mathrm{Y}, \mathrm{Y}'$ étant fixés, se donner un T comme ci-dessus équivaut à se donner un morphisme $(f, f_{\mathscr{J}}) : \mathrm{T} \to \mathrm{X}' \times_{\mathrm{X}'_+} \mathrm{Y}_+$. Posons $\mathrm{Z} = \mathrm{X}' \times_{\mathrm{X}'_+} \mathrm{Y}'_+$ et notons M et M′ les Z-foncteurs définis par : pour tout $f : \mathrm{T} \to \mathrm{Z}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(\mathrm{T}) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(f_0^{*} g_0^{*}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}}) \\ \mathrm{M}'(\mathrm{T}) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(f_0^{*}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}'/\mathrm{X}'} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}}). \end{aligned} \qquad (102)$$

---

(99)N.D.E. : À partir de 4.17, on appliquera ceci au cas où X est un S-groupe, $g : \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ la multiplication, Y un sous-schéma de X tel que $\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}$ soit un sous-groupe de $\mathrm{X}_{\mathscr{J}}$, $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$, et aux deux morphismes $\mathrm{Y}^3 \to \mathrm{X}^2$ qui envoient (y_1, y_2, y_3) sur $(y_1 y_2, y_3)$, resp. $(y_1, y_2 y_3)$. Dans ce cas, la comparaison des obstructions ci-dessus montrera que l'obstruction à ce que Y soit un sous-groupe de X réside dans un certain groupe de cohomologie (de Hochschild) $\mathrm{H}^2(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$.

(100)N.D.E. : On a supprimé l'hypothèse « Y'_0 *localement intersection complète* dans X'_0 », superflue d'après 4.8.0 ; d'autre part, on a ajouté que $a_{g_0}(f_0)$ est « fonctoriel en T », ceci jouant un rôle crucial dans la démonstration de 4.17.

(101)N.D.E. : On a détaillé la démonstration, pour faire voir la « fonctorialité en T » de a_{g_0}.

(102)N.D.E. : La situation se simplifiera à partir de 4.16 : on se restreindra aux schémas *plats* sur S, Y sera un S-groupe plat et $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$, on obtiendra alors des S_0-foncteurs N_0 et N'_0.

On a de toute façon un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
f_0^*(\mathscr{J}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'_0}) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathscr{J}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0} \arrow[d] \\
f_0^*(\mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}) \arrow[r, dashed] & \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}}
\end{tikzcd}$$

et comme Y' est plat sur S, la flèche de gauche est un isomorphisme, donc on obtient **138**
un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$-modules $f_0^*(\mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}) \to \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}}$. Celui-ci induit un morphisme de groupes abéliens

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(f_0^*g_0^*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}), f_0^*(\mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'})) \longrightarrow \mathrm{M}(\mathrm{T})$$

et, composant avec le morphisme

$$\mathrm{M}(\mathrm{Y}') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(f_0^*g_0^*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}), f_0^*(\mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'})),$$

induit par f_0^*, on obtient le morphisme $b_{f_0} : \mathrm{M}(\mathrm{Y}') \to \mathrm{M}(\mathrm{T})$.

De même, on a de toutes façons un diagramme

$$\begin{tikzcd}
g_0^*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathscr{N}_{\mathrm{Y}'/\mathrm{X}'}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'_0} \arrow[d] \\
g_0^*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0}) \arrow[r] & \mathscr{N}_{\mathrm{Y}'_0/\mathrm{X}'_0}
\end{tikzcd}$$

et comme Y' est plat sur S, la deuxième flèche verticale est un isomorphisme, d'après 4.8.0. On obtient donc un $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'_0}$-morphisme

$$i_0'^*g_0^*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}) \longrightarrow \mathscr{N}_{\mathrm{Y}'/\mathrm{X}'}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}}\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'_0}$$

qui induit un morphisme $a_{g_0}(\mathrm{id}_{\mathrm{Y}'}) : \mathrm{M}'(\mathrm{Y}') \to \mathrm{M}(\mathrm{Y}')$ et, pour tout $f : \mathrm{T} \to \mathrm{Z}$, un morphisme $a_{g_0}(f) : \mathrm{M}'(\mathrm{T}) \to \mathrm{M}(\mathrm{T})$ tel qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}'(\mathrm{Y}') \arrow[r, "a_{g_0}(\mathrm{id}_{\mathrm{Y}'_0})"] \arrow[d, "b'_{f_0}"'] & \mathrm{M}(\mathrm{Y}') \arrow[d, "b_{f_0}"] \\
\mathrm{M}'(\mathrm{T}) \arrow[r, "a_{g_0}(f_0)"] & \mathrm{M}(\mathrm{T})
\end{tikzcd}$$

(où b'_{f_0} est défini comme b_{f_0}). C.Q.F.D.

Remarque 4.12.1. — [103] Notons M_0 et M'_0 les Y'_0-foncteurs définis par : pour tout $f : \mathrm{T}_0 \to \mathrm{Y}'_0$,

$$\mathrm{M}_0(\mathrm{T}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(f_0^*g_0^*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}), \mathscr{J}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0})$$
$$\mathrm{M}'_0(\mathrm{T}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(f_0^*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}'/\mathrm{X}'}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'_0}), \mathscr{J}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}).$$

[103] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, utilisée dans la démonstration de 4.17.

Remarquons tout de suite que $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{Y}'_0$ et que sur la catégorie des Z-schémas T qui sont *plats* sur S, M et M′ coïncident, respectivement, avec les foncteurs $\prod_{\mathrm{S}_0/\mathrm{S}} \mathrm{M}_0$ et $\prod_{\mathrm{S}_0/\mathrm{S}} \mathrm{M}'_0$. Dans ce cas, b_{f_0} est simplement le morphisme

$$f_0^* : \mathrm{M}_0(\mathrm{Y}'_0) \longrightarrow \mathrm{M}(\mathrm{T}_0)$$

induit par f_0, et pour tout morphisme $u : \mathrm{U} \to \mathrm{T}$, posant $h = f \circ u$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}'_0(\mathrm{T}_0) \arrow[r, "a_{g_0}(f_0)"] \arrow[d, "u_0^*"'] & \mathrm{M}_0(\mathrm{T}_0) \arrow[d, "u_0^*"] \\
\mathrm{M}'_0(\mathrm{U}_0) \arrow[r, "a_{g_0}(h_0)"] & \mathrm{M}_0(\mathrm{U}_0)
\end{tikzcd}$$

i.e. a_{g_0} devient un morphisme de foncteurs $\prod_{\mathrm{S}_0/\mathrm{S}} \mathrm{M}'_0 \to \prod_{\mathrm{S}_0/\mathrm{S}} \mathrm{M}_0$.

Proposition 4.13. — *Supposons* Y′ plat *sur* S. *On a alors la formule :*

$$c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, g \circ f) = a_{g_0}(c(\mathrm{X}', \mathrm{Y}', f)) + b_{f_0}(c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, g \circ i')).$$

Comme la définition des différentes obstructions et des morphismes a_{g_0} et b_{f_0} est locale, on voit facilement qu'il suffit de vérifier la formule donnée lorsque les différents schémas en cause sont affines. Notons donc $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\Lambda)$, $\mathrm{S_J} = \mathrm{Spec}(\Lambda/\mathrm{J})$, $\mathrm{S}_0 =$
139 $\mathrm{Spec}(\Lambda/\mathrm{I})$, $\mathrm{T} = \mathrm{Spec}(\mathrm{C})$, $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{I_Y}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$, $\mathrm{X}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}')$, $\mathrm{Y}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}'/\mathrm{I}_{\mathrm{Y}'}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{B}')$.

On a donc un diagramme d'anneaux et d'idéaux [104]

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{B}' & \mathrm{B} \\
\mathrm{C} & \mathrm{A}' \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "\pi'"'] & \mathrm{A} \arrow[l, "g"'] \arrow[u, "\pi"'] \\
 & \mathrm{I}_{\mathrm{Y}'} \arrow[u, hook] & \mathrm{I}_{\mathrm{Y}} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}.$$

Étudions les différents termes de la formule à démontrer. Dans ce qui suit, si $x \in \mathrm{I_Y}$ (resp. $u \in \mathrm{I}_{\mathrm{Y}'}$), on note $\overline{x}$ (resp. $\overline{u}$) son image dans $\mathrm{I_Y}/\mathrm{I_Y^2}$ (resp. $\mathrm{I}_{\mathrm{Y}'}/\mathrm{I}^2_{\mathrm{Y}'}$) ; d'autre part, si m appartient à un Λ-module M, on note m_0 son image dans $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}/\mathrm{IM}$.

On a vu que $c = c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, g \circ f)$ est l'unique C_0-morphisme $\mathrm{I_Y}/\mathrm{I_Y^2} \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{C}_0 \to \mathrm{JC}$ tel que $c(\overline{x} \otimes 1) = f(g(x))$, pour tout $x \in \mathrm{I_Y}$.

[104] N.D.E. : On a conservé les notations de l'original, en notant $f : \mathrm{A}' \to \mathrm{C}$ et $g : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ les morphismes d'anneaux correspondant à $f : \mathrm{T} \to \mathrm{X}'$ et $g : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$. Ceci explique la formule $c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, g \circ f)(\overline{x} \otimes 1) = f(g(x))$, pour $x \in \mathrm{I_Y}$.

Fixons $x \in \mathrm{I_Y}$; on a $g(x) \in \mathrm{I_{Y'}} + \mathrm{JA'}$ puisque $g_{\mathrm{J}}(\mathrm{Y'_J}) \subset \mathrm{Y_J}$. Écrivons $g(x) = x' + \sum \lambda_i a'_i$, avec $x' \in \mathrm{I_{Y'}}$, $\lambda_i \in \mathrm{J}$, $a'_i \in \mathrm{A'}$. On a donc

$$c(\mathrm{X},\mathrm{Y},g\circ f)(\overline{x}\otimes 1) = f(g(x) = f(x') + \sum \lambda_i f(a'_i). \tag{1}$$

Considérons maintenant $a_{g_0}(c(\mathrm{X'},\mathrm{Y'},f))$. D'après les définitions posées, il est défini par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{I_{Y'}} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathrm{C} \\
\mathrm{I_{Y'_0}}/\mathrm{I^2_{Y'_0}} \otimes_{\mathrm{B'_0}} \mathrm{C_0} & \mathrm{I_{Y'}}/\mathrm{I^2_{Y'}} \otimes_{\mathrm{B'}} \mathrm{C_0} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "c(\mathrm{X'},\mathrm{Y'},f)"] & \mathrm{JC} \arrow[u, hook] \\
\mathrm{I_{Y_0}}/\mathrm{I^2_{Y_0}} \otimes_{\mathrm{B_0}} \mathrm{C_0} \arrow[u, "\overline{g}_0"] & \mathrm{I_Y}/\mathrm{I^2_Y} \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{C_0} \arrow[l, two heads] \arrow[u] \arrow[ur, "a_{g_0}(c(\mathrm{X'},\mathrm{Y'},f))"'] &
\end{tikzcd}.$$

On a donc $a_{g_0}(c(\mathrm{X'},\mathrm{Y'},f))(\overline{x}\otimes 1) = f(u)$, où u est un élément de $\mathrm{I_{Y'}}$ dont l'image 140
$\overline{u}$ dans $\mathrm{I_{Y'_0}}/\mathrm{I^2_{Y'_0}}$ vérifie $\overline{u}_0 \otimes 1 = \overline{g}_0(\overline{x}_0)\otimes 1 = \overline{g_0(x_0)}\otimes 1$. On peut donc prendre $u = x'$ et on trouve

$$a_{g_0}(c(\mathrm{X'},\mathrm{Y'},f))(\overline{x}\otimes 1) = f(x'). \tag{2}$$

Considérons enfin $b_{f_0}(c(\mathrm{X},\mathrm{Y},g\circ i'))$. Par hypothèse, le morphisme de Λ_0-algèbres $f_0 : \mathrm{A'_0} \to \mathrm{C_0}$ se factorise par $\mathrm{B'_0}$ et donc, comme $\mathrm{J}\otimes_{\Lambda_0}\mathrm{B'_0} \xrightarrow{\sim} \mathrm{JB'}$ ($\mathrm{B'}$ étant plat sur Λ), on obtient un morphisme de $\mathrm{B'_0}$-modules $\psi : \mathrm{JB'} \to \mathrm{JC}$ tel que l'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{J}\otimes_{\Lambda_0}\mathrm{A'_0} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\pi'"] \arrow[d] & \mathrm{J}\otimes_{\Lambda_0}\mathrm{B'_0} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f_0"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{J}\otimes_{\Lambda_0}\mathrm{C_0} \arrow[d] \\
\mathrm{JA'} \arrow[r, "\pi'"] & \mathrm{JB'} \arrow[r, dashed, "\psi"] & \mathrm{JC}.
\end{tikzcd}$$

Notons $\phi : \mathrm{JB'}\otimes_{\mathrm{B'_0}}\mathrm{C_0} \to \mathrm{JC}$ le morphisme de $\mathrm{C_0}$-modules déduit de ψ, alors on a, pour tout $a' \in \mathrm{A'}$, $\lambda \in \mathrm{J}$,

$$\phi(\lambda\pi'(a')\otimes 1) = \lambda f(a'). \tag{$\dagger$}$$

Alors, $b_{f_0}(c(\mathrm{X},\mathrm{Y},g\circ i'))$ est défini par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I_Y} \arrow[rr, "\pi'\circ g"] \arrow[d] & & \mathrm{B}' \\
\mathrm{I_Y}/\mathrm{I_Y^2}\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{B}'_0 \arrow[rr, "c(\mathrm{X},\mathrm{Y},g\circ i')"] \arrow[d] & & \mathrm{JB}' \arrow[u, hook] \arrow[d] \\
\mathrm{I_Y}/\mathrm{I_Y^2}\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{C}_0 \arrow[rr] \arrow[drr, "b_{f_0}(c(\mathrm{X},\mathrm{Y},g\circ i'))"'] & & \mathrm{JB}'\otimes_{\mathrm{B}'_0}\mathrm{C}_0 \arrow[d, "\phi"] \\
& & \mathrm{JC}.
\end{tikzcd}$$

On a donc aussitôt

$$b_{f_0}(c(\mathrm{X},\mathrm{Y},g\circ i'))(\overline{x}\otimes 1)=\phi\Big(\sum\lambda_i\pi'(a'_i)\otimes 1\Big)=\sum\lambda_i f(a'_i)\,, \tag{3}$$

la dernière égalité découlant de (†) plus haut. La comparaison des trois résultats explicites (1), (2), (3) donne la formule cherchée.

Corollaire 4.14. — *Soient* Y,Y' *deux sous-schémas de* X, plats, *se réduisant suivant* $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ *; supposons* Y_0 localement intersection complète *dans* X_0. *Si* $f:\mathrm{T}\to\mathrm{X}$ *est un* S-*morphisme tel que* $f_{\mathcal{J}}$ *se factorise par* $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}\to\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$, *on a la formule*

$$c(\mathrm{X},\mathrm{Y},f)-c(\mathrm{X},\mathrm{Y}',f)=b_{f_0}(d(\mathrm{Y},\mathrm{Y}')).$$

141 En effet, appliquant la formule précédente au diagramme

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Y}' \arrow[d, hook, "i'"'] & \mathrm{Y} \arrow[d, hook, "i"'] \\
\mathrm{T} \arrow[r, "f"] & \mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathrm{X}
\end{tikzcd}$$

on trouve $c(\mathrm{X},\mathrm{Y},f)-c(\mathrm{X},\mathrm{Y}',f)=b_{f_0}(c(\mathrm{X},\mathrm{Y},i'))$. De plus, d'après 4.8 (ii), on a $c(\mathrm{X},\mathrm{Y},i')=d(\mathrm{Y},\mathrm{Y}')$.

Proposition 4.15. — *Soient* X *un* S-*groupe* lisse *sur* S *et* Y *un sous*-S-*groupe* plat et localement de présentation finie *sur* S. *Alors* Y *est localement intersection complète* (*cf.* 4.6.2) *dans* X.

Démonstration. (105) On va montrer que l'immersion $Y \to X$ est *régulière* au sens de EGA IV_4, 16.9.2, ce qui implique qu'elle l'est aussi au sens de 4.6.2, d'après EGA IV_4, 19.5.1 (d'ailleurs, d'après *loc. cit.*, les deux définitions sont équivalentes si S est localement noethérien). Donc, dans ce qui suit, on prend « immersion régulière » au sens de EGA IV_4, 16.9.2. Comme X et Y sont plats et localement de présentation finie sur S, alors, d'après EGA IV_4, 19.2.4, il suffit de montrer que, pour tout $s \in S$, $Y_s \to X_s$ est une immersion régulière. D'après EGA IV_4, 19.1.5 (ii), on est ramené à vérifier l'assertion sur les fibres géométriques de S, donc lorsque S est le spectre d'un corps k algébriquement clos.

Alors, d'après VI_A, 3.2, le quotient X/Y existe et est lisse, le morphisme $\pi : X \to X/Y$ est plat, et l'on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \arrow[d, "\pi"] \\ \overline{e} \arrow[r, "i"] & X/Y \end{tikzcd}$$

(où $\overline{e}$ est l'image dans X/Y du point unité de X). Donc, par changement de base plat (cf. EGA IV_4, 19.1.5 (ii)), il suffit de voir que i est une immersion régulière, ce qui est immédiat puisque l'anneau local noethérien $\mathscr{O}_{X/Y,\overline{e}}$ est lisse, donc son idéal maximal engendré par une suite régulière.

4.16. (106) Soit X un S-groupe *lisse* sur S, on note $\mu : X \times_S X \to X$ sa loi de groupe. Donnons-nous un sous-$S_{\mathscr{J}}$-groupe $Y_{\mathscr{J}}$ de $X_{\mathscr{J}}$, *plat et localement de présentation finie* sur $S_{\mathscr{J}}$. D'après 4.15, $Y_{\mathscr{J}}$ est localement intersection complète dans X.

Donc, d'après 4.6.5, tout S-schéma *plat* (107) Y relevant $Y_{\mathscr{J}}$ est localement intersection complète dans X. Pour un tel Y on a, d'après 4.8.0, 142

$$\mathscr{N}_{Y/X} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_{Y_0} = \mathscr{N}_{Y_0/X_0} = \mathscr{N}_{Y_{\mathscr{J}}/X_{\mathscr{J}}} \otimes_{\mathscr{O}_{Y_{\mathscr{J}}}} \mathscr{O}_{Y_0}. \tag{4.16.1}$$

(105) N.D.E. : On a ajouté dans l'énoncé l'hypothèse que Y soit localement de présentation finie sur S, et l'on a donné la démonstration qui suit, plus directe que celle esquissée dans l'original. Pour être complet, détaillons aussi cette dernière. Comme dans la démonstration donnée plus haut, on se ramène d'abord au cas où $S = \operatorname{Spec}(k)$, k étant un corps algébriquement clos. D'après EGA IV_4, 16.9.10 et 19.3.2, il suffit de voir que, pour tout $y \in Y$, le complété de l'anneau local $\mathscr{O}_{Y,y}$ est le quotient d'un anneau local noethérien complet par une suite régulière. D'après *loc. cit.*, 19.3.3, l'ensemble des $y \in Y$ vérifiant cette propriété est un ouvert U de Y ; comme Y est de type fini sur k, il suffit de montrer que U contient tout point fermé. Comme Y est un k-groupe il suffit, par un argument de translation, de montrer que la propriété est vraie pour le complété de $\mathscr{O}_{Y,e}$, c.-à-d., pour le « groupe formel » $\widehat{Y}$ correspondant à Y (cf. Exp. VII_B). Or, comme X est lisse, l'algèbre affine $\mathscr{A}(\widehat{X})$ est une algèbre de séries formelles $k[[X_1, \dots, X_n]]$, et on conclut à l'aide du théorème de structure de Dieudonné qui montre que $\mathscr{A}(\widehat{Y})$ est isomorphe à un quotient $k[[X_1, \dots, X_{r+s}]]/(X_1^{p^{n_1}}, \dots, X_r^{p^{n_r}})$, où p est l'exposant caractéristique de k et $r + s \leqslant n$, cf. VII_B, Remarque 5.5.2 (b).

(106) N.D.E. : On a réorganisé 4.16 en y regroupant, d'une part, les hypothèses énoncées à la fin de 4.15 et, d'autre part, la définition de l'obstruction DY.

(107) N.D.E. : On a corrigé l'original en rajoutant « *plat* ».

D'autre part, notons $\varepsilon_0 : \mathrm{S}_0 \to \mathrm{Y}_0$ la section unité de Y_0 et $\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0}$ le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$-module quasi-cohérent :

$$\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} = \varepsilon_0^*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0}).$$

Comme Y_0 et X_0 sont des S_0-groupes, on voit aisément que $\mathscr{N}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0}$ est invariant par les translations (disons à gauche) de Y_0, donc [(108)] est l'image réciproque par $\mathrm{Y}_0 \to \mathrm{S}_0$ de $\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0}$, i.e. on a

$$\mathscr{N}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} = \mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}. \tag{4.16.2}$$

Tenant compte de (4.16.1) et (4.16.2), on déduit d'une part de 4.5 que l'ensemble des sous-S-schémas Y de X, *plats* sur S, relevant $\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}$, est vide ou principal homogène sous

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}}(\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0},\ \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}), \tag{4.16.3}$$

et l'on déduit d'autre part de 4.8 (i) que, pour tout tel Y et tout S-morphisme $f : \mathrm{T} \to \mathrm{X}$ tel que $f_{\mathscr{J}} : \mathrm{T}_{\mathscr{J}} \to \mathrm{X}_{\mathscr{J}}$ se factorise par $\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}$, l'obstruction $c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, f)$ à ce que f se factorise par Y est un élément de

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}, \mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathrm{T}})\,;$$

si de plus T est *plat* sur S, ce dernier groupe égale

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0},\ \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}).$$

Ceci conduit à introduire le foncteur en groupes N_0 ci-dessous :

Définition 4.16.1. — Soit N_0 le S_0-foncteur en groupes commutatifs défini par : pour tout $\mathrm{Z} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}_0}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{Z}, \mathrm{N}_0) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}}(\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Z}},\ \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Z}}). \tag{$*$}$$

Alors, l'ensemble des sous-S-schémas Y de X, *plats* sur S, relevant $\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}$, est vide ou principal homogène sous

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0) = \mathrm{C}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0).$$

Pour chaque tel Y, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} & & \mathrm{Y} \\ {\scriptstyle (i,i)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i} \\ \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} & \xrightarrow{\ \mu\ } & \mathrm{X} \end{array}$$

et notons $\mathrm{DY} = c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mu \circ (i,i))$ l'obstruction à ce que $\mu \circ (i,i)$ se factorise par Y, i.e. à ce que Y soit stable par la loi de groupe de X ; d'après ce qui précède, DY est un élément de

$$\mathrm{N}_0(\mathrm{Y}_0 \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{Y}_0) = \mathrm{C}^2(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0).$$

[(108)] N.D.E. : voir 4.25 plus loin.

Lemme 4.17. — [109] *Soient* X *un* S*-groupe* lisse *sur* S *et* $Y_{\mathscr{J}}$ *un sous-*$S_{\mathscr{J}}$*-groupe de* $X_{\mathscr{J}}$*,* plat et localement de présentation finie *sur* $S_{\mathscr{J}}$*. Pour chaque sous-schéma* Y *de* X*, plat sur* S *et relevant* $Y_{\mathscr{J}}$*,considérons l'obstruction définie en* 4.16.1 *:*

$$\mathrm{DY} \in \mathrm{Hom}_{S_0}(Y_0 \times_{S_0} Y_0, N_0) = C^2(Y_0, N_0)$$

(i) *Pour que* Y *soit un sous-*S*-groupe de* X*, il faut et il suffit que* $\mathrm{DY} = 0$. **143**

(ii) *Si on fait opérer* Y_0 *sur* N_0 *par fonctorialité à partir des automorphismes intérieurs de* Y_0*, alors* $\mathrm{DY} \in Z^2(Y_0, N_0)$.

(iii) *Si* Y *et* Y′ *sont deux sous-schémas de* X*, plats sur* S*, relevant* $Y_{\mathscr{J}}$ *(de sorte qu'est définie la déviation* $d(Y, Y') \in C^1(Y_0, N_0)$*,* cf. 4.5.1)*, on a* $\mathrm{DY}' - \mathrm{DY} = \partial^1 d(Y, Y')$. [110]

Démontrons successivement ces diverses assertions.

4.18. *Démonstration de* 4.17 (i). Par définition, on a $\mathrm{DY} = 0$ si et seulement si Y est stable par la loi de groupe de X. Donc $\mathrm{DY} = 0$ si Y est un sous-groupe de X. Réciproquement, si $\mathrm{DY} = 0$, Y est muni de la loi induite μ^{Y}, qui est associative et se réduit modulo $\mathscr{J}$ suivant la loi de groupe sur $X_{\mathscr{J}}$; comme Y est plat et localement de présentation finie sur S, il résulte de 3.3 que μ^{Y} est une loi de groupe.

4.19. *Démonstration de* 4.17 (ii). Celle-ci se fait en comparant les deux valeurs de $u = c(X, Y, \mu^2 \circ (i, i, i))$ calculées dans les deux diagrammes suivants (D_j), $j = 1, 2$:

$$(D_j) \qquad \begin{tikzcd} Y \times_S Y \times_S Y \arrow[d, "{(i,i,i)}"'] & Y \times_S Y \arrow[d, hook, "{(i,i)}"'] & Y \arrow[d, hook, "i"'] \\ X \times_S X \times_S X \arrow[r, "f_j"] & X \times_S X \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd}$$

où $f_1 = (1, \pi)$, $f_2 = (\pi, 1)$, et où l'on note μ^2 le morphisme **144**

$$\mu \circ f_1 = \mu \circ f_2 : \quad X \underset{S}{\times} X \underset{S}{\times} X \longrightarrow X.$$

[111] Posons $\mu^{Y} = \mu \circ (i, i)$, $f_j^{Y} = f_j \circ (i, i, i)$ et $\mu^{2,Y} = \mu^2 \circ (i, i, i)$. Pour $j = 1, 2$, notons a_j et b_j les morphismes

$$a_j = a_{\mu_0}\big((f_j^{Y})_0\big) \qquad \text{et} \qquad b_j = b_{(f_j^{Y})_0}\,,$$

associés au couple de morphismes (f_j^{Y}, μ) par le lemme 4.12 ; on a donc :

$$(\dagger) \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{Y_0^3}}\Big((f_j^{Y})_0^*(\mathscr{N}_{Y_0 \times Y_0 / X_0 \times X_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{Y_0^3}\Big) \xrightarrow{a_j} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{Y_0^3}}\Big((\mu^{2,Y})_0^*(\mathscr{N}_{Y_0/X_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{Y_0^3}\Big) \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{Y_0^2}}\Big((\mu^{Y})_0^*(\mathscr{N}_{Y_0/X_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{Y_0^2}\Big) \xrightarrow[b_j]{} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{Y_0^3}}\Big((\mu^{2,Y})_0^*(\mathscr{N}_{Y_0/X_0}), \mathscr{J}\mathscr{O}_{Y_0^3}\Big)\,. \end{array} \right.$$

---

[109] N.D.E. : On a modifié 4.17 et 4.18 en tenant compte des ajouts faits dans 4.16.

[110] N.D.E. : Dans l'original, on trouve $\mathrm{DY}' - \mathrm{DY} = -\partial d(Y, Y')$, mais ∂ y est l'opposé de la différentielle ∂^1 définie en I, 5.1.

[111] N.D.E. : On a légèrement modifié les notations, et détaillé le début de l'argument.

Comme $\mathscr{N}_{Y_0\times Y_0/X_0\times X_0} \simeq \mathrm{pr}_1^*\mathscr{N}_{Y_0/X_0} \oplus \mathrm{pr}_2^*\mathscr{N}_{Y_0/X_0}$ (puisque X_0 et Y_0 sont plats sur S_0), et $\mathscr{N}_{Y_0/X_0} \simeq \mathfrak{n}_{Y_0/X_0} \otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathscr{O}_{Y_0}$, alors :

$$(f_j^{Y})_0^*(\mathscr{N}_{Y_0\times Y_0/X_0\times X_0}) \simeq (\mathfrak{n}_{Y_0/X_0} \oplus \mathfrak{n}_{Y_0/X_0}) \otimes \mathscr{O}_{Y_0^3}$$

et, de même,

$$(\mu^{2,Y})_0^*(\mathscr{N}_{Y_0/X_0}) \simeq \mathfrak{n}_{Y_0/X_0} \otimes \mathscr{O}_{Y_0^3} \qquad \text{et} \qquad (\mu^{Y})_0^*(\mathscr{N}_{Y_0/X_0}) \simeq \mathfrak{n}_{Y_0/X_0} \otimes \mathscr{O}_{Y_0^2}.$$

De plus, comme Y_0^2 et Y_0^3 sont plats sur S_0, alors (†) se récrit sous la forme suivante :

$$(\ddagger) \qquad \begin{cases} a_j : \mathrm{Hom}_{S_0}(Y_0^3, N_0 \oplus N_0) \to \mathrm{Hom}_{S_0}(Y_0^3, N_0) \\ \quad b_j : \mathrm{Hom}_{S_0}(Y_0^2, N_0) \to \mathrm{Hom}_{S_0}(Y_0^3, N_0). \end{cases}$$

Appliquant deux fois 4.13 à $c(X, Y, \mu^{2,Y}) = u$, on obtient :

$$a_1(c(X^2, Y^2, f_1)) + b_1(c(X, Y, \mu^{Y})) = u = a_2(c(X^2, Y^2, f_2)) + b_2(c(X, Y, \mu^{Y})).$$

Or, $c(X, Y, \mu^{Y}) = DY$ et, comme $f_1 = (1, \mu)$ et $f_2 = (\mu, 1)$, on a, avec des notations évidentes :

$$c(X^2, Y^2, f_1) = (0, DY) \qquad \text{et} \qquad c(X^2, Y^2, f_2) = (DY, 0).$$

Donc, on obtient :

$$u = a_1((0, DY)) + b_1(DY) = a_2((DY, 0)) + b_2(DY).$$

La première chose que l'on remarque, c'est que b_j n'est autre que $\mathrm{Hom}_{S_0}((f_j^{Y})_0, N_0)$, c'est-à-dire le morphisme déduit de $(f_j^{Y})_0$ par fonctorialité.

L'identité ci-dessus devient donc :

$$a_1((0, DY)) - \mathrm{Hom}((\mu, 1), N_0)(DY) + \mathrm{Hom}((1, \mu), N_0)(DY) - a_2((DY, 0)) = 0.$$

On reconnaît les deux termes du milieu : ce sont les parties « $DY(xy, z)$ » et « $DY(x, yz)$ » de la formule du 2-cobord. Il ne reste plus donc qu'à identifier les deux autres termes.

Il nous faut d'abord calculer l'application a_j. Or elle provient, par image réciproque par $(f_j^{Y})_0$, du morphisme de $\mathscr{O}_{Y_0^2}$-modules

$$P : \quad \mathfrak{n}_{Y_0/X_0} \otimes \mathscr{O}_{Y_0^2} \longrightarrow (\mathfrak{n}_{Y_0/X_0} \oplus \mathfrak{n}_{Y_0/X_0}) \otimes \mathscr{O}_{Y_0^2}$$

induit par le produit dans Y_0. Or ce morphisme se décrit de la manière suivante : considérons le fibré vectoriel $V = \mathbf{V}(\mathfrak{n}_{Y_0/X_0})$; P donne par dualité un morphisme

$$\mathbf{V}(P) : \quad V \underset{S_0}{\times} V \underset{S_0}{\times} Y_0 \underset{S_0}{\times} Y_0 \longrightarrow V \underset{S_0}{\times} Y_0 \underset{S_0}{\times} Y_0$$

145 qui s'exprime ensemblistement par

$$\mathbf{V}(P)(u, v, a, b) = (u + \mathrm{Ad}(a)v, ab, b). \qquad ^{(112)}$$

Ceci se démontre exactement comme le fait correspondant sur les algèbres de Lie, c'est-à-dire sur le module $\omega^1_{Y_0/S_0}$. On remarque d'abord que V est muni par fonctorialité en Y_0 d'une structure de groupe dans la catégorie des fibrés vectoriels sur S_0 ; en

(112) N.D.E. : On a remplacé a, b par ab, b pour faire voir que $\mathbf{V}(P)$ provient par image inverse sur Y_0^2 du morphisme de multiplication $V_{Y_0} \times_{S_0} V_{Y_0} \to V_{Y_0}$.

vertu du lemme déjà utilisé pour les algèbres de Lie (exposé II, 3.10), cette structure coïncide avec la structure de groupe sous-jacente à sa structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module. On voit ensuite que $\mathbf{V}(\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}) = \mathbf{V}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0})$ est lui aussi muni d'une structure de S_0-groupe qui n'est autre que le produit semi-direct de celle de V par celle de Y_0. Il ne reste plus qu'à identifier les opérations de Y_0 sur V pour établir la formule cherchée.

Calculons maintenant les deux termes restants. Considérons d'abord $a_1((0, \mathrm{DY}))$. On le calcule par le diagramme (où $\mathfrak{n}$ désigne $\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0}$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{n} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0^2} \arrow[r, "\mathrm{P}"] \arrow[d, "(f_1^{\mathrm{Y}})_0^*"] & (\mathfrak{n} + \mathfrak{n}) \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0^2} \arrow[d, "(f_1^{\mathrm{Y}})_0^*"] \\
\mathfrak{n} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0^3} \arrow[dr, "a_1((0,\mathrm{DY}))"'] & (\mathfrak{n} + \mathfrak{n}) \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0^3} \arrow[d, "(0,\mathrm{DY})"] \\
& \mathscr{J} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0^3}
\end{tikzcd} .$$

Considérant maintenant les fibrés vectoriels définis par ces différents modules comme autant de schémas sur S_0 et prenant les points à valeurs dans n'importe quoi, on a, en notant (u, x, y, z) un point de $\mathbb{V}(\mathscr{J}) \times \mathrm{Y}_0^3$;

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Ad}(x)\mathrm{DY}_{y,z}(u), x, yz) & (0 + \mathrm{DY}_{y,z}(u), x, yz) \arrow[l, mapsto] \\
& (0 + \mathrm{DY}_{y,z}(u), x, y, z) \arrow[u, mapsto] \\
(\mathrm{Ad}(x)\mathrm{DY}_{y,z}(u), x, y, z) \arrow[uu, mapsto] & (u, x, y, z) \arrow[l, mapsto] \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd} .$$

On a donc obtenu $a_1((0, \mathrm{DY}))(x, y, z) = \mathrm{Ad}(x)\mathrm{DY}(y, z)$, ce qui est bien le premier **146**
terme du cobord. On aurait de même $a_2((\mathrm{DY}, 0))(x, y, z) = \mathrm{DY}(x, y)$, d'où [113]

$$0 = \mathrm{Ad}(x)\mathrm{DY}(y, z) - \mathrm{DY}(xy, z) + \mathrm{DY}(x, yz) - \mathrm{DY}(x, y) = (\partial^2\mathrm{DY})(x, y, z).$$

[113] N.D.E. : on a changé les signes, pour les rendre compatibles avec I 5.1.

4.20. *Démonstration de* 4.17 (iii). [114] Celle-ci se fait en comparant les deux valeurs de $v = c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mu \circ (i', i'))$ calculées dans les deux diagrammes suivants

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{Y}' \arrow[d, hook, "i'"'] & \mathrm{Y} \arrow[d, hook, "i"'] \\ \mathrm{Y}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}' \arrow[r, "\mu\circ(i',i')"] & \mathrm{X} \arrow[r, equal] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

$$(\dagger)\qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \arrow[d, hook, "(i,i)"'] & \mathrm{Y} \arrow[d, hook, "i"'] \\ \mathrm{Y}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}' \arrow[r, "(i',i')"] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \arrow[r, "\mu"] & \mathrm{X}. \end{tikzcd}$$

Notons $f = \mu \circ (i', i')$; alors $(*)$ donne

$$v = \mathrm{DY}' + f_0^*(c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, i')). \tag{1}$$

Or $\mathrm{Y}_0' = \mathrm{Y}_0$ et f_0 est la multiplication $\mathrm{Y}_0^2 \to \mathrm{Y}_0$; on en déduit que

$$f_0^*(c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, i'))(x_0, y_0) = c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, i')(x_0 y_0). \tag{2}$$

Posons $c = c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, i')$; via l'identification $\mathrm{N}_0' \simeq \mathrm{N}_0 \oplus \mathrm{N}_0$, $c(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}, \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}, (i', i'))$ s'identifie au couple (c, c). Alors, notant $h = (i', i')$, $(\dagger)$ donne

$$v = h_0^*(\mathrm{DY}) + a_{\mu_0}(c, c). \tag{3}$$

Or h_0 est l'application identique de Y_0^2, d'où $h_0^*(\mathrm{DY}) = \mathrm{DY}$. Enfin, d'après le calcul de a_{μ_0} fait précédemment, on a pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x_0, y_0 \in \mathrm{Y}_0(\mathrm{S}_0')$,

$$a_{\mu_0}(c, c)(x_0, y_0) = c(x_0) + \mathrm{Ad}(x_0)(c(y_0)). \tag{4}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}(\mathrm{DY}' - \mathrm{DY})(x_0, y_0) = \mathrm{Ad}(x_0)\big(c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, i')(y_0)\big) - c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, i')(x_0 y_0) + c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, i')(x_0) \\ = \big(\partial^1 c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, i')\big)(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Comme $c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, i') = d(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}')$ (cf. 4.8 (ii)), ceci montre que $\mathrm{DY}' - \mathrm{DY} = \partial^1 d((\mathrm{Y}, \mathrm{Y}')$.

147 ***Théorème 4.21***. — *Soient* S *un schéma,* $\mathcal{I}$ *et* $\mathcal{J}$ *deux idéaux* [115] *sur* S *tels que* $\mathcal{I} \supset \mathcal{J}$ *et* $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = 0$*. Soient* X *un* S*-groupe* lisse *sur* S *et* $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ *un sous-*$\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$*-groupe de* $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$, plat *et localement de présentation finie sur* $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$*. Considérons le* S_0*-foncteur en groupes commutatifs* N_0 *défini par*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{T}, \mathrm{N}_0) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}(\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_\mathrm{T}, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_\mathrm{T}), \qquad \mathrm{T} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sch})_{/\mathrm{S}_0},$$

sur lequel Y_0 *opère par l'intermédiaire des automorphismes intérieurs de* X_0*.*

(i) *Pour qu'il existe un sous-*S*-groupe de* X*,* plat *sur* S*, qui se réduise suivant* $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$*, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

---

[114] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[115] N.D.E. : On a supprimé l'hypothèse que $\mathcal{I}$ soit nilpotent, qui semble superflue.

(i_1) *Il existe un sous-schéma* Y *de* X, plat *sur* S, *relevant* $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ (*condition automatiquement vérifiée si* Y_0 *est affine,* cf. 4.6.5).

(i_2) *Une certaine obstruction canonique, élément de* $\mathrm{H}^2(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$, *est nulle.*

(ii) *Si les conditions de* (i) *sont satisfaites, l'ensemble des sous-*S*-groupes* Y *de* X, plats *sur* S *et se réduisant suivant* $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ *est un ensemble principal homogène sous le groupe* $\mathrm{Z}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$. [116]

En effet, la condition (i_1) est nécessaire. Supposons-la vérifiée et soit Y plat sur S relevant $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$. Il nous faut chercher un Y′ plat sur S relevant aussi $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ tel que $\mathrm{DY}' = 0$, [117] cf. 4.17 (i). D'après 4.17 (iii), cela revient à chercher un $d(\mathrm{Y}', \mathrm{Y}) \in \mathrm{C}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$ tel que $\mathrm{DY} = \partial^1 d(\mathrm{Y}', \mathrm{Y})$. [118]

Soit $c \in \mathrm{H}^2(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$ la classe image de DY qui est un cocycle par 4.17 (ii). Elle ne dépend pas du choix de Y d'après 4.17 (iii), et sa nullité est nécessaire et suffisante à **148**
l'existence d'un $d(\mathrm{Y}', \mathrm{Y})$ vérifiant l'équation précédente. Ceci démontre (i).

Si on a maintenant choisi Y tel que $\mathrm{DY} = 0$, l'équation à résoudre s'écrit $\partial^1 d(\mathrm{Y}', \mathrm{Y}) = 0$, ce qui démontre (ii).

Remarque 4.22. — On conserve les notations de 4.21. D'après 4.15, Y_0 est localement intersection complète dans X_0, donc $\mathscr{N}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}$-module fini localement libre, et par suite $\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} = \varepsilon_0^*(\mathscr{N}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$-module fini localement libre. Donc, notant $\mathfrak{n}^\vee_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}}(\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0})$, on a

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}(\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_\mathrm{T}, \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_\mathrm{T}) \simeq \mathfrak{n}^\vee_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_\mathrm{T}\,.$$

pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}_0$. [119] Par conséquent, le S_0-foncteur N_0 est isomorphe au foncteur

$$\mathrm{W}(\mathfrak{n}^\vee_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{J}) \simeq \mathrm{W}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}(\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0}, \mathcal{J})).$$

Il en résulte des isomorphismes : [120]

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0) \simeq \mathrm{H}^2(\mathrm{Y}_0, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}(\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0}, \mathcal{J})) \simeq \mathrm{H}^2(\mathrm{Y}_0, \mathfrak{n}^\vee_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{J})),$$
$$\mathrm{Z}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0) \simeq \mathrm{Z}^1(\mathrm{Y}_0, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}(\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0}, \mathcal{J})) \simeq \mathrm{Z}^1(\mathrm{Y}_0, \mathfrak{n}^\vee_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{J})).$$

4.23. Toujours sous les hypothèses de 4.21, nous allons maintenant étudier comment l'ensemble des Y relevant $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$, se comporte vis-à-vis de la conjugaison par des sections de X. Si x est une section de X sur S induisant la section unité de $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$, l'automorphisme intérieur $\mathrm{Int}(x)$ défini par x transforme sous-groupes plats de X relevant $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ en sous-groupes plats de X relevant $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$. Or, sous les conditions de 4.21 (ii), l'ensemble de ces sous-groupes est principal homogène sous $\mathrm{Z}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$; nous allons voir qu'il existe

(116) N.D.E. : La question de savoir si l'ensemble précédent, modulo conjugaison par les $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$ induisant l'unité de $\mathrm{X}(\mathrm{S}_{\mathcal{J}})$, est principal homogène sous $\mathrm{H}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$, occupe les n[os] 4.23 à 4.36.

(117) N.D.E. : On a corrigé $\partial\mathrm{DY}'$ en DY'.

(118) N.D.E. : cf. N.D.E. (110).

(119) N.D.E. : On a détaillé ce qui précède, ceci montre que l'isomorphisme qui suit est valable sans hypothèse de platitude ; par contre, depuis 4.16, on s'est restreint aux S-schémas $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ *plats* sur S pour s'assurer que le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}, \mathcal{J}\mathscr{O}_\mathrm{T})$, dans lequel réside l'obstruction $c(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, f)$, coïncide avec $\mathrm{N}_0(\mathrm{T}_0)$ (cf. la fin de 4.16).

(120) N.D.E. : avec les notations de I 5.3, supposant Y_0 affine sur S_0.

alors un sous-groupe Γ de $\mathrm{B}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$ [(121)] tel que deux sous-groupes de X, plats sur S, et relevant $\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}$ soient conjugués (par des $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$ induisant l'unité de $\mathrm{X}(\mathrm{S}_{\mathscr{J}})$) si et seulement si leur « différence » dans $\mathrm{Z}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$ est un élément de Γ. Dans les meilleurs cas, nous montrerons que Γ égale $\mathrm{B}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$, donc que l'ensemble des sous-groupes de X plats, relevant $\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}$, modulo conjugaison par les $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$ induisant l'unité de $\mathrm{X}(\mathrm{S}_{\mathscr{J}})$, est vide ou principal homogène sous $\mathrm{H}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$ (cf. 4.29 et 4.36).

149 **4.24.** On conserve les notations de 4.21. Soit Y un sous-groupe plat de X, se réduisant suivant $\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}$. Rappelons que nous avons introduit en 0.5 le foncteur $\mathrm{L}_{0\mathrm{X}}$ (resp. $\mathrm{L}_{0\mathrm{Y}}$) défini par l'identité par rapport au S_0-schéma variable T :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{T}, \mathrm{L}_{0\mathrm{X}}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}(\omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_\mathrm{T}, \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathscr{O}_\mathrm{T})$$

(resp. de même en remplaçant X par Y), ainsi que le foncteur $\mathrm{L}'_\mathrm{X} = \prod_{\mathrm{S}_0/\mathrm{S}} \mathrm{L}_{0\mathrm{X}}$.

Or on a :

Lemme 4.25. — *Il existe une suite exacte canonique de* Y_0-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$*-modules*

$$(+) \qquad \mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \xrightarrow{\ d\ } \omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0} \longrightarrow \omega^1_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0} \longrightarrow 0$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) *Par image réciproque sur* Y_0*, d donne le morphisme* D_0 *de* 4.8 (iii).

(ii) *Si* X_0 *et* Y_0 *sont* lisses *sur* S_0*, alors d est injectif. Comme les deux ω^1 sont alors localement libres de type fini, il en est de même de* $\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0}$ *et la suite est localement scindée.*

Démonstration. [(122)] Notons π_0 le morphisme $\mathrm{Y}_0 \to \mathrm{S}_0$. D'après SGA 1 II, formule (4.3) (voir aussi EGA IV_4, 16.4.21), on a une suite exacte canonique de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}$-modules

$$(\dagger) \qquad \mathscr{N}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \xrightarrow{\ \mathrm{D}_0\ } \Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0} \longrightarrow \Omega^1_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0} \longrightarrow 0\,.$$

Comme cette suite est formée de modules et de morphismes $(\mathrm{Y}_0 \times_\mathrm{S} \mathrm{Y}_0)$-équivariants, son image réciproque (+) par ε_0^* est une suite exacte de Y_0-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$-modules, et (†) est
150 l'image réciproque de (+) par π_0^* (cf. Exp. I, § 6.8). Ceci prouve (i).

Supposons de plus X_0 et Y_0 lisses sur S_0. Alors, d'après SGA 1 II 4.10 (voir aussi EGA IV_4, 17.2.3 (i) et 17.2.5), D est injectif et la suite (†) est formée de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}_0}$-modules localement libres de type fini (donc est localement scindée). D'après l'équivalence de catégories I, 6.8.1, d est également injectif, et donc la suite (+) a les propriétés indiquées.

(121) N.D.E. : On a remplacé $\mathrm{Z}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$ par $\mathrm{B}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$, puisque la démonstration montre que Γ est un sous-groupe de $\mathrm{B}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$, cf. 4.27–4.29.

(122) N.D.E. : On a détaillé la démonstration, en tenant compte des ajouts faits dans l'Exp. I, § 6.8.

4.26. [123] Pour tout S_0-schéma $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}_0$, (+) donne une suite exacte de $\mathrm{Y}_0(\mathrm{T})$-$\mathbf{O}(\mathrm{T})$-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}(f^*(\omega^1_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0}), f^*(\mathscr{J})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}(f^*(\omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}), f^*(\mathscr{J})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathrm{T}}(f^*(\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0}), f^*(\mathscr{J}))\,,$$

on a donc une suite exacte de Y_0-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}_0}$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathrm{L}_{0\mathrm{Y}} \longrightarrow \mathrm{L}_{0\mathrm{X}} \xrightarrow{d} \mathrm{N}_0\,. \tag{4.26.1}$$

On en déduit une suite exacte de complexes de groupes abéliens :

$$0 \longrightarrow \mathrm{C}^*(\mathrm{Y}_0, \mathrm{L}_{0\mathrm{Y}}) \longrightarrow \mathrm{C}^*(\mathrm{Y}_0, \mathrm{L}_{0\mathrm{X}}) \xrightarrow{d^*} \mathrm{C}^*(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)\,,$$

et en particulier, un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0, \mathrm{L}_{0\mathrm{Y}}) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & \mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0, \mathrm{L}_{0\mathrm{X}}) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\partial"] & \mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0) \arrow[d, "\partial"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{C}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{L}_{0\mathrm{Y}}) \arrow[r] & \mathrm{C}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{L}_{0\mathrm{X}}) \arrow[r, "d^1"] & \mathrm{C}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)
\end{tikzcd}\,.$$

Remarquons que $\mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0, \mathrm{L}_{0\mathrm{Y}})$ (resp. $\mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0, \mathrm{L}_{0\mathrm{X}})$) n'est autre que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{S}_0, \mathrm{L}_{0\mathrm{Y}}) = \mathrm{Hom}_\mathrm{S}(\mathrm{S}, \mathrm{L}'_\mathrm{Y})$ (resp. $\cdots$) i.e. (cf. 0.9) le groupe des sections de Y (resp. X) sur S induisant la section unité de $\mathrm{X}_\mathscr{J}$. Notons aussi que d^1 n'est autre que le morphisme $v_{i_{\mathrm{Y}_0}}$ de 4.8 (iii), où $i_{\mathrm{Y}_0} : \mathrm{Y}_0 \to \mathrm{X}_0$ est l'immersion canonique. [124]

Lemme 4.27. — *Sous les conditions de* 4.21 *pour* S, $\mathcal{I}$, $\mathscr{J}$ *et* X, *soit* Y *un sous-groupe de* X, *plat sur* S *et relevant* $\mathrm{Y}_\mathscr{J}$. *Notons* $i : \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{X}$ *l'immersion canonique.* [125]

(i) *Soit* $i' : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *un morphisme de* S-schémas *relevant* i_0 (de sorte que i' est aussi une immersion), *soit* $\mathrm{Y}' = i'(\mathrm{Y})$ *et soit* $d(i, i')$ *l'élément de* $\mathrm{C}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{L}_{0\mathrm{X}})$ *tel que* $i' = d(i, i') \cdot i$ (cf. 1.2.4). *Alors la déviation* $d(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}') \in \mathrm{C}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$ (cf. 4.5.1) *est donnée par la formule :*

$$d(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}') = d^1\big(d(i, i')\big)\,.$$

(ii) *Soit* $x \in \mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0, \mathrm{L}_{0\mathrm{X}})$ *une section de* X *sur* S *induisant la section unité de* $\mathrm{X}_\mathscr{J}$ *sur* $\mathrm{S}_\mathscr{J}$. *Alors la déviation* $d(\mathrm{Y}, \mathrm{Int}(x)\mathrm{Y}) \in \mathrm{C}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{N}_0)$ (cf. 4.5.1) *est donnée par la* 151
formule :

$$-d(\mathrm{Y}, \mathrm{Int}(x)\mathrm{Y}) = d^1\partial x = \partial\, d^0 x\,.$$

En effet, Y' est l'image de Y par le morphisme composé : [126]

$$\mathrm{Y} \xrightarrow{(d(i,i'),i)} \mathrm{L}'_\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}\,,$$

[123] N.D.E. : On a détaillé l'original, pour faire voir qu'on a une suite exacte de Y_0-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}_0}$-modules.

[124] N.D.E. : En effet, cela résulte de la définition de $d : \mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \to \Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}$ (cf. 4.25) et de celle de $v_{i_{\mathrm{Y}_0}}$ (cf. 4.8).

[125] N.D.E. : On a ajouté le point (i) ci-dessous, qui sera utile en 4.35.1 puis en 4.38 (4) et (5).

[126] N.D.E. : On rappelle que $\mathrm{L}'_\mathrm{X} = \prod_{\mathrm{S}_0/\mathrm{S}} \mathrm{L}_{0\mathrm{X}}$.

qui est noté $d(i,i')\cdot i$ en 4.8 (iii) ; d'après *loc. cit.* et l'égalité $v_{i_0} = d^1$, on a donc :

$$c(\mathrm{X},\mathrm{Y}',d(i,i')\cdot i) - c(\mathrm{X},\mathrm{Y}',i) = v_{i_0}\big(d(i,i')\big) = d^1\big(d(i,i')\big)\,.$$

Mais $d(i,i')\cdot i = i'$ se factorise par Y' par définition, donc le premier terme est nul ; de plus, par 4.8 (ii), on a $c(\mathrm{X},\mathrm{Y}',i) = d(\mathrm{Y}',\mathrm{Y}) = -d(\mathrm{Y},\mathrm{Y}')$. Donc $d(\mathrm{Y},\mathrm{Y}') = d^1\big(d(i,i')\big)$, ce qui prouve (i).

Soit maintenant x comme en (ii). Par la formule

$$xyx^{-1} = xyx^{-1}y^{-1}y = (x - \mathrm{Ad}(y)x)y = (-\partial x)(y)\cdot y\,,$$

on voit que Y' est l'image de Y par l'immersion $i' = (-\partial x)\cdot i_{\mathrm{Y}}$. Donc, d'après (i) on obtient

$$-d(\mathrm{Y},\mathrm{Int}(x)\mathrm{Y}) = d^1\partial x = \partial\, d^0 x\,.$$

Corollaire 4.28. — *Pour que deux sous-groupes* Y *et* Y' *de* G*, plats sur* S *et relevant* $\mathrm{Y}_{\mathscr{J}}$*, soient conjugués par une section de* X *sur* S *induisant la section unité de* $\mathrm{X}_{\mathscr{J}}$*, il faut et il suffit que* $d(\mathrm{Y},\mathrm{Y}') \in \partial\, d^0\, \mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_{0\mathrm{X}}) \subset \partial\mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0,\mathrm{N}_0) = \mathrm{B}^1(\mathrm{Y}_0,\mathrm{N}_0)$.

152

Corollaire 4.29. — *Si* d^0 *est* surjectif, Y *et* Y' *comme ci-dessus sont conjugués par une section de* X *sur* S *induisant la section unité de* $\mathrm{X}_{\mathscr{J}}$ *si et seulement si* $d(\mathrm{Y},\mathrm{Y}') \in \mathrm{B}^1(\mathrm{Y}_0,\mathrm{N}_0)$.

Corollaire 4.30. — *Soit* Y *comme dans* 4.27 *; l'ensemble des conjugués de* Y *par des sections de* X *sur* S *induisant la section unité de* $\mathrm{X}_{\mathscr{J}}$ *est isomorphe à :*

$$d^1\partial\, \mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_{0\mathrm{X}}) = \mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_{0\mathrm{X}})\big/\operatorname{Ker} d^1\partial.$$

Remarquons maintenant que $\mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0/\mathrm{L}_{0\mathrm{X}})/\operatorname{Ker} d^1\partial$ se calcule uniquement à l'aide du carré de gauche du diagramme commutatif de 4.26. Il en résulte en particulier que l'on peut aussi le calculer dans tout diagramme du même type ayant le même carré de gauche. Considérons en particulier le foncteur $\mathrm{L}_{0\mathrm{X}}/\mathrm{L}_{0\mathrm{Y}}$ au-dessus de S_0 défini par

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{T},\mathrm{L}_{0\mathrm{X}}/\mathrm{L}_{0\mathrm{Y}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{T},\mathrm{L}_{0\mathrm{X}})\big/\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0}(\mathrm{T},\mathrm{L}_{0\mathrm{Y}}).$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_{0\mathrm{Y}}) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & \mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_{0\mathrm{X}}) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & \mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_{0\mathrm{X}}/\mathrm{L}_{0\mathrm{Y}}) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{C}^1(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_{0\mathrm{Y}}) \arrow[r] & \mathrm{C}^1(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_{0\mathrm{X}}) \arrow[r] & \mathrm{C}^1(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_{0\mathrm{X}}/\mathrm{L}_{0\mathrm{Y}}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \quad ,$$

d'où par la remarque précédente :

Corollaire 4.31. — *Soit* Y *comme en* 4.27 *; l'ensemble des conjugués de* Y *par des sections de* X *sur* S *induisant la section unité de* $\mathrm{X}_{\mathscr{J}}$ *est isomorphe à*

$$\mathrm{E} = \partial\, \mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_{0\mathrm{X}}/\mathrm{L}_{0\mathrm{Y}}) = \mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_{0\mathrm{X}}/\mathrm{L}_{0\mathrm{Y}})/\mathrm{H}^0(\mathrm{Y}_0,\mathrm{L}_{0\mathrm{X}}/\mathrm{L}_{0\mathrm{Y}}).$$

153

Corollaire 4.32. — *Supposons de plus* S_0 affine *et* $\omega^1_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0}$ [(127)] fini localement libre*. Si on note* $\mathscr{F}_0 = \big(\mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)/\mathscr{L}ie(\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0)\big)\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}\mathscr{J}$*, on a* $\mathrm{E} = \Gamma(\mathrm{S}_0,\mathscr{F}_0)/\mathrm{H}^0(\mathrm{Y}_0,\mathscr{F}_0)$.

(127)N.D.E. : On a corrigé $\mathscr{L}ie(\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0)$ en $\omega^1_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0}$.

(128) En effet, comme $\omega^1_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0}$ est fini localement libre, ainsi que $\omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}$ (puisque X est supposé lisse sur S), on a, d'après 0.6 :

$$\mathrm{L}_{0\mathrm{Y}} = \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{J}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{L}_{0\mathrm{X}} = \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{J}).$$

D'autre part, d'après 4.25, on a une suite exacte de Y_0-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathscr{K} \longrightarrow \omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0} \xrightarrow{\ \phi\ } \omega^1_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0} \longrightarrow 0$$

(où $\mathscr{K} = \mathrm{Ker}(\phi)$). Comme $\omega^1_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0}$ et $\omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}$ sont finis localement libres, on a une suite exacte *localement scindée* :

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}ie(\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{J} \longrightarrow \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{J} \longrightarrow \mathscr{F}_0 \longrightarrow 0$$

Il en résulte qu'on a une suite exacte de Y_0-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}_0}$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathrm{L}_{0\mathrm{Y}} \longrightarrow \mathrm{L}_{0\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{W}(\mathscr{F}_0).$$

Par le raisonnement qui nous a servi à prouver 4.31, nous pouvons calculer E comme l'image de l'application composée

$$\mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0, \mathrm{L}_{0\mathrm{X}}) \xrightarrow{\ \pi\ } \mathrm{C}^0(\mathrm{Y}_0, \mathrm{W}(\mathscr{F}_0)) \xrightarrow{\ \partial\ } \mathrm{C}^1(\mathrm{Y}_0, \mathrm{W}(\mathscr{F}_0)).$$

Or l'application π ci-dessus est l'application $\Gamma(\mathrm{S}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{J}) \to \Gamma(\mathrm{S}_0, \mathscr{F}_0)$. Donc, S_0 étant affine, π est surjective et on trouve bien le résultat annoncé.

Corollaire 4.33. — *Soient* S, $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ *et* X *comme en* 4.21*, et soit* Y *un sous-groupe* diagonalisable *de* X*. Supposons* $\omega^1_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0}$ fini localement libre *et* S_0 affine. (129) *L'ensemble des sous-groupes de* X*, conjugués de* Y *par une section de* X *sur* S *induisant la section unité de* $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$*, est isomorphe à*

$$\mathrm{E} = \Gamma\left(\mathrm{S}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0) / \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)^{\mathrm{ad}(\mathrm{Y}_0)}\right) \otimes_{\Gamma(\mathrm{S}_0, \mathscr{O}_{\mathrm{S}_0})} \Gamma(\mathrm{S}_0, \mathcal{J})$$

(130) *c.-à-d., à* $\mathrm{L}_{0\mathrm{X}}(\mathrm{Y}_0)/\mathrm{H}^0(\mathrm{Y}_0, \mathrm{L}_{0\mathrm{X}})$.

En effet, on écrit par I 4.7.3 (cf. 2.13) :

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0) = \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)^{\mathrm{ad}(\mathrm{Y}_0)} \bigoplus \mathscr{R}.$$

Comme Y_0 est commutatif on a $\mathscr{L}ie(\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0) \subset \mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)^{\mathrm{ad}(\mathrm{Y}_0)}$, donc

$$\mathscr{F}_0 = \left(\mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)^{\mathrm{ad}(\mathrm{Y}_0)} / \mathscr{L}ie(\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0)\right) \otimes \mathcal{J} \bigoplus \mathscr{R} \otimes \mathcal{J},$$

$$\mathscr{F}_0^{\mathrm{ad}(\mathrm{Y}_0)} = \left(\mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)^{\mathrm{ad}(\mathrm{Y}_0)} / \mathscr{L}ie(\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0)\right) \otimes \mathcal{J}.$$

Par 4.32, on a donc $\mathrm{E} \simeq \Gamma(\mathrm{S}_0, \mathscr{R} \otimes \mathcal{J})$. Retournant à la définition de $\mathscr{R}$, on a terminé. **154**

(128) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
(129) N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse sur $\omega^1_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0}$ et remplacé l'hypothèse « S affine » par « S_0 affine ».
(130) N.D.E. : on a ajouté ce qui suit, cf. 4.34.

Corollaire 4.34. — *Soient* S, $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ *et* X *comme en* 4.21*, et soit* Y *un sous-groupe* diagonalisable *de* X. *Supposons* $\omega^1_{Y_0/S_0}$ fini localement libre *et* S_0 affine. [131] *Si* $x \in X(S)$ *induit la section unité de* $X_{\mathcal{J}}$ *et normalise* Y*, alors il centralise* Y.

Cela résulte immédiatement de la comparaison du corollaire précédent et de 2.14. En effet, 4.33 montre que les éléments de $C^0(Y_0, L_{0X})$ qui respectent globalement Y sont les éléments de $H^0(Y_0, L_{0X})$, et on a vu en 2.14 que ce sont ceux-là même qui agissent trivialement sur l'immersion canonique $Y \to X$.

4.35. Revenons à la situation générale de 4.21 et supposons $Y_{\mathcal{J}}$ *lisse* sur $S_{\mathcal{J}}$. Alors, d'après 4.25 (ii), on a une suite exacte de Y_0-$\mathscr{O}_{S_0}$-modules :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathscr{L}ie(Y_0/S_0) \longrightarrow \mathscr{L}ie(X_0/S_0) \longrightarrow \mathfrak{n}^\vee_{Y_0/X_0} \longrightarrow 0$$

et ce sont des $\mathscr{O}_{S_0}$-modules finis localement libres.

D'autre part, d'après SGA 1, II 4.10, tout sous-schéma Y de X relevant $Y_{\mathcal{J}}$ et *plat* sur S sera *lisse* sur S. [132] Supposons de plus S_0 et $Y_{\mathcal{J}}$ *affines.* Alors, comme $\mathfrak{n}^\vee_{Y_0/X_0}$ est un $\mathscr{O}_{S_0}$-module localement libre, la suite $(*)$ reste exacte lorsqu'on lui applique $\otimes_{\mathscr{O}_{S_0}} \mathcal{J}$, puis qu'on prend l'image inverse sur Y_0^n, et comme les Y_0^n sont affines, on obtient donc une suite exacte de complexes de groupes abéliens :

$$0 \longrightarrow C^*(Y_0, L_{0Y}) \longrightarrow C^*(Y_0, L_{0X}) \xrightarrow{d^*} C^*(Y_0, N_0) \longrightarrow 0$$

et en particulier, un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^1(Y_0, L_{0Y}) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & C^1(Y_0, L_{0X}) \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "\partial"] & C^1(Y_0, N_0) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^2(Y_0, L_{0Y}) \arrow[r] & C^2(Y_0, L_{0X}) \arrow[r, "d^2"] & C^2(Y_0, N_0) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

Soient maintenant Y, Y' deux sous-groupes de X relevant $Y_{\mathcal{J}}$ et plats, donc *lisses*, sur S. Comme $Y_{\mathcal{J}}$ est affine alors, d'après 0.15, Y et Y' sont isomorphes comme schémas étendant $Y_{\mathcal{J}}$, i.e. il existe un isomorphisme de S-schémas

$$f : Y \xrightarrow{\sim} Y'$$

induisant l'identité sur $Y_{\mathcal{J}}$. D'une part, d'après 1.2.4, f définit un élément a de $C^1(Y_0, L_{0X})$ tel que $f(y) = a(y_0)y$, pour tout $y \in Y(S')$, $S' \to S$, et d'après 4.27 (i), on a

$$d^1(a) = d(Y, Y').$$

De plus, comme Y, Y' sont des sous-groupes de X, l'élément ci-dessus appartient à $Z^1(Y_0, N_0)$ (cf. 4.21). Alors ∂a est un élément de $Z^2(Y_0, L_{0Y})$ dont l'image $\overline{\partial a}$ dans $H^2(Y_0, L_{0Y})$ ne dépend que de la classe $\overline{d}(Y, Y') \in H^1(Y_0, N_0)$; ceci étant la définition de l'application bord $\partial^1 : H^1(Y_0, N_0) \to H^2(Y_0, L_{0Y})$, on a donc :

$$\partial^1\big(\overline{d}(Y, Y')\big) = \overline{\partial a}.$$

[131] N.D.E. : cf. N.D.E. (129).

[132] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit et la proposition 4.35.1, implicite dans l'original, cf. 4.38 (5).

D'autre part, transportons par f la structure de groupe de Y' et soit Y_1 le groupe obtenu (qui a donc Y comme schéma sous-jacent), c.-à-d., la loi de groupe μ_1 de Y_1 est définie par : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x, y \in \mathrm{Y}(\mathrm{S}')$,

$$\mu_1(x,y) = f^{-1}(f(x)f(y)).$$

D'après 3.5.1, Y_1 définit un cocycle $\delta(\mathrm{Y},\mathrm{Y}_1) \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{Y}_0, \mathscr{L}ie(\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0))$ tel que, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x, y \in \mathrm{Y}(\mathrm{S}')$, on ait

$$\delta(\mathrm{Y},\mathrm{Y}_1)(x_0,y_0)\,xy = \mu_1(x,y) = f^{-1}(f(x)f(y)).$$

Posons $b = \delta(\mathrm{Y},\mathrm{Y}_1)$. Pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x, y \in \mathrm{Y}(\mathrm{S}')$, on a $(b(x_0,y_0)\,xy)_0 = x_0y_0$ et donc on obtient que $f(b(x_0,y_0)\,xy)$ égale, d'une part, $a(x_0y_0)b(x_0y_0)\,xy$ et, d'autre part,

$$f(x)f(y) = a(x_0)x\,a(y_0)y = a(x_0)\,\mathrm{Ad}(x_0)(a(y_0))\,xy.$$

Comparant les deux expressions, on obtient que $b(x_0,y_0)$ égale

$$a(x_0y_0)^{-1}a(x_0)\,\mathrm{Ad}(x_0)(a(y_0)) = \mathrm{Ad}(x_0)(a(y_0)) - a(x_0y_0) + a(x_0) = (\partial a)(x_0,y_0),$$

i.e. $\delta(\mathrm{Y},\mathrm{Y}_1) = \partial a$. On a donc obtenu la

Proposition 4.35.1. — [132] *Sous les hypothèses de* 4.21, *supposons de plus* S_0 affine *et* $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ lisse *sur* $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$ *et* affine. *Soient* Y, Y' *deux sous-groupes de* X *relevant* $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ *et plats* (*donc* lisses) *sur* S, *soit* $f : \mathrm{Y} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Y}'$ *un isomorphisme de* S*-schémas induisant l'identité sur* $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$, *notons* Y_1 *le groupe obtenu en transportant par f la structure de groupe de* Y'. *Alors on a*

$$\partial^1\,\overline{d}(\mathrm{Y},\mathrm{Y}') = \overline{\delta}(\mathrm{Y},\mathrm{Y}_1).$$

Proposition 4.36. — *Sous les hypothèses de* 4.21, *supposons de plus* $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$ lisse *sur* $\mathrm{S}_{\mathcal{J}}$ *et* S_0 affine. *L'ensemble des sous-*S*-groupes* Y *de* X plats (*ou* lisses) *sur* S, *se réduisant suivant* $\mathrm{Y}_{\mathcal{J}}$, *modulo conjugaison par des sections de* X *sur* S *induisant la section unité de* $\mathrm{X}_{\mathcal{J}}$, *est soit vide, soit un ensemble principal homogène sous le groupe*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Y}_0, [\mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)/\mathscr{L}ie(\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0)] \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{J}).$$

Il nous suffit de vérifier que le corollaire 4.29 s'applique, c'est-à-dire que 155

$$d^0 : \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}(\omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}(\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0}, \mathcal{J})$$

est surjectif. Or cela résulte de ce que la suite (+) de 4.25 (ii) est scindée, S_0 étant affine. [133]

Énonçons enfin un corollaire commun à 4.21 et 4.36, qui sera, en fait, la seule forme sous laquelle nous utiliserons par la suite les résultats généraux de ce numéro. [134]

Corollaire 4.37. — *Soient* S *un schéma et* S_0 *le sous-schéma fermé défini par un idéal nilpotent* $\mathcal{I}$. *Soient* X *un* S*-groupe* lisse *sur* S, *et* Y_0 *un sous-*S_0*-groupe de* X_0, plat *sur* S_0.

[133] N.D.E. : Ceci résulte aussi de la démonstration de 4.32.

[134] N.D.E. : Par exemple, 4.37 est utilisé dans l'exposé IX pour prouver les énoncés 3.2 bis et 3.6 bis.

(i) *Si* S_0 *est* affine, Y_0 lisse *sur* S_0, *et si*

$$\mathrm{H}^1\big(\mathrm{Y}_0, [\mathscr{L}ie(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}_0)/\mathscr{L}ie(\mathrm{Y}_0/\mathrm{S}_0)] \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}\big) = 0$$

pour tout $n \geqslant 0$, *deux sous-*S*-groupes de* X, plats (*ou* lisses) *sur* S, *se réduisant suivant* Y_0, *sont conjugués par une section de* X *sur* S *induisant la section unité de* X_0.

(ii) *Si* Y_0 *est* affine *et de* présentation finie *et si* [135]

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{Y}_0, \mathfrak{n}^\vee_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}) = 0$$

156 *pour tout* $n \geqslant 0$, *il existe un sous-*S*-groupe de* X, *plat sur* S, *se réduisant suivant* Y_0.

4.38. Il nous reste à relier les trois constructions que nous avons faites dans cet exposé. Pour éviter des complications inessentielles, nous nous placerons dans la situation suivante : S_0 est le spectre d'un corps k, S est le spectre des nombres duaux $\mathrm{D}(k)$, G est un S-groupe *lisse* sur S, K un sous-S-groupe, *lisse* sur S et *affine.*

[136] Notons $\mathfrak{g}_0 = \mathscr{L}ie\,\mathrm{G}_0$ (qui égale ici $\Gamma(\mathrm{S}_0, \mathscr{L}ie\,\mathrm{G}_0) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}_0/\mathrm{S}_0)(\mathrm{S}_0)$) et $\mathfrak{k}_0 = \mathscr{L}ie\,\mathrm{K}_0$. On a une suite exacte de k-espaces vectoriels [137] :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{k}_0 \xrightarrow{\ i\ } \mathfrak{g}_0 \xrightarrow{\ d\ } \mathfrak{n}^\vee_{\mathrm{K}_0/\mathrm{G}_0} \longrightarrow 0,$$

donnant naissance à une suite exacte de cohomologie :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0) &\xrightarrow{i^0} \mathrm{H}^0(\mathrm{K}_0, \mathfrak{g}_0) \xrightarrow{d^0} \mathrm{H}^0(\mathrm{K}_0, \mathfrak{g}_0/\mathfrak{k}_0) \\ \xrightarrow{\partial^0} \mathrm{H}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0) &\xrightarrow{i^1} \mathrm{H}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{g}_0) \xrightarrow{d^1} \mathrm{H}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{n}^\vee_{\mathrm{K}_0/\mathrm{G}_0}) \xrightarrow{\partial^1} \mathrm{H}^2(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0). \end{aligned}$$

Or ces divers groupes ont tous une signification géométrique.

a) $\mathrm{H}^0(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0) = \mathscr{L}ie\,\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{K}_0)$ [138] d'après II 5.2.3.

b) $\mathrm{H}^0(\mathrm{K}_0, \mathfrak{g}_0) = \mathscr{L}ie\,\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{K}_0)$ [138] (*idem*).

c) $\mathrm{H}^0(\mathrm{K}_0, \mathfrak{g}_0/\mathfrak{k}_0) = \mathscr{L}ie\,\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{K}_0)/\mathfrak{k}_0$ [138] (*idem*).

d) $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0) = \mathscr{L}ie\big(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}_0\text{-gr.}}(\mathrm{K}_0)\big)/\mathrm{Im}(\mathfrak{k}_0)$, où $\mathrm{Im}(\mathfrak{k}_0)$ désigne l'image de $\mathfrak{k}_0$ par le morphisme $\mathscr{L}ie(\mathrm{Int}_0)$ déduit de $\mathrm{Int}_0 : \mathrm{K}_0 \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}_0\text{-gr.}}(\mathrm{K}_0)$. En effet, il résulte de 2.1 (ii), appliqué à $\mathrm{Y} = \mathrm{X} = \mathrm{K}$ et $f_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{K}_0}$, que $\mathrm{Z}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0)$ est le groupe des automorphismes infinitésimaux du S_0-groupe K_0, et que $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0)$ s'obtient en quotientant par les automorphismes infinitésimaux intérieurs, i.e. par l'image de $\mathfrak{k}_0$. De plus, d'après II 4.2.2, on a aussi $\mathrm{Z}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0) = \mathscr{L}ie\big(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}_0\text{-gr.}}(\mathrm{K}_0)\big)$ [139].

---

[135] N.D.E. : On a remplacé $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}(\mathfrak{n}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0}, \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2})$ par $\mathfrak{n}^\vee_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}} \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}$, conformément à la remarque 4.22.

[136] N.D.E. : On a légèrement modifié l'original dans ce qui suit. En particulier, on a remplacé X par G et Y par K, et l'on a noté $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{k}_0$ leurs algèbres de Lie. D'autre part, on a écrit explicitement $\mathrm{H}^i(\mathrm{K}_0,\ \ )$ au lieu de l'abréviation $\mathrm{H}^i(\ \ )$ de l'original.

[137] N.D.E. : munis de l'action adjointe de K_0

[138] N.D.E. : Comme la formation des centralisateurs et normalisateurs commute au changement de base (cf. I 2.3.3.1), on a écrit $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{K}_0)$ au lieu de $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{K})_0$ dans l'original, et de même $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{K}_0)$ et $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{K}_0)$ au lieu de $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{K})_0$ et $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{K})_0$.

[139] N.D.E. : et ceci est l'algèbre de Lie $\mathrm{Dér}_k(\mathfrak{k}_0)$ des dérivations de $\mathfrak{k}_0$, donc $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0)$ est le quotient de $\mathrm{Dér}_k(\mathfrak{k}_0)$ par les dérivations intérieures (i.e. par l'image de $\mathrm{ad} : \mathfrak{k}_0 \to \mathrm{Dér}_k(\mathfrak{k}_0)$).

e) $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{g}_0)$ est, d'après 2.1 (ii), le groupe des déviations entre homomorphismes **157**
$\mathrm{K} \to \mathrm{G}$ prolongeant l'immersion canonique $i_0 : \mathrm{K}_0 \to \mathrm{G}_0$, modulo les déviations obtenues par l'action des automorphismes intérieurs de G définis par des éléments de G(S) donnant l'unité de $\mathrm{G}(\mathrm{S}_0)$ (c'est-à-dire des éléments de $\mathfrak{g}_0$).

f) $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{n}^\vee_{\mathrm{K}_0/\mathrm{G}_0})$ est, d'après 4.36, le groupe des déviations entre sous-groupes K' de G prolongeant K_0 et plats sur S (donc *lisses* sur S, cf. SGA 1, II 4.10), modulo les déviations obtenues par l'action des automorphismes intérieurs de G construits comme précédemment.

g) $\mathrm{H}^2(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0)$ est, d'après 3.5 (ii), le groupe des déviations entre structures de groupe sur K prolongeant celle de K_0, modulo les S-automorphismes de K induisant l'identité sur K_0.

Nous nous proposons maintenant de montrer comment on peut expliciter les six morphismes de la suite exacte précédente dans l'interprétation géométrique que nous venons de donner.

1) i^0 et d^0 ne sont autres que les morphismes obtenus par passage à l'algèbre de Lie (puis par passage au quotient pour d^0), à partir des monomorphismes canoniques :

$$\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{K}_0) \longrightarrow \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{K}_0) \longrightarrow \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{K}_0).$$

C'est en effet ce qu'il résulte immédiatement de la définition des identifications (a), (b), et (c).

2) On construit ∂^0 ainsi. Soit $\overline{x} \in \mathscr{L}ie\, \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{K}_0)/\mathfrak{k}_0$. Relevons-le en un $x \in \mathscr{L}ie\, \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{K}_0) \subset \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{K})(\mathrm{S})$. Alors $\mathrm{Int}(x)$ définit un automorphisme de K induisant l'identité sur K_0, donc un élément de $\mathscr{L}ie\, \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}_0\text{-gr.}}(\mathrm{K}_0)$. Notons $\overline{\mathrm{Int}(x)}$ l'image **158**
de cet élément dans $\mathscr{L}ie\, \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}_0\text{-gr.}}(\mathrm{K}_0)/\operatorname{Im}(\mathfrak{k}_0)$. Alors on a :

$$(*)\qquad \partial^0(\overline{x}) = -\overline{\mathrm{Int}(x)} = \overline{\mathrm{Int}(x^{-1})}.$$

En effet, calculons l'élément de $\mathscr{L}ie\, \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}_0\text{-gr.}}(\mathrm{K}_0)$ défini par $\mathrm{Int}(x)$. Il correspondra par définition à un élément a de $\mathrm{Z}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0)$ tel que

$$x\,y\,x^{-1} = a(y_0)\,y, \qquad \text{pour tout} \quad y \in \mathrm{K}(\mathrm{S}'),\ \mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{S}.$$

Mais ceci s'écrit aussi $a(y_0) = xyx^{-1}y^{-1} = x - \mathrm{Ad}(y)x = -\partial(x)(y_0)$, d'où $a = -\partial(x)$.

[140] D'autre part, l'image de $x \in \mathscr{L}ie\, \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{K}_0) \subset \mathfrak{g}_0$ par ∂ est un élément de $\mathrm{Z}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0)$, dont l'image $\overline{\partial(x)}$ dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0)$ ne dépend que de $\overline{x}$, et par définition de l'application bord ∂^0, on a

$$\partial^0(\overline{x}) = \overline{\partial(x)}\,;$$

combiné avec l'égalité $a = -\partial(x)$, ceci prouve $(*)$.

3) [141] Notons $i : \mathrm{K} \to \mathrm{G}$ l'immersion canonique. Soit $\overline{u}$ un élément de $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0)$, image d'un

$$u \in \mathscr{L}ie\, \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}_0\text{-gr.}}(\mathrm{K}_0) \subset \mathrm{Aut}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{K}).$$

[140] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[141] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, et dans $(**)$ on a corrigé $u \circ i$ en $i \circ u$.

Alors, on a :

$$(**) \qquad i^1(\overline{u}) = \overline{d}(i, i\circ u),$$

où $\overline{d}(i, i\circ u)$ est la classe définie en 2.1.1.

En effet, $\overline{u}$ est l'image d'un élément $v \in \mathrm{Z}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0)$ tel que $u(y) = v(y_0)y$, et $i^1(\overline{u})$ est l'image dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{g}_0)$ du cocyle $i\circ v \in \mathrm{Z}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{g}_0)$.

Or, comme i est un morphisme de groupes, l'égalité $u(y) = v(y_0)y$ entraîne $iu(y) = iv(y_0)i(y)$. Il en résulte que $i\circ v = d(i, i\circ u)$, d'où $(**)$.

159 **4)** Soit $i' : \mathrm{K} \to \mathrm{G}$ un morphisme de groupes relevant i_0, soit $\overline{d}(i, i')$ la classe définie en 2.1.1, et soit $d(\mathrm{K}, i'(\mathrm{K})) \in \mathrm{C}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{n}_{\mathrm{K}_0/\mathrm{X}_0})$ la déviation définie en 4.5.1 ; d'après 4.21, $d(\mathrm{K}, i'(\mathrm{K}))$ appartient à $\mathrm{Z}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{n}_{\mathrm{K}_0/\mathrm{X}_0})$. Notons $\overline{d}(\mathrm{K}, i'(\mathrm{K}))$ son image dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{K}_0, \mathfrak{n}_{\mathrm{K}_0/\mathrm{X}_0})$. Alors, d'après 4.27 (i), on a :

$$(\dagger) \qquad d^1\big(\overline{d}(i, i')\big) = \overline{d}(\mathrm{K}, i'(\mathrm{K})).$$

5) Soit enfin K' un sous-groupe de G relevant K_0 et plat, donc *lisse*, sur S. On a supposé que K_0 est *affine*. Alors on sait que K et K' sont isomorphes comme schémas étendant K_0 (cf. 0.15), donc qu'il existe un isomorphisme de S-schémas

$$f : \mathrm{K} \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}'$$

induisant l'identité sur K_0. Transportons par f la structure de groupe de K' et soit K_1 le groupe obtenu (qui a donc K comme schéma sous-jacent), c.-à-d., la loi de groupe μ_1 de K_1 est définie par : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x, y \in \mathrm{K}(\mathrm{S}')$,

$$\mu_1(x, y) = f^{-1}(f(x)f(y)).$$

(142) D'après 3.5.1, K_1 définit un cocycle $\delta(\mathrm{K}, \mathrm{K}_1) \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{K}_0, \mathfrak{k}_0)$ tel que, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x, y \in \mathrm{K}(\mathrm{S}')$, on ait

$$\delta(\mathrm{K}, \mathrm{K}_1)(x_0, y_0)\, xy = \mu_1(x, y) = f^{-1}(f(x)f(y)).$$

Alors, d'après 4.35.1, on a :

$$(\ddagger) \qquad \partial^1\, \overline{d}(\mathrm{K}, \mathrm{K}') = \overline{\delta}(\mathrm{K}, \mathrm{K}_1).$$

Bibliographie

(143)

[BAlg] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. I-III, Hermann, 1970.

[BAC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap. I-IV, Masson, 1985.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[Fr64] P. Freyd, *Abelian categories*, Harper and Row, 1964.

(142) N.D.E. : On a modifié l'original dans ce qui suit, en tenant compte des ajouts faits en 3.5.1 et 4.35.1.

(143) N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé

EXPOSÉ IV

TOPOLOGIES ET FAISCEAUX

par M. DEMAZURE [(*)]

Cet exposé est destiné à faire connaître au lecteur l'essentiel du langage des topologies et des faisceaux (sans cohomologie), particulièrement commode dans les questions de passage au quotient (entre autres). **160**

Les trois premiers paragraphes développent le langage du passage au quotient. Le quatrième, qui est la partie centrale, est l'exposé de la théorie des faisceaux, orienté principalement vers l'application aux questions de quotients ; le cinquième est une application au passage au quotient dans les groupes et aux fibrés principaux homogènes. Le dernier paragraphe concerne plus spécialement la catégorie des schémas, et définit diverses topologies utiles sur cette catégorie.

Le lecteur se référera utilement à [**AS**], [**MA**], [**D**], et SGA 4 ; [**D**] en ce qui concerne spécialement les applications des topologies à la théorie de la descente, et SGA 4 pour les questions d'univers (particulièrement maltraitées dans cet exposé).

1. Épimorphismes effectifs universels

161

Dans la suite de cet exposé, on suppose fixée une catégorie $\mathscr{C}$.

Définition 1.1. — Un morphisme $u : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est appelé un *épimorphisme* si, pour tout objet X, l'application correspondante

$$\mathrm{X}(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{X}(\mathrm{T}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{X})$$

est injective [(1)]. On dit que u est un *épimorphisme universel* si pour tout morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, le produit fibré $\mathrm{T}' = \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ existe, et $u' : \mathrm{T}' \to \mathrm{S}'$ est un épimorphisme.

(*) Ce texte développe la substance de deux exposés oraux de A. Grothendieck, en complétant ces derniers sur plusieurs points importants, qui avaient été passés sous silence ou à peine effleurés.

(1) N.D.E. : c'est-à-dire, si u est simplifiable à droite.

Définition 1.2. — Un diagramme

$$A \xrightarrow{u} B \underset{v_2}{\overset{v_1}{\rightrightarrows}} C$$

d'applications d'ensembles est dit *exact* si u est injectif et si son image est formée des éléments b de B tels que $v_1(b) = v_2(b)$. Un diagramme de même type dans $\mathscr{C}$ est dit *exact* si pour tout objet X de $\mathscr{C}$, le diagramme d'ensembles correspondant

$$A(X) \longrightarrow B(X) \rightrightarrows C(X)$$

est exact ; on dit aussi alors que u fait de A un *noyau* du couple de flèches (v_1, v_2). Dualement, un diagramme

$$C \underset{v_2}{\overset{v_1}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{u} A$$

dans $\mathscr{C}$ est dit *exact*, s'il est exact en tant que diagramme dans la catégorie opposée $\mathscr{C}^\circ$, i.e. si pour tout objet X de $\mathscr{C}$, le diagramme d'ensembles correspondant

$$X(A) \longrightarrow X(B) \rightrightarrows X(C)$$

162 est exact. [(2)] On dit aussi que u fait de A un *conoyau* du couple de flèches (v_1, v_2).

Définition 1.3. — Un morphisme $u : T \to S$ est appelé un *épimorphisme effectif* si le carré fibré $T \times_S T$ existe, et si le diagramme

$$T \times_S T \underset{\mathrm{pr}_2}{\overset{\mathrm{pr}_1}{\rightrightarrows}} T \xrightarrow{u} S$$

est exact, i.e. si u fait de S un conoyau de $(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$. On dit que u est un *épimorphisme effectif universel* si pour tout morphisme $S' \to S$, le produit fibré $T' = T \times_S S'$ existe, et le morphisme $u' : T' \to S'$ est un épimorphisme effectif.

On a évidemment les implications :

$$\begin{array}{ccc} \text{épimorphisme effectif universel} & \Longrightarrow & \text{épimorphisme effectif} \\ \Big\Downarrow & & \Big\Downarrow \\ \text{épimorphisme universel} & \Longrightarrow & \text{épimorphisme} \end{array},$$

mais en général aucune autre implication n'est valable. [(3)]

(2)N.D.E. : Ceci implique, en particulier, que u soit un épimorphisme.

(3)N.D.E. : Par exemple, si $\mathscr{C} = (\mathbf{Sch})$ est la catégorie des schémas, on voit facilement que tout épimorphisme *universel* est *surjectif*. Soient $T = \coprod_{p \text{ premier}} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, alors le morphisme $u : T \to S$ est un épimorphisme qui n'est *pas universel*. D'autre part, on voit que $T \times_S T$ s'identifie à T, de sorte que les deux projections $T \times_S T \rightrightarrows T$ coïncident ; comme id_T ne descend pas en un morphisme $S \to T$, ceci montre que u n'est *pas* un épimorphisme *effectif* .

Définition 1.4.0. — [4] On « rappelle » qu'un morphisme $u : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est dit *quarrable* si pour tout morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, le produit fibré $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ existe.

Lemme 1.4. — *Considérons des morphismes* $\mathrm{U} \xrightarrow{v} \mathrm{T} \xrightarrow{u} \mathrm{S}$. *Alors*

a) *u, v épimorphismes $\Rightarrow$ uv épimorphisme $\Rightarrow$ u épimorphisme,*

b) *u, v épimorphismes universels $\Rightarrow$ uv épimorphisme universel et u quarrable $\Rightarrow$ u épimorphisme universel.*

Le lemme 1.4 est trivial sur les définitions. On en conclut :

Corollaire 1.5. — *Soient* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *et* $u' : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ *des épimorphismes universels, tels que* $\mathrm{Y} \times \mathrm{Y}'$ *existe, alors* $\mathrm{X} \times \mathrm{X}'$ *existe et* $u \times u' : \mathrm{X} \times \mathrm{X}' \to \mathrm{Y} \times \mathrm{Y}'$ *est un épimorphisme universel.*

Notons aussi : **163**

Définition 1.6.0. — [5] On dit qu'un objet S de $\mathscr{C}$ est *quarrable* si son produit par tout objet de $\mathscr{C}$ existe. (Si $\mathscr{C}$ possède un objet final e, ceci équivaut à dire que le morphisme $\mathrm{S} \to e$ est quarrable, cf. 1.4.0.)

Lemme 1.6. — *Soit* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme dans* $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ *; pour que ce soit un épimorphisme* (*resp. épimorphisme universel, resp. épimorphisme effectif, resp. épimorphisme effectif universel*)*, il suffit que le morphisme correspondant dans* $\mathscr{C}$ *le soit, et c'est aussi nécessaire si on suppose que* S *est un objet quarrable de* $\mathscr{C}$*.*

Démonstration immédiate laissée au lecteur. On utilise l'hypothèse « S quarrable » pour interpréter les $\mathscr{C}$-morphismes d'un objet Y de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ dans un objet Z de $\mathscr{C}$, comme étant les $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$-morphismes de Y dans $\mathrm{Z} \times \mathrm{S}$.

Lemme 1.7. — *Avec les notations de* 1.4 *: u, v épimorphismes effectifs et v épimorphisme universel $\Rightarrow$ uv épimorphisme effectif.*

Pour le voir, on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S} & \mathrm{T} \arrow[l, "u"'] & \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \\
& \mathrm{U} \arrow[u, "v"] & \mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, "v \times_{\mathrm{S}} v"'] \\
& \mathrm{U} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{U} \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] \arrow[ur] &
\end{tikzcd} .$$

On note que par hypothèse, la ligne 1 et la colonne 1 sont exactes, et qu'en vertu de 1.5 et 1.6, $v \times_{\mathrm{S}} v$ est un épimorphisme (v étant un épimorphisme *universel*). La conclusion en résulte par un diagram-chasing évident : si un élément de X(U) a mêmes

[4] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 1.4.0, pour des références ultérieures.

[5] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 1.6.0, pour des références ultérieures.

images dans $X(U \times_S U)$, il a *a fortiori* mêmes images dans $X(U \times_T U)$, donc provient d'un élément de $X(T)$ puisque la colonne 1 est exacte. Comme la ligne 1 est exacte, il suffit de vérifier que l'élément envisagé a mêmes images dans $X(T \times_S T)$, et comme $v \times_S v$ est un épimorphisme, il suffit de vérifier que les images dans $X(U \times_S U)$ sont
164 les mêmes, ce qui est bien le cas.

Proposition 1.8. — *Considérons des morphismes* $U \xrightarrow{v} T \xrightarrow{u} S$. *Alors u, v épimorphismes effectifs universels $\Rightarrow$ uv épimorphisme effectif universel et u quarrable $\Rightarrow$ u épimorphisme effectif universel.*

La première implication résulte aussitôt de 1.7. Pour la deuxième, on regarde le diagramme (de type « bisimplicial ») :

$$\begin{tikzcd}
S & T \arrow[l, "u"'] & T \times_S T \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \\
U \arrow[u, "vu"] & U \times_S T \arrow[l] \arrow[u] & U \times_S T \times_S T \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u] \\
U \times_S U \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] & U \times_S U \times_S T \arrow[l] \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right] & U \times_S U \times_S T \times_S T \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, shift left] \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}.$$

Les colonnes 1,2,3 sont exactes en vertu de l'hypothèse « vu épimorphisme effectif universel », la ligne 2 est exacte, car $U \times_S T \to U$ est un épimorphisme effectif (car il a une section sur U), et il en est de même de la ligne 3 (même raison). Un diagram-chasing évident montre alors que la ligne 1 est exacte, i.e. u est un épimorphisme effectif. Comme les hypothèses faites sont invariantes par un changement de base quelconque $S' \to S$, il s'ensuit que u est même un épimorphisme effectif universel.

Corollaire 1.9. — *Soient* $u : X \to Y$ *et* $u' : X' \to Y'$ *des épimorphismes effectifs universels, tels que* $Y \times Y'$ *existe ; alors* $X \times X'$ *existe et* $u \times u' : X \times X' \to Y \times Y'$ *est un épimorphisme effectif universel.*

Démonstration comme pour 1.5 par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & Y' & X' \arrow[l, "u'"'] \\
X \arrow[d, "u"'] & X \times Y' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & X \times X' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[dl, "u \times u'"] \\
Y & Y \times Y' \arrow[l] &
\end{tikzcd}.$$

165 ***Corollaire 1.10***. — *Considérons un morphisme quarrable* $u : T \to S$, *et un morphisme de changement de base* $S' \to S$, *qui soit un épimorphisme effectif universel. Pour que*

u soit un épimorphisme effectif universel, il faut et suffit que $u' : \mathrm{T}' = \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$ le soit :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T} \arrow[d, "u"'] & \mathrm{T}' \arrow[l, "v'"'] \arrow[d, "u'"] \\ \mathrm{S} & \mathrm{S}' \arrow[l, "v"] \end{tikzcd} .$$

Seul le « il suffit » demande une démonstration. Or si u' est un épimorphisme effectif universel, il en est de même de vu' grâce à 1.8, et comme $vu' = uv'$, on conclut par 1.8 que u est un épimorphisme effectif universel.

Remarque 1.11. — Le même raisonnement montre que dans 1.10 on peut remplacer « épimorphisme effectif universel » par « épimorphisme universel » ou « épimorphisme universel et effectif », ou simplement par « épimorphisme » (et dans ce dernier cas, l'hypothèse « u quarrable » est évidemment inutile).

Dans la démonstration de 1.8 nous avons utilisé le résultat suivant, qui mérite d'être explicité :

Proposition 1.12. — *Soit $u : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ un morphisme qui admette une section. Alors u est un épimorphisme, et si $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ existe, c'est un épimorphisme effectif, et un épimorphisme effectif universel si de plus u est quarrable.*

La première assertion est contenue dans 1.4 a), et la troisième va résulter aussitôt de la seconde, qu'il suffira donc d'établir. En fait on a une conclusion plus forte : pour *tout* foncteur $\mathrm{F} : \mathscr{C}^{\circ} \to (\mathbf{Ens})$ (non nécessairement représentable), le diagramme d'ensembles

$$\mathrm{F}(\mathrm{S}) \to \mathrm{F}(\mathrm{T}) \rightrightarrows \mathrm{F}(\mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T})$$

est exact. Ceci peut être considéré comme un cas particulier du formalisme de la cohomologie de Čech (en dimension 0 !) que nous nous contentons de rappeler ici. Supposons simplement que $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ existe, on pose alors

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{T}/\mathrm{S}, \mathrm{F}) = \operatorname{Ker}\big(\mathrm{F}(\mathrm{T}) \rightrightarrows \mathrm{F}(\mathrm{T} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T})\big).$$

On peut regarder $\mathrm{H}^0(\mathrm{T}/\mathrm{S}, \mathrm{F})$ de façon évidente comme un foncteur contravariant en **166**
l'argument T variable dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, tout S-morphisme $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ définissant une application

$$(+) \qquad \mathrm{H}^0(\mathrm{T}/\mathrm{S}, \mathrm{F}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{T}'/\mathrm{S}, \mathrm{F}).$$

Fixons T et T′ dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. Un calcul bien connu montre que s'il existe un S-morphisme de T′ dans T, l'application correspondante (+) est en fait indépendante du choix de ce morphisme [(6)], de sorte que $\mathrm{H}^0(\mathrm{T}/\mathrm{S}, \mathrm{F})$ peut être regardé comme un foncteur sur la catégorie associée à l'ensemble $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ préordonné par la relation de « domination »

[(6)] N.D.E. : Il s'agit de l'argument suivant, communiqué par M. Demazure. Soient $f, g : \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$, et soit $\phi : \mathrm{T}' \to \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ le morphisme de composantes f et g, d'où $p_1 \circ \phi = f$ et $p_2 \circ \phi = g$. Alors $\mathrm{F}(\phi) : \mathrm{F}(\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}) \to \mathrm{F}(\mathrm{T}')$ vérifie $\mathrm{F}(\phi) \circ \mathrm{F}(p_1) = \mathrm{F}(f)$ et $\mathrm{F}(\phi) \circ \mathrm{F}(p_2) = \mathrm{F}(g)$. Or, pour tout $x \in \mathrm{H}^0(\mathrm{T}/\mathrm{S}, \mathrm{F})$, on a $\mathrm{F}(p_1)(x) = \mathrm{F}(p_2)(x)$. Donc, appliquant $\mathrm{F}(\phi)$ aux deux membres, on obtient $\mathrm{F}(f)(x) = \mathrm{F}(g)(x)$, ce qui montre que f et g induisent le même morphisme.

(T' domine T s'il existe un S-morphisme de T' dans T). En particulier, si T et T' sont isomorphes dans cette dernière catégorie, i.e. si chacun domine l'autre, alors (+) est un *isomorphisme* d'ensembles. Ceci s'applique en particulier au cas où T' est l'objet final de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, i.e. essentiellement S lui-même ; de toutes façons T domine $\mathrm{T}' = \mathrm{S}$, et l'inverse est vrai précisément si T/S a une section. Cela établit 1.12 sous la forme renforcée annoncée.

Remarque 1.13. — Pour diverses applications, les notions introduites dans le présent exposé, et les résultats énoncés, doivent se développer plus généralement relativement à une *famille* de morphismes $u_i : \mathrm{T}_i \to \mathrm{S}$ de même but (au lieu d'un seul morphisme $u : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$). Ainsi, une telle famille sera dite *épimorphique* si pour tout objet X de $\mathscr{C}$, l'application correspondante

$$\mathrm{X}(\mathrm{S}) \to \prod_i \mathrm{X}(\mathrm{T}_i)$$

est injective, et on introduit de même la notion de *famille épimorphique effective* et les variantes « universelles » de ces notions. Nous admettrons au besoin, par la suite, que les résultats du présent exposé s'étendent à cette situation plus générale.

Remarque 1.14. — Tout morphisme qui est à la fois un monomorphisme et un épi-
167 morphisme effectif est un isomorphisme. En effet, dans les notations de 1.3, le fait que $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ soit un monomorphisme entraîne que les deux morphismes

$$\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \rightrightarrows \mathrm{T}$$

sont égaux (et sont des isomorphismes). Or un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C} \arrow[r, shift left, "v"] \arrow[r, shift right, "v"'] & \mathrm{B} \arrow[r, "u"] & \mathrm{A} \end{tikzcd}$$

n'est exact que si u est un isomorphisme, comme il résulte immédiatement de la définition. (7)

2. Morphismes de descente

Rappelons les définitions suivantes :

Définition 2.1. — Soit $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme tel que $\mathrm{S}'' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ existe, et soit $u' : \mathrm{X}' \to \mathrm{S}'$ un objet sur S'. On appelle *donnée de recollement* sur X'/S', relativement à f, un S''-isomorphisme

$$c : \mathrm{X}''_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{X}''_2$$

où X''_i ($i = 1, 2$) désigne l'image inverse (supposée exister) de X'/S' par la projection $\mathrm{pr}_i : \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$. On dit que la donnée de recollement c est une *donnée de descente* si elle satisfait la « condition des cocycles »

$$\mathrm{pr}^*_{3,1}(c) = \mathrm{pr}^*_{3,2}(c)\mathrm{pr}^*_{2,1}(c)$$

(7) N.D.E. : On notera qu'un monomorphisme qui est un épimorphisme n'est pas nécessairement un isomorphisme. Par exemple, dans $\mathscr{C} = (\mathbf{Sch})$, le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \coprod \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p]) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ est un monomorphisme et un épimorphisme surjectif, mais n'est pas un isomorphisme.

où $\mathrm{pr}_{i,j}$ $(1 \leqslant j < i \leqslant 3)$ sont les projections canoniques de $\mathrm{S}''' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ dans S'' (N. B. on suppose maintenant que S''' existe également), où $\mathrm{pr}_{i,j}^*(c)$ est l'image inverse de c, considéré comme un S'''-morphisme de X_j''' dans X_i''', et où pour tout **168**
entier k entre 1 et 3, X_k''' désigne l'image inverse (supposée exister) de X'/S' par la projection d'indice k, $q_k : \mathrm{S}''' \to \mathrm{S}'$.

Dans la deuxième partie de la définition, on a donc utilisé des identifications et abus d'écriture d'usage courant [(8)], que l'expérience prouve être inoffensifs, mais qu'il convient évidemment d'éviter dans un exposé rigoureux de la théorie de la descente, (qui doit précisément justifier dans une certaine mesure ces abus de langage courants). Un tel exposé en forme ([**D**]) a été rédigé par Giraud, (en vue de justifier et de préciser SGA 1, VII, qui n'a jamais été rédigé). Pour un exposé détaillé des résultats de descente fidèlement plate dont il sera fait un usage constant dans le présent Séminaire on pourra consulter SGA 1, VIII.

Soit toujours $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme tel que $\mathrm{S}'' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ existe, et soit X un objet sur S tel que $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ et $\mathrm{X}'' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''$ existent ; alors les images inverses de X' par pr_i $(i = 1, 2)$ existent et sont canoniquement isomorphes, et par suite X'/S' est munie d'une donnée de recollement canonique relativement à f. Lorsque S''' et $\mathrm{X}''' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'''$ existent, c'est même une donnée de descente. Si Y est un autre objet sur S, satisfaisant aux mêmes conditions que X/S, alors pour tout S-morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, le S'-morphisme correspondant $\mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ est « compatible avec les données de recollement » canoniques sur X', Y'. Si en particulier $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est un morphisme *quarrable*, alors

$$\mathrm{X} \longmapsto \mathrm{X}' = \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}'$$

est un foncteur de la catégorie $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ dans la « catégorie des objets sur S' *munis d'une donnée de descente* relativement à f » – catégorie dont la définition est laissée au lecteur, et qui est une sous-catégorie pleine de la « catégorie des objets sur S' munis d'une donnée de recollement relativement à f ».

Ceci posé :

Définition 2.2. — On dit qu'un morphisme $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est un *morphisme de descente* **169**
(resp. un *morphisme de descente effective*) si f est *quarrable* (i.e. pour tout $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$, le produit fibré $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ existe), et si le foncteur précédent $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ de la catégorie $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ des objets sur S, dans la catégorie des objets sur S' munis d'une donnée de descente relativement à f, est pleinement fidèle (resp. une équivalence de catégories).

On notera que la première de ces deux notions peut s'exprimer à l'aide de la seule notion de donnée de recollement (donc sans faire intervenir le produit fibré triple S'''), f étant un morphisme de descente si f est quarrable et $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}'$ est un foncteur pleinement fidèle de la catégorie $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ dans la catégorie des objets sur S' munis d'une *donnée de recollement* relativement à f. Quand on explicite cette définition, on

---

[(8)] N.D.E. : par exemple, on a identifié, d'une part, $\mathrm{pr}_{2,1}^*(\mathrm{X}_1'') = \mathrm{pr}_{3,1}^*(\mathrm{X}_1'')$ et, d'autre part, $\mathrm{pr}_{2,1}^*(\mathrm{X}_2'') = \mathrm{pr}_{3,2}^*(\mathrm{X}_2'')$.

constate que cela signifie que pour deux objets X, Y sur S, le diagramme d'ensembles suivant

$$\text{(x)} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{X}',\mathrm{Y}') \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}''}(\mathrm{X}'',\mathrm{Y}'')$$

est exact, où $p_i(u')$ désigne l'image inverse de $u' \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')$ par la projection $\mathrm{pr}_i : \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$, pour $i = 1, 2$; en effet, le noyau du couple (p_1, p_2) n'est autre par définition que l'ensemble des S′-morphismes $\mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ compatibles avec les données de recollement canoniques.

Notons que, par définition des images inverses $\mathrm{Y}', \mathrm{Y}''$, on a des bijections canoniques

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{X}',\mathrm{Y}') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}',\mathrm{Y}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}''}(\mathrm{X}'',\mathrm{Y}'') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}'',\mathrm{Y}),$$

de sorte que l'exactitude du diagramme (x) équivaut à celle de

$$\text{(xx)} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}',\mathrm{Y}) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}'',\mathrm{Y}),$$

obtenu en appliquant $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(-,\mathrm{Y})$ au diagramme dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$:

$$\text{(xxx)} \qquad \mathrm{X}'' \rightrightarrows \mathrm{X}' \longrightarrow \mathrm{X}$$

170 qui est déduit de

$$\mathrm{S}'' \rightrightarrows \mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{S}$$

par le changement de base $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$. Cela prouve, compte tenu de 1.6, la première partie de la proposition suivante :

Proposition 2.3. — *Soit $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme. Si c'est un épimorphisme effectif universel, c'est un morphisme de descente, et la réciproque est vraie si* S *est un objet quarrable de $\mathscr{C}$ (i.e. son produit par tout objet de $\mathscr{C}$ existe).*

Reste à prouver que si f est un morphisme de descente, c'est un épimorphisme effectif universel, c'est-à-dire que pour tout morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$, le diagramme (xxx) est exact, i.e. pour tout objet Z de $\mathscr{C}$, le transformé de ce diagramme par $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{Z})$ est un diagramme exact d'ensembles. Or par hypothèse $\mathrm{Z} \times \mathrm{S}$ existe ; soit Y l'objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ qu'il définit ; alors le diagramme transformé de (xxx) par $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{Z})$ est isomorphe au diagramme transformé par $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(-,\mathrm{Y})$, or ce dernier est exact par l'hypothèse sur f.

On peut donc appliquer aux épimorphismes effectifs universels les résultats sur les morphismes de descente, tels les suivants :

Proposition 2.4. — *Soit $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme de descente (par exemple un épimorphisme effectif universel). Alors :*

a) *Pour tout* S*-morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, u est un isomorphisme (resp. un monomorphisme) si et seulement si $u' : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ l'est.*

b) *Soient* X, Y *deux sous-objets de* S, X' *et* Y' *les sous-objets de* S' *images inverses des précédents. Pour que* X *soit majoré par* Y *(resp. soit égal à* Y*), il faut et suffit qu'il en soit de même pour* X', Y'.

Pour (a), il résulte de la définition que si u' est un isomorphisme dans la catégorie des objets à donnée de recollement, alors u est un isomorphisme ; or on constate 171
aussitôt que tout isomorphisme d'objets sur S', compatible avec des données de recollement, est un isomorphismes d'objets à donnée de recollement, i.e. son inverse est également compatible avec les données de recollement. Pour b), on est ramené à prouver que si X' est majoré par Y', i.e. s'il existe un S'-morphisme $\mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$, alors il en est de même pour X, Y sur S. Or comme $\mathrm{Y}' \to \mathrm{S}'$, donc aussi $\mathrm{Y}'' \to \mathrm{S}''$, est un monomorphisme, on voit que $\mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ est automatiquement compatible avec les données de recollement, donc provient d'un S-morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. Notons que la démonstration vaut plus généralement quand on a deux objets X, Y sur S, avec $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ un monomorphisme, et qu'on se demande si le morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ se factorise par Y : il suffit que $\mathrm{X}' \to \mathrm{S}'$ se factorise par Y'.

Corollaire 2.5. — *Soient* $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un épimorphisme effectif universel et* $g : \mathrm{S} \to \mathrm{T}$ *un morphisme tel que* $\mathrm{S} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{S}$ *existe. Supposons que* $\mathrm{S}'' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *soit aussi un produit fibré de* S' *par lui-même sur* T, *i.e.* $\mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}' \times_{\mathrm{T}} \mathrm{S}'$. *Alors* $g : \mathrm{S} \to \mathrm{T}$ *est un monomorphisme* (*et réciproquement bien sûr*).

En effet, considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{S}' \times_{\mathrm{T}} \mathrm{S}' \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{S} \arrow[r] & \mathrm{S} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{S} \end{tikzcd} \quad ,$$

où la deuxième flèche horizontale est le morphisme diagonal. En vertu de 1.9 la deuxième flèche verticale f est un épimorphisme effectif universel, par hypothèse la première flèche horizontale est un isomorphisme, donc en vertu de 2.4 a) ou b) au choix [(9)], il en est de même de $\mathrm{S} \to \mathrm{S} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{S}$, ce qui signifie précisément que $g : \mathrm{S} \to \mathrm{T}$ est un monomorphisme.

Remarque 2.6. — Les notions introduites dans 2.1, en termes de morphismes entre certaines limites projectives, s'explicitent de façon évidente en termes des foncteurs 172
contravariants définis par les objets S, S', X' envisagés : sous réserve d'existence des produits fibrés envisagés dans 2.1, il y a correspondance biunivoque entre les données de recollement (resp. de descente) sur X'/S' relativement à $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, et les données de recollement (resp. de descente) pour les objets correspondants dans $\widehat{\mathscr{C}} = \mathbf{Hom}(\mathscr{C}^{\circ}, (\mathbf{Ens}))$. Ceci permet, si on le désire, d'étendre ces notions au cas où on ne fait aucune hypothèse d'existence de produits fibrés dans $\mathscr{C}$.

Remarque 2.7. — Les notions introduites dans ce numéro se généralisent au cas de familles de morphismes. Elles peuvent d'autre part se présenter de manière plus intrinsèque à l'aide de la notion de *crible* (4.1). Pour ces questions, le lecteur se reportera à [**D**].

---

(9) N.D.E. : appliqué à $f : \mathrm{S}' \times_{\mathrm{T}} \mathrm{S}' \to \mathrm{S} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{S} = \mathrm{Y}$.

3. Relations d'équivalence effectives universelles

3.1. Relations d'équivalence : définitions

Définition 3.1.1. — On appelle *$\mathscr{C}$-relation d'équivalence* dans $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ un sous-foncteur *représentable* R du foncteur $X \times X$, tel que pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, R(S) soit le graphe d'une relation d'équivalence dans X(S).

Cette définition s'applique en particulier à la catégorie $\widehat{\mathscr{C}}$. Si on considère X comme un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$, on voit alors qu'une $\widehat{\mathscr{C}}$-relation d'équivalence dans X n'est autre qu'un sous-foncteur R de $X \times X$ tel que R(S) soit le graphe d'une relation d'équivalence dans X(S) pour tout objet S de $\mathscr{C}$ [(10)].

Si R est une $\mathscr{C}$-relation d'équivalence dans X, on désigne par p_i le morphisme de R dans X induit par la projection $\mathrm{pr}_i : X \times X \to X$. On a donc un diagramme

$$p_1, p_2 : R \rightrightarrows X.$$

173 ***Définition 3.1.2***. — Un morphisme $u : X \to Z$ est dit *compatible* avec R si $up_1 = up_2$. Un objet de $\mathscr{C}$ conoyau du couple (p_1, p_2) est aussi appelé *objet-quotient* de X par R et noté X/R.

On a donc un diagramme exact

$$R \overset{p_1,p_2}{\rightrightarrows} X \xrightarrow{\ p\ } X/R$$

et X/R représente le foncteur *covariant*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X/R, Z) = \{\text{morphismes de X dans Z compatibles avec R}\}.$$

Comme les objets-quotients ont été choisis dans $\mathscr{C}$, le quotient X/R est unique (lorsqu'il existe).

Ces définitions se généralisent aussitôt au cas d'une $\widehat{\mathscr{C}}$-relation d'équivalence dans X, mais on remarquera que l'identification des objets de $\mathscr{C}$ à leurs images dans $\widehat{\mathscr{C}}$ *ne commute pas à la formation des quotients*, c'est-à-dire que le quotient X/R de X par R dans $\mathscr{C}$ n'est pas *a priori* un quotient de X par R dans $\widehat{\mathscr{C}}$. On se gardera donc d'identifier inconsidérément $\mathscr{C}$ à son image dans $\widehat{\mathscr{C}}$ dans les questions faisant intervenir des passages au quotient. [(11)]

[(10)] N.D.E. : La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, R(S) est le graphe d'une relation d'équivalence, alors cette relation d'équivalence s'étend à R(F) pour tout $F \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$, en déclarant que deux morphismes $\phi, \psi : F \to R$ sont équivalents si, pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et $x \in F(S)$, $\phi(x)$ et $\psi(x)$ sont équivalents dans X(S).

[(11)] N.D.E. : Illustrons ce propos en donnant un aperçu de la suite de cet Exposé. Soient G un $\mathscr{C}$-groupe, H un sous-$\mathscr{C}$-groupe, R la relation d'équivalence dans G définie par $G \times H \to G \times G$, $(g, h) \mapsto (g, gh)$ (cf. 3.2). Le foncteur Q défini par $Q(S) = G(S)/H(S)$ est un quotient dans $\widehat{\mathscr{C}}$ (d'après 4.4.9 appliqué à la topologie la moins fine, cf. 4.4.2), mais ce n'est pas en général le quotient que l'on souhaite. Par exemple, pour $\mathscr{C} = (\mathbf{Sch})$, on a une suite exacte de schémas en groupes (affines) :

$$1 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_2 \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{p} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1$$

qui identifie $\mathbb{G}_m$ au quotient $\mathbb{G}_m/\boldsymbol{\mu}_2$. De plus, comme p est un morphisme fini et localement libre, alors $\mathbb{G}_m$ est le *faisceau-quotient* de $\mathbb{G}_m$ par $\boldsymbol{\mu}_2$ dans la catégorie plus grande des *faisceaux pour la*

Dans la suite, *nous dirons* simplement *relation d'équivalence pour* $\widehat{\mathscr{C}}$*-relation d'équivalence* ; nous préciserons, le cas échéant, s'il s'agit de $\mathscr{C}$-relations d'équivalences [12].

Définition 3.1.3. — Si X est un objet de $\mathscr{C}$ au-dessus de S, on appelle relation d'équivalence dans X au-dessus de S une relation d'équivalence R dans X tel que le morphisme structural $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ soit compatible avec R.

Le monomorphisme canonique $\mathrm{R} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ se factorise alors par le monomorphisme

$$\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \times \mathrm{X}$$

et définit une relation d'équivalence dans l'objet $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. Lorsque le quotient 174
X/R existe, il est muni d'un morphisme canonique dans S et l'objet de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ correspondant est un quotient de $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ par la relation d'équivalence précédente. Réciproquement, si S est un objet *quarrable* de $\mathscr{C}$ et si $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ est un quotient de X par cette relation d'équivalence (dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$), alors Y est un quotient de X par R dans $\mathscr{C}$. De toutes façons, nous n'aurons jamais à considérer des quotients dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ qui ne soient pas déjà quotients dans $\mathscr{C}$.

Définition 3.1.4. — Si X (resp. X′) est un objet de $\mathscr{C}$ muni d'une relation d'équivalence R (resp. R′), un morphisme

$$u : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$$

est dit *compatible avec* R et R′ si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, deux points de X(S) congrus modulo R(S) sont transformés par u en deux points de X′(S) congrus modulo R′(S) ;

(ii) il existe un morphisme $\mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ (nécessairement unique) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}' \arrow[d] \\ \mathrm{X} \times \mathrm{X} \arrow[r, "u\times u"] & \mathrm{X}' \times \mathrm{X}' \end{tikzcd} \quad .$$

D'après la propriété universelle de X/R, il existe alors (lorsque les quotients X/R et X′/R′ existent) un morphisme unique v rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{X}/\mathrm{R} \arrow[d, "v"'] \\ \mathrm{X}' \arrow[r, "p'"] & \mathrm{X}'/\mathrm{R}' \end{tikzcd} \quad .$$

---

topologie (fppf), cf. 4.6.6 (ii) et 6.3.2. Par contre, le quotient Q dans $\widehat{\mathscr{C}}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{G}_m$ puisque, par exemple, $\mathrm{Q}(\mathbb{Z}) = \{1\}$ tandis que $\mathbb{G}_m(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$. Donc Q n'est pas un faisceau (fppf), et a fortiori Q n'est pas représentable.

[12] N.D.E. : Prendre garde que, même pour une $\widehat{\mathscr{C}}$-relation d'équivalence dans X, on s'intéresse à l'existence d'un quotient *dans* $\mathscr{C}$.

175 ***Définition 3.1.5.*** — Un sous-objet (= un sous-foncteur représentable) Y de X est dit *stable* par la relation d'équivalence R si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, le sous-ensemble Y(S) de X(S) est stable par R(S).

(ii) Les deux sous-objets de R images inverses de Y par p_1 et p_2 sont identiques.

Un cas particulier important de sous-objet stable de X est le suivant : le quotient X/R existe et Y est l'image inverse sur X d'un sous-objet de X/R.

Définition 3.1.6. — Soient R une relation d'équivalence dans X et $X' \to X$ un morphisme. La relation d'équivalence R′ dans X′ obtenue par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[d] \\ X' \times X' \arrow[r] & X \times X \end{tikzcd}$$

est dite la relation d'équivalence dans X′ *image inverse* de la relation d'équivalence R dans X. En particulier, si X′ est un sous-objet de X, on dira que c'est la relation d'équivalence *induite* dans X′ par R, on la notera $R_{X'}$.

Le morphisme $X' \to X$ est compatible avec R′ et R ; on a donc, lorsque les quotients existent, un morphisme $X'/R' \to X/R$ (3.1.4). Si X′ est un sous-objet de X, nous verrons plus tard que dans certains cas on peut prouver que $X'/R' \to X/R$ est un monomorphisme, donc identifie X′/R′ à un sous-objet de X/R. Lorsqu'il en sera ainsi, l'image inverse de ce sous-objet dans X sera un sous-objet de X majorant X′ et stable par R : le *saturé* de X′ pour la relation d'équivalence R.

176 ***Proposition 3.1.7.*** — *Si le sous-objet* Y *de* X *est stable par* R*, on a deux carrés cartésiens, pour* $i = 1, 2$ *:*

$$\begin{tikzcd} R_Y \arrow[r] \arrow[d, "p_i"'] & R \arrow[d, "p_i"'] \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd} \quad .$$

Démonstration immédiate.

3.2. Relation d'équivalence définie par un groupe opérant librement

Définition 3.2.1. — Soient X un objet de $\mathscr{C}$ et H un $\mathscr{C}$-groupe opérant sur X (c'est-à-dire muni d'un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes

$$H \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(X)\ ).$$

On dit que H opère *librement* sur X si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, le groupe H(S) opère librement sur X(S) ;

(ii) Le morphisme de foncteurs

$$\mathrm{H} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \times \mathrm{X}$$

défini ensemblistement par $(h, x) \mapsto (hx, x)$ est un monomorphisme.

(Dans la définition précédente, on a supposé que le groupe H opérait « à gauche » sur X. On a évidemment une notion analogue dans le cas où le groupe opère « à droite » c'est-à-dire lorsqu'on s'est donné un morphisme de groupes du groupe H° opposé à H dans $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{X})$).

Si H opère librement sur X, l'image de H × X par le morphisme de (ii) est une relation d'équivalence dans X dite *relation d'équivalence définie par l'action de* H *sur* X. Lorsque le quotient de X par cette relation d'équivalence existe, on le note $\mathrm{H}\backslash\mathrm{X}$ **177**
(X/H lorsque H opère à droite). Il représente le foncteur covariant suivant : si Z est un objet de $\mathscr{C}$, on a

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{H}\backslash\mathrm{X}, \mathrm{Z}) = \{\text{morphismes de X dans Z invariants par H}\}$$

où le morphisme $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ est dit invariant par H si pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, le morphisme $\mathrm{X}(\mathrm{S}) \to \mathrm{Z}(\mathrm{S})$ correspondant est invariant sous le groupe H(S).

Lemme 3.2.2. — *Sous les conditions de* 3.2.1*, soit* Y *un sous-objet de* X*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Y *est stable par la relation d'équivalence définie par* H (3.1.5) *;*

(ii) *Pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$*, le sous-ensemble* Y(S) *de* X(S) *est stable sous* H(S) *;*

(iii) *Il existe un morphisme f, nécessairement unique, rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H} \times \mathrm{Y} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathrm{Y} \arrow[d] \\
\mathrm{H} \times \mathrm{X} \arrow[r] & \mathrm{X}
\end{tikzcd} .$$

Sous ces conditions, f définit un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$-groupes

$$\mathrm{H} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{Y})$$

et la relation d'équivalence définie dans Y *par cette opération de* H *n'est autre que la relation d'équivalence induite dans* Y *par la relation d'équivalence définie dans* X *par l'action de* H.

Démonstration immédiate. On a évidemment un énoncé analogue pour une « opération à droite ». L'opération de H sur Y définie ci-dessus sera appelée opération *induite* dans Y par l'opération donnée de H sur X.

Considérons maintenant la situation suivante : H et G sont deux $\mathscr{C}$-groupes et on **178**
s'est donné un morphisme de groupes

$$u : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G}.$$

Alors H opère sur G par translations (on pose ensemblistement $hg = u(h)g$) et y opère *librement* si et seulement si u est un *monomorphisme*. Le quotient de G par cette opération de H est noté, lorsqu'il existe, $\mathrm{H}\backslash\mathrm{G}$. On définit de même une opération à droite de H sur G et un quotient G/H. Ces quotients sont fonctoriels par rapport aux groupes en cause ; de manière précise, on a le lemme suivant, énoncé pour les quotients à droite :

Lemme 3.2.3. — *Soient $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ et $u' : \mathrm{H}' \to \mathrm{G}'$ deux monomorphismes de $\mathscr{C}$-groupes. Supposons donné un morphisme de $\mathscr{C}$-groupes*

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'.$$

Les condition suivantes sont équivalentes :

(i) *f est compatible avec les relations d'équivalences définies dans* G *et* G′ *par* H *et* H′.

(ii) *Pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, *on a* $fu(\mathrm{H}(\mathrm{S})) \subset u'(\mathrm{H}'(\mathrm{S}))$.

(iii) *Il existe un morphisme $g : \mathrm{H} \to \mathrm{H}'$, nécessairement unique et multiplicatif, tel que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{H}' \arrow[d, "u'"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "f"] & \mathrm{G}' \end{tikzcd} .$$

Sous ces conditions, si les quotients G/H *et* G′/H′ *existent, il existe un morphisme unique $\overline{f}$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{G}' \arrow[d, "p'"] \\ \mathrm{G}/\mathrm{H} \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathrm{G}'/\mathrm{H}' \end{tikzcd} .$$

179

La première partie se démontre par réduction au cas ensembliste. La seconde résulte immédiatement de (i).

On pourrait traduire dans la situation présente les notions introduites ci-dessus pour des relations d'équivalences générales. Signalons simplement le lemme suivant dont la démonstration est immédiate par réduction au cas ensembliste :

Lemme 3.2.4. — *Soient $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ un monomorphisme de $\mathscr{C}$-groupes et* G′ *un sous-$\mathscr{C}$-groupe de* G. *Pour que le sous-objet* G′ *de* G *soit stable par la relation d'équivalence définie par* H, *il faut et il suffit que u se factorise par le monomorphisme canonique* $\mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ *et sous cette condition l'opération de* H *sur* G′ *induite par l'opération de* H *sur* G *définie par u n'est autre que l'opération déduite du monomorphisme* $\mathrm{H} \to \mathrm{G}'$ *factorisant u.*

3.3. Relations d'équivalence effectives universelles

Définition 3.3.1. — Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme. On appelle *relation d'équivalence définie par* f dans X et on note $\mathscr{R}(f)$, la $\widehat{\mathscr{C}}$-relation d'équivalence dans X image du monomorphisme canonique

$$\mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}.$$

Définition 3.3.2. — Soit R une relation d'équivalence dans X. On dit que R est *effective* si

(i) R est représentable (i.e. est une $\mathscr{C}$-relation d'équivalence) ;

(ii) le quotient $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{R}$ existe dans $\mathscr{C}$ [13] ;

(iii) le diagramme 180

$$\mathrm{R} \overset{p_1, p_2}{\rightrightarrows} \mathrm{X} \xrightarrow{\quad p \quad} \mathrm{Y}$$

fait de R le carré fibré de X au-dessus de Y, c'est-à-dire R est la relation d'équivalence définie par p.

Scholie 3.3.2.1. — [14] Si R est une relation d'équivalence effective dans X, alors p est un épimorphisme effectif (1.3). Si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un épimorphisme effectif, alors $\mathscr{R}(f)$ est une relation d'équivalence effective dans X dont un quotient est Y. Il y a donc une *correspondance* « galoisienne » *biunivoque* entre relations d'équivalence effectives dans X et quotients effectifs de X (i.e. classes d'équivalence d'épimorphismes effectifs de source X).

Définition 3.3.3. — On dit que la relation d'équivalence R dans X est *effective universelle* si le quotient $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{R}$ existe, et si, pour tout $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$, les produits fibrés $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ et $\mathrm{R}' = \mathrm{R} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ existent et R′ est un carré fibré de X′ au-dessus de Y′. Il revient au même de dire que R est *effective* et que $p : \mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathrm{R}$ est un *épimorphisme effectif universel*.

Scholie 3.3.3.1. — [14] Il y a donc comme ci-dessus correspondance *biunivoque* entre relations d'équivalence effectives universelles dans X et quotients effectifs universels de X.

Remarque 3.3.3.2. — [14] Supposons que $\mathscr{C}$ soit la catégorie des S-schémas et notons $\mathbb{A}^1$ l'espace affine de dimension 1 sur S. Soient $\mathrm{R} \subset \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ une relation d'équivalence effective universelle et $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ le quotient. Alors, pour tout ouvert U de Y, $\mathscr{O}(\mathrm{U}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathbb{A}^1_{\mathrm{S}})$ est l'ensemble des éléments ϕ de $\mathscr{O}(p^{-1}(\mathrm{U})) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(p^{-1}(\mathrm{U}), \mathbb{A}^1_{\mathrm{S}})$ tels que $\phi \circ \mathrm{pr}_1 = \phi \circ \mathrm{pr}_2$. En particulier, si R est donnée par l'action d'un groupe H opérant librement à droite sur X (cf. 3.2.1), alors $\mathscr{O}(\mathrm{U})$ est l'ensemble des $\phi \in \mathscr{O}(p^{-1}(\mathrm{U}))$ tels que $\phi(xh) = \phi(x)$, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$, $h \in \mathrm{H}(\mathrm{S}')$.

---

[13] N.D.E. : On a ajouté « dans $\mathscr{C}$ ».

[14] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 3.3.2.1 (resp. 3.3.3.1) pour des références ultérieures. D'autre part, on a ajouté la remarque 3.3.3.2.

Proposition 3.3.4. — *Soit* R *une relation d'équivalence effective universelle dans* X. *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ *un morphisme compatible avec* R *donc se factorisant par* $g : \mathrm{X}/\mathrm{R} \to \mathrm{Z}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) g *est un monomorphisme ;*

(ii) R *est la relation d'équivalence définie par* f.

En effet, (i) entraîne (ii) trivialement, la réciproque n'est autre que 2.5.

181 ***Définition 3.3.5***. — Soit H un $\mathscr{C}$-groupe opérant librement sur X. On dit que H opère de manière effective, ou que l'opération de H sur X est effective (resp. effective universelle), si la relation d'équivalence définie dans X par l'action de H est effective (resp. effective universelle).

3.4. (M)-effectivité. — Dans la pratique, il est le plus souvent difficile de caractériser les épimorphismes effectifs universels. On dispose souvent, néanmoins, d'un certain nombre de morphismes de ce type, par exemple en théorie des schémas, des morphismes fidèlement plats quasi-compacts. Cela conduit aux développements ci-dessous.

3.4.1. — Énonçons d'abord un certain nombre de conditions portant sur une famille (M) de morphismes de $\mathscr{C}$:

(a) (M) *est stable par extension de la base*, c.-à-d., tout $u : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ élément de (M) est quarrable (cf. 1.4.0) et pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $u' : \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$ est élément de (M).

(b) Le *composé* de deux éléments de (M) est dans (M).

(c) Tout *isomorphisme* est élément de (M).

(d) Tout élément de (M) est un épimorphisme *effectif.*

Notons que (a) et (b) entraînent :

(a′) Le *produit cartésien* de deux éléments de (M) est dans (M) : Soient $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et $u' : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ deux S-morphismes éléments de (M). Si $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}'$ existe, alors $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}'$ existe et $u \times_{\mathrm{S}} u'$ est élément de (M).

Cela résulte du diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Y}' & \mathrm{X}' \arrow[l, "u'"'] \\ \mathrm{X} \arrow[d, "u"'] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}' \arrow[l] \arrow[u] \arrow[dl, "u \times_{\mathrm{S}} u'"] \\ \mathrm{Y} & \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}' \arrow[l] & \end{tikzcd} .$$

182 De même (a) et (d) entraînent :

(d′) Tout élément de (M) est un épimorphisme *effectif universel.*

3.4.2. — La famille (M_0) des épimorphismes effectifs universels vérifie les conditions (a) à (d) de 3.4.1. En effet, (a), (c) et (d) sont vérifiés par définition, (b) résulte de 1.8. Dans la suite, nous supposerons donnée une famille (M) de morphismes de $\mathscr{C}$ vérifiant ces conditions : nos résultats s'appliqueront donc à la famille (M_0) en particulier.

Définition 3.4.3. — On dit que la relation d'équivalence R dans X est *de type* (M) si elle est représentable et si $p_1 \in (\mathrm{M})$ (ce qui par (b) et (c) entraîne que $p_2 \in (\mathrm{M})$).

On dit que R est (M)-*effective* si elle est effective et si le morphisme canonique $\mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathrm{R}$ est élément de (M).

On dit que le quotient Y de X est (M)-*effectif* si le morphisme canonique $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est élément de (M).

Il résulte de cette définition les conséquences suivantes : [15]

Proposition 3.4.3.1. — (i) *Une relation d'équivalence* (M)*-effective est de type* (M) *et effective universelle.*

(ii) *Un quotient* (M)*-effectif est effectif universel* (*cf.* 3.3.3).

(iii) *Les applications* $\mathrm{R} \mapsto \mathrm{X}/\mathrm{R}$ *et* $p \mapsto \mathscr{R}(p)$ *réalisent une correspondance biunivoque entre relations d'équivalence* (M)*-effectives dans* X *et quotients* (M)*-effectifs de* X.

(iv) (M_0)*-effectif équivaut à effectif universel.*

Démontrons le point (i). Comme R est (M)-effective, on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "p"] & \mathrm{X}/\mathrm{R} \end{tikzcd} \quad ,$$

et $p \in (\mathrm{M})$. Alors, d'après 3.4.1 (a), p_1 et p_2 appartiennent à (M), donc R est de type (M).

Posons $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{R}$ et soit $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ un morphisme arbitraire. D'après 3.4.1 (a), les produits fibrés $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ et $\mathrm{R}' = \mathrm{R} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ existent et les morphismes $\mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ et $p_i' : \mathrm{R}' \to \mathrm{X}'$ appartiennent à (M). Enfin, comme $\mathrm{R} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$, on obtient, par associativité du produit fibré :

$$\mathrm{R}' = \mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{Y}' = \mathrm{X}' \underset{\mathrm{Y}'}{\times} \mathrm{X}'.$$

Ceci montre que R′ est (M)-effective ; donc, en particulier, R est effective universelle. Ceci prouve (i), et aussi (iv). Les points (ii) et (iii) en découlent, en tenant compte de la définition 3.3.2.

3.4.4. — Soit H un S-groupe dont le morphisme structural soit élément de (M). Alors **183**
si H opère *librement* sur le S-objet X, il y définit une relation d'équivalence de type

[15] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 3.4.3.1, pour des références ultérieures, et l'on a détaillé la démonstration du point (i).

(M). En effet par (a) le produit fibré $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ existe et $\mathrm{pr}_2 : \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ est élément de (M). On dira que l'opération de H est (M)-*effective* si la relation d'équivalence définie dans X par cette opération est (M)-effective.

Proposition 3.4.5 **((M)-effectivité et changement de base)**. — *Soit* R *une relation d'équivalence* (M)*-effective dans* X *au-dessus de* S. *Posons* $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{R}$. *Soit* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un changement de base tel que* $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *existe. Alors* $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *existe,* $\mathrm{R}' = \mathrm{R} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *est une relation d'équivalence* (M)*-effective dans* X′ *au-dessus de* S′ *et* $\mathrm{X}'/\mathrm{R}' \simeq (\mathrm{X}/\mathrm{R})'$.

En effet, les morphismes canoniques $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et $\mathrm{R} \to \mathrm{Y}$ sont éléments de (M), donc par (a′) X′ et R′ sont représentables. Par associativité du produit, R′ est la relation d'équivalence définie dans X′ par le morphisme canonique $\mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ qui est élément de (M), d'où la conclusion.

Proposition 3.4.6 **((M)-effectivité et produits cartésiens)**. — *Soit* R (*resp.* R′) *une relation d'équivalence* (M)*-effective dans* X (*resp.* X′) *au-dessus de* S. *Si* $(\mathrm{X}/\mathrm{R}) \times_{\mathrm{S}} (\mathrm{X}'/\mathrm{R}')$ *existe, alors* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}'$ *existe,* $\mathrm{R} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{R}'$ *est une relation d'équivalence* (M)*-effective dans* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}'$ *au-dessus de* S *et*

$$(\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}')/(\mathrm{R} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{R}') \simeq (\mathrm{X}/\mathrm{R}) \underset{\mathrm{S}}{\times} (\mathrm{X}'/\mathrm{R}').$$

Posons $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{R}, \mathrm{Y}' = \mathrm{X}'/\mathrm{R}'$. D'après (a′), le produit fibré $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}'$ existe et le morphisme canonique

$$q : \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}' \to \mathrm{Y} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y}'$$

est élément de (M). Or la formule

$$(\mathrm{X} \times \mathrm{X}') \underset{(\mathrm{Y} \times \mathrm{Y}')}{\times} (\mathrm{X} \times \mathrm{X}') \simeq (\mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X}) \times (\mathrm{X}' \underset{\mathrm{Y}'}{\times} \mathrm{X}')$$

184 (tous les produits non indicés sont pris sur S) montre que $\mathrm{R} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{R}'$ est la relation d'équivalence définie par q dans $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}'$, ce qui achève la démonstration.

3.4.7. — [16] Supposons que $\mathscr{C}$ possède un objet final e et soit $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un morphisme de $\mathscr{C}$-groupes, tel que $f \in (\mathrm{M})$. Alors, d'après 3.4.1 (a), le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est représentable par $e \times_{\mathrm{G}'} \mathrm{G}$, et le morphisme $\mathrm{Ker}(f) \to e$ appartient à (M).

D'autre part, la relation d'équivalence définie par f est la même que celle définie par l'action de $\mathrm{Ker}(f)$ (disons, à droite) sur G, c.-à-d., c'est l'image du morphisme $\mathrm{G} \times \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{G} \times \mathrm{G}$, défini ensemblistement par $(g, h) \mapsto (g, gh)$. Par conséquent, on déduit de 3.3.2.1 le corollaire suivant :

Corollaire 3.4.7.1. — *Supposons que* $\mathscr{C}$ *possède un objet final* e *et soit* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme de* $\mathscr{C}$*-groupes, tel que* $f \in (\mathrm{M})$. *Alors l'action de* $\mathrm{Ker}(f)$ *sur* G *est* (M)*-effective et* G′ *est le quotient* $\mathrm{G}/\mathrm{Ker}(f)$.

[16] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe.

3.5. Construction de quotients par descente. — Il arrive fréquemment que l'on ne sache pas construire directement un quotient, mais qu'on sache le faire après un changement de base convenable. Le présent numéro donne un critère utile dans cette situation.

On a vu au paragraphe 2.1 la définition d'une donnée de descente sur un objet X' au-dessus de S' relativement à un morphisme $S' \to S$.

Définition 3.5.1. — On dit qu'une donnée de descente sur X' relativement à $S' \to S$ est *effective*, si X' muni de cette donnée de descente est isomorphe à l'image réciproque sur S' d'un objet X au-dessus de S, munie de sa donnée de descente canonique.

Si $S' \to S$ est un morphisme de descente (2.2), alors le X de la définition est unique à isomorphisme unique près. Dire que $S' \to S$ est un morphisme de descente effective (2.2), c'est dire que c'est un morphisme de descente et que toute donnée de descente relativement à ce morphisme est effective.

Considérons maintenant une relation d'équivalence R dans un objet X au-dessus de S. Soient X' (resp. X'', resp. X''') les images inverses de X sur S', $S'' = S' \times_S S'$ et $S''' = S' \times_S S' \times_S S'$ et soient R', R'', R''' les relations d'équivalence déduites de R par image inverse. Supposons que la relation d'équivalence R' dans X' soit (M)-effective, et considérons le quotient $Y' = X'/R'$ qui est un objet au-dessus de S'. Ses deux images inverses sur S'' sont isomorphes à X''/R'' d'après 3.4.5. Le S'-objet Y' est donc muni d'une donnée de recollement canonique. Utilisant de même l'unicité de X'''/R''', on voit que c'est même une *donnée de descente*. (Remarque : on a implicitement supposé dans cette démonstration que tous les produits fibrés écrits existaient, ce qui est le cas en particulier si $S' \to S$ est quarrable, par exemple un morphisme de descente).

Proposition 3.5.2. — *Soit* R *une relation d'équivalence dans l'objet* X *au-dessus de* S. 185
Soit $S' \to S$ *un épimorphisme effectif universel. Supposons que tout* S*-morphisme dont l'image inverse sur* S' *est dans* (M) *soit lui-même dans* (M). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) R *est* (M)*-effective dans* X *;*

(ii) R' *est* (M)*-effective dans* X' *et la donnée de descente canonique sur* X'/R' *est effective.*

S'il en est ainsi, l'objet « descendu » de X'/R' *est canoniquement isomorphe à* X/R.

Le fait que (i) entraîne (ii) n'est autre que la traduction dans le langage de la descente de 3.4.4. Si on montre la réciproque, la dernière affirmation de la proposition sera conséquence du fait qu'un épimorphisme effectif universel est un morphisme de descente (2.3), donc que l'« objet descendu » est unique (à isomorphisme unique près).

Démontrons donc (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit Y' le quotient X'/R' et Y l'objet descendu. Comme le morphisme canonique $p' : X' \to X'/R' = Y'$ est compatible par construction avec les données de descente (ses images inverses sur S'' coïncident avec le morphisme canonique $X'' \to X''/R''$), il provient par image inverse sur S' d'un S-morphisme $p : X \to Y$. Comme p' est élément de (M), il résulte de l'hypothèse faite sur le morphisme $S' \to S$ que p est également élément de (M). Comme p' est compatible avec la relation d'équivalence R', p est compatible avec R, toujours parce qu'un épimorphisme effectif universel est un morphisme de descente. On a donc un morphisme

$$R \longrightarrow X \underset{Y}{\times} X.$$

Pour démontrer que R est (M)-effective et que Y est isomorphe à X/R, il suffit de prouver que ce morphisme est un isomorphisme. Or il le devient par extension de la base de S à S', car R' est effective ; c'est donc un isomorphisme pour la même raison que précédemment (2.4).

186 Remarquons que l'hypothèse du texte est vérifiée si on prend pour (M) la famille (M_0) des épimorphismes effectifs universels et si $\mathscr{C}$ possède des produits fibrés (1.10). On en déduit le

Corollaire 3.5.3. — *Supposons que $\mathscr{C}$ possède des produits fibrés* (*au-dessus de* S *suffirait*). *Soient* R *une relation d'équivalence dans* X *au-dessus de* S *et* $S' \to S$ *un épimorphisme effectif universel. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) R *est effective universelle dans* X,

(ii) R' *est effective universelle dans* X' *et la donnée de descente canonique sur* X'/R' *est effective.*

S'il en est ainsi, l'objet « descendu » de X'/R' *est canoniquement isomorphe à* X/R.

4. Topologies et faisceaux

La notion de crible, et la présentation de la notion de topologie (4.2.1) adoptée ici, (plus intrinsèque et plus commode à bien des égards que celle par familles couvrantes de [**MA**]), sont dus à J. Giraud [**AS**].

4.1. Cribles

Définition 4.1.1. — On appelle *crible* de la catégorie $\mathscr{C}$ un sous-foncteur C du foncteur final $\underline{\mathbf{e}} : \mathscr{C}^\circ \to (\mathbf{Ens})$.

À tout crible C de $\mathscr{C}$ on associe l'ensemble E(C) des objets X de $\mathscr{C}$ tels que $C(X) \neq \varnothing$, c'est-à-dire tels que le morphisme structural $X \to \underline{\mathbf{e}}$ se factorise par C. On a donc les équivalences

$$(+) \qquad \begin{cases} X \in E(C) \Longleftrightarrow C(X) = \underline{\mathbf{e}}(X) = \{\varnothing\}. \\ X \notin E(C) \Longleftrightarrow C(X) = \varnothing. \end{cases}$$

187 L'ensemble E = E(C) jouit de la propriété suivante :

(++) Si $X \in E$ et si $\mathrm{Hom}(Y, X) \neq \varnothing$, alors $Y \in E$.

(Remarquons que si on munit l'ensemble $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ de sa *structure de préordre naturelle*, (Y *dominant* X s'il existe une flèche de Y dans X), les ensembles E vérifiant (++)

sont les sous-ensembles de $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ qui contiennent tout majorant [17] d'un de leurs éléments.)

Réciproquement, si E est un sous-ensemble de $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ jouissant de la propriété (++), alors E s'écrit de manière unique sous la forme E(C) et C est défini par les formules (+). Il y a donc correspondance biunivoque entre les cribles de $\mathscr{C}$ et les sous-ensembles de $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ vérifiant la condition (++). Par *abus de langage*, nous dirons parfois que l'ensemble E(C) est un crible de $\mathscr{C}$.

[18] Soient C et C′ deux cribles de $\mathscr{C}$; comme ce sont deux sous-foncteurs du foncteur final $\underline{\mathrm{e}}$, il revient au même de dire que C *domine* C′ (pour la relation de domination dans $\mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$), ou que C est un *sous-foncteur* de C′, ou encore que $\mathrm{E(C)} \subset \mathrm{E(C')}$; on dira alors que C est *plus fin* que C′. On voit qu'il s'agit dans ce cas d'une structure d'ordre sur l'ensemble des cribles de $\mathscr{C}$. De plus, on a $\mathrm{E(C)} \cap \mathrm{E(C')} = \mathrm{E(C \times C')}$ et donc l'ensemble des cribles de $\mathscr{C}$ est *filtrant* pour la relation d'ordre « être plus fin ».

Tout sous-ensemble E de $\mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$, par exemple un sous-ensemble de $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, définit un crible C(E) : l'ensemble des $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, tels que $\mathrm{F(X)} \neq \varnothing$ pour au moins un $\mathrm{F} \in \mathrm{E}$ vérifie la condition (++) et définit le crible cherché.

Ce crible peut aussi être défini comme l'*image* de la famille de morphismes $\{\mathrm{F} \to \underline{\mathrm{e}}, \mathrm{F} \in \mathrm{E}\}$ au sens de la définition suivante :

Définition 4.1.2. — Soit $\{\mathrm{F}_i \to \mathrm{F}\}$ une famille de morphismes de $\widehat{\mathscr{C}}$ de même but F. On appelle *image* de cette famille le sous-foncteur de F défini par

$$\mathrm{S} \mapsto \bigcup_i \mathrm{Im}\,\mathrm{F}_i(\mathrm{S}) \subset \mathrm{F(S)}.$$

Proposition 4.1.3. — *La formation de* l'image commute à l'extension de la base *: dans les notations précédentes, désignons par* I *l'image de la famille* $\{\mathrm{F}_i \to \mathrm{F}\}$ *; pour tout morphisme* $\mathrm{G} \to \mathrm{F}$ *de* $\widehat{\mathscr{C}}$*, l'image de la famille de morphismes* $\{\mathrm{F}_i \times_{\mathrm{F}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}\}$ *est le sous-foncteur* $\mathrm{I} \times_{\mathrm{F}} \mathrm{G}$ *de* G.

Définition 4.1.4.0. — [19] Soit C un crible de $\mathscr{C}$. Si E est un sous-ensemble de $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ tel que C(E) = C, on dit que E est une *base* de C. Tout crible C possède une base, 188
par exemple l'ensemble E(C).

Nous nous proposons de décrire l'ensemble Hom(C, F), où C est un crible de $\mathscr{C}$ et F un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$, à l'aide d'une base $\{\mathrm{S}_i\}$ de C. Pour chaque couple (i, j), on a un

[17] N.D.E. : Ici, « majorant » est pris au sens de la relation de préordre sus-mentionnée, c.-à-d., Y majore X s'il existe une flèche $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$. D'autre part, si X, Y sont deux sous-objets d'un objet Z, on dit (cf. 2.4) que Y majore X si $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$. Pour éviter toute ambiguïté entre ces deux terminologies, on a remplacé dans la suite « majorant » par « *dominant* » dans le premier cas, et par « *contenant* », dans le second.

[18] N.D.E. : On a détaillé la phrase qui suit.

[19] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.1.4.0, pour mettre en évidence cette définition.

diagramme dans $\widehat{\mathscr{C}}$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}_i \times \mathrm{S}_j \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{S}_i \arrow[d] \\ \mathrm{S}_j \arrow[r] & \underline{\mathbf{e}} \end{tikzcd},$$

d'où un diagramme d'ensembles

$$\Gamma(\mathrm{F}) = \mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, \mathrm{F}) \xrightarrow{\ \sigma\ } \prod_i \mathrm{Hom}(\mathrm{S}_i, \mathrm{F}) \overset{\tau_1}{\underset{\tau_2}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(\mathrm{S}_i \times \mathrm{S}_j, \mathrm{F})$$

tel que $\tau_1\sigma = \tau_2\sigma$. On a donc un morphisme

$$\mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, \mathrm{F}) \longrightarrow \mathrm{Ker}\left(\prod_i \mathrm{Hom}(\mathrm{S}_i, \mathrm{F}) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(\mathrm{S}_i \times \mathrm{S}_j, \mathrm{F})\right).$$

On vérifie immédiatement :

Proposition 4.1.4. — *On a un isomorphisme fonctoriel en* F

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{C}, \mathrm{F}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Ker}\left(\prod_i \mathrm{Hom}(\mathrm{S}_i, \mathrm{F}) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(\mathrm{S}_i \times \mathrm{S}_j, \mathrm{F})\right),$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, \mathrm{F}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ker}\left(\prod_i \mathrm{Hom}(\mathrm{S}_i, \mathrm{F}) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(\mathrm{S}_i \times \mathrm{S}_j, \mathrm{F})\right) \\ \mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{e}}, \mathrm{F}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{C}, \mathrm{F}) \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd},$$

où la dernière ligne est induite par le morphisme canonique $\mathrm{C} \to \underline{\mathbf{e}}$*, soit commutatif.*

189 ***Corollaire 4.1.5***. — *Supposons que les produits fibrés* $\mathrm{S}_i \times \mathrm{S}_j$ *soient représentables, par exemple que les* S_i *soient quarrables. On a alors pour tout* $\mathrm{F} \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$*, un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{C}, \mathrm{F}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Ker}\left[\prod_i \mathrm{F}(\mathrm{S}_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{F}(\mathrm{S}_i \times \mathrm{S}_j)\right].$$

Remarque 4.1.6. — Soit R un crible de $\mathscr{C}$; désignons par $\mathscr{R}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ dont l'ensemble des objets est E(R) et par

$$i_{\mathrm{R}} : \mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{C}$$

le foncteur d'inclusion. On a un isomorphisme fonctoriel en $\mathrm{F} \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{R}, \mathrm{F}) \xrightarrow{\ \sim\ } \Gamma(\mathrm{F} \circ i_{\mathrm{R}})$$

tel que le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\underline{e}, \mathrm{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{R}, \mathrm{F}) \arrow[d, "\wr"'] \\
\Gamma(\mathrm{F}) \arrow[r] & \Gamma(\mathrm{F} \circ i_{\mathrm{R}})
\end{tikzcd} \quad ,
$$

où la seconde ligne est induite par le foncteur i_{R}, soit commutatif.

Définition 4.1.7. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On appelle *crible* de l'objet S de $\mathscr{C}$ un crible de la catégorie $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$.

Un crible de S est donc un sous-$\widehat{\mathscr{C}}$-objet de S. Il lui correspond canoniquement un sous-ensemble de $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ contenant la source de toute flèche dont il contient le but. Par abus de langage, un tel ensemble sera aussi appelé *crible* de S.

4.2. Topologies : définitions

Définition 4.2.1. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On appelle *topologie* sur $\mathscr{C}$ la donnée pour chaque S de $\mathscr{C}$ d'un ensemble J(S) de cribles de S, appelés *cribles couvrants* ou *raffinements* de S, donnée vérifiant les axiomes suivants : 190

(T 1) Pour tout raffinement R de S et tout morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, le crible $\mathrm{R} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ de T est couvrant (« stabilité par *changement de base* »).

(T 2) Si R, C sont deux cribles de S, si R est couvrant et si pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{R}$, le crible $\mathrm{C} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ de T est couvrant, alors C est un raffinement de S. [20]

(T 3) Si $\mathrm{C} \supset \mathrm{R}$ sont deux cribles de S et si R est couvrant, alors C est couvrant.

(T 4) Pour tout S, S est un raffinement de S.

On peut reformuler ces axiomes de la manière suivante. Supposons donnée une topologie $\mathrm{S} \mapsto \mathrm{J}(\mathrm{S})$ sur $\mathscr{C}$ et, pour tout objet F de $\widehat{\mathscr{C}}$, notons J(F) l'ensemble des sous-foncteurs R de F tels que pour tout morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{F}$ de $\widehat{\mathscr{C}}$, où T est *représentable*, $\mathrm{R} \times_{\mathrm{F}} \mathrm{T}$, qui est un crible de T, soit *couvrant*. En vertu de (T 1), cette notation est bien compatible avec la précédente. On dira également que $\mathrm{R} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$ est un *raffinement* de F. On vérifie immédiatement que les axiomes précédents entraînent les propriétés suivantes :

(T′ 0) Si $\mathrm{F} \supset \mathrm{G}$ sont deux objets de $\widehat{\mathscr{C}}$, et si pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout morphisme $\mathrm{S} \to \mathrm{F}$, $\mathrm{G} \times_{\mathrm{F}} \mathrm{S} \in \mathrm{J}(\mathrm{S})$, alors $\mathrm{G} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$.

(T′ 1) Si $\mathrm{G} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$, et si $\mathrm{H} \to \mathrm{F}$ est un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$, alors $\mathrm{G} \times_{\mathrm{F}} \mathrm{H} \in \mathrm{J}(\mathrm{H})$.

(T′ 2) Si $\mathrm{F} \supset \mathrm{G} \supset \mathrm{H}$ sont trois objets de $\widehat{\mathscr{C}}$, si $\mathrm{G} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$ et $\mathrm{H} \in \mathrm{J}(\mathrm{G})$, alors $\mathrm{H} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$.

(T′ 3) Si $\mathrm{F} \supset \mathrm{G} \supset \mathrm{H}$ sont trois objets de $\widehat{\mathscr{C}}$ et si $\mathrm{H} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$, alors $\mathrm{G} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$.

(T′ 4) Pour tout $\mathrm{F} \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$, $\mathrm{F} \in \mathrm{J}(\mathrm{F})$.

---

[20] N.D.E. : c'est-à-dire : si C est couvrant « *localement par rapport au crible couvrant* R », alors C est couvrant.

191 Réciproquement, si on se donne pour tout $F \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$ un ensemble $J(F)$ de sous-objets de F vérifiant les propriétés (T′ 0) à (T′ 4), l'application $S \mapsto J(S)$ définit une topologie sur $\mathscr{C}$ et les deux constructions précédentes sont inverses l'une de l'autre.

De (T′ 1), (T′ 2) et (T′ 3) [21] résulte la propriété suivante :

(T′ 5) Si G et H sont deux sous-objets de F et si $G, H \in J(F)$, alors $G \cap H \in J(F)$.

L'ensemble J(F), ordonné par la relation $\supset$ est donc *filtrant* ; cette remarque nous servira plus tard.

4.2.2. — On dira que la topologie définie par J est plus fine que la topologie définie par J′ si pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $J(S) \supset J'(S)$ (il revient au même de dire que pour tout $F \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$, $J(F) \supset J'(F)$).

Tout ensemble de topologies sur $\mathscr{C}$ possède une borne *inférieure* : soit I un ensemble d'indices, et pour chaque $i \in I$, soit $S \mapsto J_i(S)$ une topologie sur $\mathscr{C}$. Posons $J(S) = \bigcap_{i\in I} J_i(S)$; il est immédiat que l'on a défini ainsi une topologie sur $\mathscr{C}$, et que c'est bien la borne inférieure de l'ensemble donné.

En particulier, donnons-nous pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, un ensemble E(S) de cribles de S. On appelle *topologie engendrée* par ces ensembles la topologie la moins fine pour laquelle les éléments de E(S) soient des raffinements de S pour tout S.

Définition 4.2.3. — Soit $\{F_i \to F\}$ une famille de morphismes de $\widehat{\mathscr{C}}$. Soit $G \subset F$ l'image (4.1.2) de cette famille. La famille est dite *couvrante* si $G \in J(F)$. Un morphisme est dit *couvrant* si la famille réduite à ce morphisme est couvrante.

Cette définition s'applique en particulier à une inclusion : un crible C de S est couvrant si et seulement si le morphisme canonique $C \to S$ est couvrant.

192 Les axiomes (T′ 0) à (T′ 5) entraînent pour les familles couvrantes les propriétés suivantes :

(C 0) Soit $\{F_i \to F\}$ une famille de morphismes de $\widehat{\mathscr{C}}$. Si pour tout changement de base *représentable* $S \to F$, la famille $\{F_i \times_F S \to S\}$ est couvrante, alors la famille initiale l'est aussi.

(C 1) Pour toute famille couvrante $\{F_i \to F\}$ et tout morphisme $G \to F$, la famille $\{F_i \times_F G \to G\}$ est couvrante (« *stabilité par changement de base* »).

(C 2) Si $\{F_i \to F\}$ est une famille couvrante et si, pour chaque i, $\{F_{ij} \to F_i\}$ est une famille couvrante, alors la famille composée $\{F_{ij} \to F\}$ est couvrante (« *stabilité par composition* »).

(C 3) Si $\{G_j \to F\}$ est une famille couvrante, et si $\{F_i \to F\}$ est une famille de morphismes de but F telle que pour chaque j il existe un i tel que $G_j \to F$ se factorise par $F_i \to F$, alors $\{F_i \to F\}$ est couvrante (« *saturation* »).

(C 4) Toute famille réduite à un isomorphisme est couvrante.

Noter que (C 2) et (C 3) entraînent aussi :

[21] N.D.E. : (T′ 1) et (T′ 2) suffisent : $G \cap H = G \times_F H$ appartient à J(H), d'après (T′ 1), donc à J(F), d'après (T′ 2).

(C 5) Si $\{F_i \to F\}$ est une famille de morphismes de but F telle qu'il existe une famille couvrante $\{G_j \to F\}$ telle que pour tout j la famille $\{F_i \times_F G_j \to G_j\}$ soit couvrante, alors la famille $\{F_i \to F\}$ est couvrante (« *une famille localement couvrante est couvrante* »).

4.2.4. — Soit réciproquement $\mathscr{C}$ une catégorie *possédant des produits fibrés* et donnons-nous pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ un ensemble de familles de morphismes de $\mathscr{C}$ de but S dites familles *couvrantes*, donnée vérifiant les axiomes (C 1) à (C 4) (donc aussi (C 5) qui en est une conséquence). Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, soit J(S) l'ensemble **193**
des cribles de S possédant une base couvrante (ou, ce qui revient au même par (C 3), dont toutes les bases sont couvrantes). Alors $S \mapsto J(S)$ définit une topologie sur $\mathscr{C}$. Les deux constructions précédentes sont inverses l'une de l'autre.

En fait, dans les applications, il est peu pratique de considérer *toutes* les familles couvrantes, car on possède parfois des descriptions assez simples d'un nombre « suffisant » de ces familles. Cela conduit à poser les définitions suivantes.

Définition 4.2.5.0. — [22] Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On suppose donné, pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, un ensemble P(S) de familles de morphismes de $\mathscr{C}$ de but S. On appelle topologie *engendrée* par P la topologie la moins fine pour laquelle les familles données soient couvrantes.

Définition 4.2.5. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On appelle *prétopologie* sur $\mathscr{C}$ la donnée pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ d'un ensemble R(S) de familles de morphismes $\{S_i \to S\}$ de but S dites *couvrantes* pour la prétopologie envisagée, vérifiant les axiomes suivants :

(P 1) Pour toute famille $\{S_i \to S\} \in R(S)$ et tout morphisme $T \to S$, les produits fibrés $S_i \times_S T$ existent et $\{S_i \times_S T \to T\} \in R(T)$.

(P 2) Si $\{S_i \to S\} \in R(S)$ et si pour chaque i, $\{T_{ij} \to S_i\} \in R(S_i)$, alors la famille composée $\{T_{ij} \to S\}$ appartient à R(S).

(P 3) Toute famille réduite à un isomorphisme est couvrante.

Proposition 4.2.6. — *Soit pour tout* S, J(S) *l'ensemble des cribles de* S *couvrants pour la topologie engendrée par la prétopologie* R. *Soit* $J_R(S)$ *la partie de* J(S) *formée des cribles définis par les familles de* R(S). *Alors* $J_R(S)$ *est* cofinal *dans* J(S) *: tout raffinement de* S *contient un crible défini par une famille de* R(S).

Soit pour tout S, J′(S) l'ensemble des cribles de S contenant un crible de $J_R(S)$. **194**
On a évidemment $J'(S) \subset J(S)$. Pour montrer que $J(S) = J'(S)$, il suffit de montrer que les J′(S) font une topologie sur $\mathscr{C}$, c'est-à-dire vérifient les axiomes (T 1) à (T 4). Or (T 1), (T 3), (T 4) sont évidemment vérifiés. Il reste à vérifier (T 2). [23]

Soit donc U un élément de J′(S) et C un crible de S ; on suppose que pour tout $T \to U$, le crible $C \times_S T$ est dans J′(T) et il faut prouver que $C \in J'(S)$. Par définition de J′, U contient un raffinement U′ défini par une famille $\{S_i \to S\} \in R(S)$. Comme

[22] N.D.E. : On a mis ici cette définition (placée dans l'original après 4.2.5), car elle sera utilisée en 6.2.1 dans un cadre un peu plus général que celui de 4.2.5.
[23] N.D.E. : dans ce qui suit, on a corrigé des coquilles de l'original.

on a vérifié (T 3), il suffit de prouver que $U' \cap C \in J'(S)$, on peut donc supposer que $U = U'$. Par hypothèse, pour tout i, $C \times_S S_i \in J'(S_i)$; il existe donc pour chaque i une famille couvrante $\{T_{ij} \to S_i\} \in R(S_i)$ telle que $T_{ij} \to S_i$ se factorise par $C \times_S S_i \to S_i$. Le morphisme $T_{ij} \to S$ se factorise donc par $C \to S$, ce qui montre que C contient le crible défini par la famille composée $\{T_{ij} \to S\}$ et on a terminé par (P 2).

Les axiomes (P 1) à (P 3) sont ceux de [**MA**]. Étant donné l'intérêt pratique des prétopologies, nous interpréterons chaque résultat important à l'aide d'une prétopologie définissant la topologie donnée.

Remarque 4.2.7. — On peut introduire une notion un peu plus générale : on donne pour chaque S un ensemble de familles couvrantes vérifiant (P 1), (P 3) et la proposition 4.2.6. Ceci se présente en particulier, lorsque les familles données vérifient (P 1), (P 3) et (C 5). Le lecteur pourra consulter [**D**].

Définition 4.2.8. — Soit $\mathscr{C}$ munie d'une topologie, et soit S un objet de $\mathscr{C}$. Soit $\mathscr{P}(S')$ une relation faisant intervenir un argument $S' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}_{/S}$. On suppose que $\mathrm{Hom}(S'', S') \neq \varnothing$ entraîne $\mathscr{P}(S') \Rightarrow \mathscr{P}(S'')$. On dit que $\mathscr{P}$ est vrai *localement sur* S pour la topologie considérée, si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) L'ensemble des $S' \to S$ tels que $\mathscr{P}(S')$ soit vrai est un raffinement de S

(ii) Il existe un raffinement de S tel que $\mathscr{P}(S')$ soit vrai pour tout S' de ce raffinement.

195 (iii) (Si la topologie donnée est définie par une prétopologie). Il existe une famille couvrante pour cette prétopologie telle que $\mathscr{P}(S')$ soit vrai pour tout S' de cette famille.

Exemple 4.2.9. — Soit $f : X \to Y$ un S-morphisme. On dira que f est *localement* un isomorphisme s'il existe une famille couvrante $\{S_i \to S\}$ telle que pour tout i, $f \times_S S_i$ soit un isomorphisme. Il revient au même d'exiger qu'il existe un raffinement R de S tel que pour tout $T \to R$, $X(T) \to Y(T)$ soit un isomorphisme.

On verra dans la suite bien d'autres exemples de langage « local ».

4.3. Préfaisceaux, faisceaux, faisceau associé un préfaisceau

Définition 4.3.1. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On appelle *préfaisceau* d'ensembles sur $\mathscr{C}$ tout foncteur contravariant de $\mathscr{C}$ dans la catégorie des ensembles. La catégorie $\widehat{\mathscr{C}} = \mathbf{Hom}(\mathscr{C}^\circ, (\mathbf{Ens}))$ est appelée *catégorie des préfaisceaux* sur $\mathscr{C}$. Si $\mathscr{C}$ est munie d'une topologie, on dit que le préfaisceau P est *séparé* (resp. est un *faisceau*) si pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout $R \in J(S)$, l'application canonique

$$(+) \qquad P(S) = \mathrm{Hom}(S, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R, P)$$

est *injective* (resp. *bijective*). On appelle *catégorie des faisceaux* et on note $\widetilde{\mathscr{C}}$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$ dont les objets sont les faisceaux. [24]

[24] N.D.E. : On notera que si Q est un sous-préfaisceau d'un préfaisceau *séparé* P, alors Q est séparé. En effet, pour tout crible R de S, l'application composée $Q(S) \hookrightarrow P(S) \hookrightarrow P(R)$ est injective et se factorise à travers $Q(S) \to Q(R)$.

Proposition 4.3.2. — *Soit* P *un préfaisceau séparé* (*resp. un faisceau*). *Pour tout foncteur* $\mathrm{H} \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$ *et tout* $\mathrm{R} \in \mathrm{J(H)}$, *l'application canonique*

$$(+) \qquad \mathrm{Hom(H,P)} \longrightarrow \mathrm{Hom(R,P)}$$

est injective (*resp. bijective*).

Soient en effet P un préfaisceau séparé, H un préfaisceau, $\mathrm{R} \in \mathrm{J(H)}$, et $u, v : \mathrm{H} \to \mathrm{P}$ tels que $uj = vj$. Pour tout $f : \mathrm{S} \to \mathrm{H}$, $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $\mathrm{R} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{S}$ est un raffinement de S et **196**
$ufj_{\mathrm{S}} = vfj_{\mathrm{S}}$:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{R} \arrow[r, "j"] & \mathrm{H} \arrow[r, "u,v"] & \mathrm{P} \\
\mathrm{R} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{S} \arrow[ur, "f_{\mathrm{R}}"] \arrow[r, "j_{\mathrm{S}}"] & \mathrm{S} \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}.$$

Comme P est séparé, on en tire $uf = vf$. Ceci étant vrai pour tout S représentable, on a $u = v$.

Supposons maintenant que P soit un faisceau. Soit $g : \mathrm{R} \to \mathrm{P}$, montrons qu'il se factorise par H. Pour tout $f : \mathrm{S} \to \mathrm{H}$, $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $g \circ f_{\mathrm{R}} : \mathrm{R} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{S} \to \mathrm{P}$ se factorise de manière *unique* par S, donc définit un morphisme $h : \mathrm{S} \to \mathrm{P}$, qui est évidemment fonctoriel par rapport à f, par unicité :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{S} \arrow[r, "f_{\mathrm{R}}"] \arrow[d, "j_{\mathrm{S}}"'] & \mathrm{R} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "j"] & \mathrm{P} \\
\mathrm{S} \arrow[r, "f"] \arrow[urr, bend right=50, "h"'] & \mathrm{H} \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

On a donc défini pour tout S une application de H(S) dans P(S) fonctorielle en S, donc un morphisme de H dans P qui répond bien aux conditions exigées.

Corollaire 4.3.2.1. — [25] *Soient* R, F *deux* faisceaux. *Si* R *est un raffinement de* F, *alors* R = F.

En effet, supposons que R soit un raffinement de F et notons j l'inclusion $\mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{F}$. D'après 4.3.2, on a Hom(F, R) = End(R), donc il existe $\pi : \mathrm{F} \to \mathrm{R}$ tel que $\pi \circ j = \mathrm{id}_{\mathrm{R}}$. On a de même End(F) = Hom(R, F), et l'égalité $j \circ \pi \circ j = j$ entraîne $j \circ \pi = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$, donc j est un isomorphisme.

Proposition 4.3.3 ([AS], 1.3). — *Soit* $\mathscr{C}$ *une catégorie. Soit* P *un préfaisceau sur* $\mathscr{C}$; *pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, *notons* J(S) *l'ensemble des cribles* R *de* S *tels que pour tout* $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, *l'application*

$$(+) \qquad \mathrm{Hom(T,P)} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{R} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T}, \mathrm{P})$$

[25] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire.

soit injective (*resp. bijective*). *Alors les* J(S) *définissent une topologie sur* $\mathscr{C}$, *i.e. vérifient les axiomes* (T 1) *à* (T 4).

Corollaire 4.3.4. — *Soit pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, K(S) *une famille de cribles vérifiant* (T 1). *Soit* P *un préfaisceau sur* $\mathscr{C}$. *Pour qu'il soit* séparé (*resp. un* faisceau) *pour la topologie engendrée par les* K(S), *il faut et il suffit que pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *et tout* $\mathrm{R} \in \mathrm{K(S)}$, *l'application canonique*

$$\mathrm{Hom(S,P)} \longrightarrow \mathrm{Hom(R,P)} \tag{+}$$

soit injective (*resp. bijective*).

197 ***Corollaire 4.3.5***. — *Soit pour chaque* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, R(S) *un ensemble de familles de morphisme de* $\mathscr{C}$ *de but* S, *vérifiant* (P 1) (*par exemple définissant une prétopologie*). *Soit* P *un préfaisceau sur* $\mathscr{C}$. *Pour que* P *soit* séparé (*resp. un* faisceau) *pour la topologie engendrée par* R, *il faut et il suffit que pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *et toute famille* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{R(S)}$, *l'application*

$$\mathrm{P(S)} \longrightarrow \prod_i \mathrm{P(S}_i)$$

soit injective, (*resp. le diagramme*

$$\mathrm{P(S)} \longrightarrow \prod_i \mathrm{P(S}_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{P(S}_i \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_j)$$

soit exact).

Définition 4.3.6. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On appelle *topologie canonique* sur $\mathscr{C}$ la topologie la plus fine pour laquelle tous les foncteurs représentables soient des faisceaux.

Corollaire 4.3.7. — *Pour qu'un crible* R *de* S *soit un raffinement pour la topologie canonique, il faut et il suffit que pour tout morphisme* $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ *de* $\mathscr{C}$ *et tout* $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, *l'application canonique*

$$\mathrm{Hom(T,X)} \longrightarrow \mathrm{Hom(R} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{T,X)}$$

soit bijective.

Définition 4.3.8. — Un crible couvrant pour la topologie canonique sera dit *crible épimorphique effectif universel.*

Corollaire 4.3.9. — *Une famille épimorphique effective universelle définit un crible épimorphique effectif universel. Réciproquement, toute famille* quarrable *définissant un crible épimorphique effectif universel est épimorphique effective universelle.*

Revenons au cas où $\mathscr{C}$ est munie d'une topologie arbitraire et passons à la construc-
198 tion du *faisceau associé* à un préfaisceau P. Soit S un objet de $\mathscr{C}$. Si $\mathrm{R} \supset \mathrm{R}'$ sont

deux raffinements de S, on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\mathrm{S},\mathrm{P}) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Hom}(\mathrm{R},\mathrm{P}) \arrow[d] \\ & \mathrm{Hom}(\mathrm{R}',\mathrm{P}) \end{tikzcd} .$$

L'ensemble ordonné J(S) est filtrant comme on l'a déjà remarqué. Comme S est un élément de J(S), on a un morphisme évident

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{S},\mathrm{P}) \longrightarrow \varinjlim_{\mathrm{R}\in\mathrm{J}(\mathrm{S})} \mathrm{Hom}(\mathrm{R},\mathrm{P}).$$

Définition 4.3.10.0. — [26] On pose $\check{\mathrm{H}}^0(\mathrm{S},\mathrm{P}) = \varinjlim_{\mathrm{R}\in\mathrm{J}(\mathrm{S})} \mathrm{Hom}(\mathrm{R},\mathrm{P})$. On vérifie que $\check{\mathrm{H}}^0(\mathrm{S},\mathrm{P})$ dépend fonctoriellement de S, donc définit un foncteur LP par

$$(++) \qquad \mathrm{Hom}(\mathrm{S},\mathrm{LP}) = \check{\mathrm{H}}^0(\mathrm{S},\mathrm{P}) = \varinjlim_{\mathrm{R}\in\mathrm{J}(\mathrm{S})} \mathrm{Hom}(\mathrm{R},\mathrm{P}).$$

On a par construction des morphismes

$$\ell_{\mathrm{P}} : \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{LP}$$
$$z_{\mathrm{R}} : \mathrm{Hom}(\mathrm{R},\mathrm{P}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{S},\mathrm{LP}).$$

Lemme 4.3.10. — (i) *Pour tout raffinement* R *de* S *et tout* $u : \mathrm{R} \to \mathrm{P}$*, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P} \arrow[r, "\ell_p"] & \mathrm{LP} \\ \mathrm{R} \arrow[u, "u"] \arrow[r, "i_{\mathrm{R}}"'] & \mathrm{S} \arrow[u, "z_{\mathrm{R}}(u)"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(ii) *Pour tout morphisme* $\mathrm{S} \xrightarrow{v} \mathrm{LP}$*, il existe un raffinement* R *de* S *et un morphisme* **199**
$u : \mathrm{R} \to \mathrm{P}$ *avec* $v = z_{\mathrm{R}}(u)$.

(iii) *Soit* Q *un foncteur et* $u, v : \mathrm{Q} \to \mathrm{P}$ *tels que* $\ell_{\mathrm{P}} u = \ell_{\mathrm{P}} v$*. Alors le noyau du couple* (u, v) *est un raffinement de* Q.

(iv) *Soient* $u : \mathrm{R} \to \mathrm{P}$ *et* $u' : \mathrm{R}' \to \mathrm{P}$ *; pour que* $z_{\mathrm{R}}(u) = z_{\mathrm{R}'}(u')$*, il faut et il suffit qu'il existe un raffinement* $\mathrm{R}'' \subset \mathrm{R} \cap \mathrm{R}'$ *de* S *tel que* u *et* u' *coïncident sur* R''.

[26] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.3.10.0 pour des références ultérieures. D'autre part, il résulte de la définition que si $\mathrm{Q} \to \mathrm{P}$ est un monomorphisme, il en est de même de $\mathrm{LP} \to \mathrm{LQ}$; donc L « *préserve les monomorphismes* » (voir aussi 4.3.16 pour un résultat plus général : L « *commute aux limites projectives finies* »).

Démonstration (i) : Il faut vérifier que $z_{\mathrm{R}}(u)i_{\mathrm{R}} = \ell_{\mathrm{P}}u$. Pour cela, il suffit de vérifier que les composés de ces deux morphismes avec tout morphisme $\mathrm{T} \xrightarrow{g} \mathrm{R}$, où T est représentable, sont égaux. Or considérons $f = i_{\mathrm{R}}g$ et le produit fibré $\mathrm{R}' = \mathrm{R} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$: [27]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{P} \arrow[r, "\ell_{\mathrm{P}}"] & \mathrm{LP} \\
\mathrm{R} \arrow[u, "u"] \arrow[r, "i_{\mathrm{R}}"] & \mathrm{S} \arrow[u, "z_{\mathrm{R}}(u)"'] \\
\mathrm{R}' \arrow[u, "p"] \arrow[r, "\sim", "i_{\mathrm{R}'}"'] & \mathrm{T} \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "g"]
\end{tikzcd}\quad .$$

Par définition de ℓ_{P}, $\ell_{\mathrm{P}}ug = z_{\mathrm{R}}(u)f$ (c'est le cas particulier de ce qu'on cherche à démontrer dans lequel i_{R} est un isomorphisme), or $z_{\mathrm{R}}(u)f = z_{\mathrm{R}}(u)i_{\mathrm{R}}g$.

(ii) et (iv) ne font que traduire la définition de $\mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{LP})$ comme limite inductive.

(iii) : Si K désigne le noyau du couple (u, v), pour chaque morphisme $f : \mathrm{S} \to \mathrm{Q}$ où S est représentable, $\mathrm{K} \times_{\mathrm{Q}} \mathrm{S}$ est un sous-foncteur du noyau du couple de flèches uf, $vf : \mathrm{S} \to \mathrm{P}$. On est donc ramené, d'après (T' 0), à démontrer l'assertion dans le cas où $\mathrm{Q} = \mathrm{S}$ est représentable. Mais en ce cas, il résulte de (ii) et (iv) que K contient un raffinement de S donc est un raffinement de S.

200 On vérifie enfin que $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{LP}$ définit un foncteur

$$\mathrm{L} : \widehat{\mathscr{C}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{C}}$$

et $\mathrm{P} \mapsto \ell_{\mathrm{P}}$ un morphisme de foncteurs

$$\ell : \mathrm{Id}_{\widehat{\mathscr{C}}} \longrightarrow \mathrm{L}.$$

Énonçons maintenant le résultat essentiel :

Proposition 4.3.11. — (i) *Si* P *est un préfaisceau quelconque,* LP *est* séparé *et* $\ell_{\mathrm{P}} : \mathrm{P} \to \mathrm{LP}$ *est* couvrant (4.2.3).

(ii) *Si* P *est un faisceau,* $\mathrm{P} \to \mathrm{LP}$ *est un isomorphisme.*

(iii) *Pour tout préfaisceau* P *et tout préfaisceau* séparé (*resp.* faisceau) F*, l'application*

$$\mathrm{Hom}(\ell_{\mathrm{P}}, \mathrm{F}) : \mathrm{Hom}(\mathrm{LP}, \mathrm{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{F})$$

est injective (*resp.* bijective).

(iv) *Si* P *est* séparé*,* $\ell_{\mathrm{P}} : \mathrm{P} \to \mathrm{LP}$ *est un* monomorphisme couvrant (*donc* P *est un* raffinement *de* LP)*, et* LP *est un faisceau.*

[27] N.D.E. : Notons p la projection $\mathrm{R}' \to \mathrm{R}$. Comme i_{R} est un monomorphisme, on a $p = gi_{\mathrm{R}'}$. Soit g' la section de $i_{\mathrm{R}'}$ définie par g, alors $pg' = g$ et donc $pg'i_{\mathrm{R}'} = gi_{\mathrm{R}'} = p$; ceci entraîne $g'i_{\mathrm{R}'} = \mathrm{id}_{\mathrm{R}'}$ et donc $i_{\mathrm{R}'} : \mathrm{R}' \to \mathrm{T}$ est un isomorphisme, d'inverse g'.

Démonstration : (i) D'abord, $\mathrm{P} \to \mathrm{LP}$ est couvrant ; en effet, pour tout morphisme $\mathrm{S} \xrightarrow{v} \mathrm{LP}$, il existe, d'après 4.3.10 (i) et (ii), un raffinement R de S tel qu'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{P} \arrow[r, "\ell_{\mathrm{P}}"] & \mathrm{LP} \\
 & \mathrm{P} \times_{\mathrm{LP}} \mathrm{S} \arrow[u, "v'"'] \arrow[r, two heads] & \mathrm{S} \arrow[u, "v"'] \\
\mathrm{R} \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[urr, two heads, "i_{\mathrm{R}}"'] & &
\end{tikzcd},$$

donc $\mathrm{P} \times_{\mathrm{LP}} \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ est couvrant. Il en résulte, d'après (C 0), que $\mathrm{P} \to \mathrm{LP}$ est couvrant.

Si d'autre part deux morphismes $\mathrm{S} \xrightarrow{v_1, v_2} \mathrm{LP}$ induisent le même morphisme d'un raffinement R de S, montrons qu'ils sont égaux. Il existe des raffinements R_i, $i = 1, 2$, et des morphismes $u_i : \mathrm{R}_i \to \mathrm{P}$ tels que $z_{\mathrm{R}_i}(u_i) = v_i$. En prenant R assez petit, on peut supposer que $\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2 = \mathrm{R}$. Il résulte alors du diagramme commutatif de 4.3.10
(i) que $\ell_{\mathrm{P}} u_1 = \ell_{\mathrm{P}} u_2$. D'après *loc. cit.* (iii), u_1 et u_2 coïncident donc sur un raffinement **201**
de R, donc un raffinement de S, ce qui entraîne que $z_{\mathrm{R}}(u_1) = z_{\mathrm{R}}(u_2)$, par *loc. cit.* (iv).

(ii) est clair, car si P est un faisceau, $\mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{P}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{R}, \mathrm{P})$ est déjà un isomorphisme pour tout raffinement R de S.

(iii) Soient u et v deux morphismes $\mathrm{LP} \to \mathrm{F}$ tels que $u\ell_{\mathrm{P}} = v\ell_{\mathrm{P}}$. Pour montrer que $u = v$, il suffit de voir que $uf = vf$ pour tout $f : \mathrm{S} \to \mathrm{LP}$ où S est représentable. Or il existe un raffinement R de S et un morphisme $g : \mathrm{R} \to \mathrm{P}$ avec $f = z_{\mathrm{R}}(g)$. Alors uf et vf coïncident sur R avec $u\ell_{\mathrm{P}} g = v\ell_{\mathrm{P}} g$, donc coïncident sur R. Si F est séparé, on a donc $uf = vf$. Supposons maintenant que F soit un faisceau ; on a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{P} \arrow[r, "\ell_p"] \arrow[d] & \mathrm{LP} \arrow[d] \arrow[dl] \\
\mathrm{F} \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{LF}
\end{tikzcd}$$

qui montre que $\mathrm{Hom}(\ell_{\mathrm{P}}, \mathrm{F})$ est surjectif.

(iv) Montrons que si P est séparé, $\mathrm{P} \to \mathrm{LP}$ est un monomorphisme. Pour cela, il suffit de voir que pour tout couple de morphismes $u, v : \mathrm{S} \to \mathrm{P}$ (où S est représentable) tels que $\ell_{\mathrm{P}} u = \ell_{\mathrm{P}} v$ on a $u = v$. Or *loc. cit.* (iii) montre que u et v coïncident sur un raffinement de S, donc coïncident car P est séparé. Ceci montre que $\mathrm{P} \to \mathrm{LP}$ est un monomorphisme ; comme il est couvrant d'après (i), on obtient que P est un raffinement de LP.

Montrons enfin que LP est un faisceau. Comme on sait déjà par (i) que c'est un préfaisceau séparé, il suffit de voir que pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, tout raffinement R de S
et tout morphisme $h : \mathrm{R} \to \mathrm{LP}$, il existe un morphisme $u : \mathrm{S} \to \mathrm{LP}$ avec $ui_{\mathrm{R}} = h$. Or **202**
$\mathrm{R}' = \mathrm{P} \times_{\mathrm{LP}} \mathrm{R}$ est un raffinement de R, car P est un raffinement de LP, donc R′ est

un raffinement de S. Posons $u = z_{\mathrm{R}'}(h')$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P} \arrow[r, "\ell_p"] & \mathrm{LP} & \\ \mathrm{R}' \arrow[u, "h'"] \arrow[r, "j"'] & \mathrm{R} \arrow[u, "h"] \arrow[r, "i_{\mathrm{R}}"'] & \mathrm{S} \arrow[ul, "u"'] \end{tikzcd} .$$

On a $ui_{\mathrm{R}'} = \ell_{\mathrm{P}} h' = hj$, d'où $ui_{\mathrm{R}}\, j = hj$. Comme R' est un raffinement de R et comme LP est séparé, 4.3.2 montre que $ui_{\mathrm{R}} = h$.

Corollaire 4.3.12. — [28] *Soient* F *un faisceau et* R *un sous-*$\widehat{\mathscr{C}}$*-objet de* F. *Alors* R *est un préfaisceau séparé,* $\ell_{\mathrm{R}} : \mathrm{R} \to \mathrm{LR}$ *est un monomorphisme couvrant, et l'on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "\ell_{\mathrm{R}}"'] & & \mathrm{F} \\ & \mathrm{LR} \arrow[ur, hook, "j"'] & \end{tikzcd} .$$

Par conséquent, R *est un raffinement de* F *si et seulement si* j *est un isomorphisme.*

On a déjà noté que R est séparé et que j est un monomorphisme, cf. N.D.E. (24) et (26). D'après 4.3.11 (iv), ℓ_{R} est un monomorphisme couvrant. Donc, si j est un isomorphisme, R est un raffinement de F. Réciproquement, si i est couvrant, j l'est aussi, donc est un isomorphisme d'après 4.3.2.1.

Remarque 4.3.13. — Si $\mathrm{J}'(\mathrm{S})$ est un sous-ensemble cofinal de $\mathrm{J}(\mathrm{S})$, on a

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{LP}) = \varinjlim_{\mathrm{R} \in \mathrm{J}'(\mathrm{S})} \mathrm{Hom}(\mathrm{R}, \mathrm{P}).$$

En particulier, soit $\mathrm{S} \mapsto \mathrm{R}(\mathrm{S})$ une prétopologie engendrant la topologie donnée. Le foncteur L peut se décrire à l'aide des familles couvrantes éléments de $\mathrm{R}(\mathrm{S})$. En explicitant la formule ci-dessus, on retrouve la construction de [**MA**].

Notons i le foncteur d'inclusion $\widetilde{\mathscr{C}} \to \widehat{\mathscr{C}}$. De la proposition 4.3.11 résulte le théorème suivant :

Théorème 4.3.14. — *Il existe un foncteur unique* $a : \widehat{\mathscr{C}} \to \widetilde{\mathscr{C}}$ *tel que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathscr{C}} \arrow[r, "\mathrm{L}"] \arrow[d, "a"'] & \widehat{\mathscr{C}} \arrow[d, "\mathrm{L}"] \\ \widetilde{\mathscr{C}} \arrow[r, "i"] & \widehat{\mathscr{C}} \end{tikzcd} ,$$

[28] N.D.E. : On a détaillé l'énoncé du corollaire et sa démonstration.

i.e. pour tout préfaisceau P*,* L(L(P)) *est un faisceau. Les foncteurs i et a sont adjoints l'un de l'autre : pour tout préfaisceau* P *et tout faisceau* F *on a un isomorphisme fonctoriel en* P *et* F 203

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathrm{P}, i(\mathrm{F})) \simeq \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathscr{C}}}(a(\mathrm{P}), \mathrm{F}),$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{F}) \simeq \mathrm{Hom}(a(\mathrm{P}), \mathrm{F}).$$

Définition 4.3.15. — Le faisceau $a(\mathrm{P})$ est dit *associé* au préfaisceau P.

Remarque 4.3.16. — Comme le foncteur L est construit à l'aide de limites projectives et de limites inductives filtrantes, il *commute* aux *limites projectives finies.* [29]

De plus, si on identifie $\mathrm{L}(\mathrm{P}\times\mathrm{P})$ à $\mathrm{LP}\times\mathrm{LP}$, le morphisme $\ell_{\mathrm{P}\times\mathrm{P}}$ s'identifie à $\ell_{\mathrm{P}}\times\ell_{\mathrm{P}}$. Il en résulte par exemple que si P est un préfaisceau en groupes, LP est aussi muni canoniquement d'une structure de préfaisceau en groupes et le morphisme canonique $\mathrm{P}\to\mathrm{LP}$ est un morphisme de groupes. Il en est de même pour le foncteur a, ce qui montre que si P est un préfaisceau en groupes et F un faisceau en groupes, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}\text{-gr.}}(\mathrm{P}, i(\mathrm{F})) \simeq \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathscr{C}}\text{-gr.}}(a(\mathrm{P}), \mathrm{F}).$$

Voir [**D**] pour plus de détails.

4.3.17. — Si $\mathscr{V}$ est une catégorie quelconque, on appelle *préfaisceau* sur $\mathscr{C}$ à valeurs dans $\mathscr{V}$ un foncteur contravariant de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{V}$. Pour définir les faisceaux à valeurs dans $\mathscr{V}$, il nous faut d'abord rappeler la définition de la *limite projective* d'un foncteur. Si $\mathscr{R}$ et $\mathscr{V}$ sont deux catégories, et

$$\mathrm{F} : \mathscr{R}^\circ \longrightarrow \mathscr{V}$$

un foncteur contravariant de $\mathscr{R}$ dans $\mathscr{V}$, on note $\varprojlim \mathrm{F}$ l'objet de $\widehat{\mathscr{V}}$ défini de la manière suivante :

$$\varprojlim \mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{V}}}(\mathrm{X}, \varprojlim \mathrm{F}) = \varprojlim_{\mathrm{U}\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{R}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(\mathrm{F}(\mathrm{U}), \mathrm{X}) = \mathrm{Hom}(c_{\mathrm{X}}, \mathrm{F}),$$

où X est un objet variable de $\mathscr{V}$, où c_{X} dénote le foncteur contravariant de $\mathscr{R}$ dans 204
$\mathscr{V}$ qui envoie chaque objet de $\mathscr{R}$ sur X et chaque flèche de $\mathscr{R}$ sur id_{X}, et où le dernier Hom est pris dans la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathscr{R}^\circ, \mathscr{V})$. Si $\mathscr{R}$ possède un objet final $\underline{\mathbf{e}}_{\mathscr{R}}$, on a $\varprojlim \mathrm{F} = \mathrm{F}(\underline{\mathbf{e}}_{\mathscr{R}})$. Si $\mathscr{V}$ est la catégorie des ensembles, le foncteur $\varprojlim$ s'identifie au foncteur Γ.

Si S est un objet de $\mathscr{C}$ et R un crible de S, notons $\mathscr{R}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ dont l'ensemble d'objets est E(R) et $i_{\mathrm{R}} : \mathscr{R} \to \mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ le foncteur canonique. Si P est un préfaisceau sur $\mathscr{C}$ à valeurs dans $\mathscr{V}$, il définit par restriction un foncteur $\mathrm{P}_{\mathrm{S}} : (\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})^\circ \to \mathscr{V}$. Le foncteur i_{R} induit un morphisme de $\widehat{\mathscr{V}}$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}) = \mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}) = \varprojlim \mathrm{P}_{\mathrm{S}} \longrightarrow \varprojlim(\mathrm{P}_{\mathrm{S}} \circ i_{\mathrm{R}}).$$

[29] N.D.E. : En particulier, si K est le *noyau* d'un couple de morphismes de préfaisceaux $u, v : \mathrm{Q} \rightrightarrows \mathrm{P}$, alors LK est le noyau de $\mathrm{L}u, \mathrm{L}v : \mathrm{LQ} \rightrightarrows \mathrm{LP}$ (ceci sera utilisé en 4.4.5).

On note $\varprojlim_{\mathrm{R}} \mathrm{P}$ l'objet $\varprojlim(\mathrm{P}_{\mathrm{S}} \circ i_{\mathrm{R}})$ de $\widehat{\mathscr{V}}$. En vertu de 4.1.6, la définition 4.3.1 se généralise en la

Définition 4.3.18. — Le préfaisceau P sur $\mathscr{C}$ à valeurs dans $\mathscr{V}$ est dit *séparé* (resp. un *faisceau*), si pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout $\mathrm{R} \in \mathrm{J}(\mathrm{S})$, le morphisme canonique de $\widehat{\mathscr{V}}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}) \longrightarrow \varprojlim_{\mathrm{R}} \mathrm{P}$$

est un monomorphisme (resp. un isomorphisme).

Dans le cas où $\mathscr{V}$ est la catégorie (Gr.) des groupes (ou toute autre catégorie d'ensembles munis de structures algébriques définies par limites projectives finies), on peut voir (cf. [**D**]) qu'il y a équivalence entre les notions suivantes : un préfaisceau sur $\mathscr{C}$ à valeurs dans (Gr.) dont le préfaisceau d'ensembles sous-jacent est un faisceau, et un groupe dans la catégorie des faisceaux d'ensembles. Compte tenu de
205 ces identifications, nous considèrerons toujours les faisceaux à valeurs dans une catégorie d'ensembles munis de structures algébriques définies par limites projectives finies, comme des faisceaux d'ensembles, munis dans la catégorie $\widetilde{\mathscr{C}}$ de la structure algébrique correspondante.

4.4. Propriétés d'exactitude de la catégorie des faisceaux

Théorème 4.4.1. — (i) *Les limites projectives quelconques existent dans $\widetilde{\mathscr{C}}$; « elles se calculent dans $\widehat{\mathscr{C}}$ », i.e. le foncteur d'inclusion $i : \widetilde{\mathscr{C}} \to \widehat{\mathscr{C}}$ commute aux limites projectives : si (X_α) est un système projectif de faisceaux, le préfaisceau*

$$\varprojlim i(\mathrm{X}_\alpha) : \mathrm{S} \longmapsto \varprojlim \mathrm{X}_\alpha(\mathrm{S})$$

est un faisceau et on a $i(\varprojlim \mathrm{X}_\alpha) = \varprojlim i(\mathrm{X}_\alpha)$.

(ii) *Les limites inductives quelconques existent dans $\widetilde{\mathscr{C}}$: si (X_α) est un système inductif de faisceaux, on a*

$$\varinjlim \mathrm{X}_\alpha = a(\varinjlim i(\mathrm{X}_\alpha))$$

où $\varinjlim i(\mathrm{X}_\alpha)$ est le préfaisceau limite inductive des $i(\mathrm{X}_\alpha)$:

$$\varinjlim i(\mathrm{X}_\alpha) : \mathrm{S} \longmapsto \varinjlim \mathrm{X}_\alpha(\mathrm{S}).$$

(iii) *Le foncteur $a : \widehat{\mathscr{C}} \to \widetilde{\mathscr{C}}$ commute aux limites inductives quelconques et aux limites projectives finies.*

Les assertions (i) et (ii) résultent formellement de la formule d'adjonction (4.3.14), et [30] la première assertion de (iii) découle de (ii). Enfin, la seconde assertion de (iii) a déjà été signalée dans 4.3.16.

Scholie 4.4.2. — Ce théorème permet d'utiliser la méthode suivante pour démontrer dans $\widetilde{\mathscr{C}}$ une assertion portant simultanément sur des limites inductives quelconques
206 et des limites projectives finies (par exemple : « tout épimorphisme est effectif universel », cf. plus loin). On commence par démontrer l'assertion correspondante dans la catégorie des ensembles, puis on l'étend « argument par argument » à la catégorie des

[30] N.D.E. : On a modifié l'original ici.

préfaisceaux. Ensuite, on utilise le théorème précédent pour passer de la catégorie des préfaisceaux à la catégorie des faisceaux. On verra dans la suite bien des exemples de cette méthode (4.4.3, 4.4.6, 4.4.9, etc.).

Remarquons enfin que les assertions relatives à la catégorie des préfaisceaux sont formellement des corollaires des assertions relatives à la catégorie des faisceaux. Il suffit en effet de prendre comme topologie la topologie la moins fine (« chaotique ») c'est-à-dire la topologie définie par $\mathrm{J(S)} = \{\mathrm{S}\}$ pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$; tout foncteur est en effet un faisceau pour cette topologie.

Proposition 4.4.3. — *Soit* $\mathscr{F} = \{\mathrm{F}_i \to \mathrm{F}\}$ *une famille de morphismes de faisceaux. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathscr{F}$ *est une famille épimorphique.*

(ii) $\mathscr{F}$ *est une famille épimorphique effective universelle* (1.13)*.*

(iii) $\mathscr{F}$ *est couvrante* (4.2.3)*.*

(iv) *Le faisceau image de* $\mathscr{F}$ (*c'est-à-dire le faisceau associé au préfaisceau image de* $\mathscr{F}$ (4.1.2)) *est* F.

L'équivalence de (iii) et (iv) résulte de 4.3.12. Les autres équivalences résulteront des lemmes suivants.

Lemme 4.4.4. — *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* monomorphisme *de faisceaux qui soit un* épimorphisme*. Alors* f *est un isomorphisme.*

Le lemme est d'abord clair dans la catégorie des ensembles. Démontrons le ensuite dans la catégorie des préfaisceaux. Considérons le préfaisceau

$$\mathrm{V} : \ \mathrm{S} \longmapsto \mathrm{Y(S)} \coprod^{\mathrm{X(S)}} \mathrm{Y(S)} \quad ;$$

c'est la somme amalgamée de Y et de Y au-dessous de X dans la catégorie des préfais- **207**
ceaux.[31] Notons i_1 et i_2 les deux morphismes « coordonnées » $\mathrm{Y} \to \mathrm{V}$. Si $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un épimorphisme dans la catégorie des préfaisceaux, alors $i_1 = i_2$. Dans ce cas, pour chaque S, l'application $\mathrm{X(S)} \to \mathrm{Y(S)}$ est surjective ; comme d'autre part elle est injective, c'est une bijection, et donc $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un isomorphisme.

Plaçons-nous enfin dans la catégorie $\widetilde{\mathscr{C}}$ des faisceaux. D'après 4.4.1 (ii), la somme amalgamée *dans* $\widetilde{\mathscr{C}}$ des faisceaux Y et Y au-dessous de X est le faisceau Z associé au préfaisceau V. Considérons le diagramme de morphismes :

$$\mathrm{X} \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{Y} \underset{i_2}{\overset{i_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{V} \xrightarrow{\ \tau\ } \mathrm{Z} = a(\mathrm{V}) \quad .$$

On a $i_1 f = i_2 f$, d'où $\tau i_1 f = \tau i_2 f$, et donc $\tau i_1 = \tau i_2$, puisque f est un épimorphisme *dans* $\widetilde{\mathscr{C}}$. D'après le point (iii) du lemme ci-dessous, le préfaisceau V est séparé, donc τ est un monomorphisme (4.3.11 (iv)). Donc $i_1 = i_2$, et on a vu plus haut que ceci

[31] N.D.E. : On a légèrement modifié la suite de la démonstration.

entraîne que $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un isomorphisme. Ceci démontre le lemme 4.4.4, lorsqu'on aura vérifié que V est séparé.

[32] Soit $\mathrm{R}_\varnothing$ le préfaisceau qui à tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ associe l'ensemble vide ; c'est un objet initial de $\widehat{\mathscr{C}}$.

Lemme 4.4.5. — (i) *On suppose que* $\mathrm{R}_\varnothing \notin \mathrm{J(S)}$*, pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$*. Si* (X_i) *est une famille de préfaisceaux séparés, le préfaisceau* somme directe $\coprod_i \mathrm{X}_i$ *est séparé.* [33]

(ii) *Considérons une relation d'équivalence dans la catégorie des préfaisceaux :*

$$\mathrm{X} \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} \mathrm{Y}$$

et soit $w : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *le quotient. Si* X *est un* faisceau *et* Y séparé, *alors* Z *est séparé.*

(iii) *Considérons une* somme amalgamée *dans la catégorie des préfaisceaux, où* u *et* u' *sont des* monomorphismes *:*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Y} \arrow[dr] & \\ \mathrm{X} \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & \mathrm{V} \\ & \mathrm{Y}' \arrow[ur] & \end{tikzcd} .$$

Si Y *et* Y′ *sont* séparés, *et* X *un* faisceau, *alors* V *est séparé.*

(i) Posons $\mathrm{X} = \coprod_i \mathrm{X}_i$. Soient $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et $\tau : \mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{S}$ un raffinement de S, et soient x_1, x_2 deux éléments de X(S) tels que $x_1 \circ \tau = x_2 \circ \tau$; il existe des indices i, j tels que $x_1 \in \mathrm{X}_i(\mathrm{S})$ et $x_2 \in \mathrm{X}_j(\mathrm{S})$. Comme $\mathrm{R} \neq \mathrm{R}_\varnothing$, il existe un morphisme $\phi : \mathrm{T} \to \mathrm{R}$, avec $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Alors, $x_1 \circ \tau \circ \phi = x_2 \circ \tau \circ \phi$, et comme X(T) est la réunion disjointe des $\mathrm{X}_k(\mathrm{T})$, ceci entraîne $i = j$. Alors, comme X_i est séparé et est un sous-objet de X, l'application $\mathrm{X}_i(\mathrm{S}) \to \mathrm{X}_i(\mathrm{R}) \to \mathrm{X}(\mathrm{R})$ est injective, et donc $x_1 = x_2$. Ceci prouve que X est séparé.

Démontrons (iii). Considérons les morphismes $i : \mathrm{Y} \to \mathrm{V}$ et $j : \mathrm{Y}' \to \mathrm{V}$, et soit K le noyau de :

$$\mathrm{Y} \times \mathrm{Y}' \overset{p,q}{\rightrightarrows} \mathrm{V} \qquad ,$$

où $p = i \circ \mathrm{pr}_1$ et $q = j \circ \mathrm{pr}_2$.

Soit $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Comme u et u' sont des monomorphismes, on peut identifier X(S) à son image dans Y(S) (resp. Y′(S)) ; notons Z(S) (resp. Z′(S)) le complémentaire. Alors

[32] N.D.E. : On a corrigé le point (i) du lemme 4.4.5, et détaillé la démonstration des trois points.

[33] N.D.E. : En général, la somme directe de deux faisceaux F, G n'est *pas* un faisceau. En effet, soient $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$; on suppose que la somme directe $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 \coprod \mathrm{S}_2$ existe dans $\mathscr{C}$ et que le produit fibré $\mathrm{S}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_2$ est un objet initial $\varnothing$ de $\mathscr{C}$ (cf. I, 1.8). Soit R le crible de S de base $\{\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2\}$, alors $(\mathrm{F} \coprod \mathrm{G})(\mathrm{R})$ est la réunion disjointe de $\mathrm{F(S)} \coprod \mathrm{G(S)}$ et de $\mathrm{F}(\mathrm{S}_i) \times \mathrm{G}(\mathrm{S}_j)$ pour $i \neq j$, donc $\mathrm{F} \coprod \mathrm{G}$ n'est pas un faisceau en général. D'autre part, si $\mathscr{C}$ est la catégorie ayant un seul objet S et id_S pour seul morphisme, munie de la topologie définie par $\mathrm{J(S)} = \{\mathrm{R}_\varnothing, \mathrm{S}\}$, alors les seuls préfaisceaux séparés sont $\mathrm{R}_\varnothing$ et $\mathrm{X} = \mathbf{h}_\mathrm{S}$ (qui est un faisceau), et $\mathrm{X} \coprod \mathrm{X}$ n'est pas séparé.

V(S) s'identifie à la réunion disjointe de Z(S), Z′(S) et X(S), et l'on voit facilement que les applications $i(\mathrm{S}) : \mathrm{Y}(\mathrm{S}) \to \mathrm{V}(\mathrm{S})$ et $j(\mathrm{S}) : \mathrm{Y}'(\mathrm{S}) \to \mathrm{V}(\mathrm{S})$ sont injectives, et que l'application

$$(u \times u')(\mathrm{S}) :\ \mathrm{X}(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathrm{K}(\mathrm{S})$$

est bijective. Par conséquent, i et j sont des *monomorphismes*, et $u \times u' : \mathrm{X} \to \mathrm{K}$ est un *isomorphisme*.

Posons $\mathrm{U} = \mathrm{Y} \coprod \mathrm{Y}'$, et soit $\tau : \mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{S}$ un raffinement de S ; on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U}(\mathrm{S}) \arrow[r, "\mathrm{U}(\tau)"] \arrow[d] & \mathrm{U}(\mathrm{R}) \arrow[d] \\ \mathrm{V}(\mathrm{S}) \arrow[r, "\mathrm{V}(\tau)"] & \mathrm{V}(\mathrm{R}) \end{tikzcd} \quad .$$

Soient $v_1, v_2 \in \mathrm{V}(\mathrm{S})$ dont les images dans V(R) coïncident. D'après la définition de V, v_1, v_2 se remontent en des éléments y_1, y_2 de U(S) ; notons z_1, z_2 leurs images dans U(R). Alors z_1, z_2 ont même image dans V(R).

Comme $i : \mathrm{Y} \to \mathrm{V}$ et $j : \mathrm{Y}' \to \mathrm{V}$ sont des monomorphismes, les applications $\mathrm{Y}(\mathrm{R}) \to \mathrm{V}(\mathrm{R})$ et $\mathrm{Y}'(\mathrm{R}) \to \mathrm{V}(\mathrm{R})$ sont injectives. Donc, comme Y et Y′ sont séparés, si y_1 et y_2 appartiennent tous deux à Y(S) ou à Y′(S), alors $y_1 = y_2$. Sinon, on peut supposer que $y_1 \in \mathrm{Y}(\mathrm{S})$ et $y_2 \in \mathrm{Y}'(\mathrm{S})$, d'où $z_1 \in \mathrm{Y}(\mathrm{R})$ et $z_2 \in \mathrm{Y}'(\mathrm{R})$. Mais alors, comme $i \circ z_1 = j \circ z_2$, le morphisme $z_1 \boxtimes z_2 : \mathrm{R} \to \mathrm{Y} \times \mathrm{Y}'$ se factorise à travers $\mathrm{K} = \mathrm{X}$. Comme de plus $\mathrm{X}(\mathrm{R}) = \mathrm{X}(\mathrm{S})$ (puisque X est un faisceau), il existe $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$ tel que $u(x) \circ \tau = z_1 = y_1 \circ \tau$ et $u'(x) \circ \tau = z_2 = y_2 \circ \tau$, d'où, puisque Y et Y′ sont séparés, $u(x) = y_1$ et $u'(x) = y_2$, et donc $v_1 = v_2$. Ceci prouve que V est séparé.

Prouvons (ii). Remarquons d'abord que le morphisme de préfaisceaux

$$\mathrm{X} \xrightarrow{u \boxtimes v} \mathrm{K} \quad ,$$

où K désigne le noyau du couple de morphismes $w \circ \mathrm{pr}_i : \mathrm{Y} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$, est un *isomorphisme*. En effet, pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, X(T) est une relation d'équivalence dans Y(T), de sorte que le diagramme

$$\mathrm{X}(\mathrm{T}) \xrightarrow{u \boxtimes v} \mathrm{Y}(\mathrm{T}) \times \mathrm{Y}(\mathrm{T}) \underset{w \circ \mathrm{pr}_2}{\overset{w \circ \mathrm{pr}_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{Z}(\mathrm{T})$$

est exact dans la catégorie des ensembles.

Soient maintenant $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et $g_1, g_2 : \mathrm{S} \to \mathrm{Z}$ deux morphismes qui coïncident sur un raffinement $\tau : \mathrm{R} \hookrightarrow \mathrm{S}$ de S. Puisque $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, on a $\mathrm{Z}(\mathrm{S}) = \mathrm{Y}(\mathrm{S})/\mathrm{X}(\mathrm{S})$, par construction de Z, et donc il existe des morphismes $f_1, f_2 : \mathrm{S} \to \mathrm{Y}$ tels que $wf_i = g_i$. 208

Alors, $wf_1\tau = wf_2\tau$ donc, d'après ce qui précède, il existe un morphisme $\phi : \mathrm{R} \to \mathrm{X}$ tel que $u\phi = f_1\tau$ et $v\phi = f_2\tau$. Comme X est un faisceau, il existe $\psi : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$ tel que $\phi = \psi\tau$, et donc on a dans Y(R) les égalités :

$$u\psi\tau = f_1\tau \qquad , \qquad v\psi\tau = f_2\tau.$$

Comme $Y(S) \to Y(R)$ est injectif (Y étant séparé), ceci entraîne $u\psi = f_1$ et $v\psi = f_2$, d'où il résulte que $g_1 = g_2$. Ceci prouve que Z est séparé.

Lemme 4.4.6. — [34] (i) *Soit* $\{F_i \xrightarrow{f_i} F\}$ *une famille de morphismes de préfaisceaux, et soit* $G \subset F$ *le préfaisceau image. Alors, le diagramme suivant dans* $\widehat{\mathscr{C}}$ *est exact :*

$$\textstyle\coprod_i F_i \times_G \coprod_j F_j \overset{\mathrm{pr}_1}{\underset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} \coprod_i F_i \longrightarrow G$$

c.-à-d., pour tout préfaisceau H*, le diagramme d'ensembles suivant est exact :*

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}(G, H) \longrightarrow \textstyle\prod_i \mathrm{Hom}(F_i, H) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(F_i \times_G F_j, H).$$

(ii) *Toute famille* couvrante *de morphismes de faisceaux est* épimorphique effective universelle.

(i) Soit H un préfaisceau. L'application f^* qui à un morphisme $\phi : G \to H$ associe la famille de morphismes $\phi \circ f_i : F_i \to H$ est injective, car pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $\phi(S)$ est déterminée par les $(\phi \circ f_i)(S)$, puisque la famille $f_i(S) : F_i(S) \to G(S)$ est surjective. Il est clair que l'image de f^* est contenue dans $\mathrm{Ker}(p, q)$. Réciproquement, soit $\phi_i : F_i \to H$ une famille de morphismes telle que, pour tout i, j, le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} F_i \times_G F_j \arrow[r] \arrow[d] & F_j \arrow[d, "\phi_j"] \\ F_i \arrow[r, "\phi_i"] & H \end{tikzcd} .$$

Alors, pour tout S, l'application $\coprod_i F_i(S) \to H(S)$ se factorise *de façon unique* en une application $\phi(S) : G(S) \to H(S)$, et ceci définit un morphisme $\phi : G \to H$ tel que $f^*(\phi) = (\phi_i)$. Ceci prouve l'exactitude de la suite $(*)$, et le point (i).

Prouvons (ii). Comme la notion de famille couvrante est stable par extension de la base, il suffit de montrer que toute famille couvrante est épimorphique effective. Soit donc $\{F_i \to F\}$ une famille couvrante de morphismes de faisceaux, et soit G le préfaisceau image de cette famille. Comme la famille est couvrante, il en est de même du monomorphisme $G \hookrightarrow F$, donc, d'après 4.3.12, on a $a(G) = F$.

D'autre part, comme $G \hookrightarrow F$ est un monomorphisme, les produits fibrés $F_i \times_G F_j$ et $F_i \times_F F_j$ sont les mêmes. Donc, d'après (i), le diagramme d'ensembles suivant est exact, pour tout *préfaisceau* H :

$$(**) \qquad \mathrm{Hom}(G, H) \longrightarrow \textstyle\prod_i \mathrm{Hom}(F_i, H) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(F_i \times_F F_j, H).$$

Si de plus H est un *faisceau*, on a

$$\mathrm{Hom}(G, H) = \mathrm{Hom}(a(G), H) = \mathrm{Hom}(F, H),$$

[34] N.D.E. : On a détaillé l'énoncé du lemme et sa démonstration.

et alors (∗∗) montre que $\{F_i \to F\}$ est bien une famille épimorphique effective dans la catégorie $\widetilde{\mathscr{C}}$ des *faisceaux.*

Lemme 4.4.7. — *Toute famille de morphismes de faisceaux* $\{F_i \to F\}$ *se factorise en une famille couvrante* $\{F_i \to G\}$ *et un monomorphisme* $G \to F$.

Il suffit en effet de prendre pour G le faisceau image de la famille donnée. 209

Démonstration de la proposition 4.4.3 : on a vu en 4.4.6 que (iii) ⇒ (ii), on a évidemment (ii) ⇒ (i). Soit enfin $\{F_i \to F\}$ une famille épimorphique ; d'après le lemme 4.4.7, elle se factorise en une famille couvrante suivie d'un monomorphisme. Mais ce dernier étant dominé [35] par une famille épimorphique est un épimorphisme, donc un isomorphisme par 4.4.4.

Remarque 4.4.8. — [36] Comme le préfaisceau image de la famille $\mathscr{F}$ est séparé, la construction du faisceau associé montre que les conditions de la proposition 4.4.3 sont aussi équivalentes aux suivantes :

(v) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, tout $f \in F(S)$ est *localement* dans l'image de $\mathscr{F}$, c'est-à-dire :

(vi) Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout $f \in F(S)$, l'ensemble des $S' \to S$ tels que l'image de f dans $F(S')$ soit dans l'image d'un des $F_i(S')$ est un raffinement de S.

(vii) (Si la topologie est définie par une prétopologie R). Pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout $f \in F(S)$, il existe une famille $\{S_j \to S\} \in R(S)$ telle que pour tout j l'image f_j de f dans $F(S_j)$ soit dans l'image de l'un des $F_i(S_j)$.

Remarque 4.4.8.bis. — Si le faisceau F est *représentable*, les conditions précédentes sont aussi équivalentes à :

(viii) L'ensemble des $T \to F$ ($T \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$), tels qu'il existe un i et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F_i \arrow[r] & F \\ T \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

est un raffinement de F.

En effet, si (viii) est satisfaite, le préfaisceau image des F_i est dominé par [37] un raffinement de F, ce qui entraîne que la famille est couvrante. Réciproquement, on applique (vi) à $\mathrm{id}_F \in F(F)$. 210

Cette condition s'exprime en langage imagé de la manière suivante : localement sur F, il existe un i tel que $F_i \to F$ possède une section. En particulier un morphisme

[35] N.D.E. : On rappelle (cf. N.D.E. (17)) qu'on dit qu'un morphisme $g : G \to H$ est *dominé* par une famille de morphismes $F_i \to H$, si cette famille se factorise à travers g.

[36] N.D.E. : Pour être en accord avec des références ultérieures, on a corrigé la numérotation de l'original, qui comportait deux n^os^ 4.4.7.

[37] N.D.E. : on a remplacé « majore » par : « est dominé par », cf. N.D.E. (17).

$G \to F$, où G est un faisceau et F un faisceau *représentable* sera *couvrant* si et seulement si il possède *localement* (sur F) une *section.*

[38] Les lemmes suivants seront utiles dans $\mathrm{VI_B}$, 8.1 et 8.2.

Lemme 4.4.8.1. — *Soient* $Q \subset P$ *des préfaisceaux en groupes sur* $\mathscr{C}$*,* Q *étant* normal *dans* P. *On suppose que* P *est* séparé*, et que* Q *est un* faisceau. *Alors le préfaisceau en groupes* P/Q *est* séparé. *Par conséquent, on a*

$$a(P/Q) = L(P/Q) = \varinjlim_{R \in J(S)} (P/Q)(R).$$

Il suffit de montrer la première assertion, car la seconde en découle, d'après 4.3.11 (iv) et (ii). Soient $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et R un crible de S, et soit $y \in P(S)/Q(S)$ dont l'image dans $(P/Q)(R)$ est l'identité. Il s'agit de montrer que $y = 1$. Or, par hypothèse, le morphisme $P(S) \to P(R)$ (resp. $Q(S) \to Q(R)$) est injectif (resp. un isomorphisme), et dans le diagramme commutatif ci-dessous, la ligne supérieure est exacte :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & Q(S) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & P(S) \arrow[r] \arrow[d, hook] & P(S)/Q(S) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & Q(R) \arrow[r] & P(R) \arrow[r] & (P/Q)(R) & .
\end{tikzcd}$$

Le résultat en découlera, si l'on montre que la ligne du bas est exacte. Soit $f : R \to P$ dont l'image dans $(P/Q)(R)$ est l'identité, et soit $\phi : T \to R$ avec $T \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Alors $f \circ \phi$ est l'identité de $(P/Q)(T) = P(T)/Q(T)$, i.e. $f \circ \phi \in Q(T)$. Donc, $\phi \mapsto f \circ \phi$ est une application fonctorielle $R(T) \to Q(T)$, donc définit un morphisme de foncteurs $\pi : R \to Q$ tel que $\pi(\mathrm{id}_R) = f$, d'où $f \in Q(R)$. Ceci prouve l'exactitude de la ligne du bas, et le lemme est démontré.

Lemme 4.4.8.2. — *Soient* $H \subset G$ *des préfaisceaux en groupes sur* $\mathscr{C}$*.*

(i) *Si* H *est* normal *dans* G*, alors* L(H) *est* normal *dans* L(G).

(ii) *Si* H *est* central *dans* G*, alors* L(H) *est* central *dans* L(G).

Soit $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$; il faut montrer (cf. I 2.3.6) que L(H)(S) est normal (resp. central) dans L(G)(S). Soient $h \in L(H)(S)$ et $g \in L(G)(S)$, il existe un crible R de S et des éléments $h' \in H(R)$, $g' \in G(R)$, tels que $h = z_R(h')$ et $g = z_R(g')$ (notations de 4.3.10). Comme z_R est un morphisme de groupes, on a $ghg^{-1}h^{-1} = z_R(g'h'g'^{-1}h'^{-1})$.

Dans le cas (i), on a $g'h'g'^{-1}h'^{-1} \in H(R)$, d'où $ghg^{-1}h^{-1} \in LH(S)$; dans le cas (ii), $g'h'g'^{-1}h'^{-1} = 1$ et donc $ghg^{-1}h^{-1} = 1$.

[38] N.D.E. : On a ajouté les lemmes 4.4.8.1 et 4.4.8.2.

Proposition 4.4.9. — *Toute relation d'équivalence dans* $\widetilde{\mathscr{C}}$ *est* effective universelle (3.3.3) *: soit* R *une* $\widetilde{\mathscr{C}}$*-relation d'équivalence dans le faisceau* X *; alors le faisceau associé au préfaisceau séparé*

$$i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R}) : \mathrm{S} \longmapsto \mathrm{X}(\mathrm{S})/\mathrm{R}(\mathrm{S})$$

est un quotient effectif universel de X *par* R*.*

Soit X/R le faisceau quotient de X par R, qui existe par 4.4.1 (ii) : $\mathrm{X}/\mathrm{R} = a(i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R}))$. Il nous faut montrer que $\mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathrm{R}$ est un épimorphisme effectif universel, et que le morphisme $f : \mathrm{R} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{X}/\mathrm{R}} \mathrm{X}$ est un isomorphisme. La première assertion a déjà été démontrée (4.4.3). Quant à f, il provient par application du foncteur a du morphisme $i(\mathrm{R}) \to i(\mathrm{X}) \times_{i(\mathrm{X}/\mathrm{R})} i(\mathrm{X})$ ou, comme $i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R})$ est séparé (4.4.5 (ii)) de sorte que $i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R}) \to i(\mathrm{X}/\mathrm{R})$ est un monomorphisme, du morphisme canonique $i(\mathrm{R}) \to i(\mathrm{X}) \times_{i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R})} i(\mathrm{X})$.

On est donc ramené à démontrer la même assertion dans la catégorie des préfaisceaux. Mais $i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R})$ est le préfaisceau $\mathrm{S} \longmapsto \mathrm{X}(\mathrm{S})/\mathrm{R}(\mathrm{S})$ et on est ramené à démontrer l'assertion analogue dans la catégorie des ensembles, où elle est immédiate.

Proposition 4.4.10. — *Sous les conditions de* 4.4.9*, soit* Y *un sous-faisceau de* X*. Notons* R_Y *la relation d'équivalence induite dans* Y *par* R*. Alors le morphisme canonique* (3.1.6) **211**

$$\mathrm{Y}/\mathrm{R}_\mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}/\mathrm{R}$$

est un monomorphisme *: il identifie* $\mathrm{Y}/\mathrm{R}_\mathrm{Y}$ *à un sous-faisceau de* X/R*, qui est le faisceau-*image *du morphisme composé*

$$\mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}/\mathrm{R}.$$

Le morphisme de préfaisceaux

$$i(\mathrm{Y})/i(\mathrm{R}_\mathrm{Y}) = i(\mathrm{Y})/i(\mathrm{R})_{i(\mathrm{Y})} \longrightarrow i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R})$$

est un monomorphisme. Comme le foncteur a est exact à gauche (4.3.16), il transforme monomorphisme en monomorphisme et donc

$$\mathrm{Y}/\mathrm{R}_\mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}/\mathrm{R}$$

est un monomorphisme. La dernière assertion résulte du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Y}/\mathrm{R}_\mathrm{Y} \arrow[r] & \mathrm{X}/\mathrm{R} \end{tikzcd} \quad ,$$

et du fait que $\mathrm{Y} \to \mathrm{Y}/\mathrm{R}_\mathrm{Y}$ est *couvrant.*

En vertu de cette proposition, nous identifierons toujours $\mathrm{Y}/\mathrm{R}_\mathrm{Y}$ à un sous-faisceau de X/R.

Proposition 4.4.11. — *Soit* R *une* $\widetilde{\mathscr{C}}$*-relation d'équivalence dans le faisceau* X. *Pour tout sous-faisceau* Y *de* X stable *par* R, *notons* Y' *le quotient* $\mathrm{Y}/\mathrm{R}_{\mathrm{Y}}$ *considéré comme un sous-faisceau de* $\mathrm{X}' = \mathrm{X}/\mathrm{R}$. *Alors* $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}' \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{X}$, *et les applications* $\mathrm{Y} \longmapsto \mathrm{Y}/\mathrm{R}_{\mathrm{Y}}$ *et* $\mathrm{Y}' \longmapsto \mathrm{Y}' \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{X}$ *réalisent une correspondance bijective entre l'ensemble des sous-faisceaux* Y *de* X stables *par* R *et l'ensemble des sous-faisceaux* Y' *de* X'.

212 Si Y' est un sous-faisceau de X', alors $\mathrm{Y}' \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{X}$ est un sous-faisceau de X stable par R [39]. Si Y' est obtenu par passage au quotient à partir d'un sous-faisceau Y de X, alors Y est un sous-objet de $\mathrm{Y}' \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{X}$. Il suffit donc de montrer que si l'on a deux sous-faisceaux Y et Y_1 de X, stables par R, Y_1 contenant Y, et si les quotients $\mathrm{Y}/\mathrm{R}_{\mathrm{Y}}$ et $\mathrm{Y}_1/\mathrm{R}_{\mathrm{Y}_1}$ sont identiques, alors $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_1$. On est évidemment ramené à démontrer la même assertion dans le cas où $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{X}$. Notant alors P (resp. Q) le *préfaisceau* $i(\mathrm{X})/i(\mathrm{R})$ (resp. $i(\mathrm{Y})/i(\mathrm{R}_{\mathrm{Y}})$), le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r] & \mathrm{P} \\ \mathrm{Y} \arrow[u, hook] \arrow[r] & \mathrm{Q} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

est cartésien. Comme on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P} \arrow[r, hook] & a(\mathrm{P}) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Q} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & a(\mathrm{Q}) \end{tikzcd} \quad ,$$

et comme $\mathrm{Q} \hookrightarrow a(\mathrm{Q})$ est couvrant (4.3.11), le monomorphisme $\mathrm{Q} \hookrightarrow \mathrm{P}$ est couvrant, donc Q est un raffinement de P. Par changement de base, Y est un raffinement de X. Comme X et Y sont des faisceaux, cela entraîne (4.3.12) $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$.

4.4.12. — En particulier, si Y est un sous-faisceau de X, et si $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y}/\mathrm{R}_{\mathrm{Y}}$, alors la correspondance précédente définit un sous-faisceau $\overline{\mathrm{Y}}$ de X, stable par R, contenant Y et minimum pour ces propriétés, que l'on appelle le *saturé* de Y pour la relation d'équivalence R.

4.5. Le cas d'une topologie moins fine que la topologie canonique. — D'après 4.3.6 et 4.3.8, les conditions suivantes sont équivalentes pour une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathscr{C}$:

213 (i) $\mathcal{T}$ est *moins fine* que la topologie *canonique* de $\mathscr{C}$.

(ii) Tout préfaisceau *représentable* est un *faisceau* pour $\mathcal{T}$.

(iii) Tout crible couvrant pour $\mathcal{T}$ est épimorphique effectif universel.

Si $\mathcal{T}$ est définie par une *prétopologie* $\mathrm{S} \longmapsto \mathrm{R}(\mathrm{S})$, ces conditions équivalent encore à

(iv) Toute famille appartenant à R(S) est épimorphique effective universelle.

[39] N.D.E. : et l'on a $(\mathrm{Y}' \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{X})/\mathrm{R} = \mathrm{Y}'$.

Dans le cas où ces conditions sont vérifiées, le foncteur canonique $\mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}$ se factorise par un foncteur $j_{\mathscr{C}} = j : \mathscr{C} \to \widetilde{\mathscr{C}}$ (on notera aussi $j(\mathrm{S}) = \widetilde{\mathrm{S}}$ [40]).

Proposition 4.5.1. — *Le foncteur* $j : \mathscr{C} \to \widetilde{\mathscr{C}}$ *est* pleinement fidèle, commute aux limites projectives *quelconques. Il est en particulier* exact à gauche *et conserve donc les structures algébriques définies par limites projectives finies.*

Cela résulte immédiatement de la considération du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr] \arrow[dr, "j"'] & & \widehat{\mathscr{C}} \\ & \widetilde{\mathscr{C}} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd},$$

et de 4.4.1 (i).

Avant d'exhiber d'autres propriétés du foncteur j, il nous faut définir la topologie induite sur une catégorie $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. Ne supposant plus nécessairement la topologie donnée moins fine que la topologie canonique, cela se fait de la manière suivante : si C est un crible de T dans $\mathscr{C}$ et si on a un morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, alors C définit naturellement un crible de T dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, noté J(T) (car la définition d'un crible de T ne dépend que de la catégorie $\mathscr{C}_{/\mathrm{T}} = (\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}}$). Si, par exemple, C est défini par la famille $\{\mathrm{T}_i \to \mathrm{T}\}$, alors son image dans $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ est définie par la même famille considérée comme famille de morphismes de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$. Ceci dit, l'application $\mathrm{T} \longmapsto \mathrm{J}(\mathrm{T})$ définit une topologie sur $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ dite *topologie induite* par la topologie donnée. Avec les définitions de [**AS**], 2.3, c'est la moins fine des topologies sur $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ pour laquelle le foncteur canonique

$$i_{\mathrm{S}} : \mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \longrightarrow \mathscr{C}$$

est un *comorphisme* [41]. On remarquera que les identifications **214**

$$(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}})_{/\mathrm{T}} = \mathscr{C}_{/\mathrm{T}}$$

respectent par définition les topologies.

Proposition 4.5.2. — *Soient* S *un faisceau* représentable *sur* $\mathscr{C}$ *et* $\mathrm{F} \to \mathrm{S}$ *un morphisme de* $\widehat{\mathscr{C}}$. *Pour que* $\mathrm{S}' \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}', \mathrm{F})$ *soit un préfaisceau séparé* (*resp. un faisceau*) *sur* $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, *il faut et il suffit que* F *soit un préfaisceau séparé* (*resp. un faisceau*) *sur* $\mathscr{C}$.

Pour tout foncteur P, on a (I 1.4.1)

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{F}) = \coprod_{f \in \mathrm{Hom}(\mathrm{P}, \mathrm{S})} \mathrm{Hom}_f(\mathrm{P}, \mathrm{F}). \qquad [42]$$

---

[40] N.D.E. : et on notera aussi $\mathbf{h}_{\mathrm{S}} = \widehat{\mathrm{S}}$, cf. le premier diagramme commutatif de 4.5.4.

[41] N.D.E. : c.-à-d., tel que pour tout objet $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, tout crible couvrant R′ de $i_{\mathrm{S}}(\mathrm{T} \to \mathrm{S}) = \mathrm{T}$, considéré comme crible de $(\mathrm{T} \to \mathrm{S}) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$, est couvrant.

[42] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Soient $\mathrm{S}' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et $\eta : \mathrm{C}' \to \mathrm{S}'$ un crible couvrant. Comme S est un faisceau, l'application $f \mapsto f \circ \eta$ établit une bijection $\mathrm{Hom}(\mathrm{S}', \mathrm{S}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{C}', \mathrm{S})$. Par conséquent, l'application

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathrm{S}', \mathrm{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathrm{C}', \mathrm{F})$$

se décompose en « réunion disjointe » des applications

$$\mathrm{Hom}_{f}(\mathrm{S}', \mathrm{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{f\circ\eta}(\mathrm{C}', \mathrm{F}).$$

La proposition en résulte.

Corollaire 4.5.3. — *La topologie induite sur $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$ par une topologie sur $\mathscr{C}$ moins fine que la topologie canonique de $\mathscr{C}$, est moins fine que la topologie canonique de $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}$.*

Corollaire 4.5.4. — *Supposons la topologie donnée sur $\mathscr{C}$ moins fine que la topologie canonique. Pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, on a une équivalence de catégories*

$$\widetilde{\mathscr{C}}_{/\widetilde{\mathrm{S}}} \to \widetilde{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}.$$

215 *Les diagrammes suivants sont commutatifs à isomorphisme près (toutes les flèches non désignées sont des équivalences) :*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \arrow[r, "(j_{\mathscr{C}})_{/\mathrm{S}}"] \arrow[d, equal] & \widetilde{\mathscr{C}}_{/\widetilde{\mathrm{S}}} \arrow[r, "(i_{\mathscr{C}})_{/\widetilde{\mathrm{S}}}"] \arrow[d, "\wr"] & \widehat{\mathscr{C}}_{/\widehat{\mathrm{S}}} \arrow[r, "(a_{\mathscr{C}})_{/\widehat{\mathrm{S}}}"] \arrow[d, "\wr"] & \widetilde{\mathscr{C}}_{/\widetilde{\mathrm{S}}} \arrow[d, "\wr"] \\
\mathscr{C}_{/\mathrm{S}} \arrow[r, "j_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}"] & \widetilde{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}} \arrow[r, "i_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}"] & \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}} \arrow[r, "a_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}"] & \widetilde{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}
\end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}
\big(\widetilde{\mathscr{C}}_{/\widetilde{\mathrm{S}}}\big)_{/\widetilde{\mathrm{T}}} \arrow[r] \arrow[dd, "\wr"'] & \big(\widetilde{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}\big)_{/\widetilde{\mathrm{T}}} \arrow[dr] & \\
& & \widetilde{\big(\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}\big)_{/\mathrm{T}}} \\
\widetilde{\mathscr{C}}_{/\widetilde{\mathrm{T}}} \arrow[r] & \widetilde{\mathscr{C}_{/\mathrm{T}}} \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}.$$

La commutativité des deux premiers carrés résulte de la définition de l'équivalence $\widetilde{\mathscr{C}}_{/\widetilde{\mathrm{S}}} \to \widetilde{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$. Pour démontrer la commutativité du dernier, il faut voir que le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathscr{C}}_{/\widehat{\mathrm{S}}} \arrow[r, "\mathrm{L}'"] \arrow[d] & \widehat{\mathscr{C}}_{/\widehat{\mathrm{S}}} \arrow[d] \\
\widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}} \arrow[r, "\mathrm{L}''"] & \widehat{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}
\end{tikzcd},$$

où L' est la restriction du foncteur $\mathrm{L}_{\mathscr{C}}$ à $\widehat{\mathscr{C}}_{/\widehat{\mathrm{S}}}$ et L'' le foncteur $\mathrm{L}_{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$; ceci se voit aisément en revenant à la définition des foncteurs L (donnée après 4.3.9). Quant au second diagramme, ce n'est autre que la restriction aux catégories de faisceaux du diagramme correspondant sur les catégories de préfaisceaux (Exposé I, n° 1), qui est commutatif.

Scholie 4.5.5. — Les diverses assertions de ce numéro montrent que dans le cas où la topologie donnée est moins fine que la topologie canonique, on peut identifier $\mathscr{C}$ à une sous-catégorie pleine de $\widetilde{\mathscr{C}}$, elle-même sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$ et que dans **216**
cette identification, on peut se livrer aux abus de langage, habituels en ce qui concerne $\mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}$, justifiés par les commutativités précédentes. Remarquons explicitement que le premier diagramme de 4.5.4 montre que l'on pourra se servir sans précaution spéciale du foncteur a.

Nous verrons dans le numéro suivant que l'identification de $\mathscr{C}$ à une sous-catégorie pleine de $\widetilde{\mathscr{C}}$ (contrairement à ce qui se passait pour $\widehat{\mathscr{C}}$), commute à la formation de certaines limites inductives et nous dirons alors comment utiliser ce fait.

À partir de maintenant et sauf mention expresse du contraire, nous supposerons la topologie donnée *moins fine que la topologie canonique* et nous ferons systématiquement les identifications exposées ci-dessus.

Proposition 4.5.6. — *Soient* F *et* G *deux faisceaux au-dessus de* S *et* $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *un* S-*morphisme. Les conditions suivantes sur* f *sont équivalentes :*

(i) *f est un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*) *dans* $\widetilde{\mathscr{C}}$.

(ii) *f est un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*) *dans* $\widetilde{\mathscr{C}}_{/\mathrm{S}} = \widetilde{\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}}$.

Pour monomorphisme et isomorphisme, c'est évident (c'est une question de préfaisceaux). Pour épimorphisme, cela résulte de la description des épimorphismes comme morphismes couvrants (4.4.3) et du fait que, par définition de la topologie induite, ceux-ci sont les mêmes dans $\widetilde{\mathscr{C}}$ et $\widetilde{\mathscr{C}}_{/\mathrm{S}}$.

Proposition 4.5.7. — *Soit* $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *un morphisme de faisceaux. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*).

(ii) *Pour chaque* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $f_{\mathrm{S}} : \mathrm{F}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$ *est* localement *un monomorphisme* **217**
(*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*), *c'est-à-dire :*

(iii) *Pour chaque* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, *l'ensemble des* $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ *tels que* $\mathrm{F}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{T}}$ *soit un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*) *est un raffinement de* S.

Si la topologie donnée est définie par une prétopologie R, *ces conditions sont encore équivalentes à la suivante :*

(iv) *Pour chaque* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, *il existe une famille couvrante* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{R}(\mathrm{S})$ *telle que pour tout* i, $\mathrm{F}_{\mathrm{S}_i} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}_i}$ *soit un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme*).

Si la catégorie $\mathscr{C}$ *possède un objet final* e*, on peut se contenter de prendre* $\mathrm{S} = e$ *dans les conditions* (ii), (iii) *et* (iv).

On a évidemment (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Pour démontrer l'équivalence de (i) et (ii) ainsi que le supplément concernant l'objet final, il faut montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i) et que les notions envisagées sont stables par extension de la base. Démontrons d'abord ce dernier point. Pour monomorphisme et isomorphisme, c'est évident (c'est une question de préfaisceaux). Pour épimorphisme, cela résulte du fait que tout épimorphisme de faisceaux est universel (4.4.3).

Montrons enfin que (ii) entraîne (i). Supposons d'abord que $f_{\mathrm{S}} : \mathrm{F}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$ soit localement un monomorphisme (resp. un isomorphisme). Il existe alors un crible couvrant C de S tel que pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{C}$, f_{T} soit un monomorphisme, (resp. un isomorphisme). Comme une limite projective de monomorphismes (resp. isomorphismes) en est un, $\mathrm{Hom}(\mathrm{C}, f)$ sera un monomorphisme (resp. un isomorphisme) (cf. 4.1.4). Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\mathrm{C},\mathrm{F}) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\mathrm{C},f)"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{C},\mathrm{G}) \\ \mathrm{F}(\mathrm{S}) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r, "f(\mathrm{S})"] & \mathrm{G}(\mathrm{S}) \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

218 montre alors que $f(\mathrm{S})$ est injectif (resp. bijectif). Supposons enfin que $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ soit localement un épimorphisme et soit $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ son image. Pour chaque $\mathrm{S} \to \mathrm{G}$, $\mathrm{H} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S}$ est l'image de $f \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S} : \mathrm{F} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S} \to \mathrm{S}$. Pour montrer que f est un épimorphisme, il faut montrer que H est un raffinement de G, c'est-à-dire que $\mathrm{H} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S}$ est un raffinement de S pour chaque S. Mais comme il en est ainsi après tout changement de base $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ d'un raffinement de S (puisque $f \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S}$ est localement couvrant), $\mathrm{H} \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S}$ est bien un raffinement de S (Axiome (T 2)).

Corollaire 4.5.8. — *Soient* F *et* G *deux faisceaux au-dessus de* S *et* $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ *un* S-*morphisme. Pour que* f *soit un monomorphisme, resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme, il faut et il suffit qu'il le soit* localement *sur* S.

Remarque 4.5.9. — La démonstration de la proposition montre que celle-ci reste valable, pour la partie concernant les monomorphismes (resp. les isomorphismes) lorsqu'on suppose seulement que F est un préfaisceau séparé (resp. un faisceau) et G un préfaisceau quelconque (resp. un préfaisceau séparé).

Revenons provisoirement au cas d'une topologie *quelconque* et posons une définition.

Définition 4.5.10. — Soit $\mathrm{G} \to \mathrm{F}$ un morphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$. On dit que G est un *faisceau relatif* au-dessus de F si pour chaque F-foncteur H et chaque raffinement R de H, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(\mathrm{H},\mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{F}}(\mathrm{R},\mathrm{G}) \tag{+}$$

est bijective.

La proposition 4.5.2 se généralise aussitôt :

Proposition 4.5.11. — *Si* F *est un faisceau,* G *est un faisceau relatif au-dessus de* F *si et seulement si c'est un faisceau.*

Lemme 4.5.12. — *Dans la situation* $X \to T \to S$ (*où* X, T, S *sont trois objets de* $\widehat{\mathscr{C}}$), *si* X *est un faisceau relatif au-dessus de* T, *alors* $U = \prod_{T/S} X$ *est un faisceau relatif* 219
au-dessus de S.

En effet, on a pour tout S-foncteur Y

$$\mathrm{Hom}_S(Y, U) = \mathrm{Hom}_T(T \underset{S}{\times} Y, X).$$

Si C est un crible de Y, alors $T \times_S C$ est un crible de $T \times_S Y$; on conclut aussitôt.

Corollaire 4.5.13. — *Les préfaisceaux* $\underline{\mathrm{Hom}}_{T/S}(X, Y)$, $\underline{\mathrm{Isom}}_S(X, Y)$, *etc., sont des faisceaux lorsque les arguments qui y interviennent en sont aussi.*

En effet, tous ces préfaisceaux sont construits à l'aide de produits fibrés et de préfaisceaux $\prod$ (I 1.7 et II 1). Il suffit donc de vérifier le résultat pour un préfaisceau $\prod_{T/S} X$; en ce cas, l'assertion résulte de 4.5.11 et 4.5.12.

4.6. Description du quotient d'un faisceau par une relation d'équivalence

Rappelons que nous supposons la topologie $\mathcal{T}$ donnée moins fine que la topologie canonique.

Proposition 4.6.1. — *Soit* $R \overset{p_1, p_2}{\rightrightarrows} X$ *une* $\widetilde{\mathscr{C}}$*-relation d'équivalence dans le faisceau* X. *Soit* $F \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$ *défini comme suit : pour chaque* S *de* $\mathscr{C}$,

$$F(S) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{sous-}S\textit{-faisceaux } Z \textit{ de } X_S \textit{ stables par } R \times S \text{ (43)}, \textit{ dont le quotient par } R_Z \\ \textit{est } S, \textit{ c'est-à-dire tels que le diagramme } R_Z \rightrightarrows Z \to S \textit{ soit exact} \end{array} \right\}.$$

Alors pour tout faisceau Y, $\mathrm{Hom}(Y, F)$ *s'identifie à l'ensemble :*

$$\{\textit{sous-}Y\textit{-faisceaux de } X \times Y \textit{ stables par } R \times Y \textit{ et dont le quotient est } Y\}.$$

En particulier le sous-faisceau R *de* $X \times X$ *correspond à un élément* p *de* $\mathrm{Hom}(X, F)$ *et le diagramme*

$$R \overset{p_1, p_2}{\rightrightarrows} X \xrightarrow{\ p\ } F$$

est exact, donc identifie F *au* faisceau-quotient X/R.

Posons en effet $Q = X/R$. Pour tout faisceau Y et tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}(Y, Q)$ 220

(43) N.D.E. : $R \times S$ désigne la relation d'équivalence dans $X \times S$ définie par $R \times S_{\mathrm{diagonal}} \subset X \times X \times S \times S$, et R_Z est la relation d'équivalence qu'elle induit dans Z (cf. 3.1.6).

correspondant à une section $s : \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{Q} \times \mathrm{Y}$, considérons le diagramme

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{R} \times \mathrm{Y} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \arrow[r] & \mathrm{Q} \times \mathrm{Y} \\ & \mathrm{Z} \arrow[u, hook] \arrow[r] & \mathrm{Y} \arrow[u, hook, "s"] \end{tikzcd}$$

où le carré est cartésien. Il est immédiat par 4.4.11 que Z est un sous-Y-faisceau de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, stable par $\mathrm{R} \times \mathrm{Y}$, dont le quotient est Y, et que, réciproquement, tout Z de ce type provient d'une unique section de $\mathrm{Q} \times \mathrm{Y}$ sur Y. Prenant d'abord Y représentable, on en tire un isomorphisme $\mathrm{Q} \simeq \mathrm{F}$. Prenant ensuite Y quelconque, on en tire la forme annoncée de $\mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{F})$. Considérant enfin le morphisme canonique $\mathrm{X} \to \mathrm{Q}$, on voit aussitôt qu'il correspond au sous-X-faisceau R de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.6.2. — *Soit* G *un sous-*foncteur *quelconque de* F *tel que* $\mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{G}) \subset \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{F})$ *contienne* R. *Alors le morphisme canonique* $p : \mathrm{X} \to \mathrm{F}$ *se factorise par* G. *Comme* p *est couvrant* (4.4.9 *et* 4.4.3) *il en résulte que* G *est un* raffinement *de* F. *En particulier, tout sous-*faisceau G *de* F *vérifiant la condition précédente est égal à* F (4.3.12).

4.6.3. — Nous allons maintenant nous intéresser au cas où X et R sont représentables. Introduisons d'abord une terminologie. Outre les conditions (a) à (d) introduites en 3.4.1, nous utiliserons d'autres conditions sur une famille (M) de morphismes de $\mathscr{C}$ que nous énonçons ci-après, en rappelant les conditions (a) à (c) déjà données, pour être complet.

(a) (M) est stable par *extension de la base.*

(b) Le *composé* de deux éléments de (M) est dans (M).

(c) Tout *isomorphisme* est élément de (M).

($\mathrm{d}_{\mathcal{T}}$) Tout élément de (M) est couvrant. [44]

221 ($\mathrm{e}_{\mathcal{T}}$) Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de $\mathscr{C}$. S'il existe un raffinement R de Y tel que pour tout $\mathrm{Y}' \to \mathrm{R}$, $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}'$ soit élément de (M), alors f est élément de (M).

Rappelons que (a) et (b) entraînent

(a′) Le produit cartésien de deux éléments de (M) est élément de (M).

D'autre part (a) et ($\mathrm{d}_{\mathcal{T}}$) entraînent par 4.3.9 :

(d′) Tout élément de (M) est un épimorphisme effectif universel.

4.6.4. — Les conditions précédentes sont vérifiées par la famille des morphismes couvrants, notée ($\mathrm{M}_{\mathcal{T}}$), lorsque $\mathscr{C}$ possède des produits fibrés. En effet (cf. 4.2.3), (a) résulte de (C 1), (b) de (C 2), (c) de (C 4), ($\mathrm{d}_{\mathcal{T}}$) de la définition, ($\mathrm{e}_{\mathcal{T}}$) de (C 5). Les

[44] N.D.E. : On rappelle que $\mathcal{T}$ désigne la topologie donnée sur $\mathscr{C}$, moins fine que la topologie canonique.

résultats que nous allons établir pour une famille vérifiant ces conditions s'appliqueront en particulier à la famille $(\mathrm{M}_{\mathcal{T}})$. En particulier, on pourra prendre pour $\mathcal{T}$ la topologie canonique et pour (M) la famille des épimorphismes effectifs universels.

Lemme 4.6.5. — *Soit* (M) *une famille de morphismes vérifiant les propriétés* (a) *à* $(\mathrm{e}_{\mathcal{T}})$ *précédentes. Soit* R *une* $\mathscr{C}$*-relation d'équivalence dans* $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, de type (M). *Soient* $\widetilde{\mathrm{X}}$ *le faisceau défini par* X, $\widetilde{\mathrm{R}}$ *la* $\widetilde{\mathscr{C}}$*-relation d'équivalence dans* $\widetilde{\mathrm{X}}$ *définie par* R *et* $\widetilde{\mathrm{X}}/\widetilde{\mathrm{R}}$ *le faisceau-quotient. Pour que* R *soit* (M)*-effective, il faut et il suffit que* $\widetilde{\mathrm{X}}/\widetilde{\mathrm{R}}$ *soit* représentable. *S'il en est ainsi,* $\widetilde{\mathrm{X}}/\widetilde{\mathrm{R}}$ *est représentable par le quotient* X/R.

Supposons d'abord que R soit (M)-effective et notons Y = X/R. Le morphisme canonique $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est élément de (M), donc couvrant par $(\mathrm{d}_{\mathcal{T}})$. Le morphisme correspondant
$$\widetilde{p} : \widetilde{\mathrm{X}} \to \widetilde{\mathrm{X}}/\widetilde{\mathrm{R}}$$
est donc un épimorphisme effectif universel de $\widetilde{\mathscr{C}}$ (4.4.3), donc identifie $\widetilde{\mathrm{X}}/\widetilde{\mathrm{R}}$ au quotient de $\widetilde{\mathrm{X}}$ par la relation d'équivalence R′ définie dans $\widetilde{\mathrm{X}}$ par $\widetilde{p}$. Comme le foncteur **222**
canonique $\mathscr{C} \to \widetilde{\mathscr{C}}$ commute aux produits fibrés, R′ n'est autre que $\widetilde{\mathrm{R}}$, car R est la relation d'équivalence définie par p.

Réciproquement, supposons $\widetilde{\mathrm{X}}/\widetilde{\mathrm{R}}$ représentable par un objet Y de $\mathscr{C}$. Soit $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ le morphisme déduit du morphisme canonique $\widetilde{\mathrm{X}} \to \widetilde{\mathrm{X}}/\widetilde{\mathrm{R}}$; c'est un morphisme couvrant par 4.4.3. Il est clair comme tout à l'heure que R est la relation d'équivalence définie par p. Il ne reste plus qu'à montrer que $p \in (\mathrm{M})$. Or le carré cartésien
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R} \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "p_2"'] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & \mathrm{X} \arrow[d, "p"] \\
 & \mathrm{X} \arrow[r, "p"] & \mathrm{Y}
\end{tikzcd}$$
montre que p devient p_2, qui est un élément de (M), après changement de base par le morphisme couvrant p. On conclut par $(\mathrm{e}_{\mathcal{T}})$.

Corollaire 4.6.5.1. — [45] *Soit* (M) *vérifiant les propriétés* (a) *à* $(e_{\mathcal{T}})$ *précédentes et soit* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme de* $\mathscr{C}$*-groupes, tel que* $f \in (\mathrm{M})$. *On suppose* $\mathrm{Ker}(f)$ *représentable* (ce qui est le cas si $\mathscr{C}$ possède un objet final e). *Alors la relation d'équivalence dans* G *définie par* $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(f)$ *est* (M)*-effective et* G′ *représente le faisceau quotient* $\widetilde{\mathrm{G}}/\widetilde{\mathrm{H}}$ *pour la topologie* $\mathcal{T}$.

Ceci résulte de 4.6.5 et 3.4.7.1.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de ce numéro.

Théorème 4.6.6. — *Soit* (M) *une famille de morphismes vérifiant les axiomes* (a) *à* $(e_{\mathcal{T}})$ *de* 4.6.3. *Soit* R *une* $\mathscr{C}$*-relation d'équivalence* de type (M) (cf. 3.4.3) *dans l'objet* X *de* $\mathscr{C}$. *Considérons le foncteur* $\mathrm{F} \in \mathrm{Ob}\,\widehat{\mathscr{C}}$ *défini comme suit :*
$$\mathrm{F}(\mathrm{S}) = \{\textit{sous-}\mathrm{S}\textit{-faisceaux } \mathrm{Z} \textit{ de } \mathrm{X}_{\mathrm{S}} \textit{ stables par } \mathrm{R} \times \mathrm{S} \textit{ dont le quotient par } \mathrm{R}_{\mathrm{Z}} \textit{ est } \mathrm{S}\}.$$

[45] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire.

Soit F_0 *le sous-foncteur de* F *défini comme suit :* $\mathrm{F}_0(\mathrm{S})$ *est formé des* $\mathrm{Z} \in \mathrm{F}(\mathrm{S})$ représentables, *c'est-à-dire :*

$$\mathrm{F}_0(\mathrm{S}) = \left\{\begin{array}{l} \textit{sous-}\mathscr{C}_{/\mathrm{S}}\textit{-objets } \mathrm{Z} \textit{ de } \mathrm{X}_{\mathrm{S}} \textit{ stables par } \mathrm{R} \times \mathrm{S}, \textit{ tels que} \\ \mathrm{R}_{\mathrm{Z}} \textit{ soit } (\mathrm{M})\textit{-effective et ait pour quotient } \mathrm{S} \ \ (\textit{c.-à-d.,} \\ \textit{tels que } \mathrm{Z} \to \mathrm{S} \textit{ appartienne à } (\mathrm{M}) \textit{ et } \mathrm{R}_{\mathrm{Z}} \simeq \mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Z}\,) \end{array}\right\}.$$

Alors :

(i) *Le morphisme* $p \in \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{F}) = \mathrm{F}(\mathrm{X})$ *défini par le sous-objet* R *de* $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ *identifie* F *au* faisceau-quotient *de* X *par* R.

223 (ii) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) F *est représentable.*
b) F_0 *est représentable.*
c) R *est* (M)*-effective.*

Sous ces conditions, $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 = \mathrm{X}/\mathrm{R}$.

(iii) *Soit* (N) *une famille de morphismes stable par changement de base, telle que pour toute famille couvrante* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ *et toute famille* $\{\mathrm{T}_i \to \mathrm{S}_i\}$ *de morphismes de* (N)*, toute donnée de descente sur les* T_i *relative à* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ *soit* effective. *Supposons* X *quarrable* (*cf.* 1.6.0) *et le morphisme* $\mathrm{R} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ *élément de* (N). *Alors* $\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}$.

Démonstration. (i) a déjà été démontré (4.6.1).

(ii) On a vu l'équivalence de a) et de c) ainsi que l'égalité $\mathrm{F} = \mathrm{X}/\mathrm{R}$. Il reste à prouver que b) ou c) implique $\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}$. Remarquons d'abord, comme il est d'ailleurs affirmé dans l'énoncé, que F_0 est bien un sous-*foncteur* de F ; en effet pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout $\mathrm{Z} \in \mathrm{F}_0(\mathrm{S})$, le morphisme $\mathrm{Z} \to \mathrm{S}$ est quarrable, donc $\mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ élément de $\mathrm{F}_0(\mathrm{S}')$ pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Comme $\mathrm{R} \in \mathrm{F}(\mathrm{X})$ appartient à $\mathrm{F}_0(\mathrm{X})$, 4.6.2 montre que b) implique $\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}$.

Supposons maintenant c) vérifié et soit Q un objet de $\mathscr{C}$ représentant X/R. Alors, le morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{Q}$ est élément de (M) et, pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout $\mathrm{Z} \in \mathrm{F}(\mathrm{S})$, le diagramme $(*)$ de 4.6.1 montre que $\mathrm{Z} = \mathrm{S} \times_{(\mathrm{Q} \times \mathrm{S})} \mathrm{X} \times \mathrm{S}$ est représentable, et $\mathrm{Z} \to \mathrm{S}$ appartient à (M), donc $\mathrm{Z} \in \mathrm{F}_0(\mathrm{S})$.

(iii) Soit $f \in \mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{F})$ correspondant à $\mathrm{Z} \in \mathrm{F}(\mathrm{S})$. On doit montrer que f se factorise par F_0, c'est-à-dire que Z est représentable. C'est d'abord clair si f se factorise par X en vertu de :

Lemme 4.6.7. — *Soit* $x_0 \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$. *L'image de* x_0 *dans* $\mathrm{F}(\mathrm{S})$ *correspond au sous-faisceau* Z *de* X_{S} *défini par les deux carrés cartésiens*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_{\mathrm{S}} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}}} \times x_0"] & \mathrm{X}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_{\mathrm{S}} \arrow[r] & \mathrm{X} \times \mathrm{X} \\ \mathrm{Z} \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{R}_{\mathrm{S}} \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{R} \arrow[u] \end{tikzcd}.$$

224

Ce lemme résulte aussitôt de la description du morphisme $X \to F$.

Revenons à la démonstration du théorème. Si f se factorise par X, alors Z est représentable et, comme $R \to X \times X$ est élément de (N), il en est de même de $Z \to X_S$.

En général, f ne se factorise pas nécessairement par X ; mais, comme $X \to F$ est couvrant (4.4.3), il existe par 4.4.8 (vii) une famille couvrante $\{S_i \to S\}$ et pour chaque i un morphisme $S_i \to X$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & F \\ S_i \arrow[u] \arrow[r] & S \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} .$$

D'après ce qui précède, le morphisme $f_i : S_i \to F$ défini par le diagramme précédent appartient à $\mathrm{Hom}(S_i, F_0)$ et correspond au sous-faisceau $Z \times_S S_i$ de X_{S_i}. Le morphisme $Z \times_S S_i \to X_{S_i}$ est élément de (N) et la famille $X_{S_i} \to X_S$ couvrante. Il n'y a donc plus qu'à établir :

Proposition 4.6.8. — *Soient* $\{S_i \to S\}$ *une famille couvrante et* Z *un* faisceau audessus de S. *Supposons que pour chaque i, le* S_i*-foncteur* $Z \times_S S_i$ *soit représentable par un objet* T_i. *Alors la famille des* T_i *est munie d'une donnée de descente canonique relative à* $S_i \to S$. *Pour que* Z *soit représentable, il faut et il suffit que cette donnée soit effective ; s'il en est ainsi l'objet « descendu » représente* Z.

Remarquons d'abord que d'après 4.4.3, $S_i \to S$ est une famille épimorphique effective universelle dans $\widetilde{\mathscr{C}}$, donc une famille de *descente* dans $\widetilde{\mathscr{C}}$ (2.3). Si Z est représentable par l'objet T, alors $T \times_S S_i$ (considéré comme faisceau) est isomorphe à $Z \times_S S_i$,
donc la donnée de descente sur les T_i est effective et l'objet descendu (unique) est **225**
isomorphe à Z. Réciproquement, supposons que la donnée de descente canonique sur les T_i soit effective et soit T l'objet descendu. Comme la famille $\{S_i \to S\}$ est une famille de descente dans $\widetilde{\mathscr{C}}$, il existe un S-morphisme $T \to Z$ qui par extension de la base à chaque S_i redonne le morphisme canonique $T_i \to Z \times_S S_i$. Ce morphisme est localement un isomorphisme ; comme T et Z sont des faisceaux, il résulte de 4.5.8 que c'est un isomorphisme.

Corollaire 4.6.9. — *Soit* R *une relation d'équivalence* (M)*-effective dans* X. *Pour tout* faisceau F*, l'application*

$$\mathrm{Hom}(X/R, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, F)$$

identifie le premier ensemble à la partie du second formée des morphismes compatibles avec R.

Corollaire 4.6.10. — *Soit* $\mathcal{T}'$ *une topologie moins fine que* $\mathcal{T}$, *pour laquelle les morphismes de* (M) *soient couvrants. Sous les conditions de* 4.6.6 (iii), X/R *est aussi le faisceau-quotient de* X *par* R *dans toute topologie intermédiaire entre* $\mathcal{T}'$ *et la topologie canonique.*

Remarque 4.6.11. — Si dans l'énoncé de 4.6.6 (iii), on suppose de plus que, dans les hypothèses du texte, si on note T l'objet descendu, le morphisme $T \to S$ est élément de (N), alors les morphismes d'inclusion $Z \hookrightarrow X_S$ sont aussi éléments de (N), comme il résulte aussitôt de la construction de Z par descente.

Remarque 4.6.12. — Les implications c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a) et c) $\Rightarrow$ $[F_0 = F = X/R]$ ont été
226 établies sans recourir à la partie « il suffit » du lemme 4.6.5, qui est le seul endroit où l'on utilise la condition $(e_{\mathcal{T}})$. Elles restent donc valables si (M) vérifie seulement les conditions (a) à $(d_{\mathcal{T}})$. Un exemple de telle famille (M) est celle des *morphismes quarrables couvrants* (comparer avec 4.6.4). Dans le cas de la topologie canonique, ceux-ci ne sont autres que les épimorphismes effectifs universels. On a donc :

Corollaire 4.6.13. — *Soit* R *une relation d'équivalence* effective universelle *dans* X. *Alors l'objet* X/R *de* $\mathcal{C}$ *est le* faisceau-quotient *de* X *par* R *pour la topologie canonique. Il représente le foncteur suivant :* (X/R)(S) *est l'ensemble des sous-*$\mathcal{C}_{/S}$*-objets* Z *de* X_S *stables par* $R \times S$ *et tels que la relation d'équivalence induite soit effective universelle et ait comme quotient* S.

De même, pour une topologie quelconque :

Corollaire 4.6.14. — *Soit* (M) *la famille des morphismes* quarrables couvrants. *Si* R *est une relation d'équivalence* (M)-effective *dans* X, *alors l'objet* X/R *de* $\mathcal{C}$ *est le* faisceau-quotient *de* X *par* R *et représente le foncteur* F_0 *de* 4.6.6.

Scholie 4.6.15. — Nous pouvons maintenant apporter les précisions suivantes à 4.5.5. Alors que dans les questions faisant intervenir exclusivement des limites projectives (produits fibrés, structures algébriques, etc.), on peut, d'après les résultats de l'Exposé I et 4.5.5, identifier indifféremment $\mathcal{C}$ à une sous-catégorie pleine de $\widetilde{\mathcal{C}}$ ou de $\widehat{\mathcal{C}}$, il n'en est pas de même dans celles qui mêlent limites projectives et inductives. *Dans toutes les questions faisant intervenir à la fois des limites projectives et des limites inductives, en particulier des passages au quotient* (exemple : structure de groupe sur le quotient d'un groupe par un sous-groupe invariant), *nous considèrerons la catégorie donnée comme plongée dans la catégorie des faisceaux* ; ainsi si R est une $\mathcal{C}$-relation d'équivalence dans l'objet X de $\mathcal{C}$, X/R désignera le *faisceau-quotient* de X par R (désigné antérieurement par $j(X)/j(R)$), donc dans le cas où ce faisceau sera représentable, l'objet qu'il représente. Les résultats précédents montrent que dans les cas
227 les plus importants, un quotient dans $\mathcal{C}$ sera aussi un quotient dans la catégorie des faisceaux ; de toutes façons, nous nous *interdisons* l'emploi de la notation X/R pour un quotient dans $\mathcal{C}$ qui ne coïnciderait pas avec le quotient dans $\widetilde{\mathcal{C}}$ (par exemple qui ne serait pas universel), modifiant ainsi les définitions du n° 3.

Pour étudier un problème du type ci-dessus, on se place donc d'abord dans la catégorie des faisceaux, où tous les résultats habituels sont valables (cf. n°4.4), puis on particularise les résultat obtenus à la catégorie de départ, en utilisant les résultats du présent numéro et, lorsqu'on en possède, des critères d'effectivité de descente. Nous verrons des exemples de cette méthode dans les numéros suivants.

4.7. Utilisation de critères d'effectivité : théorème d'isomorphie. — Dans ce numéro, nous donnons un exemple d'utilisation de critères d'effectivité. Les données de départ sont une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathscr{C}$ (toujours moins fine que la topologie canonique), une famille (M) de morphismes de $\mathscr{C}$ vérifiant les axiomes (a) à $(\mathrm{e}_{\mathcal{T}})$ de 4.6.3 et une famille (N) de morphismes de $\mathscr{C}$ susceptible de vérifier les axiomes suivants :

(a) (N) est stable par extension de la base.

$(\mathrm{f}_{\mathcal{T}})$ « les morphismes de (N) se descendent par la topologie donnée » ; c'est-à-dire : pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, toute famille couvrante $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ et toute famille $\{\mathrm{T}_i \to \mathrm{S}_i\}$ de morphismes de (N), toute donnée de descente sur les T_i relativement à $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ est effective, et si on note T l'objet descendu, le morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est élément de (N).

Comme tout élément de (M) est couvrant (condition 4.6.3 $(\mathrm{d}_{\mathcal{T}})$), $(\mathrm{f}_{\mathcal{T}})$ entraîne l'axiome suivant : [46]

$(\mathrm{f}_{\mathrm{M}})$ Si $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est élément de (N) et $\mathrm{X} \to \mathrm{X}_1$ élément de (M), toute donnée de descente sur Y relative à $\mathrm{X} \to \mathrm{X}_1$ est effective ; si on note Y_1 l'objet descendu, $\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{X}_1$ est élément de (N).

Signalons tout de suite un exemple de cette situation, qui sera traité plus tard : $\mathscr{C}$ est la catégorie des schémas, $\mathcal{T}$ la topologie fidèlement plate quasi-compacte ; (M) la famille des morphismes fidèlement plats quasi-compacts, (N) la famille des immersions fermées, ou celle des immersions quasi-compactes. [47]

Rappelons le résultat principal de 4.6.6 (compte tenu de 4.6.11) :

Proposition 4.7.1. — *Si* X *est un objet quarrable de* $\mathscr{C}$, R *une relation d'équivalence* **228**
de type (M) *dans* X, *telle que* $\mathrm{R} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ *soit élément de* (N), (N) *vérifiant* (a) *et* $(\mathrm{f}_{\mathcal{T}})$, *alors le faisceau-quotient* X/R *est défini par*

$$(\mathrm{X}/\mathrm{R})(\mathrm{S}) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{sous-}\mathrm{S}\textit{-objets } \mathrm{Z} \textit{ de } \mathrm{X}_{\mathrm{S}}, \textit{ stables par } \mathrm{R} \times \mathrm{S}, \textit{ tels que } \mathrm{Z} \to \mathrm{X}_{\mathrm{S}} \\ \textit{appartienne à } (\mathrm{N}), \textit{ que } \mathrm{Z} \to \mathrm{S} \textit{ soit couvrant } (\textit{ou élément de } (\mathrm{M})) \\ \textit{et que } \mathrm{R}_{\mathrm{Z}} \simeq \mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Z} \end{array} \right\}.$$

De plus, on a :

Proposition 4.7.2. — *Soient* $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *et* R *une relation d'équivalence* (M)*-effective dans* X. *Soit* (N) *une famille de morphismes vérifiant* (a) *et* $(\mathrm{f}_{\mathrm{M}})$.

Pour tout sous-objet Y *de* X, *stable par* R *et tel que* $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *appartienne à* (N), *la* **229**
relation d'équivalence induite dans Y *par* R *est* (M)*-effective et le quotient* $\mathrm{Y}/\mathrm{R}_{\mathrm{Y}} = \mathrm{Y}'$ *est un sous-objet de* $\mathrm{X}' = \mathrm{X}/\mathrm{R}$ *tel que* $\mathrm{Y}' \to \mathrm{X}'$ *appartienne à* (N).

L'application $\mathrm{Y} \mapsto \mathrm{Y}'$ *est une bijection entre l'ensemble des sous-objets* Y *de* X, *stables par* R, *tels que* $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *appartienne à* (N), *et l'ensemble des sous-objets* Y' *de* X' *tels que* $\mathrm{Y}' \to \mathrm{X}'$ *appartienne à* (N). *L'application réciproque est* $\mathrm{Y}' \mapsto \mathrm{Y}' \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{X}$.

---

[46] N.D.E. : On a placé ici l'axiome $(\mathrm{f}_{\mathrm{M}})$ (qui figurait avant la proposition 4.7.2).

[47] N.D.E. : cf. § 6.4, voir aussi VI_{A}, 5.3.1.

Démonstration. Comme R est (M)-effective, le morphisme $X \to X'$ appartient à (M). Soit Y' un sous-objet de X' tel que le morphisme canonique $Y' \to X'$ appartienne à (N). Alors, le sous-objet $Y = Y' \times_{X'} X$ de X est stable par R, et le morphisme $Y \to X$ (resp. $Y \to Y'$) appartient à (N) (resp. à (M)) puisque (N) et (M) sont stables par changement de base. Notons R_Y la relation d'équivalence induite dans Y par R. D'après 4.4.11, le faisceau quotient Y/R_Y est représenté par Y' et donc, d'après 4.6.5, R_Y est (M)-effective.

Réciproquement, montrons que tout sous-objet Y de X, stable par R, tel que le morphisme structural $Y \to X$ appartienne à (N), s'obtient de cette façon. En effet, si Y est stable par R, ses deux images dans $R = X \times_{X'} X$ sont identiques et Y est muni d'une donnée de descente relative à $X \to X'$; le résultat cherché en découle, puisque la famille (N) vérifie l'axiome (f_M).

Corollaire 4.7.3. — *Soient* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *et* R *une relation d'équivalence* (M)*-effective dans* X *; on suppose de plus que* $R \to X \times X$ *appartient à* (N)*, où* (N) *vérifie* (a) *et* $(f_{\mathcal{T}})$*. Alors, pour tout* Y *comme dans* 4.7.2*,* $R_Y \to Y \times Y$ *appartient aussi à* (N) *et donc, d'après* 4.7.1*, on a :*

$$(Y/R_Y)(S) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{sous-}S\textit{-objets } Z \textit{ de } Y_S\textit{, stables par } R_Y \times S\textit{, tels que } Z \to Y_S \\ \textit{appartienne à } (N) \ (\textit{alors } Z \to X_S \textit{ y appartient aussi}), \textit{ que} \\ Z \to S \textit{ soit couvrant et que } R_Z \cong Z \times_S Z \end{array} \right\}.$$

5. Passage au quotient et structures algébriques

5.1. Fibrés principaux homogènes

Définition 5.1.0. — [48] On rappelle (III 0.1) qu'un objet X à groupe d'opérateurs (à droite) H est dit *formellement principal homogène* [49] sous H si le morphisme canonique (de foncteurs)

$$X \times H \longrightarrow X \times X$$

défini par $(x, h) \mapsto (x, xh)$ est un *isomorphisme*. Il revient au même de dire (cf. *loc. cit.*) que pour tout $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, X(S) est formellement principal homogène sous H(S), c'est-à-dire vide ou principal homogène sous H(S). En particulier, si on fait opérer H
230 sur lui-même par translations (à droite), H devient formellement principal homogène sous lui-même.

Définition 5.1.1. — L'objet X à groupe d'opérateurs H est dit *trivial* s'il est isomorphe (comme objet à groupe d'opérateurs H) à H sur lequel H opère par translations.

Proposition 5.1.2. — *Soit* X *formellement principal homogène sous* H*. On a un isomorphisme*

$$\Gamma(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{\text{H-obj.}}(H, X)$$

[48] N.D.E. : On a introduit la numérotation 5.1.0, pour y faire référence ultérieurement.

[49] N.D.E. : On dit aussi « pseudo-torseur », cf. EGA IV_4, 16.5.15. D'autre part, la notion plus générale d'objet *formellement homogène* (pas nécessairement *principal* homogène), est définie dans l'ajout 6.7.1 à la fin de cet Exposé.

d'ensembles principaux homogènes sous $\Gamma(\mathrm{H})$.

À toute section x de X on associe le morphisme de H dans X défini ensemblistement par $h \mapsto xh$. L'assertion énoncée est immédiate, par réduction au cas ensembliste.

Corollaire 5.1.3. — *On a un isomorphisme d'objets à opérateurs* H

$$\mathrm{X} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Isom}}_{\text{H-obj.}}(\mathrm{H}, \mathrm{X}).$$

Corollaire 5.1.4. — *Pour qu'un objet à groupe d'opérateurs soit* trivial*, il faut et il suffit qu'il soit formellement principal homogène et qu'il possède une* section.

Définition 5.1.5. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie munie d'une *topologie*. On dit que le S-objet X à S-groupe d'opérateurs H est *fibré principal homogène* sous H s'il est *localement trivial*, c'est-à-dire si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées : [50]

(i) L'ensemble des $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ tels que (le foncteur) $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ soit trivial sous $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ est un *raffinement* de S.

(ii) Il existe une famille couvrante (pour une prétopologie définissant la topologie **231**
donnée) $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ telle que pour chaque i, le S_i-foncteur $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i$ à S_i-foncteur-groupe d'opérateurs $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i$ soit *trivial* (= possède une section sur S_i).

Proposition 5.1.6. — *Soit* $\mathscr{C}$ *une catégorie munie d'une topologie* $\mathcal{T}$. *Soit* (M) *une famille de morphismes de* $\mathscr{C}$ *vérifiant les axiomes* (a) *à* $(\mathrm{e}_{\mathcal{T}})$ *de* 4.6.3. *Soient* H *un* S-*groupe tel que le morphisme structural* $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ *soit élément de* (M) *et* P *un* S-*objet à* S-*groupe d'opérateurs* H. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) P *est fibré principal homogène sous* H (définition 5.1.5).

(ii) P *est formellement principal homogène sous* H *et le morphisme structural* $\mathrm{P} \to \mathrm{S}$ *est élément de* (M).

(iii) *Il existe un morphisme* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *élément de* (M) *tel que par extension de la base de* S *à* S', P *devienne trivial, c'est-à-dire que* $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *soit trivial sous* $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$.

(iv) H *opère librement sur* P*, de manière* (M)*-effective et le quotient* P/H *est isomorphe à* S.

Remarquons d'abord que (ii) et (iv) sont équivalents, compte tenu du fait que, dans l'un et l'autre cas, $\mathrm{P} \to \mathrm{S}$ est élément de (M), donc quarrable, ce qui assure la représentabilité des produits fibrés $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$ et $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$. Il est clair que (ii) entraîne (iii), car on peut prendre P lui-même comme S', l'hypothèse que P est formellement principal homogène entraînant que $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$ est trivial sous $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$ (5.1.4), car il a une section (la section diagonale). Il est clair que (iii) entraîne (i), car $\{\mathrm{S}' \to \mathrm{S}\}$ est une famille couvrante, par l'axiome $(d_{\mathcal{T}})$. Il reste donc à montrer que (i) entraîne (ii). Le morphisme de *faisceaux* $\mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H} \to \mathrm{P} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{P}$ est localement un isomorphisme, donc un isomorphisme (4.5.8) ; P est donc formellement principal homogène. Le morphisme structural $\mathrm{P} \to \mathrm{S}$ est localement isomorphe au morphisme structural $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ qui est **232**
élément de (M). Il est donc lui-même élément de (M) par $(e_{\mathcal{T}})$.

[50] N.D.E. : Dans ce cas, on dit aussi que X est un H-*torseur*.

L'équivalence entre (i) et (iv) se généralise :

Proposition 5.1.7. — *Sous les mêmes hypothèses sur* $\mathscr{C}$ *et* (M), *soient* H *un* S-*groupe et* X *un* S-*objet sur lequel* H *opère* (*à droite*). *Supposons le morphisme structural* $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ *élément de* (M). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) H *opère librement sur* X *et de manière* (M)-*effective.*

(ii) *Il existe un* S-*morphisme* $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *compatible avec la relation d'équivalence définie dans* X *par l'action de* H *et tel que l'opération de* $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ *sur* X *au-dessus de* Y *qu'on en déduit fasse de* X *un fibré principal homogène sous* H_{Y} au-dessus de Y.

Sous ces conditions p *identifie* Y *au quotient* X/H.

Si $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme compatible avec l'action de H, alors l'opération de $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ sur X au-dessus de Y qu'on en déduit définit dans X la même relation d'équivalence que l'action de H, en vertu de la formule
$$\mathrm{H}_{\mathrm{Y}} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}.$$
La proposition résulte de cette remarque et de l'équivalence (iv) $\Leftrightarrow$ (i) précédente.

Corollaire 5.1.7.1. — [51] *Soit* $\mathscr{C}$ *une catégorie possédant un objet final, stable par produits fibrés, et munie d'une topologie* $\mathcal{T}$ *moins fine que la topologie canonique. Soient* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* $\mathscr{C}$-*groupes, et* $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(f)$. *On suppose* f couvrant *pour la topologie* $\mathcal{T}$.

Alors H *représente le faisceau quotient* G/K, *et* f *est un* K_{H}-*torseur.* (N. B. On dira aussi que : « G *est un* K-*torseur au-dessus de* H ».)

En effet, comme f est couvrant, c'est un épimorphisme effectif universel (4.4.3), donc d'après 3.3.3.1, H est le quotient de G par la relation d'équivalence $\mathscr{R}(f) = \mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{G}$. D'autre part, le morphisme $\mathrm{G} \times \mathrm{K} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{G}$, $(g, k) \mapsto (g, gk)$ est un isomorphisme d'objets à groupe d'opérateurs $\mathrm{K}_{\mathrm{G}} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{K}_{\mathrm{H}}$ (son inverse étant donné par $(g, g') \mapsto (g, g^{-1}g')$). Donc, d'une part, $\mathscr{R}(f)$ est la relation d'équivalence définie par K ; d'autre part, comme le morphisme $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est couvrant, f est un K_{H}-torseur, d'après 5.1.6 (ii) (ou directement d'après la définition 5.1.5 (ii)).

Nous pouvons maintenant préciser le théorème 4.6.6 dans le cas du passage au quotient par un groupe d'opérateurs :

Proposition 5.1.8. — *Dans les hypothèses de* 5.1.7, *notons* F_0 *le foncteur au-dessus de* S *défini comme suit : pour chaque* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{F}_0(\mathrm{S}')$ *est l'ensemble des sous*-S'-*foncteurs* représentables Z *de* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, *stables sous* $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *et fibrés principaux homogènes sous ce* S'-*groupe pour l'action induite* (3.2.2).

233 (i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *L'opération de* H *dans* X *est* (M)-*effective et libre*[52].

b) F_0 *est représentable.*

---

[51] N.D.E. : On a ajouté en corollaire ce cas particulier, qui sera utilisé à plusieurs reprises dans les exposés suivants.

[52] N.D.E. : On a ajouté « et libre ».

Sous ces conditions, on a $\mathrm{F}_0 = \mathrm{X}/\mathrm{H}$.

(ii) *Soit* (N) *une famille de morphismes, stable par changement de base, telle que pour toute famille couvrante* $\{\mathrm{S}'_i \to \mathrm{S}'\}$ *et toute famille* $\{\mathrm{T}_i \to \mathrm{S}'_i\}$ *de morphismes de* (N), *toute donnée de descente sur les* T_i *relativement à* $\{\mathrm{S}'_i \to \mathrm{S}'\}$ *soit effective. Supposons le morphisme* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ *élément de* (N) *et* X *quarrable. Alors l'élément* p *de* $\mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{F}_0)$ *correspondant au sous-objet* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$ *de* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ *identifie* F_0 *au* faisceau-quotient X/H.

5.2. Structures de groupes et passage au quotient. — Nous nous intéressons dans ce numéro aux structures algébriques que l'on peut mettre sur le quotient G/H d'un groupe par un sous-groupe. Nous nous placerons d'abord dans la catégorie des faisceaux sur $\mathscr{C}$ pour une topologie quelconque. En prenant la topologie canonique et en utilisant 4.5.12, nous obtiendrons des résultats pour le passage au quotient effectif universel dans $\mathscr{C}$.

Proposition 5.2.1. — *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de faisceaux en groupes. Il existe sur le* faisceau-*quotient* G/H *une structure unique d'objet à groupe d'opérateurs* G *telle que le morphisme canonique*

$$p : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}/\mathrm{H}$$

soit un morphisme d'objets à groupe d'opérateurs G. *Cette structure est fonctorielle par rapport au couple* (G, H) *: si on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G} \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{H}' \arrow[r] & \mathrm{G}' \end{tikzcd} \quad ,$$

le morphisme $\overline{f} : \mathrm{G}/\mathrm{H} \to \mathrm{G}'/\mathrm{H}'$ (3.2.3) *est compatible avec le morphisme* f *sur les groupes d'opérateurs.* 234

En effet, le faisceau G/H est le faisceau associé au préfaisceau

$$i(\mathrm{G})/i(\mathrm{H}) : \mathrm{S} \longmapsto \mathrm{G}(\mathrm{S})/\mathrm{H}(\mathrm{S});$$

comme le foncteur a est exact à gauche, il transforme objets à groupes d'opérateurs en objets à groupe d'opérateurs. Comme le préfaisceau $i(\mathrm{G})/i(\mathrm{H})$ est muni d'une structure d'objet à groupes d'opérateurs $i(\mathrm{G})$, alors $\mathrm{G}/\mathrm{H} = a(i(\mathrm{G})/i(\mathrm{H}))$ est muni d'une structure d'objet à opérateurs $a(i(\mathrm{G})) = \mathrm{G}$. Cette structure jouit évidemment de toutes les propriétés énoncées.

Corollaire 5.2.2. — *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de* $\mathscr{C}$*-groupes. Supposons que l'opération de* H *sur* G *soit* effective universelle. *Il existe sur l'*objet-*quotient* $\mathrm{G}/\mathrm{H} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *une structure unique d'objet à groupe d'opérateurs* G *telle que* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ *soit un morphisme d'objets à opérateurs. Cette structure est fonctorielle en le couple* (H, G) (H *opérant de manière effective universelle dans* G), *au sens précédent.*

Proposition 5.2.3. — *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de faisceaux en groupes identifiant* H *à un sous-faisceau en groupes* invariant *de* G*. Il existe sur le* faisceau-*quotient* G/H *une structure unique de faisceau en groupes telle que le morphisme canonique* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G/H}$ *soit un morphisme de groupes. Cette structure est fonctorielle en le couple* (H, G) (H *invariant*)*.*

La démonstration est semblable à celle de 5.2.1.

Corollaire 5.2.4. — *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de* $\mathscr{C}$*-groupes identifiant* H *à un sous-groupe* invariant *de* G*. Supposons que l'action de* H *sur* G *soit* effective universelle*. Il existe sur l'*objet-*quotient* $\mathrm{G/H} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *une structure de groupe unique telle que le morphisme canonique* $\mathrm{G} \to \mathrm{G/H}$ *soit un morphisme de groupes. Cette structure est fonctorielle par rapport au couple* (H, G) (H *invariant,* H *opérant de manière effective universelle*)*.*

235 On peut caractériser la structure de groupe de G/H de manière plus parlante :

Proposition 5.2.5. — *Sous les conditions de* 5.2.4*, soient* K *un* $\mathscr{C}$*-groupe et* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{K}$ *un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est un morphisme de groupes compatible avec la relation d'équivalence définie par* H*.*

(ii) *f est un morphisme de groupes induisant le morphisme trivial* $\mathrm{H} \to \mathrm{K}$*.*

(iii) *f se factorise en un morphisme de groupes* $\mathrm{G/H} \to \mathrm{K}$*.*

En particulier, on a un isomorphisme, fonctoriel en le groupe K

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}\text{-gr.}}(\mathrm{G/H}, \mathrm{K}) \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}\text{-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{K}) \mid f \circ u = e\}.$$

L'équivalence de (i) et (ii) se démontre ensemblistement. On a évidemment (iii) $\Rightarrow$ (ii). L'équivalence de (iii) et de (ii) résulte de la formule

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{G/H}, \mathrm{K}) \simeq \mathrm{Hom}(i(\mathrm{G})/i(\mathrm{H}), \mathrm{K})$$

et de la définition de la structure de groupe de G/H.

Remarque 5.2.6. — Dans la situation précédente, si le noyau de f est exactement H, le morphisme $\mathrm{G/H} \to \mathrm{K}$ qui factorise f est un *monomorphisme.* Cela résulte aussitôt de 3.3.4.

Dans le cas de faisceaux en groupes, on peut préciser 4.4.11 par la

Proposition 5.2.7. — *Soient* G *un faisceau en groupes,* H *un sous-faisceau en groupes*
236 *invariant. Pour tout sous-faisceau en groupes* K *de* G *contenant* H*, soit* K' *le groupe quotient* K/H *considéré comme un sous-groupe de* $\mathrm{G}' = \mathrm{G/H}$*.*

On a $\mathrm{K} = \mathrm{K}' \times_{\mathrm{G}'} \mathrm{G}$*, et les applications* $\mathrm{K} \mapsto \mathrm{K/H}$ *et* $\mathrm{K}' \mapsto \mathrm{K}' \times_{\mathrm{G}'} \mathrm{G}$ *réalisent une* bijection *entre l'ensemble des sous-faisceaux en groupes de* G *contenant* H *et l'ensemble des sous-faisceaux en groupes de* G'*. Dans cette correspondance, les sous-faisceaux en groupes* invariants *de* G *et de* G' *se correspondent.*

La première partie résulte facilement de 4.4.11 et de 3.2.4. Il reste à voir que K est invariant dans G si et seulement si K′ est invariant dans G′. Si K est invariant dans G, alors le préfaisceau $i(\mathrm{K})/i(\mathrm{H})$ est invariant dans $i(\mathrm{G})/i(\mathrm{H})$. Il en est de même des faisceaux associés, en vertu de l'argument habituel. Si réciproquement K′ est invariant dans G′, alors le produit fibré $\mathrm{K} \times_{\mathrm{G}'} \mathrm{G}$ est invariant dans G, comme on le voit immédiatement.

Si maintenant L est un sous-faisceau en groupes quelconque de G, soit $\overline{\mathrm{L}}$ le saturé de L pour la relation d'équivalence définie par H, on notera aussi $\overline{\mathrm{L}} = \mathrm{L} \cdot \mathrm{H}$.

Proposition 5.2.8. — *Sous les conditions précédentes,* $\mathrm{L} \cdot \mathrm{H}$ *est un sous-faisceau en groupes de* G *contenant* H *et l'image de* L *dans* G/H *s'identifie à*

$$(\mathrm{L} \cdot \mathrm{H})/\mathrm{H} \simeq \mathrm{L}/(\mathrm{H} \cap \mathrm{L}).$$

En effet, notons L′ le faisceau image de L dans G/H. C'est un sous-faisceau en groupes de G/H correspondant à $\mathrm{L} \cdot \mathrm{H}$ dans la correspondance de la proposition précédente. Comme le morphisme $\mathrm{L} \to \mathrm{L}'$ est couvrant, donc un épimorphisme effectif universel de faisceaux, il résulte de 4.4.9 que L′ s'identifie au quotient de L par le noyau de $\mathrm{L} \to \mathrm{L}'$ qui n'est évidemment autre que $\mathrm{H} \cap \mathrm{L}$.

Considérons enfin la situation suivante : on a un faisceau en groupes G, un sous-faisceau en groupes K et un sous-faisceau en groupes H de K, invariant dans K. **237** Définissons d'abord une opération (à droite) du faisceau en groupes $\mathrm{H}\backslash\mathrm{K}$ (= K/H) sur G/H. Le groupe K opère par translations à droite sur G. Comme H est invariant dans K, cette opération est compatible avec la relation d'équivalence définie par l'action de H et définit donc une opération de K sur G/H, c'est-à-dire un morphisme du groupe K° opposé à K dans $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$. Comme ce dernier est un faisceau (4.5.13) et que ce morphisme est trivial sur H, il se factorise par K/H et définit l'opération cherchée. Comme les opérations de G sur lui-même à droite et à gauche commutent, les opérations de G et de K/H sur G/H *commutent*.

Proposition 5.2.9. — *Sous les conditions précédentes,* K/H *opère librement* (à droite) *dans* G/H *et on a un isomorphisme canonique de faisceaux à groupe d'opérateurs* G

$$(\mathrm{G}/\mathrm{H})/(\mathrm{K}/\mathrm{H}) \simeq \mathrm{G}/\mathrm{K}.$$

Lorsque K *est invariant dans* G*, auquel cas* K/H *est invariant dans* G/H (5.2.7)*, cet isomorphisme respecte les structures de groupe des deux membres.*

On a un isomorphisme de préfaisceaux

$$\big(i(\mathrm{G})/i(\mathrm{H})\big)/\big(i(\mathrm{K})/i(\mathrm{H})\big) \xleftarrow{\sim} i(\mathrm{G})/i(\mathrm{K}),$$

qui respecte les structures d'objets à groupe d'opérateurs $i(\mathrm{G})$. Le résultat annoncé s'obtient en appliquant le foncteur a à cette relation.

Corollaire 5.2.10. — *Soient* G *un* $\mathscr{C}$*-groupe,* K *un sous-*$\mathscr{C}$*-groupe de* G*,* H *un sous-*$\mathscr{C}$*-groupe* invariant *de* K*. Soit* (M) *une famille de morphismes de* $\mathscr{C}$ *vérifiant les axiomes* (a) *à* ($\mathrm{e}_{\mathcal{T}}$)*. Supposons l'opération de* H *sur* G (*resp.* K) *à droite* (M)*-effective. Alors* K/H *opère de manière naturelle librement à droite sur* G/H *; cette opération commute à celle de* G*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

238 (i) *L'opération de* K *sur* G *est* (M)*-effective.*

(ii) *L'opération de* K/H *sur* G/H *est* (M)*-effective.*

Sous ces conditions, on a un isomorphisme d'objets [53] *à groupe d'opérateurs* G *:*

$$(\mathrm{G}/\mathrm{H})/(\mathrm{K}/\mathrm{H}) \simeq \mathrm{G}/\mathrm{K}.$$

5.3. Utilisation de critères d'effectivité : théorème de Noether. — [54] Soient $\mathscr{C}, \mathcal{T}$ et (M) comme d'habitude. *Soit* (N) *une famille de morphismes vérifiant les axiomes* (a) *et* ($\mathrm{f_M}$) *de* 4.7. Mettant ensemble 5.2.7 et 4.7.2, on obtient :

Proposition 5.3.1. — *Soit* G *un* $\mathscr{C}$*-groupe. Soit* H *un sous-*$\mathscr{C}$*-groupe de* G*, invariant et opérant de manière* (M)*-effective dans* G*.*

Pour tout sous-$\mathscr{C}$*-groupe* K *de* G *contenant* H *et tel que le morphisme* $\mathrm{K} \to \mathrm{G}$ *appartienne à* (N)*,* H *opère dans* K *de manière* (M)*-effective et le quotient* $\mathrm{K}/\mathrm{H} = \mathrm{K}'$ *est un sous-*$\mathscr{C}$*-groupe de* $\mathrm{G}/\mathrm{H} = \mathrm{G}'$ *tel que le morphisme* $\mathrm{K}' \to \mathrm{G}'$ *appartienne à* (N)*.*

L'application $\mathrm{K} \mapsto \mathrm{K}'$ *est une* bijection *entre l'ensemble des sous-*$\mathscr{C}$*-groupes* K *de* G*, contenant* H *et tels que* $\mathrm{K} \to \mathrm{G}$ *appartienne à* (N) *et l'ensemble des sous-*$\mathscr{C}$*-groupes* K' *de* G' *tels que* $\mathrm{K}' \to \mathrm{G}'$ *appartienne à* (N)*. L'application réciproque est* $\mathrm{K}' \mapsto \mathrm{K} \times_{\mathrm{G}'} \mathrm{G}$*. Dans cette correspondance, les sous-groupes invariants de* G *et de* G' *se correspondent.*

Corollaire 5.3.2. — *Si* $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *est élément de* (N)*, alors* $\mathscr{C}$ *possède un objet final* e *et la section unité* $e \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ *est élément de* (N)*.* [55]

6. Topologies dans la catégorie des schémas

239 **6.1. La topologie de Zariski.** — C'est la topologie engendrée par la prétopologie suivante : une famille de morphismes $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ est couvrante si chaque morphisme est une immersion ouverte et si la réunion des images des S_i est S tout entier. On la note (Zar).

Définition 6.1.1. — Un faisceau pour la topologie de Zariski est aussi appelé *foncteur de nature locale* : c'est un foncteur contravariant de (**Sch**) dans (**Ens**) tel que pour tout schéma S et tout recouvrement de S par des ouverts S_i, on ait un diagramme exact :

$$\mathrm{F}(\mathrm{S}) \to \prod_i \mathrm{F}(\mathrm{S}_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{F}(\mathrm{S}_i \cap \mathrm{S}_j).$$

En particulier, un foncteur de nature locale *transforme sommes directes en produits.* Comme tout foncteur représentable est un faisceau, cette topologie est moins fine que la topologie canonique.

---

(53) N.D.E. : de $\mathscr{C}$

(54) N.D.E. : En fait, les isomorphismes établis dans 5.2.8 à 5.2.10 mériteraient d'être appelés « théorèmes d'isomorphisme de Noether ».

(55) N.D.E. : Ceci résulte de la proposition appliquée à K = H.

Au point de vue terminologie, chaque fois que nous dirons « local », « localement », sans précisions, ce sera par référence à la topologie de Zariski, donc au sens habituel.

6.2. Un procédé de construction de topologies

Proposition 6.2.1. — *Soient* $\mathscr{C}$ *une catégorie,* $\mathscr{C}'$ *une sous-catégorie pleine,* P *un ensemble de familles de morphismes de* $\mathscr{C}$ *de même but, stable par changement de base et par composition* (*i.e. vérifiant les axiomes* (P 1) *et* (P 2) *de* 4.2.5), P' *un ensemble de familles de morphismes de* $\mathscr{C}'$ *contenant les familles réduites à un isomorphisme identique. On munit* $\mathscr{C}$ *de la topologie engendrée par* P *et* P' (*cf.* 4.2.5.0) *et l'on suppose vérifiées les trois conditions ci-dessous :*

(a) *Si* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{P}'$ (*donc* $\mathrm{S}_i, \mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$) *et si* $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ *est un morphisme de* $\mathscr{C}'$*, alors les produits fibrés* $\mathrm{S}_i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ (*dans* $\mathscr{C}$) *existent et la famille* $\{\mathrm{S}_i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \to \mathrm{T}\}$ **240** *appartient à* P' (*donc* $\mathrm{S}_i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$). (Remarque : cette condition entraîne que P' est stable par changement de base dans $\mathscr{C}'$, mais ne lui est pas équivalente, car elle suppose de plus que le foncteur d'inclusion de $\mathscr{C}'$ dans $\mathscr{C}$ commute à certains produits fibrés).

(b) *Pour tout* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$*, il existe* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{P}$ *avec* $\mathrm{S}_i \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$ *pour chaque* i.

(c) *Dans la situation suivante :*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{S}_{ijk} \arrow[d, "(\mathrm{P}')"] \\
\mathrm{S}_i \arrow[d, "(\mathrm{P}')"'] & \mathrm{S}_{ij} \arrow[l, "(\mathrm{P})"'] \\
\mathrm{S} &
\end{tikzcd},$$

où S, S_i, S_{ij}, $\mathrm{S}_{ijk} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$ *;* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{P}'$ *;* $\{\mathrm{S}_{ij} \to \mathrm{S}_i\} \in \mathrm{P}$ *pour chaque* i *;* $\{\mathrm{S}_{ijk} \to \mathrm{S}_{ij}\} \in \mathrm{P}'$ *pour chaque* ij*, il existe une famille* $\{\mathrm{T}_n \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{P}'$ *et pour chaque* n *un multi-indice* (ijk) *et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}_{ijk} \arrow[dr] & & \mathrm{T}_n \arrow[ll] \arrow[dl] \\
 & \mathrm{S} &
\end{tikzcd}.$$

Alors, pour qu'un crible R *de* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ *soit* couvrant*, il faut et il suffit qu'il existe une famille composée*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R} \arrow[d] & \mathrm{S}_{ij} \arrow[l, dashed] \arrow[d, "(\mathrm{P}')"] \\
\mathrm{S} & \mathrm{S}_i \arrow[l, "(\mathrm{P})"']
\end{tikzcd},$$

où $S_i, S_{ij} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$, $\{S_i \to S\} \in P, \{S_{ij} \to S_i\} \in P'$ *pour chaque* i, *et que les morphismes* $S_{ij} \to S$ *obtenus se factorisent par* R (*en d'autres termes que le crible engendré par cette famille composée soit contenu dans* R).

241 *Démonstration.* Les familles éléments de P et de P′ étant couvrantes, une famille composée de telles familles le sera aussi (C 2), donc un crible de la forme indiquée sera couvrant, car contenant un crible couvrant.

Réciproquement, il suffit de voir que les cribles de cette forme forment bien une topologie, i.e. il suffit de vérifier les axiomes (T 1) à (T 4) de 4.2.1.

Axiome (T 4). Soit $S \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Il existe d'après (b) une famille $\{S_i \to S\} \in P$ avec $S_i \in \mathrm{Ob}\ \mathscr{C}'$. Les familles $\{S_i \xrightarrow{\mathrm{id}_{S_i}} S_i\}$ sont éléments de P′ par hypothèse. Le crible S de S est donc de la forme voulue :

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r] \arrow[d, "(P')"', "\mathrm{id}"] & S \arrow[d, "\mathrm{id}_S"] \\ S_i \arrow[r, "(P)"] & S \end{tikzcd} \quad .$$

Axiome (T 3). Évident.

Axiome (T 2). Soit R un crible de S de la forme voulue et soit C un crible [56] de S tel que, pour tout $T \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et tout morphisme $T \to S$ se factorisant par R, le crible $C \times_S T$ de T soit de la forme voulue. Alors, comme $S_{ij} \to S$ se factorise par R, le crible $C_{ij} = C \times_S S_{ij}$ de S_{ij} :

$$\begin{tikzcd} & S_{ij} \arrow[dl] \arrow[d, "(P')"] & C_{ij} \arrow[l, hook'] \arrow[dd] \\ & S_i \arrow[d, "(P)"] & \\ R \arrow[r, hook] & S & C \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

est de la forme voulue ; donc, pour chaque ij, on a un diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd} S_{ijkl} \arrow[d, "(P')"'] \arrow[ddr] & \\ S_{ijk} \arrow[d, "(P)"'] & \\ S_{ij} & C_{ij} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd} \quad .$$

[56] N.D.E. : On a corrigé l'original ici.

On a donc prouvé qu'il existe une famille composée

$$\mathrm{S}_{ijkl} \xrightarrow{(\mathrm{P}')} \mathrm{S}_{ijk} \xrightarrow{(\mathrm{P})} \mathrm{S}_{ij} \xrightarrow{(\mathrm{P}')} \mathrm{S}_{i} \xrightarrow{(\mathrm{P})} \mathrm{S}$$

appartenant à $\mathrm{P} \circ \mathrm{P}' \circ \mathrm{P} \circ \mathrm{P}'$, se factorisant par C et où tous les objets autres que S sont dans $\mathscr{C}'$. Appliquant la condition (c) à chaque famille $\{\mathrm{S}_{ijkl} \to \mathrm{S}_i\}$, on en déduit **242**
qu'il existe pour chaque i une famille $\{\mathrm{T}_{in} \to \mathrm{S}_i\} \in \mathrm{P}'$, telle que $\mathrm{T}_{in} \to \mathrm{S}$ se factorise par l'un des S_{ijkl}, donc par C :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_{in} \arrow[r] \arrow[d, "(\mathrm{P}')"'] & \mathrm{S}_{ijkl} \arrow[dd] \\
\mathrm{S}_i \arrow[d, "(\mathrm{P})"'] & \\
\mathrm{S} & \mathrm{C} \arrow[l, hook']
\end{tikzcd} .$$

Le crible C de S est donc de la forme voulue, ce qui achève la vérification.

Axiome (T 1). Soit R un crible de S de la forme donnée et soit $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ un morphisme de $\mathscr{C}$. Montrons que le crible $\mathrm{R} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$ de T est de la forme voulue.

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{S}_{ij} \arrow[dl] \arrow[d, "(\mathrm{P}')"] & & \mathrm{U}_{ikj} \arrow[ll] \arrow[d, "(\mathrm{P}')"] \\
& \mathrm{S}_i \arrow[d, "(\mathrm{P})"] & \mathrm{T}_i \arrow[l] \arrow[d, "(\mathrm{P})"] & \mathrm{U}_{ik} \arrow[l, "(\mathrm{P})"'] \arrow[dl, "(\mathrm{P})"] \\
\mathrm{R} \arrow[r, hook] & \mathrm{S} & \mathrm{T} \arrow[l] &
\end{tikzcd} .$$

Soit $\mathrm{T}_i = \mathrm{S}_i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$. La famille $\{\mathrm{T}_i \to \mathrm{T}\}$ appartient à P (par (P 1)). Appliquant (b), on construit des $\{\mathrm{U}_{ik} \to \mathrm{T}_i\} \in \mathrm{P}$, avec les $\mathrm{U}_{ik} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$. Par hypothèse (condition (P 2) sur P), on a $\{\mathrm{U}_{ik} \to \mathrm{T}\} \in \mathrm{P}$. D'après (a), $\mathrm{U}_{ik} \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S}_{ij} = \mathrm{U}_{ikj}$ est objet de $\mathscr{C}'$ et pour chaque ik, $\{\mathrm{U}_{ikj} \to \mathrm{U}_{ik}\} \in \mathrm{P}'$. Alors, le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R} \arrow[d] & & \mathrm{U}_{ikj} \arrow[ll] \arrow[d, "(\mathrm{P}')"] \\
\mathrm{S} & \mathrm{T} \arrow[l] & \mathrm{U}_{ik} \arrow[l, "(\mathrm{P})"']
\end{tikzcd}$$

montre que les morphismes $\mathrm{U}_{ijk} \to \mathrm{T}$ se factorisent par le crible $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{R}$ de T, qui est donc de la forme voulue, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 6.2.2. — *Si* $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$ *et si* R *est un crible de* S, R *est couvrant si et seulement si il existe une famille* $\{\mathrm{T}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{P}'$, *se factorisant par* R.

243 En effet, un tel crible est couvrant. D'autre part il suffit d'appliquer (c) en prenant la famille $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ réduite à l'isomorphisme identique de S pour déduire de la proposition qu'un crible couvrant est de la forme indiquée.

Corollaire 6.2.3. — *Pour qu'un préfaisceau* F *sur* $\mathscr{C}$ *soit séparé* (*resp. un faisceau*), *il faut et il suffit que le morphisme*

$$\mathrm{F}(\mathrm{S}) \longrightarrow \prod_i \mathrm{F}(\mathrm{S}_i)$$

soit injectif (*resp. que le diagramme*

$$\mathrm{F}(\mathrm{S}) \longrightarrow \prod_i \mathrm{F}(\mathrm{S}_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{F}(\mathrm{S}_i \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_j)$$

soit exact) *dans les deux cas suivants :*

(i) $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{P}$,

(ii) $\mathrm{S}, \mathrm{S}_i \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}'$; $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{P}'$.

En effet, les conditions sont nécessaires, car les familles en question sont couvrantes. Si C est le crible de S image d'une famille de morphismes $\{\mathrm{S}_{ij} \xrightarrow{(\mathrm{P}')} \mathrm{S}_i \xrightarrow{(\mathrm{P})} \mathrm{S}\}$, un diagram-chasing facile montre que les conditions du corollaire entraînent que $\mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{F}) \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}(\mathrm{C}, \mathrm{F})$ est injectif (resp. bijectif). Mais tout raffinement R de S contient un crible C du type ci-dessus et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{F}) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathrm{Hom}(\mathrm{R}, \mathrm{F}) \arrow[dl, "h"] \\
& \mathrm{Hom}(\mathrm{C}, \mathrm{F}) &
\end{tikzcd}.$$

On sait que g est injectif, donc aussi f. Donc F est séparé. Mais R est un raffinement
244 de C, donc h est aussi injectif. Si g est bijectif, alors f l'est aussi, donc F est un faisceau.

Remarque 6.2.4. — Le corollaire précédent ne résulte *pas* de 4.3.5, car P′ n'est *pas* stable par extension de la base.

Remarque 6.2.5. — La condition (c) est vérifiée en particulier dans le cas où

(i) P′ est stable par composition.

(ii) Si $\{\mathrm{S}_j \to \mathrm{S}\}$ est une famille de morphismes de $\mathscr{C}'$, élément de P, il en existe une sous-famille élément de P′.

6.3. Application à la catégorie des schémas. — On prend pour $\mathscr{C}$ la catégorie des schémas, pour $\mathscr{C}'$ la sous-catégorie pleine formée des schémas affines, pour P l'ensemble des familles surjectives d'immersions ouvertes. On considèrera plusieurs ensembles P′ :

P'_1 : familles finies surjectives, composées de morphismes *plats*.

P'_2 : familles finies surjectives, composées de morphismes *plats de présentation finie et quasi-finis.* [57]

P'_3 : familles finies surjectives, composées de morphismes *étales*

P'_4 : familles finies surjectives, composées de morphismes *étales et finis.*

Pour chacun de ces ensembles P'_i, sauf P'_4, les conditions de la proposition 6.2.1 sont vérifiées ((c) grâce à 6.2.5, car un schéma affine étant quasi-compact, toute famille de morphismes de $\mathscr{C}'$, élément de P, contient une sous-famille *finie* qui soit également dans P, donc dans P'_i pour $i = 1, 2, 3$). La topologie $\mathcal{T}_i$ engendrée par P et P'_i est notée 245
et appelée de la manière suivante : [57]

$\mathcal{T}_1$	=	(fpqc)	=	topologie fidèlement plate quasi-compacte.
$\mathcal{T}_2$	=	(fppf)	=	topologie fidèlement plate (localement) de présentation finie.
$\mathcal{T}_3$	=	(ét)	=	topologie étale.
$\mathcal{T}_4$	=	(étf)	=	topologie étale finie.

Comme $\mathrm{P}'_1 \supset \mathrm{P}'_2 \supset \mathrm{P}'_3 \supset \mathrm{P}'_4$, on a

$$(\mathrm{fpqc}) \geqslant (\mathrm{fppf}) \geqslant (\text{ét}) \geqslant (\text{étf}) \geqslant (\mathrm{Zar}).$$

Proposition 6.3.1. — (i) *Pour que le crible* R *de* S *soit couvrant pour* $\mathcal{T}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, *il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement* (S_p) *de* S *par des ouverts affines et pour chaque* p *une famille* $\{\mathrm{S}_{pq} \to \mathrm{S}_p\}$ *élément de* P'_i, *les* S_{pq} *étant affines, tels que chaque morphisme* $\{\mathrm{S}_{pq} \to \mathrm{S}\}$ *se factorise par* R. [58]

(ii) *Pour qu'un préfaisceau* F *sur* (**Sch**) *soit un faisceau pour* (fpqc) (*resp.* (fppf), (ét), (étf)), *il faut et il suffit que*

a) F *soit un faisceau pour* (Zar), *i.e. un foncteur de nature locale.*

b) *Pour tout morphisme fidèlement plat* (*resp. fidèlement plat de présentation finie et quasi-fini, resp. étale surjectif, resp. étale fini surjectif*) $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, *où* T *et* S *sont affines, on ait un diagramme exact :*

$$\mathrm{F}(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{T}) \rightrightarrows \mathrm{F}(\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}).$$

(iii) *Les topologies* $\mathcal{T}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, *sont moins fines que la topologie canonique.*

(iv) *Toute famille surjective formée de morphismes plats et ouverts* (*resp. plats et* 246
localement de présentation finie, resp. étales, resp. étales et finis) *est couvrante pour* (fpqc) (*resp.* (fppf), *resp.* (ét), *resp.* (étf)).

---

[57] N.D.E. : Soit P''_2 l'ensemble des familles finies surjectives, composées de morphismes de $\mathscr{C}'$ *plats de présentation finie*. D'après la proposition 6.3.1 qui suit, la topologie $\mathcal{T}_2$ engendrée par P et P'_2 coïncide avec la topologie engendrée par P et P''_2. Ceci découle des résultats de EGA IV_4, § 17.16 sur les quasi-sections, voir la preuve de 6.3.1. Citons ici le cas particulier suivant de EGA IV_4, 17.16.2 : soient S *affine* et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ un morphisme plat surjectif localement de présentation finie, alors il existe un morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fidèlement plat, de présentation finie, quasi-fini, avec S' affine, et un S-morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{X}$.

[58] N.D.E. : Par hypothèse, chaque famille $\{\mathrm{S}_{pq} \to \mathrm{S}\} \in \mathrm{P}'_i$ est *finie*, donc $\mathrm{S}'_p = \coprod_q \mathrm{S}_{pq}$ est affine et la famille peut donc être remplacée par le morphisme $\mathrm{S}'_p \to \mathrm{S}_p$, qui appartient encore à P'_i.

(v) *Toute famille surjective, finie et formée de morphismes plats et quasi-compacts est couvrante pour* (fpqc). *En particulier, tout morphisme fidèlement plat et quasi-compact est couvrant pour* (fpqc).

Démonstration. (i) résulte de 6.2.1, (ii) de 6.2.3, compte tenu du fait qu'un faisceau pour la topologie de Zariski transforme sommes directes en produits. Tout foncteur représentable étant un faisceau pour (Zar) et vérifiant la condition (b) de (ii) par SGA 1, VIII 5.3, $\mathcal{T}_1$ est moins fine que la topologie canonique, ce qui prouve (iii).

Prouvons (iv). Soit $\{S_i \to S\}$ une famille de morphismes comme dans l'énoncé. Considérant un recouvrement de S par des ouverts affines, on se ramène immédiatement au cas où S est affine. [59]

Traitons d'abord le cas où les morphismes $S_i \to S$ sont plats et ouverts (resp. étales). Soit S_{ij} un recouvrement de S_i par des ouverts affines. Comme les morphismes en cause sont ouverts, les images T_{ij} des S_{ij} forment un recouvrement ouvert de S. Comme S est affine, donc quasi-compact, il est recouvert par un nombre fini d'ouverts T_{ij}, pour (i,j) parcourant un ensemble fini F. Alors $S' = \coprod_F S_{ij}$ est affine, et le morphisme $S' \to S$ appartient à P'_1, resp. à P'_3, donc est couvrant. Comme il se factorise par la famille donnée, celle-ci est couvrante.

Dans le cas (étf), chaque S_i est fini sur S donc est affine ; dans l'argument précédent, on peut alors prendre le recouvrement $\{S_i\}$ de S_i, et l'on obtient que $S' \to S$ appartient à P'_4.

Considérons maintenant le cas où les morphismes $f_i : S_i \to S$ sont plats et *localement* de présentation finie. Pour tout $s \in S$, il existe, d'après (la démonstration de) EGA IV_4, 17.16.2, un sous-schéma affine $X(s)$ d'un certain S_i, tel que $s \in f_i(X(s))$ et que le morphisme $g_i : X(s) \to S$, restriction de f_i, soit plat, de présentation finie, et quasi-fini. Alors, $g_i(X(s))$ est un voisinage ouvert $U(s)$ de s (EGA IV_2, 2.4.6), et, S étant affine, il est recouvert par un nombre fini de tels ouverts $U(s_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Par conséquent, $X' = \coprod_j X(s_j)$ est affine, et le morphisme $X' \to S$ est surjectif, plat, de présentation fini et quasi-fini, donc appartient à P'_2. [60] Ceci achève la démonstration de (iv).

Prouvons (v). Soit $\{S_i \to S\}$ une famille *finie* fidèlement plate et quasi-compacte.
247 Soit T_j un recouvrement de S par des ouverts affines. Les $S_{ij} = T_j \times_S S_i$ sont quasi-compacts et possèdent donc des recouvrements ouverts affines *finis* T_{ijk}. Chaque morphisme $T_{ijk} \to T_j$ est plat, et la famille $\{T_{ijk} \to T_j\}$ est *finie* et surjective, donc couvrante pour $\mathcal{T}_1$. La famille $\{T_{ijk} \to S\}$ l'est donc aussi, par composition. Elle se factorise par la famille donnée qui l'est donc aussi :

(59) N.D.E. : On a simplifié la suite, en tirant profit du fait qu'on suppose désormais S affine.

(60) N.D.E. : Ceci montre que, si l'on note P''_2 l'ensemble des familles finies surjectives de morphismes de $\mathscr{C}'$ plats de présentation finie, la topologie engendrée par P et P''_2 égale $\mathcal{T}_2$. D'autre part, avec les notations du début de la démonstration de (iv), si l'on prend un recouvrement de S_i par des ouverts affines, *de présentation finie* sur S, on obtient que $S' \to S$ appartient à P''_2.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}_i \arrow[d] & \mathrm{S}_{ij} \arrow[l] \arrow[d] & \mathrm{T}_{ijk} \arrow[l] \arrow[dl] \\
\mathrm{S} & \mathrm{T}_j \arrow[l] &
\end{tikzcd}.$$

Corollaire 6.3.2. — *Soit* (M_i) *la famille de morphismes suivante :*

(M_1) : *morphismes fidèlement plats et quasi-compacts.*

(M_2) : *morphismes fidèlement plats localement de présentation finie.*

(M_3) : *morphismes étales surjectifs.*

(M_4) : *morphismes étales finis et surjectifs.* [61]

La famille (M_i) *vérifie les axiomes* (a), (b), (c), $(\mathrm{d}_{\mathcal{T}_i})$ *et* $(\mathrm{e}_{\mathcal{T}_i})$ *de* 4.6.3.

En effet, pour (a), (b), (c), c'est classique (EGA et SGA 1, passim.). [62] D'après 6.3.1, (iv) et (v), (M_i) vérifie $(\mathrm{d}_{\mathcal{T}_i})$. Il reste à voir que (M_i) vérifie $(\mathrm{e}_{\mathcal{T}_i})$; pour cela, il suffit de voir que (M_i) vérifie $(\mathrm{e}_{\mathcal{T}_1})$, qui entraîne les autres. Cela résulte de SGA 1, VIII (n$^{\mathrm{os}}$ 4 et 5).

Corollaire 6.3.3. — *Si* X *est un schéma et* R *une relation d'équivalence dans* X *de type* (M_i)*,* R *est* (M_i)*-effective si et seulement si le faisceau quotient de* X *par* R *pour* $\mathcal{T}_i$ *est représentable et en ce cas il est représenté par le quotient* X/R*.*

En effet, c'est 4.6.5.

6.4. Conditions d'effectivité. — Nous cherchons maintenant des familles (N) de 248
morphismes vérifiant l'axiome $(\mathrm{f}_{\mathcal{T}})$ de 4.7. Remarquons d'abord que $(\mathrm{f}_{\mathcal{T}_1})$ entraîne $(\mathrm{f}_{\mathcal{T}_i})$, ce qui fait que nous pouvons nous restreindre au cas de la topologie (fpqc).

Lemme 6.4.1. — *Les familles de morphismes suivantes vérifient l'axiome* $(f_{\mathcal{T}_1})$ *de* 4.7*, c'est-à-dire « se descendent par* (fpqc) *» :*

(N) : *immersions ouvertes.*

(N′) : *immersions fermées.*

(N″) : *immersions quasi-compactes.*

---

[61] N.D.E. : On a corrigé l'original en ajoutant pour (M_3) et (M_4) l'hypothèse de surjectivité, qui est automatiquement satisfaite dans les autres cas.

[62] N.D.E. : cf. EGA I, 6.6.4 pour « quasi-compacts », EGA II, 6.1.5 pour « finis », EGA IV_1, 1.6.2 pour « localement de présentation finie », EGA IV_2, 2.2.13 pour « fidèlement plats », et EGA IV_4, 17.3.3 pour « étales ».

En vertu de 6.3.1 (ii), il suffit de vérifier que les familles données se descendent par la topologie de Zariski et par *un* morphisme fidèlement plat quasi-compact. La première assertion est claire, vérifions la seconde. Pour (N), c'est SGA 1, VIII 4.4, pour (N′), c'est *loc. cit.*, 1.9. Pour (N″) on raisonne comme dans *loc. cit.*, 5.5, à l'aide des deux résultats antérieurs.

Corollaire 6.4.2. — *Le même résultat est valable pour les immersions ouvertes quasi-compactes.*

Ces résultats permettent d'appliquer à la situation présente les résultats généraux de 4.7.1, 4.7.2, 5.1.8, 5.3.1, etc. Énonçons-en un comme exemple, le premier.

Corollaire 6.4.3. — (= 4.7.1 + 4.6.10). *Soient* X *un schéma et* R *une relation d'équivalence dans* X. *On suppose que* $\mathrm{R} \to \mathrm{X}$ *est fidèlement plat et quasi-compact et que* $\mathrm{R} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ *est une immersion fermée* (*resp. ouverte, resp. quasi-compacte, resp. ouverte quasi-compacte*). *Alors le faisceau-quotient* X/R *est le même pour la*
249 *topologie* (fpqc) *et pour la topologie canonique, et pour chaque schéma* S, *on a*

$$(\mathrm{X}/\mathrm{R})(\mathrm{S}) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{sous-schémas fermés (resp. ouverts, resp. rétrocompacts,}\ ^{(63)} \\ \textit{resp. ouverts rétrocompacts)}\ \mathrm{Z}\ \textit{de}\ \mathrm{X_S},\ \textit{stables par}\ \mathrm{R} \times \mathrm{S},\ \textit{tels que} \\ \mathrm{Z} \to \mathrm{S}\ \textit{soit fidèlement plat quasi-compact et que le diagramme} \\ \mathrm{R_Z} \rightrightarrows \mathrm{Z} \to \mathrm{S}\ \textit{soit exact} \end{array} \right\}.$$

6.5. Fibrés principaux homogènes. — Signalons simplement la terminologie :

topologie	fibrés	principaux	homogènes	
(fpqc)	”	”	”	(tout court)
(ét)	”	”	”	quasi-isotriviaux
(étf)	”	”	”	localement isotriviaux
(Zar)	”	”	”	localement triviaux.

6.6. Autres topologies. — On utilise parfois d'autres topologies sur la catégorie des schémas. Signalons-en une : la topologie *étale finie globale* (étfg) engendrée par la prétopologie dont les familles couvrantes sont les familles surjectives formées de morphismes étales et finis. Elle *n'est pas* plus fine que la topologie de Zariski. Les fibrés principaux homogènes correspondants sont appelés « isotriviaux ».

(63) N.D.E. : Rappelons qu'un sous-schéma Z d'un schéma T est dit *rétrocompact* si l'immersion $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathrm{T}$ est quasi-compacte, cf. EGA 0_{III}, 9.1.1.

(64) N.D.E. : On rappelle (cf. 4.4.2) que la topologie chaotique est la topologie la moins fine, définie par $\mathrm{J}(\mathrm{S}) = \{\mathrm{S}\}$ pour tout $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{(canonique)} \arrow[d, dash] & \\
 & \text{(fpqc)} \arrow[d, dash] & \\
 & \text{(fppf)} \arrow[d, dash] & \\
 & \text{(ét)} \arrow[d, dash] & \\
 & \text{(étf)} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\text{(Zar)} \arrow[dr, dash] & & \text{(étfg)} \arrow[dl, dash] \\
 & \text{(chaotique)} &
\end{tikzcd} \qquad . \qquad ^{(64)}$$

6.7. Espaces homogènes. — [65] Soient G un S-schéma en groupes, X un S-schéma à groupe d'opérateurs (à gauche) G, et

$$\Phi : \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}$$

le morphisme de S-schémas défini ensemblistement par $(g, x) \mapsto (gx, x)$. Rappelons (cf. 5.1.0 et III.0.1) qu'on dit que X est un espace *formellement principal homogène* sous G si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, l'ensemble X(T) est vide ou principal homogène sous G(T),

(ii) Φ est un isomorphisme de S-foncteurs,

(iii) Φ est un isomorphisme de S-schémas.

(L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) est claire, et l'on a (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) puisque $\mathscr{C} = (\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ est une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$.)

La définition d'espace *formellement homogène* (pas nécessairement *principal* homogène) s'obtient en demandant que Φ soit un *épimorphisme* dans la catégorie des *faisceaux pour une topologie* $\mathcal{T}$ appropriée. En effet, la condition que Φ soit un épimorphisme de S-foncteurs équivaut à ce que, pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, l'ensemble X(T) soit vide ou bien *homogène* (pas nécessairement principal homogène) sous G(T), mais cette condition est trop restrictive, comme le montre l'exemple simple suivant. Soient $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathbb{R}$, $\mathrm{G} = \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ et $\mathrm{X} = \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ sur lequel G agit via $t \cdot x = t^2 x$. Alors le

[65] N.D.E. : On a ajouté les numéros qui suivent.

morphisme Φ est étale, fini, et surjectif, donc un épimorphisme dans la catégorie des faisceaux pour la topologie (étf) (*a fortiori*, un épimorphisme de S-schémas) ; par contre, les points 1 et -1 de $X(\mathbb{R})$ ne sont pas conjugués par un élément de $G(\mathbb{R})$, de sorte que le morphisme $G(\mathbb{R}) \times X(\mathbb{R}) \to X(\mathbb{R}) \times X(\mathbb{R})$ n'est pas surjectif [(66)]. On est donc conduit à poser la définition suivante :

Définition 6.7.1. — Soient G un S-groupe, X un S-schéma à groupe d'opérateurs G, et $\mathcal{T}$ une topologie sur $(\mathbf{Sch}_{/S})$, moins fine que la topologie canonique. On dit que X est un espace *formellement homogène* sous G (relativement à la topologie $\mathcal{T}$) si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) le morphisme $\Phi : G \times_S X \to X \times_S X$ est un épimorphisme dans la catégorie des *faisceaux* pour la topologie $\mathcal{T}$,

(ii) pour tout $T \to S$, et $x, y \in X(T)$, il existe un morphisme $T' \to T$ *couvrant* pour la topologie $\mathcal{T}$, et $g \in G(T')$, tels que $y_{T'} = g \cdot x_{T'}$.

Remarque 6.7.2. — La condition (i) implique, en particulier, que Φ est un épimorphisme effectif universel dans $(\mathbf{Sch}_{/S})$ (cf. 4.4.3). Ceci entraîne, comme on le voit facilement, que Φ est surjectif (cf. 1.3, N.D.E. (3)).

Proposition et définition 6.7.3. — [(67)] *Soient* G *un* S*-groupe,* X *un* S*-schéma à groupe d'opérateurs* G*, et* $\mathcal{T}$ *une topologie sur* $(\mathbf{Sch}_{/S})$*, moins fine que la topologie canonique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X *vérifie les deux hypothèses ci-dessous :*

(1) *le morphisme* $\Phi : G \times_S X \to X \times_S X$ *est couvrant, i.e.* X *est un* G*-espace formellement homogène,*

(2) *le morphisme* $X \to S$ *est également couvrant, c.-à-d., localement pour la topologie* $\mathcal{T}$*, il possède une section* (*cf.* RefIV.4.4.8bis.bis).

(ii) *«* Localement sur S pour la topologie $\mathcal{T}$ *»,* X *est isomorphe, comme schéma à groupe d'opérateurs* G*, au faisceau quotient* (*pour* $\mathcal{T}$) *de* G *par un sous-schéma en groupes* H*, c.-à-d., il existe une famille couvrante* $\{S_i \to S\}$ *telle que chaque* $X \times_S S_i$ *représente le faisceau quotient de* $G \times_S S_i$ *par un certain sous-schéma en groupes* H_i.

Sous ces conditions, on dit que X est un G-*espace homogène* (relativement à la topologie $\mathcal{T}$).

Démonstration. Supposons (ii) vérifiée. Posons $G_i = G \times_S S_i$ et $X_i = X \times_S S_i$. Alors, X_i possède une section sur S_i, à savoir la composée de la section unité $\varepsilon_i : S_i \to G_i$ et de la projection $\pi_i : G_i \to X_i = G_i/H_i$. Donc $X \to S$ est couvrant.

(66) N.D.E. : Évidemment, cette difficulté provient du fait que si $\mathscr{C}'$ est une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}}$ contenant $\mathscr{C}$, par exemple, la catégorie $\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathcal{T}}$ des faisceaux sur $\mathscr{C}$ pour une topologie $\mathcal{T}$ moins fine que la topologie canonique, et si $f : X \to Y$ est un morphisme dans $\mathscr{C}$, alors les implications :

$$f \text{ épimorphisme de } \widehat{\mathscr{C}} \Rightarrow f \text{ épimorphisme de } \mathscr{C}' \Rightarrow f \text{ épimorphisme de } \mathscr{C}$$

sont en général strictes.

(67) N.D.E. : cf. [**Ray70**], Déf. VI.1.1.

D'autre part, π_i est couvrant, donc $\pi_i \times \pi_i$ l'est aussi (cf. 4.2.3 (C 1) et (C 2)), et l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{X}_i \arrow[r, "\Phi_i"] & \mathrm{G}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{X}_i \\
\mathrm{G}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{G}_i \arrow[u, "\mathrm{id} \times \pi_i"] \arrow[r, "\Psi_i", "\sim"'] & \mathrm{G}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{G}_i \arrow[u, "\pi_i \times \pi_i"']
\end{tikzcd}$$

où Φ_i est déduit de Φ par le changement de base $\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}$ et Ψ_i est l'isomorphisme défini ensemblistement par $(g, g') \mapsto (gg', g)$. Alors $(\pi_i \times \pi_i) \circ \Psi_i$ est couvrant, donc Φ_i l'est aussi (4.2.3 (C 3)). Ceci montre que Φ est « localement couvrant », donc est couvrant (4.2.3 (C 5)). Ceci prouve que (ii) $\Rightarrow$ (i).

Réciproquement, supposons (i) vérifiée, et supposons de plus que le morphisme structural $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ possède une section σ. D'après EGA I, 5.3.13, σ est une immersion. Définissons $\mathrm{H} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{S}$ par le diagramme ci-dessous, dont les deux carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \boxtimes \sigma"] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \arrow[d, "\Phi"] \\
\mathrm{S} \arrow[r, "\sigma"] & \mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{X}} \boxtimes \sigma"] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}
\end{tikzcd}$$

où π, $\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \boxtimes \sigma$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{X}} \boxtimes \sigma$ désignent les morphisme définis ensemblistement, pour $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ et $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$, $x \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$, par :

$$\pi(g) = g \cdot \sigma_{\mathrm{T}}, \qquad (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \boxtimes \sigma)(g) = (g, \sigma_{\mathrm{T}}), \qquad (\mathrm{id}_{\mathrm{X}} \boxtimes \sigma)(x) = (x, \sigma_{\mathrm{T}}).$$

Alors, π est couvrant, et H est un sous-schéma en groupes de G, représentant le stabilisateur $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathrm{G}}(\sigma)$ de σ (cf. I, 2.3.3), c.-à-d., pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, on a :

$$\mathrm{H}(\mathrm{T}) = \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{T}) \mid g \cdot \sigma_{\mathrm{T}} = \sigma_{\mathrm{T}}\}.$$

Notons G/H le *préfaisceau* $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{G}(\mathrm{T})/\mathrm{H}(\mathrm{T})$, et $a(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ le faisceau associé, pour la topologie $\mathcal{T}$. D'après ce qui précède, on obtient un diagramme commutatif de morphismes de préfaisceaux à groupe d'opérateurs G :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & \mathrm{X} \\
\mathrm{G}/\mathrm{H} \arrow[ur, "\overline{\pi}"'] &
\end{tikzcd},$$

où $\overline{\pi}$ est un *monomorphisme*. Comme π est couvrant, $\overline{\pi}$ l'est aussi et donc, d'après 4.3.12, $\overline{\pi}$ induit un isomorphisme $a(\mathrm{G}/\mathrm{H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{X}$. On a donc démontré que : *si* X *est un* G-*espace homogène tel que* $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *admette une section* σ*, alors* X *représente le faisceau quotient* G/H*, où* $\mathrm{H} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{S}$ *est le stabilisateur de* σ.

Dans le cas général, il existe par hypothèse une famille couvrante $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ telle que chaque morphisme $\mathrm{X}_i = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i \to \mathrm{S}_i$ possède une section σ_i. Posons $\mathrm{G}_i = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_i$; alors le morphisme $\Phi_i : \mathrm{G}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{X}_i \to \mathrm{X}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{X}_i$ déduit de Φ par le changement de base

$\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}$ est encore couvrant. Donc, d'après ce qui précède, $\mathrm{X}_i \cong \mathrm{G}_i/\mathrm{H}_i$, où H_i est le stabilisateur dans G_i de σ_i. Ceci achève la preuve de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii).

Bibliographie

250

[AS] *Analysis Situs*, par J. Giraud, Sém. Bourbaki, Exp. **256**, Mai 1963.

[D] *Méthode de la descente*, par J. Giraud, Mém. Soc. Math. France, t. **2** (1964), p. iii-viii + 1-150.

[MA] *Grothendieck Topologies*, par M. Artin, notes multigraphiées, Harvard, 1962.

[SGA 1] Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960-61, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Maths. **224** (1971), édition recomposée et annotée, Documents Math. **3**, Soc. Math. France, 2003.

[SGA 4] Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-1964, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, t. I, II, III, Lecture Notes in Maths. **269, 270** (1972), **305** (1973).

[TDTE I] *Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique* I. *Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats*, par A. Grothendieck, Sém. Bourbaki, Exp. **190**, Déc. 1959.

[Ray70] (68) M. Raynaud, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lect. Notes Math. **119**, Springer-Verlag, 1970

(68) N.D.E. : On a ajouté cette référence.

EXPOSÉ V

CONSTRUCTION DE SCHÉMAS QUOTIENTS

par P. Gabriel

L'objet de cet exposé est de démontrer les théorèmes énoncés dans TDTE III [1]. Si X et T sont deux objets d'une catégorie $\mathscr{C}$ nous écrivons X(T) au lieu de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{T}, \mathrm{X})$. De même, si $\varphi : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ (resp. T) est une flèche (resp. un objet) de $\mathscr{C}$, $\varphi(\mathrm{T})$ désigne l'application $g \mapsto \varphi \circ g$ de Y(T) dans X(T) : **251**

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T} \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, dashed, "\varphi\circ g"] & \\ \mathrm{Y} \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{X}, \end{tikzcd}$$

et $\mathrm{T}(\varphi)$ désigne l'application $g \mapsto g \circ \varphi$ de T(X) vers T(Y) :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "g\circ\varphi"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "g"] \\ & \mathrm{T}. \end{tikzcd}$$

Enfin, si P est un schéma, on note $\underline{\mathrm{P}}$ l'ensemble sous-jacent à P.

Exceptionnellement, nous ne suivons pas dans le présent exposé la convention énoncée dans IV 4.6.15 sur la notation des quotients (*loc. cit.* haut de la page 227 de l'original) car nous désirons donner ici une construction de quotients qui s'applique également à des « pré-relations d'équivalence » [2] qui ne sont pas des relations d'équivalence.

---

(1) N.D.E. : à savoir, les théorèmes 5.1, 5.3, 6.1, 6.2 et 7.2 de TDTE III. Les deux premiers (resp. les deux suivants) correspondent au théorème 4.1 (resp. aux théorèmes 7.1 et 8.1) de cet exposé. Le théorème 7.2 de TDTE III est démontré dans l'Exp. $\mathrm{VI_A}$, 3.2 et 3.3.

(2) N.D.E. : c.-à-d., à des *groupoïdes* de base X, cf. la terminologie à la fin de la section 1. Lorsque $\mathscr{C}$ est la catégorie des schémas, le quotient $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ d'un groupoïde X_* de base X existe sous certaines hypothèses (cf. 4.1, 6.1, 7.1) ; si, de plus, X_* est une relation d'équivalence, p est, sous les mêmes hypothèses, fidèlement plat et quasi-compact, donc un épimorphisme universel, cf. *loc. cit.*

1. $\mathscr{C}$-groupoïdes

a) $\mathscr{C}$ est une catégorie où les produits et produits fibrés existent. Rappelons d'abord qu'un diagramme

$$X_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} X_0 \xrightarrow{\ p\ } Y$$

de $\mathscr{C}$ est dit *exact* si $pd_0 = pd_1$ et si, pour tout $T \in \mathscr{C}$, $T(p)$ est une bijection de $T(Y)$ sur la partie de $T(X_0)$ formée des flèches $f : X_0 \to T$ telles que $fd_0 = fd_1$. On dit aussi que (Y, p) est le *conoyau* de (d_0, d_1) et on écrit

$$(Y, p) = \mathrm{Coker}(d_0, d_1).$$

252 **b)** Soit par exemple $\mathscr{C}$ la catégorie $(\mathbf{Esp.An})$ des espaces annelés. Dans ce cas, il existe toujours un conoyau (Y, p), dont on peut donner la description suivante : l'espace topologique sous-jacent à Y est obtenu à partir de X_0 en identifiant les points $d_0(x)$ et $d_1(x)$ et en munissant Y de la topologie quotient. L'application canonique $\pi : X_0 \to Y$ et d_0, d_1 induisent alors une double-flèche de faisceaux d'anneaux sur Y :

$$\pi_*(\mathscr{O}_0) \underset{\delta_1}{\overset{\delta_0}{\rightrightarrows}} \pi_*(d_{0*}\mathscr{O}_1) = \pi_*(d_{1*}\mathscr{O}_1),$$

où $\mathscr{O}_i$ est le faisceau structural de X_i. On choisit pour faisceau d'anneaux sur Y le sous-faisceau de $\pi_*(\mathscr{O}_0)$ dont les sections s sont telles que $\delta_0(s) = \delta_1(s)$. La flèche p est définie de façon évidente.

(3) Soit $X_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} X_0$ un diagramme dans $(\mathbf{Esp.An})$ et soit (Y, p) son conoyau. On dit qu'un ouvert U de X_0 est *saturé* si $d_0^{-1}(U) = d_1^{-1}(U)$, ce qui équivaut à dire que $U = p^{-1}(p(U))$. Dans ce cas, comme Y est muni de la topologie quotient, $p(U)$ est un ouvert de Y.

Lemme 1.1. — *Soient* U *un ouvert saturé de* X *et* $V = p(U)$. *Si l'on désigne par* U_1 *l'ouvert* $d_0^{-1}(U) = d_1^{-1}(U)$ *de* X_1, *et par* $\widetilde{d}_0$, $\widetilde{d}_1$, *et* $\widetilde{p}$ *les restrictions de* d_0, d_1 *à* U_1, *et de* p *à* U, *alors* $(V, \widetilde{p})$ *est un conoyau dans* $(\mathbf{Esp.An})$ *de :* (4)

$$U_1 \underset{\widetilde{d}_0}{\overset{\widetilde{d}_1}{\rightrightarrows}} U \xrightarrow{\ \widetilde{p}\ } V.$$

(3) N.D.E. : On a ajouté les lemmes 1.1 et 1.2, utilisés à plusieurs reprises dans les sections 5 à 9.

(4) N.D.E. : Ceci n'est pas le cas dans la catégorie des schémas. Soient, par exemple, $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, $X_0 = \mathbb{A}^2_S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, x_2])$, $d_1 : \mathbb{G}_{m,S} \times_S \mathbb{A}^2_S \to \mathbb{A}^2_S$ l'action de $\mathbb{G}_{m,S}$ par homothéties sur $\mathbb{A}^2_S$, d_0 la projection sur le second facteur, et $U = \mathbb{A}^2_S - \{\mathfrak{m}\}$, où $\mathfrak{m}$ est le point $(0, 0)$. Alors, l'espace projectif $\mathbb{P}^1_S$ est le conoyau de $(\widetilde{d}_0, \widetilde{d}_1)$ dans $(\mathbf{Esp.An})$ et dans $(\mathbf{Sch})$, et le conoyau Y de (d_0, d_1) dans $(\mathbf{Esp.An})$ est réunion de $\mathbb{P}^1_S$ et du point $y_0 = \{p(\mathfrak{m})\}$, l'unique ouvert contenant y_0 est Y et l'on a $\Gamma(Y, \mathscr{O}_Y) = \mathbb{C}$. Si $f : \mathbb{A}^2_S \to T$ est un morphisme de S-schémas tel que $fd_0 = fd_1$ et si $V = \mathrm{Spec}(A)$ est un ouvert affine de T contenant le point $t_0 = f(y_0)$, alors $f^{-1}(V) = \mathbb{A}^2$ et le morphisme d'anneaux $A \to \mathbb{C}[x_1, x_2]$ se factorise par $\mathbb{C}$; ceci montre que $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ est le conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/S})$.

La vérification est facile.

Lemme 1.2. — *Soit* $X_1 \overset{d_1}{\underset{d_0}{\rightrightarrows}} X_0$ *un diagramme dans* $(\mathbf{Sch})$ *et soit* (Y, p) *son conoyau dans* $(\mathbf{Esp.An})$.

(i) *Si* Y *est un schéma et* p *un morphisme de schémas, alors* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans* $(\mathbf{Sch})$.

(ii) *Supposons que tout point de* X_0 *possède un voisinage ouvert* saturé U *tel que, notant* $\widetilde{d}_0$ *et* $\widetilde{d}_1$ *les restrictions de* d_0 *et* d_1 *à* $d_0^{-1}(U) = d_1^{-1}(U)$, *et* (Q, q) *le conoyau de* $(\widetilde{d}_0, \widetilde{d}_1)$ *dans* $(\mathbf{Esp.An})$, Q *soit un schéma et* q *un morphisme de schémas. Alors* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans* $(\mathbf{Sch})$.

(i) est démontré au § 4.c ; la démonstration étant courte, répétons-la ici. Soit $f : X_0 \to Z$ un morphisme de schémas tel que $fd_0 = fd_1$. Par hypothèse, il y a un morphisme d'espaces annelés $r : Y \to Z$ et un seul tel que $f = rp$. Il s'agit de montrer que, pour tout $y \in Y$, l'homomorphisme $\mathscr{O}_{r(y)} \to \mathscr{O}_y$ induit par r est local. Cela résulte de ce que p est surjectif, donc y de la forme $p(x)$, et de ce que l'homomorphisme $\mathscr{O}_{f(x)} \to \mathscr{O}_x$ induit par f est local.

(ii) résulte de (i) et du lemme précédent.

c) Dans cet exposé, nous étudions l'existence de $\mathrm{Coker}(d_0, d_1)$ lorsque la double flèche (d_0, d_1) se trouve insérée dans un contexte plus riche ; de façon précise, désignons par $X_2 = X_1 \times_{d_1, d_0} X_1$ le produit fibré du diagramme

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & X_1 \arrow[d, "d_1"] \\ X_1 \arrow[r, "d_0"] & X_0 \end{tikzcd} \quad ,$$

par d'_0 et d'_2 les deux projections canoniques de X_2 sur X_1 ; on a donc par définition un *carré cartésien*

$$(0) \qquad \begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "d'_0"] \arrow[d, "d'_2"'] & X_1 \arrow[d, "d_1"] \\ X_1 \arrow[r, "d_0"] & X_0 \end{tikzcd} \quad .$$

De plus, donnons-nous une troisième flèche $d'_1 : X_2 \to X_1$; nous disons que $(d_0, d_1 : X_1 \rightrightarrows X_0, d'_1)$ est un $\mathscr{C}$*-groupoïde* si pour tout objet T de $\mathscr{C}$, $X_1(T)$ est l'ensemble des flèches d'un groupoïde $X_*(T)$ dont l'ensemble des objets est $X_0(T)$, l'application source $d_1(T)$, l'application but $d_0(T)$ et dont l'application composition est $d'_1(T)$ (on identifie comme d'habitude $(X_1 \times_{d_1, d_0} X_1)(T)$ à $X_1(T) \times_{d_1(T), d_0(T)} X_1(T)$; 253

on rappelle aussi qu'un groupoïde est une catégorie dont toutes les flèches sont inversibles). [5]

Si φ est une flèche du groupoïde $X_*(T)$, l'application $f \mapsto \varphi \circ f$ est une bijection de l'ensemble des flèches f dont le but coïncide avec la source de φ sur l'ensemble des flèches ayant même but que φ. On voit facilement qu'on peut traduire ce fait en disant que *le carré*

(1)
$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "d'_1"] \arrow[d, "d'_0"'] & X_1 \arrow[d, "d_0"] \\ X_1 \arrow[r, "d_0"] & X_0 \end{tikzcd}$$

est cartésien.

De même, l'application $g \mapsto g \circ \varphi$ est une bijection de l'ensemble des flèches g de $X_*(T)$ qui ont pour source le but de φ sur l'ensemble des flèches qui ont même source que φ. On peut encore traduire ce fait en disant que *le carré*

(2)
$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "d'_1"] \arrow[d, "d'_2"'] & X_1 \arrow[d, "d_1"] \\ X_1 \arrow[r, "d_1"] & X_0 \end{tikzcd}$$

est cartésien.

254 D'autre part soit $s : X_0 \to X_1$ l'unique flèche de $\mathscr{C}$ telle que, pour tout T, $s(T) : X_0(T) \to X_1(T)$ associe à tout objet de $X_*(T)$ la flèche identique de cet objet [6]. La flèche s satisfait aux égalités

$$(3) \qquad d_1 s = \mathrm{id}_{X_0},$$
$$\text{et} \qquad (3\,\text{bis}) \qquad d_0 s = \mathrm{id}_{X_0}.$$

Enfin, l'associativité des applications de composition $d'_1(T)$ se traduit par la commutativité du diagramme

(4)
$$\begin{tikzcd} X_1 \times_{d_1,d_0} X_1 \times_{d_1,d_0} X_1 \arrow[r, "d'_1 \times X_1"] \arrow[d, "X_1 \times d'_1"'] & X_1 \times_{d_1,d_0} X_1 \arrow[d, "d'_1"] \\ X_1 \times_{d_1,d_0} X_1 \arrow[r, "d'_1"] & X_1 \end{tikzcd} .$$

[5] N.D.E. : Donc, dans ce cas, $X_2(T)$ est l'ensemble de couples (f_2, f_1) de flèches composables, c.-à-d., telles que $d_0(f_1) = d_1(f_2)$, et d'_0, d'_1 et d'_2 envoient (f_2, f_1) sur $f_2, f_2 \circ f_1, f_1$ respectivement.

[6] N.D.E. : $T \mapsto s(T)$ définit un élément de $\mathrm{Hom}(\mathbf{h}_{X_0}, \mathbf{h}_{X_1})$, et ce dernier égale $\mathrm{Hom}(X_0, X_1)$, d'après le lemme de Yoneda.

Réciproquement, les conditions (1), (2) et (4) et l'existence d'une flèche s satisfaisant à (3) impliquent que $\Big(\mathrm{X}_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{X}_0, d_1'\Big)$ est un $\mathscr{C}$-groupoïde. La condition (3) est bénigne ; elle assure simplement que l'application $d_1(\mathrm{T}) : \mathrm{X}_1(\mathrm{T}) \to \mathrm{X}_0(\mathrm{T})$ est surjective pour tout $\mathrm{T} \in \mathscr{C}$. Dans la suite de cet exposé, nous nous servons surtout des carrés cartésiens (0), (1) et (2) que nous résumons dans le diagramme

$$\text{(0,1,2)} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{X}_2 \arrow[r, shift left, "d_1'"] \arrow[r, shift right, "d_0'"'] \arrow[d, "d_2'"'] & \mathrm{X}_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & \mathrm{X}_0 \\ \mathrm{X}_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X}_0 & \end{tikzcd} \quad .$$

Dans ce diagramme les deux carrés de gauche (i.e. les carrés (0) et (2)) sont carté- 255
siens ; la première ligne est exacte et X_2 s'identifie au produit fibré $\mathrm{X}_1 \times_{d_0,d_0} \mathrm{X}_1$.

Nous n'utilisons l'associativité que de façon détournée, par exemple pour assurer l'existence d'une flèche s satisfaisant à (3) et (3 bis), ou bien pour assurer l'existence d'une flèche

$$(\dagger) \qquad \sigma : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_1 \quad \text{telle que} \quad d_0\sigma = d_1 \text{ et } d_1\sigma = d_0$$

(on choisit σ de telle manière que $\sigma(\mathrm{T}) : \mathrm{X}_1(\mathrm{T}) \to \mathrm{X}_1(\mathrm{T})$ envoie toute flèche de $\mathrm{X}_*(\mathrm{T})$ sur la flèche inverse) [7].

Par abus de langage il nous arrivera d'appeler $\mathscr{C}$-groupoïde un diagramme

$$\mathrm{X}_2 \overset{d_0', d_1', d_2'}{\rightrightarrows\!\!\!\!\!\!\rightarrow} \mathrm{X}_1 \overset{d_0, d_1}{\rightrightarrows} \mathrm{X}_0$$

tel que (0), (1) et (2) soient cartésiens, que (4) soit commutatif et qu'il existe s satisfaisant à (3). L'objet X_2 pourra donc être « un » produit fibré de $(*)$ sans être « le » produit fibré de $(*)$ [8].

Terminologie. Au lieu du $\mathscr{C}$-groupoïde X_*, nous parlerons aussi du *groupoïde* X_* *de base* X_0, ou de *la prérelation d'équivalence* X_* *dans* X_0.

2. Exemples de $\mathscr{C}$-groupoïdes

a) Soient X un objet de $\mathscr{C}$ et G un $\mathscr{C}$-groupe opérant à gauche sur X. Nous désignons par $d_0 : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ la flèche définissant l'opération de G sur X, par $d_1 : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ la projection du produit sur le deuxième facteur, par $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$

---

[7] N.D.E. : Il résulte du lemme de Yoneda que σ est un automorphisme involutif de X_1 ; ceci sera utilisé, par exemple, dans 3.e) et dans le théorème 4.1.

[8] N.D.E. : voir l'exemple 2.a) qui suit.

la flèche définissant la structure de $\mathscr{C}$-groupe de G, enfin par $\mathrm{pr}_{2,3}$ la projection de $\mathrm{G}\times\mathrm{G}\times\mathrm{X}=\mathrm{G}\times(\mathrm{G}\times\mathrm{X})$ sur le deuxième facteur. Alors

$$\mathrm{G}\times\mathrm{G}\times\mathrm{X} \underset{\mathrm{G}\times d_0}{\overset{\mathrm{pr}_{2,3}}{\underset{\mu\times\mathrm{X}}{\rightrightarrows}}} \mathrm{G}\times\mathrm{X} \overset{d_1}{\underset{d_0}{\rightrightarrows}} \mathrm{X}$$

256 est un $\mathscr{C}$-groupoïde.

b) Soit $d_0, d_1 : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0$ un *couple d'équivalence*, c.-à-d., si $d_0 \boxtimes d_1 : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0\times\mathrm{X}_0$ est la flèche de composantes d_0 et d_1, nous supposons que $(d_0\boxtimes d_1)(\mathrm{T})$ est, pour tout objet T de $\mathscr{C}$, une bijection de $\mathrm{X}_1(\mathrm{T})$ sur le graphe d'une relation d'équivalence de $\mathrm{X}_0(\mathrm{T})$. L'ensemble $\mathrm{X}_1(\mathrm{T})$ s'identifie par conséquent à l'ensemble des couples (x,y) formés d'éléments de $\mathrm{X}_0(\mathrm{T})$ tels que $x\sim y$; de même, l'ensemble $\mathrm{X}_2(\mathrm{T}) = (\mathrm{X}_1\times_{d_1,d_0}\mathrm{X}_1)(\mathrm{T})$ s'identifie à l'ensemble des triplets (x,y,z) d'éléments de $\mathrm{X}_0(\mathrm{T})$ tels que $x\sim y$ et $y\sim z$. Il y a donc une et une seule flèche $d_1' : \mathrm{X}_2\to\mathrm{X}_1$ rendant commutatifs les carrés (1) et (2) : $d_1'(\mathrm{T})$ doit envoyer $(x,y,z)\in\mathrm{X}_2(\mathrm{T})$ sur $(x,z)\in\mathrm{X}_1(\mathrm{T})$. Pour ce choix de d_1', $(d_0,d_1:\mathrm{X}_1\rightrightarrows\mathrm{X}_0, d_1')$ est un $\mathscr{C}$-groupoïde.

Réciproquement, considérons un $\mathscr{C}$-groupoïde X_* tel que $d_0\boxtimes d_1 : \mathrm{X}_1\to\mathrm{X}_0\times\mathrm{X}_0$ soit un *monomorphisme*. Alors (d_0,d_1) est un couple d'équivalence et X_* peut être reconstruit à partir de (d_0,d_1) comme cela est expliqué quelques lignes plus haut. (9)

c) Si $p:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ est une flèche quelconque de $\mathscr{C}$ et si pr_1 et pr_2 sont les deux projections de $\mathrm{X}\times_{p,p}\mathrm{X}$ sur X, alors $(\mathrm{pr}_1,\mathrm{pr}_2) : \mathrm{X}\times_{p,p}\mathrm{X}\rightrightarrows\mathrm{X}$ est un couple d'équivalence. On dit que p est un *épimorphisme effectif* si le diagramme

$$\mathrm{X}\times_{p,p}\mathrm{X} \overset{\mathrm{pr}_1}{\underset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} \mathrm{X} \xrightarrow{\ p\ } \mathrm{Y}$$

est exact, c'est-à-dire si $(\mathrm{Y},p)=\mathrm{Coker}(\mathrm{pr}_1,\mathrm{pr}_2)$.

Soit par exemple S un schéma noethérien et soit $\mathscr{C}$ la catégorie des schémas finis au-dessus de S. Montrons qu'un épimorphisme de $\mathscr{C}$ n'est pas forcément effectif : on
257 choisit S égal à $\mathrm{Spec}\,k[\mathrm{T}^3,\mathrm{T}^5]$, où k est un corps commutatif, Y égal à S et X égal à $\mathrm{Spec}\,k[\mathrm{T}]$. Si i est l'inclusion de $\mathrm{B}=k[\mathrm{T}^3,\mathrm{T}^5]$ dans $\mathrm{A}=k[\mathrm{T}]$, p est choisi égal à $\mathrm{Spec}\,i$. Dans ce cas $\mathrm{X}\times_{p,p}\mathrm{X}$ s'identifie à $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{A})$ et $\mathrm{Coker}(\mathrm{pr}_1,\mathrm{pr}_2)$ à $\mathrm{Spec}\,\mathrm{B}'$, où B' est le sous-anneau de A formé des a tels que $a\otimes_{\mathrm{B}}1=1\otimes_{\mathrm{B}}a$. Or

$$\mathrm{T}^7\otimes_{\mathrm{B}}1=(\mathrm{T}^2\mathrm{T}^5)\otimes_{\mathrm{B}}1=\mathrm{T}^2\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{T}^5=\mathrm{T}^2\otimes_{\mathrm{B}}(\mathrm{T}^3\mathrm{T}^2)=\mathrm{T}^5\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{T}^2=1\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{T}^7.$$

Donc T^7 appartient à B', n'appartient pas à B et $\mathrm{Spec}\,\mathrm{B}'$ est distinct de $\mathrm{Spec}\,\mathrm{B}$, d'où le contre-exemple. (10)

(9) N.D.E. : En particulier, si G est un $\mathscr{C}$-groupe opérant à gauche sur un objet X de $\mathscr{C}$ et si X_* est le $\mathscr{C}$-groupoïde défini en a), alors (d_0,d_1) est un couple d'équivalence si et seulement si G opère *librement* sur X, cf. Exp. III, 3.2.1.

(10) N.D.E. : Le même argument s'applique pour $\mathrm{B}=k[\mathrm{T}^3,\mathrm{T}^4]$ et $\mathrm{T}^5\otimes_{\mathrm{B}}1$; plus généralement, pour $\mathrm{B}=k[\mathrm{T}^n,\mathrm{T}^{n+r}]$ et l'élément $\mathrm{T}^{n+2r}\otimes_{\mathrm{B}}1$, pourvu que n ne divise pas $2r$.

3. Quelques sorites sur les $\mathscr{C}$-groupoïdes

Voici pêle-mêle quelques remarques utilisées dans la suite :

a) Soient

$$\mathrm{X}_2 \underset{}{\overset{d'_0, d'_1, d'_2}{\rightrightarrows}} \mathrm{X}_1 \underset{}{\overset{d_0, d_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{X}_0$$

un $\mathscr{C}$-groupoïde et $f_0 : \mathrm{Y}_0 \to \mathrm{X}_0$ une flèche de $\mathscr{C}$. Nous allons définir un $\mathscr{C}$-groupoïde de base Y_0

$$\mathrm{Y}_2 \underset{}{\overset{e'_0, e'_1, e'_2}{\rightrightarrows}} \mathrm{Y}_1 \underset{}{\overset{e_0, e_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{Y}_0$$

qu'on dira *induit par* X_* *et* f_0. On dira aussi que Y_* est *l'image réciproque de* X_* *par le changement de base* f_0.

Nous choisissons pour Y_1 le produit fibré du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y}_1 \arrow[r, dashed, "f_1"] \arrow[d, dashed] & \mathrm{X}_1 \arrow[d, "d_0 \boxtimes d_1"] \\ \mathrm{Y}_0 \times \mathrm{Y}_0 \arrow[r, "f_0 \times f_0"] & \mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0 \end{tikzcd} ,$$

pour e_0 et e_1 les flèches composées de la flèche canonique $\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}_0 \times \mathrm{Y}_0$ et des première et deuxième projections de $\mathrm{Y}_0 \times \mathrm{Y}_0$. Le morphisme $\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}_0 \times \mathrm{Y}_0$ est alors $e_0 \boxtimes e_1$, et l'on a $f_0 \circ e_i = d_i \circ f_1$ pour $i = 0, 1$, où l'on a noté f_1 la projection de Y_1 sur X_1. 258

On pose $\mathrm{Y}_2 = \mathrm{Y}_1 \times_{e_0, e_1} \mathrm{Y}_1$, cf. 1.c). On peut dire que le couple (e_0, e_1) est défini de telle façon que, pour tout $\mathrm{T} \in \mathscr{C}$, et pour tout couple (y, x) d'éléments de $\mathrm{Y}_0(\mathrm{T})$, il y ait une certaine correspondance biunivoque $\psi \mapsto {}_y\psi_x$ entre les flèches ψ de $\mathrm{X}_*(\mathrm{T})$ de source $f_0(x)$, de but $f_0(y)$ et les flèches ${}_y\psi_x$ de $\mathrm{Y}_*(\mathrm{T})$ de source x et de but y. On détermine donc $e'_1 : \mathrm{Y}_2 \to \mathrm{Y}_1$ en définissant pour tout $\mathrm{T} \in \mathscr{C}$ la composition des flèches de $\mathrm{Y}_*(\mathrm{T})$ à l'aide de la formule

$${}_z\psi_y \circ {}_y\varphi_x = {}_z(\psi \circ \varphi)_x .$$

Il est clair que cette définition fait de chaque $\mathrm{Y}_*(\mathrm{T})$ un groupoïde.

b) Connaissant le $\mathscr{C}$-groupoïde X_* et le changement de base $f_0 : \mathrm{Y}_0 \to \mathrm{X}_0$, on peut reconstruire le couple $(e_0, e_1) : \mathrm{Y}_1 \rightrightarrows \mathrm{Y}_0$ d'une autre manière : [(11)] construisons $\mathrm{Y}_0 \times_{\mathrm{X}_0} \mathrm{X}_1$, pr_1 et pr_2 de telle façon que le carré

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y}_0 \times_{\mathrm{X}_0} \mathrm{X}_1 \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathrm{X}_1 \arrow[d, "d_0"] \\ \mathrm{Y}_0 \arrow[r, "f_0"] & \mathrm{X}_0 \end{tikzcd}$$

[(11)] N.D.E. : ce second point de vue sera utilisé en 3.f) et dans la démonstration de 6.1.

soit cartésien. On vérifie alors sans peine par réduction au cas ensembliste qu'on a le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y}_1 \arrow[r, "e_0 \boxtimes f_1"] \arrow[d, "e_1"'] & \mathrm{Y}_0 \times_{\mathrm{X}_0} \mathrm{X}_1 \arrow[d, "d_1 \circ \mathrm{pr}_2"] \\
\mathrm{Y}_0 \arrow[r, "f_0"] & \mathrm{X}_0
\end{tikzcd} \quad ,$$

où f_1 désigne la projection canonique de $\mathrm{Y}_1 = (\mathrm{Y}_0 \times \mathrm{Y}_0) \times_{(\mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0)} \mathrm{X}_1$ sur X_1.

259 **c)** Nous allons donner deux exemples d'image réciproque d'un $\mathscr{C}$-groupoïde. Prenons Y_0 égal à X_1, f_0 égal à d_0. Pour tout objet T de $\mathscr{C}$, $\mathrm{Y}_1(\mathrm{T})$ s'identifie alors à l'ensemble des diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\varphi"] & d \\
a \arrow[u, "f"] & c \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

de $\mathrm{X}_*(\mathrm{T})$. La source d'un tel diagramme est la flèche f, le but est la flèche g. Ces diagrammes se composent de façon évidente.

Posons maintenant $\mathrm{Y}'_0 = \mathrm{X}_1$, $f'_0 = d_1$ (nous ajoutons les primes [12] pour éviter toute confusion avec l'exemple précédent). Dans ce cas, $\mathrm{Y}'_1(\mathrm{T})$ s'identifie pour tout $\mathrm{T} \in \mathscr{C}$ à l'ensemble des diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd}
b & d \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\psi"] & c \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

du groupoïde $\mathrm{X}_*(\mathrm{T})$. La source d'un tel diagramme est f, le but est g ; la composition de ces diagrammes est évidente.

Ceci dit, il est clair que l'application identique de $\mathrm{Y}_0(\mathrm{T})$ et l'application

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\varphi"] & d \\
a \arrow[u, "f"] & c \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd}
b & d \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g^{-1}\varphi f"] & c \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

de $\mathrm{Y}_1(\mathrm{T})$ sur $\mathrm{Y}'_1(\mathrm{T})$ définissent un isomorphisme du groupoïde $\mathrm{Y}_*(\mathrm{T})$ sur $\mathrm{Y}'_*(\mathrm{T})$. De plus, cet isomorphisme dépend fonctoriellement de T de sorte que *les $\mathscr{C}$-groupoïdes Y_* et Y'_* sont isomorphes.* [13]

[12] N.D.E. : « accents » dans l'original.

[13] N.D.E. : Ceci jouera un rôle crucial dans la démonstration du lemme 6.1.

d) ***Proposition 3.1***. — *Nous conservons les notations de* a) *et nous supposons que f_0 est un épimorphisme effectif et universel. Alors,* $\operatorname{Coker}(d_0, d_1)$ *existe si et seulement si* $\operatorname{Coker}(e_0, e_1)$ *existe.* [14] *De plus, dans ce cas f_0 induit un isomorphisme* **260**

$$\operatorname{Coker}(d_0, d_1) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker}(e_0, e_1).$$

Rappelons d'abord qu'un épimorphisme $f_0 : \mathrm{Y}_0 \to \mathrm{X}_0$ est dit universel si, pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y}' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & \mathrm{Y}_0 \arrow[d, "f_0"] \\
\mathrm{X}' \arrow[r] & \mathrm{X}_0
\end{tikzcd} ,$$

f' est un épimorphisme. Ceci étant, désignons par $\mathrm{C}(d_0, d_1)$ le foncteur covariant de $\mathscr{C}$ dans les ensembles qui associe à tout $\mathrm{T} \in \mathscr{C}$ le noyau du couple $\mathrm{T}(d_0)$, $\mathrm{T}(d_1) : \mathrm{T}(\mathrm{X}_0) \rightrightarrows \mathrm{T}(\mathrm{X}_1)$. Définissons de même $\mathrm{C}(e_0, e_1)$. Pour tout $\mathrm{T} \in \mathscr{C}$, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}(d_0, d_1)(\mathrm{T}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{T}(f)"'] & \mathrm{T}(\mathrm{X}_0) \arrow[r, shift left, "\mathrm{T}(d_1)"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{T}(d_0)"'] \arrow[d, "\mathrm{T}(f_0)"'] & \mathrm{T}(\mathrm{X}_1) \arrow[d, "\mathrm{T}(f_1)"'] \\
\mathrm{C}(e_0, e_1)(\mathrm{T}) \arrow[r] & \mathrm{T}(\mathrm{Y}_0) \arrow[r, shift left, "\mathrm{T}(e_1)"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{T}(e_0)"'] & \mathrm{T}(\mathrm{Y}_1)
\end{tikzcd} ,$$

où $\mathrm{T}(f)$ est l'injection induite par l'injection $\mathrm{T}(f_0)$. Si nous montrons que $\mathrm{T}(f)$ est une surjection pour tout T, on aura un isomorphisme fonctoriel $f : \mathrm{C}(d_0, d_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{C}(e_0, e_1)$ de sorte que la représentabilité de l'un de ces foncteurs équivaudra à celle de l'autre; ceci prouvera notre proposition.

Pour prouver la surjectivité de $\mathrm{T}(f)$, considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Y}_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, shift right, "e_0"'] \arrow[d, shift left, "e_1"] & \mathrm{X}_1 \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
\mathrm{Y}_0 \times_{\mathrm{X}_0} \mathrm{Y}_0 \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathrm{Y}_0 \arrow[r, "f_0"] & \mathrm{X}_0
\end{tikzcd} ,$$

où Δ est la section de $\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}_0 \times \mathrm{Y}_0$ définie par le morphisme $s \circ f_0 \circ \mathrm{pr}_1 : \mathrm{Y}_0 \times \mathrm{Y}_0 \to \mathrm{X}_1$, **261**
la flèche $s : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{X}_1$ satisfaisant aux égalités (3) et (3 bis) du paragraphe 1.

Si la flèche $g : \mathrm{Y}_0 \to \mathrm{T}$ est telle que $g \circ e_0 = g \circ e_1$, on a $g \circ e_0 \circ \Delta = g \circ e_1 \circ \Delta$, donc $g \circ \mathrm{pr}_1 = g \circ \mathrm{pr}_2$. Comme f_0 est un épimorphisme effectif, g est composé de f_0

[14] N.D.E. : On a modifié l'original pour mettre en évidence l'isomorphisme ci-dessous.

et d'une flèche $h : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{T}$, c'est-à-dire qu'on a $g = \mathrm{T}(f_0)(h)$. Il reste à montrer que h appartient à $\mathrm{C}(d_0, d_1)(\mathrm{T})$, c'est-à-dire satisfait à l'égalité $hd_0 = hd_1$; or on a

$$hd_0f_1 = hf_0e_0 = ge_0 = ge_1 = hf_0e_1 = hd_1f_1,$$

d'où l'égalité cherchée grâce au fait que f_1 est un épimorphisme (car f_0 est un épimorphisme universel).

e) Considérons maintenant un schéma S et choisissons $\mathscr{C}$ égal à $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$. La donnée d'un $\mathscr{C}$-groupoïde

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_2 \arrow[r, shift left=2, "d'_2"] \arrow[r, "d'_1"] \arrow[r, shift right=2, "d'_0"'] & \mathrm{X}_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X}_0 \end{tikzcd}$$

permet de définir *une relation d'équivalence dans l'ensemble* $\underline{\mathrm{X}_0}$ sous-jacent au schéma X_0 : si x, $y \in \underline{\mathrm{X}_0}$, on écrira $x \sim y$ lorsqu'il existe $z \in \underline{\mathrm{X}_1}$ tel que $x = d_1z$ et $y = d_0z$. La réflexivité et la symétrie de cette relation sont évidentes [15] ; prouvons la transitivité : si $x \sim y$ et $y \sim z$, il existe u, $v \in \underline{\mathrm{X}}_1$ tels que $x = d_1u$, $y = d_0u$, $y = d_1v$, $z = d_0v$.
262 Il s'ensuit que (v, u) appartient au produit fibré ensembliste $\underline{\mathrm{X}_1} \times_{\underline{d}_1,\underline{d}_0} \underline{\mathrm{X}_1}$. Comme l'application canonique

$$\underline{\mathrm{X}_1 \underset{d_1,d_0}{\times} \mathrm{X}_1} \longrightarrow \underline{\mathrm{X}_1} \underset{\underline{d}_1,\underline{d}_0}{\times} \underline{\mathrm{X}_1}$$

de l'ensemble sous-jacent au produit fibré dans le produit fibré des ensembles sous-jacents est surjective, (v, u) est l'image d'un certain $w \in \underline{\mathrm{X}_2}$. On a alors $x = d_1d'_1w$ et $z = d_0d'_1w$, d'où $x \sim z$.

f) Conservons les notations de a) et b), $\mathscr{C}$ étant toujours égal à $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$. Si x, y sont des points de $\underline{\mathrm{Y}_0}$, nous allons voir qu'on a $x \sim y$ si et seulement si $f_0(x) \sim f_0(y)$ (l'image réciproque de la relation d'équivalence définie par un groupoïde est la relation d'équivalence définie par l'image réciproque du groupoïde).

En effet, supposons $x \sim y$. Il existe donc $z \in \underline{\mathrm{Y}}_1$ tel que $x = e_1(z)$ et $y = e_0(z)$. Comme $f_0 \circ e_i = d_i \circ f_1$ pour $i = 0, 1$, on a alors $f_0(x) = d_1f_1(z)$ et $f_0(y) = d_0f_1(z)$, d'où $f_0(x) \sim f_0(y)$.

Réciproquement, supposons $f_0(x) \sim f_0(y)$ et soit $z \in \underline{\mathrm{X}_1}$ tel que $f_0(y) = d_1(z)$ et $f_0(x) = d_0(z)$. Utilisant la construction et les notations de b), il y a alors un point t de $\underline{\mathrm{Y}_0 \times_{\mathrm{X}_0} \mathrm{X}_1}$ tel que $\mathrm{pr}_1(t) = x$ et $\mathrm{pr}_2(t) = z$. De même, comme $f_0(y) = d_1\mathrm{pr}_2(t)$, il y a un $s \in \underline{\mathrm{Y}_1}$ tel que $y = e_1(s)$ et $(e_0 \boxtimes f_1)(s) = t$. On a alors $e_0(s) = \mathrm{pr}_1(e_0 \boxtimes f_1)(s) = \mathrm{pr}_1(t) = x$. D'où $x \sim y$.

[15] N.D.E. : La réflexivité résulte de l'existence de $s : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{X}_1$ qui est une section de d_0 et de d_1, la symétrie résulte de l'existence de l'involution σ de X_1 qui « échange d_0 et d_1 », c.-à-d., qui vérifie $d_0\sigma = d_1$ et $d_1\sigma = d_0$, cf. § 1, (3), (3 bis) et (†).

4. Passage au quotient par un groupoïde fini et plat (démonstration d'un cas particulier)

Théorème 4.1. — *On considère un* $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$*-groupoïde :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_2 \arrow[r, shift left=2, "d'_2"] \arrow[r, "d'_1"] \arrow[r, shift right=2, "d'_0"'] & \mathrm{X}_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X}_0 \end{tikzcd}$$

On suppose vérifiées les conditions suivantes : [16] **263**

a) d_1 *est* fini localement libre*,*

b) pour tout $x \in \mathrm{X}_0$, l'ensemble $d_0 d_1^{-1}(x)$ est contenu dans un ouvert affine de X_0. [17] *Alors :*

(i) *Il existe un conoyau* (Y, p) *de* (d_0, d_1) *dans* $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ *; de plus, un tel* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans la catégorie de tous les espaces annelés.*

(ii) p *est entier et ouvert, et* Y *est affine si* X_0 *est affine.* [18]

(iii) *Le morphisme* $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ *de composantes* d_0 *et* d_1 *est surjectif.*

(iv) *Si* (d_0, d_1) *est un* couple d'équivalence*,* $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ *est un isomorphisme* [19] *et* $p : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{Y}$ *est fini localement libre.* [20] *De plus,* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans la catégorie des* faisceaux *pour la topologie* (fppf) *et, pour tout changement de base* $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$*,* Y' *est le conoyau du groupoïde* $\mathrm{X}_* \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ *déduit de* X_* *par le changement de base* $\mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}' \to \mathrm{X}_0$*.*

En particulier, pour tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*,* $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *est le conoyau du* S'*-groupoïde* $\mathrm{X}'_* = \mathrm{X}_* \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$*. Donc, dans ce cas, «* la formation du quotient commute au changement de base ».

Il résulte évidemment de (i) que l'espace topologique sous-jacent à Y est le quotient de l'espace topologique sous-jacent à X_0 par la relation d'équivalence définie par le $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$-groupoïde X_*.

Nous allons d'abord prouver ce théorème lorsque X_0 est *affine* et que d_1 est localement libre *de rang constant n*. Nous verrons ensuite comment on peut se ramener à ce cas particulier.

---

[16] N.D.E. : Comme $d_0 = d_1 \sigma$, où σ est un automorphisme involutif de X_1, ces deux conditions sont symétriques en d_1 et d_0 ; de plus, on a $d_0 d_1^{-1}(x) = d_1 d_0^{-1}(x)$.

[17] N.D.E. : On ne peut omettre l'hypothèse b). En effet, H. Hironaka a donné un exemple d'une action du groupe fini $\mathrm{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur une $\mathbb{C}$-variété *propre* X_0, telle que le quotient X_0/G soit un espace algébrique qui n'est pas un schéma ([**Hi62**], voir aussi [**Mum65**], Chap. 4, § 3).

[18] N.D.E. : On a ajouté que p est *ouvert*, en reprenant la démonstration analogue donnée en 6.1.

[19] N.D.E. : Noter que, dans ce cas, $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_0$ est donc une *immersion* (EGA I, 5.3.10) ; voir aussi $\mathrm{VI_B}$, 9.2.1. D'autre part, pour l'existence du quotient (dans la catégorie des schémas ou celle des espaces algébriques) sous l'hypothèse plus faible que d_0 et d_1 soient finis (mais pas nécessairement plats), voir [**An73**], § 1.1, [**Fe03**], [**Ko08**] ...

[20] N.D.E. : On a explicité les conséquences qui suivent ; voir [**Ray67a**], th. 1 (iii) et la démonstration donnée plus loin, à la fin de la section 5.

Dans le cas où nous nous sommes placés, X_0, X_1 et X_2 sont affines. Nous pouvons donc supposer qu'on a

$$\mathrm{X}_i = \operatorname{Spec} \mathrm{A}_i \quad , \quad d_j = \operatorname{Spec} \delta_j \quad \text{et} \quad d'_k = \operatorname{Spec} \delta'_k,$$

les A_i étant des anneaux commutatifs, les δ_j, δ'_k des homomorphismes d'anneaux. On peut alors remplacer le diagramme $(0,1,2)$ par le suivant

$(0,1,2)^*$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_1 \arrow[l, shift right, "\delta'_1"'] \arrow[l, shift left, "\delta'_0"'] & \mathrm{A}_0 \arrow[l, "\delta_0"'] \\
\mathrm{A}_1 \arrow[u, "\delta'_2"] & \mathrm{A}_0 \arrow[l, shift right, "\delta_1"'] \arrow[l, shift left, "\delta_0"'] \arrow[u, "\delta_1"']
\end{tikzcd}$$

où les deux carrés de gauche sont cocartésiens.

264 Désignons par B le sous-anneau de A_0 formé des $a \in \mathrm{A}_0$ tels que $\delta_0(a) = \delta_1(a)$.

a) Montrons que A_0 *est entier sur* B. Si a appartient à A_0, soit

$$\mathrm{P}_{\delta_1}(\mathrm{T}, \delta_0(a)) = \mathrm{T}^n - \sigma_1 \mathrm{T}^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$$

le polynôme caractéristique de $\delta_0(a)$ lorsqu'on considère A_1 comme algèbre sur A_0 au moyen de l'homomorphisme δ_1 (cf. Bourbaki, *Alg.* VIII, § 12 et *Alg. comm.* II, § 5, exercice 9). Comme les carrés de gauche de $(0,1,2)^*$ sont cocartésiens, on a

$$\begin{aligned} &\delta_0(\mathrm{P}_{\delta_1}(\mathrm{T}, \delta_0(a))) = \mathrm{P}_{\delta'_2}(\mathrm{T}, \delta'_0\delta_0(a)) \\ \text{et} \qquad &\delta_1(\mathrm{P}_{\delta_1}(\mathrm{T}, \delta_0(a))) = \mathrm{P}_{\delta'_2}(\mathrm{T}, \delta'_1\delta_0(a)). \end{aligned}$$

Comme $\delta'_0\delta_0 = \delta'_1\delta_0$, on a

$$\delta_0(\mathrm{P}_{\delta_1}(\mathrm{T}, \delta_0(a))) = \delta_1(\mathrm{P}_{\delta_1}(\mathrm{T}, \delta_0(a)))$$

c'est-à-dire $\delta_0(\sigma_i) = \delta_1(\sigma_i)$ pour tout i. Hamilton-Cayley nous enseigne d'autre part qu'on a

$$\delta_0(a)^n - \delta_1(\sigma_1)\delta_0(a)^{n-1} + \cdots + (-1)^n \delta_1(\sigma_n) = 0.$$

Comme $\delta_1(\sigma_i)$ est égal à $\delta_0(\sigma_i)$, on a aussi

$$\delta_0(a)^n - \delta_0(\sigma_1)\delta_0(a)^{n-1} + \cdots + (-1)^n \delta_0(\sigma_n) = 0,$$

d'où

$$a^n - \sigma_1 a^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n = 0,$$

265 car il existe un homomorphisme $\tau : \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_0$ tel que $\tau\delta_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{A}_0}$, donc δ_0 est injectif. Il s'ensuit que A_0 est entier sur B.

b) Considérons maintenant deux idéaux premiers x et y de A_0. Nous allons montrer que *l'égalité* $x \cap \mathrm{B} = y \cap \mathrm{B}$ *entraîne l'existence d'un idéal premier* z *de* A_1 *tel que* $x = d_0(z)$ *et* $y = d_1(z)$.

En effet, si l'assertion n'était pas vraie, x serait distinct de $\delta_0^{-1}(t)$ pour tout idéal premier t de A_1 tel que $\delta_1^{-1}(t) = y$. Pour un tel t on aurait $\delta_0^{-1}(t) \cap \mathrm{B} = \delta_1^{-1}(t) \cap \mathrm{B} = y \cap \mathrm{B} = x \cap \mathrm{B}$, d'où il résulterait grâce à Cohen-Seidenberg (cf. Bourbaki, *Alg. comm.*

V, § 2, cor. 1 de la prop. 1) que x ne serait contenu dans aucun $\delta_0^{-1}(t)$. [(21)] Or il y a au plus n idéaux premiers t de A_1 tels que $\delta_1^{-1}(t) = y$ (cf. *loc. cit.*, prop. 3) donc, d'après le « Lemme d'évitement des idéaux premiers » (*loc. cit.*, II, § 1, prop. 3) il y aurait un $a \in x$ qui n'appartiendrait à aucun $\delta_0^{-1}(t)$. Par conséquent, $\delta_0(a)$ n'appartiendrait à aucun de ces idéaux t et donc, d'après le lemme ci-dessous, la norme $\mathrm{N}_{\delta_1}(\delta_0(a))$ n'appartiendrait pas à y (on calcule cette norme en considérant A_1 comme algèbre sur A_0 au moyen de l'homomorphisme δ_1 ; on a $\mathrm{N}_{\delta_1}(\delta_0(a)) = \sigma_n$ avec les notations de a)). Or, comme $(-1)^{n-1}\,\sigma_n = a^n + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\,\sigma_i\,a^{n-i}$, cette norme appartient à $\mathrm{B}\cap x = \mathrm{B}\cap y$, d'où la contradiction.

Lemme 4.1.1. — *Soit* $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ *un morphisme d'anneaux commutatifs, faisant de* A' *un* A-*module projectif de rang* n. *Soient* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r$ *les éléments de* $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}')$ *au-dessus de* $\mathfrak{p}$, *et* $a \in \mathrm{A}'$. *Alors* a *appartient à* $\mathfrak{q}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{q}_r$ *si et seulement si sa norme* $\mathrm{N}(a)$ *appartient à* $\mathfrak{p}$.

En effet, remplaçant A et A′ par les localisés $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$ et $\mathrm{A}'_\mathfrak{p}$, on se ramène au cas où $(\mathrm{A},\mathfrak{p})$ est local, et A′ semi-local, avec $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}') = \{\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r\}$. Dans ce cas, A′ est un A-module libre de rang n (cf. Bourbaki, *Alg. comm.* II, § 3.2, cor. 2 de la prop. 5) et $\mathrm{N}(a)$ est le déterminant de l'endomorphisme $\ell_a : a' \mapsto aa'$ de A′, on a donc les équivalences suivantes :

$$\mathrm{N}(a) \notin \mathfrak{p} \iff \mathrm{N}(a) \text{ inversible } \iff \ell_a \text{ inversible } \iff a \notin \mathfrak{q}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{q}_r.$$

c) *Démonstration de* (i) :

Posons $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}\,\mathrm{B}$ et $p = \mathrm{Spec}\,i$, où i est l'inclusion de B dans A_0. D'après a), le morphisme $p : X_0 \to \mathrm{Y}$ est *surjectif.* Nous allons d'abord montrer que (Y, p) est un conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés : il résulte en effet de b) que l'ensemble sous-jacent à Spec B est obtenu à partir de l'ensemble sous-jacent à X_0 en identifiant les points x et y tels qu'il existe $z \in X_1$ avec $d_1 z = y$, $d_0 z = x$. De plus, comme i est entier, $p = \mathrm{Spec}\,i$ est fermé de sorte que Y est muni de la topologie quotient de celle de X_0. Il en résulte que p est *ouvert.* En effet, soit U′ un ouvert quelconque de X_0 ; comme d_1 est surjectif et fini localement libre, donc fidèlement plat et de présentation finie, et donc ouvert, alors le saturé $\mathrm{U} = d_1(d_0^{-1}(\mathrm{U}'))$ de U′ pour la relation d'équivalence définie par X_* est ouvert. Alors $p(\mathrm{U}') = p(\mathrm{U})$ est ouvert, puisque Y est muni de la topologie quotient.

Il résulte enfin du choix de B et du fait que p, d_0 et d_1 sont affines, que la suite canonique de faisceaux d'anneaux **266**

$$\mathscr{O}_\mathrm{Y} \longrightarrow p_*(\mathscr{O}_{X_0}) \overset{p_*(\delta_1)}{\underset{p_*(\delta_0)}{\rightrightarrows}} p_*(d_{0*}(\mathscr{O}_{X_1})) = p_*(d_{1*}(\mathscr{O}_{X_1}))$$

est exacte.

Il reste à montrer que (Y, p) est aussi le conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie des schémas (plus généralement dans celle des espaces annelés en anneaux locaux). Soit

(21) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit ; en particulier, on a ajouté le lemme 4.1.1, tiré de [**DG70**], III, § 2.4, Lemme 4.3.

donc $q : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{Z}$ un morphisme de schémas tel que $qd_0 = qd_1$. D'après ce qui précède, il y a un morphisme d'espaces annelés $r : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ et un seul tel que $q = rp$. Il s'agit de montrer que, pour tout $y \in \mathrm{Y}$, l'homomorphisme $\mathscr{O}_{r(y)} \to \mathscr{O}_y$ induit par r est local. Cela résulte de ce que p est surjectif, donc y de la forme $p(x)$, et de ce que l'homomorphisme $\mathscr{O}_{q(x)} \to \mathscr{O}_x$ induit par q est local.

d) *Démonstration de* (ii) : Résulte de a) et c).

e) *Démonstration de* (iii) :

Rappelons qu'on désigne par $\underline{\mathrm{P}}$ l'ensemble sous-jacent à un schéma P, par $\underline{d} : \underline{\mathrm{P}} \to \underline{\mathrm{Q}}$ l'application induite par un morphisme $d : \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$.

Lemme 4.1.2. — (22) *Soient* $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ *un anneau local,* k *son corps résiduel, et* K *une extension du corps* k*. Alors, il existe une* A*-algèbre locale et plate* B *telle que* $\mathrm{B}/\mathfrak{m}\mathrm{B}$ *soit* k*-isomorphe à* K *; de plus, on peut choisir* B *finie et libre sur* A *si* K *est de degré fini sur* k*.*

Ceci est démontré dans EGA 0_{III}, 10.3.1, où il est de plus montré qu'on peut choisir B noethérien si A l'est. Pour la commodité du lecteur, indiquons la démonstration.

Posons $\mathrm{A}' = \mathrm{A}[\mathrm{T}]$, où T est une indéterminée. Si $\mathrm{K} = k(\mathrm{T})$, soient $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathrm{A}'$ et $\mathrm{B} = \mathrm{A}'_{\mathfrak{p}}$. Alors $\mathrm{B}/\mathfrak{m}\mathrm{B} \cong k[\mathrm{T}]_{(0)} = k(\mathrm{T})$, et B est plat sur A′ qui est un A-module libre, donc B est plat sur A.

Si $\mathrm{K} = k(t) = k[t]$, où t est algébrique sur k, posons $\mathrm{B} = \mathrm{A}'/(\mathrm{F})$, où $\mathrm{F} \in \mathrm{A}'$ est un polynôme unitaire dont l'image dans $k[\mathrm{T}]$ est le polynôme minimal f de t sur k. Alors B est un A-module libre, de rang fini $\deg(\mathrm{F}) = \deg(f)$. En particulier, B est entier sur A, donc tout idéal maximal de B contient $\mathfrak{m}$. Comme $\mathrm{B}/\mathfrak{m}\mathrm{B} \cong k[\mathrm{T}]/(f) \cong \mathrm{K}$, il en résulte que B est local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}\mathrm{B}$. Ceci montre déjà que si $[\mathrm{K} : k] < \infty$, on peut choisir B finie et libre sur A.

Dans le cas général, soit $(t_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un système de générateurs de K sur k, et munissons I d'un bon ordre (c.-à-d., un ordre total $\leqslant$ tel que toute partie non vide de I possède un plus petit élément). Pour tout $i \in \mathrm{I}$, notons k_i (resp. $k_{<i}$) le sous-corps de K engendré par les t_j, pour $j \leqslant i$ (resp. $j < i$). Quitte à rajouter un élément, on peut supposer que I possède un plus grand élément ξ, de sorte que $\mathrm{K} = k_\xi$. Considérons le sous-ensemble J de I formé des indices i tels qu'il existe un système inductif $(\mathrm{A}_j)_{j\leqslant i}$ de A-algèbres locales et plates, telles que $\mathrm{A}_j/\mathfrak{m}\mathrm{A}_j \cong k_j$ et que A_j soit plate sur A_ℓ pour tout $\ell < j$. Supposons $\mathrm{I} - \mathrm{J}$ non vide ; soit i son plus petit élément et soit $\mathrm{A}' = \varinjlim_{j<i} \mathrm{A}_j$. Puisque le produit tensoriel commute à la limite inductive, A′ est plate sur A et sur chaque A_j, pour $j < i$, et l'on a $\mathrm{A}'/\mathfrak{m}\mathrm{A}' \cong \mathrm{A}' \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{m}) \cong k_{<i}$. De plus, A′ est locale, d'idéal maximal $\mathfrak{m}\mathrm{A}'$. En effet, si $x = f_j(x_j)$ est non inversible, alors x_j n'est pas inversible, donc appartient à l'idéal maximal $\mathfrak{m}\mathrm{A}_j$ de A_j, d'où $x \in \mathfrak{m}\mathrm{A}'$. Il résulte alors du cas monogène, traité plus haut, qu'il existe une A′-algèbre locale et plate A_i, telle que $\mathrm{A}_i/\mathfrak{m}\mathrm{A}_i \cong k_{<i}(t_i) = k_i$; alors A_i est plate sur chaque A_j, pour $j < i$, et donc $i \in \mathrm{J}$, contrairement à l'hypothèse. Cette contradiction montre que $\mathrm{J} = \mathrm{I}$, et donc A_ξ répond à la question. Le lemme 4.1.2 est démontré.

(22) N.D.E. : On a inséré ce lemme, utilisé à plusieurs reprises dans cet exposé et dans des exposés ultérieurs (VI_{A}, VI_{B}). Il figurait comme Lemme VI_{B}, 4.5.1 dans l'édition originelle de SGAD (1965).

Démontrons maintenant 4.1 (iii). Rappelons qu'on note $\underline{\mathrm{P}}$ l'ensemble sous-jacent à un schéma P, et $\underline{d} : \underline{\mathrm{P}} \to \underline{\mathrm{Q}}$ l'application induite par un morphisme $d : \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$. On peut alors traduire b) en disant que l'application

$$\underline{d}_0 \boxtimes \underline{d}_1 : \underline{\mathrm{X}_1} \longrightarrow \underline{\mathrm{X}_0} \underset{\underline{\mathrm{Y}}}{\times} \underline{\mathrm{X}_0}$$

de composantes $\underline{d}_0$ et $\underline{d}_1$ est surjective ; or cette application se factorise comme suit

$$\underline{\mathrm{X}_1} \xrightarrow{\ d_0 \boxtimes d_1\ } \underline{\mathrm{X}_0 \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X}_0} \xrightarrow{\ q\ } \underline{\mathrm{X}_0} \underset{\underline{\mathrm{Y}}}{\times} \underline{\mathrm{X}_0},$$

q étant l'application canonique ; l'image de $d_0 \boxtimes d_1$ contient donc tous les points v de $\mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ tels que $\{v\} = q^{-1}(q(v))$. Cette dernière condition [23] sera réalisée en 267
particulier si v est *rationnel au-dessus de* Y, c'est-à-dire si le corps résiduel $\kappa(v)$ de v s'identifie au corps résiduel $\kappa(w)$ de l'image w de v dans Y.

Si $v \in \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ n'est pas rationnel au-dessus de Y, soit toujours w l'image de v dans Y. D'après le lemme 4.1.2, il existe un anneau local C de radical $\mathfrak{m}$ et un homomorphisme local et plat $f : \mathscr{O}_w \to \mathrm{C}$ tel que $\mathrm{C}/\mathfrak{m}$ soit isomorphe à $\kappa(v)$ comme $\kappa(w)$-algèbre. Si on pose $\mathrm{Y}' = \operatorname{Spec} \mathrm{C}$ et si $\pi : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ est le morphisme induit par f, il est clair que la projection canonique de $(\mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0) \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ dans $\mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ envoie sur v un point v' de $(\mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0) \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ qui est rationnel au-dessus de Y'. Comme

$$(\mathrm{X}_0 \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X}_0) \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{Y}' \cong (\mathrm{X}_0 \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{Y}') \underset{\mathrm{Y}'}{\times} (\mathrm{X}_0 \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{Y}'),$$

et comme les hypothèses du théorème 4.1 et les résultats précédents, en particulier le point b), restent valables après le changement de base $\pi : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$, alors v' est l'image d'un élément $u' \in \mathrm{X}_1 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ par le morphisme déduit de $d_0 \boxtimes d_1$ par changement de base. Si u est l'image de u' dans X_1, on a bien $v = (d_0 \boxtimes d_1)(u)$.

f) *Démonstration de* (iv) : [24]

Lemme 4.1.3. — *Si un* monomorphisme *de schémas* $f : \mathrm{T} \to \mathrm{Z}$ *est un morphisme* fini*, c'est une* immersion fermée.

En effet, en recouvrant Z par des ouverts affines Z_i, et en remplaçant f par les morphismes induits $f^{-1}(\mathrm{Z}_i) \to \mathrm{Z}_i$, on se ramène ($f$ étant fini, donc affine) au cas où $\mathrm{Z} = \operatorname{Spec} \mathrm{B}$ et $\mathrm{T} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$. Comme f est un monomorphisme, le morphisme diagonal $\mathrm{T} \to \mathrm{T} \times_{\mathrm{Z}} \mathrm{T}$ est un isomorphisme (EGA I, 5.3.8), i.e. $\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ est un isomorphisme. Par conséquent, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B, on a un isomorphisme

$$(\mathrm{A}/\mathfrak{m}\mathrm{A}) \otimes_k (\mathrm{A}/\mathfrak{m}\mathrm{A}) \cong (\mathrm{A}/\mathfrak{m}\mathrm{A})$$

où l'on a posé $k = \mathrm{B}/\mathfrak{m}$. Comme A est fini sur B, $\mathrm{A}/\mathfrak{m}\mathrm{A}$ est un k-espace vectoriel de dimension finie d, et l'isomorphisme ci-dessus entraîne que $d = 0$ ou 1, de sorte que le morphisme $k = \mathrm{B}/\mathfrak{m} \to \mathrm{A}/\mathfrak{m}\mathrm{A}$ est surjectif. Donc, d'après le lemme de Nakayama (A

[23] N.D.E. : Noter la permutation des pages dans le Lecture Notes 151, l'ordre réel est 265-266-268-269-267-270-271.

[24] N.D.E. : On a ajouté le lemme suivant, tiré de [**DG70**], I, § 5, Prop. 1.5 (voir aussi la démonstration de EGA IV_3, 8.11.5), utilisé de façon implicite dans l'original, et de façon explicite dans [**DG70**], III, § 2, 4.6. Il est de plus utile dans le th. 7.1 plus loin.

étant fini sur B), le morphisme $B_{\mathfrak{m}} \to A_{\mathfrak{m}}$ est surjectif. Il en résulte que le morphisme de B-modules $B \to A$ est surjectif (puisque son conoyau C vérifie $C_{\mathfrak{m}} = 0$, pour tout $\mathfrak{m}$, donc est nul). Ceci prouve le lemme.

Démontrons maintenant (iv). Par hypothèse, $X_0 = \operatorname{Spec} A_0$, $X_1 = \operatorname{Spec} A_1$, et, pour $i = 0, 1$, le morphisme $\delta_i : A_0 \to A_1$ fait de A_1 un A_0-module de type fini ; donc, a fortiori, le morphisme $A_0 \otimes_B A_0 \to A_1$ est fini.

On suppose de plus que $d = d_0 \boxtimes d_1 : X_1 \to X_0 \times_Y X_0$ est un monomorphisme ; donc, d'après le lemme précédent, le morphisme $A_0 \otimes_B A_0 \to A_1$ est surjectif.

On va montrer que c'est un *isomorphisme* (on prouvera en chemin que $p : X_0 \to Y$ est fini et localement libre). Il suffit de montrer que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de B, l'homomorphisme $(A_0)_{\mathfrak{p}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} (A_0)_{\mathfrak{p}} \to (A_1)_{\mathfrak{p}}$ de composantes $\delta_{0\mathfrak{p}}$ et $\delta_{1\mathfrak{p}}$ est bijectif. Autrement dit, il est loisible de supposer B local. Il résulte alors de b) que $(A_0)_{\mathfrak{p}}$ est semi-local ; en effet, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $(A_0)_{\mathfrak{p}}$, les autres idéaux maximaux sont de la forme $\delta_0^{-1}(\mathfrak{n})$, où $\mathfrak{n}$ parcourt les idéaux premiers de A_1 tels que $\delta_1^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$; l'assertion résulte donc de ce qu'il y a au plus $n = [A_1 : A_0]$ tels idéaux premiers $\mathfrak{n}$. Quitte à faire un changement de base fidèlement plat [(25)], on peut aussi supposer que le corps résiduel de B est infini de sorte qu'on peut utiliser le lemme suivant :

Lemme 4.2. — *Soient* B *un anneau local de corps résiduel infini,* A *un anneau semi-*
268 *local et* $i : B \to A$ *un homomorphisme qui envoie l'idéal maximal* $\mathfrak{n}$ *de* B *dans le radical* $\mathfrak{r}$ *de* A*. Soient* M *un* A*-module libre de rang* n *et* N *un* B*-sous-module de* M *qui engendre* M *en tant que* A*-module. Alors* N *contient une base de* M *sur* A*.*

On rappelle en effet qu'une suite $m_1, \ldots, m_n$ d'éléments de M est une A-base de M si et seulement si les images canoniques de $m_1, \ldots, m_n$ dans $M/\mathfrak{r}M$ forment une base de $M/\mathfrak{r}M$ sur $A/\mathfrak{r}$. On peut donc remplacer M par $M/\mathfrak{r}M$, N par $N/(N \cap \mathfrak{r}M)$, A par $A/\mathfrak{r}$ et B par $B/\mathfrak{m}$. Dans ce cas le lemme est facile (si A est un produit de corps $K_1 \times \cdots \times K_r$, on peut identifier M au module $K_1^n \times \cdots \times K_r^n$; si x_j est alors un élément de N dont la j-ième composante dans $K_1^n \times \cdots \times K_r^n$ n'est pas nulle, montrer qu'une certaine combinaison linéaire x des x_j à coefficients dans B a toutes ses composantes non nulles ; remplacer ensuite M par M/Ax et procéder par récurrence sur n).

Nous appliquons le lemme précédent dans la situation suivante : $B = B$, $A = A_0$, i est l'inclusion de B dans A_0, $M = A_1$ considéré comme A_0-module au moyen de l'homomorphisme δ_1, $N = \delta_0(A_0)$. En effet, comme $d_0 \boxtimes d_1 : X_1 \to X_0 \times_Y X_0$ est une immersion fermée, l'homomorphisme $A_0 \otimes_B A_0 \to A_1$ de composantes δ_0 et δ_1 est surjectif ; cela signifie justement que $\delta_0(A_0)$ engendre le A_0-module A_1.

Soient donc $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de A_0 tels que $\delta_0(a_1), \ldots, \delta_0(a_n)$ forment une base de A_1 sur A_0. Si nous montrons que $a_1, \ldots, a_n$ est une base de A_0 sur B, il s'ensuivra que l'homomorphisme $A_0 \otimes_B A_0 \to A_1$ applique la base $(1 \otimes a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sur la base $(\delta_0(a_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$, donc est bijectif. Par conséquent, si $\varepsilon : \mathbb{Z}^n \to A_0$ est l'homomorphisme de groupes abéliens qui envoie la base naturelle de $\mathbb{Z}^n$ sur $a_1, \ldots, a_n$, il suffit de prouver que l'application $B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \to A_0$ de composantes i et ε est bijective.

(25) N.D.E. : cf. Lemme 4.1.2.

Or le diagramme $(0,1,2)^*$ considéré au début de cette preuve, induit le diagramme commutatif suivant : 269

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_1 \arrow[l, shift right, "\delta'_1"'] \arrow[l, shift left, "\delta'_0"] & & \mathrm{A}_0 \arrow[ll, "\delta_0"'] \\
\mathrm{A}_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \arrow[u, "u_2"] & \mathrm{A}_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \arrow[l, shift right, "\delta_1 \otimes \mathbb{Z}^n"'] \arrow[l, shift left, "\delta_0 \otimes \mathbb{Z}^n"] \arrow[u, "u_1"', "\cong"] & & \mathrm{B} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n \arrow[ll, "i \otimes \mathbb{Z}^n"'] \arrow[u, "u_0"]
\end{tikzcd} ,$$

où u_0, u_1 et u_2 ont pour composantes respectivement i et ε, δ_1 et $\delta_0\varepsilon$, δ'_2 et $\delta'_0\delta_0\varepsilon$. Nous savons que u_1 est un isomorphisme. Comme les deux carrés de gauche de $(0,1,2)^*$ sont cocartésiens, u_2 est bijectif. Or les deux lignes horizontales de notre diagramme sont exactes ; donc u_0 est bijectif. [26] Ceci montre que A_0 est un B-module localement libre de rang n, et, d'après les réductions précédentes, ceci entraîne que $\delta_0 \otimes \delta_1 : \mathrm{A}_0 \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{A}_0 \to \mathrm{A}_1$ est un isomorphisme. Ceci achève la preuve du théorème 4.1 dans le cas particulier considéré (X_0 affine et d_1 localement libre de rang constant n).

5. Passage au quotient par un groupoïde fini et plat (cas général)

a) Soit $\mathrm{U}^{(n)}$ le plus grand ouvert de X_0 au-dessus duquel d_1 est fini localement libre de rang n. On sait que X_0 est la somme directe des $\mathrm{U}^{(n)}$. Il résulte d'autre part des deux carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}_2 \arrow[r, "d'_0"] \arrow[d, "d'_2"'] & \mathrm{X}_1 \arrow[d, "d_1"] \\
\mathrm{X}_1 \arrow[r, "d_0"'] & \mathrm{X}_0
\end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd}
\mathrm{X}_2 \arrow[r, "d'_1"] \arrow[d, "d'_2"'] & \mathrm{X}_1 \arrow[d, "d_1"] \\
\mathrm{X}_1 \arrow[r, "d_1"'] & \mathrm{X}_0
\end{tikzcd}$$

que les images réciproques de $\mathrm{U}^{(n)}$ par d_0 et d_1 coïncident toutes les deux avec le plus grand ouvert de X_1 au-dessus duquel d'_2 est localement libre de rang n [27] ; on a donc $d_0^{-1}(\mathrm{U}^{(n)}) = d_1^{-1}(\mathrm{U}^{(n)})$ de sorte que le groupoïde X_* est la somme directe des groupoïdes $\mathrm{X}_*^{(n)}$ induits par X_* sur les ouverts et fermés $\mathrm{U}^{(n)}$. Il suffit par conséquent, comme on le voit aisément, de prouver le théorème 4.1 pour chacun des $\mathrm{X}_*^{(n)}$: *on est ramené au cas où d_1 est fini localement libre de rang n.*

b) *Nous sommes maintenant en mesure de prouver notre théorème dans le cas général.* 270

[26] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

[27] N.D.E. : en effet, comme d_0 (resp. d_1) est surjectif, plat et fini, donc fidèlement plat et affine, alors d'_2 est de rang n au-dessus d'un voisinage d'un point x de X_1 si et seulement si d_1 est de rang n au-dessus d'un voisinage de $d_0(x)$ (resp. $d_1(x)$).

D'après a) on peut supposer que d_1 est localement libre de rang n. Soit alors (Y, p) un conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés. Le raisonnement de la fin du paragraphe 4.c) montre qu'il suffit pour démontrer 4.1 (i) de prouver que Y est un schéma et $p : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{Y}$ un morphisme de schémas. D'après le lemme 1.2, la question est locale sur Y : soit $y \in \mathrm{Y}$ et soit $x \in \mathrm{X}_0$ tel que $p(x) = y$; si x possède un voisinage ouvert affine et saturé U, $p(\mathrm{U})$ sera un ouvert affine de Y d'après le § 4 et $p|_{\mathrm{U}}$ sera un morphisme de schémas. Il suffit donc de prouver que tout $x \in \mathrm{X}_0$ possède un voisinage ouvert affine et saturé U. Voici comment on procède (la démonstration est tirée de SGA 1, VIII, cor. 7.6).

$$d_1(d_0^{-1}(x)) \subset \underset{\substack{\text{plus grand}\\ \text{ouvert saturé}\\ \text{de } \mathrm{V}_f}}{\mathrm{U} = (\mathrm{V}_f)'} \subset \underset{\substack{\text{ouvert affine}\\ \text{spécial de V}}}{\mathrm{V}_f} \subset \underset{\substack{\text{plus grand}\\ \text{ouvert saturé}\\ \text{de V}}}{\mathrm{V}'} \subset \underset{\text{ouvert affine}}{\mathrm{V}} \subset \mathrm{X}_0$$

D'après la condition b) de 4.1, il existe un ouvert affine V de X_0 contenant $d_1(d_0^{-1}(x))$ [28] ; si $\mathrm{F} = \mathrm{X}_0 - \mathrm{V}$, $d_1(d_0^{-1}(\mathrm{F}))$ est fermé car d_1 est entier et $\mathrm{V}' = \mathrm{X}_0 - d_1(d_0^{-1}(\mathrm{F}))$ est le plus grand ouvert saturé contenu dans V. Comme V' est un voisinage de l'ensemble fini $d_1(d_0^{-1}(x))$, il existe une section f du faisceau structural de V qui s'annule sur $\mathrm{V} - \mathrm{V}'$ et est telle que $d_1(d_0^{-1}(x))$ soit contenu dans l'ouvert V_f de V formé des points où f ne s'annule pas. Nous allons voir que le plus grand ouvert saturé $(\mathrm{V}_f)'$ de V_f est affine, donc répond à la question.

Soit en effet $\mathrm{Z}(f) = \mathrm{V}' - \mathrm{V}_f$. Alors $d_0^{-1}(\mathrm{Z}(f))$ est l'ensemble des points de $d_0^{-1}(\mathrm{V}') = d_1^{-1}(\mathrm{V}')$ où s'annule l'image $d_0^*(f)$ de f par l'application induite par d_0. D'autre part, comme d_1 induit un morphisme localement libre de rang n de $d_0^{-1}(\mathrm{V}') = d_1^{-1}(\mathrm{V}')$
271 sur V', [29] alors, d'après le lemme 4.1.1, $d_1(d_0^{-1}(\mathrm{Z}(f)))$ est l'ensemble des points où s'annule la norme N de $d_0^*(f)$ pour le morphisme d_1. Il s'ensuit que $(\mathrm{V}_f)' = \mathrm{V}' - d_1(d_0^{-1}(\mathrm{Z}(f)))$ est l'ensemble des points de V_f où N ne s'annule pas ; par conséquent, $(\mathrm{V}_f)'$ est affine.

Ceci prouve 4.1 (i) ; les assertions (ii), (iii), et la première partie de (iv) sont alors claires. Montrons enfin les conséquences signalées à la fin du point (iv) (cf. [**Ray67a**], th. 1 (iii)).

Par hypothèse, le groupoïde X_* provient d'une relation d'équivalence $i : \mathrm{R} \to \mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0$ (i étant donc une immersion, cf. N.D.E. (19)), et on a établi que R est *effective* (cf. Exp. IV, 3.3.2) et que $p : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{Y} = \mathrm{X}_0/\mathrm{R}$ est un morphisme surjectif et fini localement libre donc, en particulier, fidèlement plat et de présentation finie.

(28) N.D.E. : on a $d_1(d_0^{-1}(x)) = d_0(d_1^{-1}(x))$, cf. la N.D.E. (16) dans le théorème 4.1.
(29) N.D.E. : On a ajouté la référence au lemme 4.1.1, cf. [**DG70**], III, § 5.2, p. 313.

Par conséquent, notant (M) la famille des morphismes fidèlement plats localement de présentation finie, R est (M)-effective. Donc, d'après Exp. IV, 6.3.3, (Y, p) représente le faisceau quotient de X_0 par R pour la topologie (fppf), et les assertions relatives au changement de base découlent de IV, 3.4.3.1.

Remarque 5.1. — [(30)] Conservons les hypothèses et les notations de 4.1, et supposons de plus S *localement noethérien* et $\pi_0 : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{S}$ *quasi-projectif*. Montrons alors que $\pi : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ est *quasi-projectif*.

Les hypothèses ci-dessus entraînent que $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ est *de type fini*, voir la démonstration de 6.1 (ii). Soit $\mathscr{A}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}$-module inversible *ample* pour π_0. D'après EGA II, 6.1.12, $p_*(\mathscr{A})$ est un $p_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0})$-module inversible. Il existe donc un recouvrement $(\mathrm{V}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de Y par des ouverts affines, tel que $\mathscr{A}$ soit trivial au-dessus de chacun des ouverts affines saturés $\mathrm{U}_i = p^{-1}(\mathrm{V}_i)$.

Pour chaque indice i, notons $\mathrm{A}_{i,0} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}(\mathrm{U}_i)$, $\mathrm{A}_{i,1}$ l'anneau de l'ouvert affine $d_0^{-1}(\mathrm{U}_i) = d_1^{-1}(\mathrm{U}_i)$ de X_1, $\delta_{i,0}$ (resp. $\delta_{i,1}$) le morphisme $\mathrm{A}_{i,0} \to \mathrm{A}_{i,1}$ induit par d_0 (resp. d_1), et $\mathrm{B}_i = \mathscr{O}_\mathrm{Y}(\mathrm{V}_i) = \{b \in \mathrm{A}_{i,0} \mid \delta_{i,0}(b) = \delta_{i,1}(b)\}$.

Suivant EGA II, § 6.5, considérons le $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}$-module inversible $\mathrm{N}_{d_1}(d_0^*(\mathscr{A}))$, *norme* relativement au morphisme fini localement libre $d_1 : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0$ du $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_1}$-module inversible $d_0^*(\mathscr{A})$. Si $\mathscr{A}$ est donné, relativement au recouvrement $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$, par des fonctions de transition $c_{ij} \in \mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j)^\times$, alors $\mathrm{N}_{\delta_1}(d_0^*(\mathscr{A}))$ est donné par les fonctions de transition $\mathrm{N}_{d_1}(\delta_0(c_{ij})) \in \mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j)^\times$; comme, d'après le paragraphe 4.a), ces éléments appartiennent à $\mathscr{O}_\mathrm{Y}(\mathrm{V}_i \cap \mathrm{V}_j)^\times$, ils définissent un $\mathscr{O}_\mathrm{Y}$-module inversible $\mathscr{L}$, tel que $p^*(\mathscr{L}) = \mathrm{N}_{d_1}(d_0^*(\mathscr{A}))$. Remarquons de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p^*(\mathscr{L}^n) = \mathrm{N}_{d_1}(d_0^*(\mathscr{A}^n))$, cf. *loc. cit.*, (6.5.2.1).

Montrons que $\mathscr{L}$ est ample pour le morphisme $\pi : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$. Pour cela, remplaçant S par un ouvert affine, on peut supposer S affine. Soient alors $y \in \mathrm{Y}$, $x \in \mathrm{X}_0$ tel que $p(x) = y$, V un ouvert affine de Y contenant y, et $\mathrm{U} = p^{-1}(\mathrm{V})$. Comme $\mathscr{A}$ est π_0-ample, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une section $s \in \Gamma(\mathrm{X}_0, \mathscr{A}^n)$ telle que l'ouvert $(\mathrm{X}_0)_s$ vérifie $x \in (\mathrm{X}_0)_s \subset \mathrm{U}$. Avec les notations précédentes, s est donnée par des sections $a_i \in \mathrm{A}_{i,0} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}(\mathrm{U}_i)$ telles que $a_i = c_{ij}a_j$ sur $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j$, et $(\mathrm{X}_0)_s$ est la réunion des ouverts $\mathrm{U}'_i = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_{i,0}) \mid a_i \notin \mathfrak{p}\}$.

Pour chaque indice i, posons $\mathrm{N}(a_i) = \mathrm{N}_{\delta_1}(\delta_0(a_i)) \in \mathrm{B}_i$. D'après 4.1 (i) et le lemme 4.1.1, on a :

$$p(\mathrm{U}'_i) = pd_1d_0^{-1}(\mathrm{U}'_i) = pd_1\big(\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_{i,1}) \mid \delta_{i,0}(a_i) \notin \mathfrak{q}\}\big)$$

et $d_1(\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_{i,1}) \mid \delta_{i,0}(a_i) \notin \mathfrak{q}\}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_{i,0}) \mid \mathrm{N}_{\delta_1}(\delta_{i,0}(a_i)) \notin \mathfrak{p}\}$, d'où

$$p(\mathrm{U}'_i) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{B}_i) \mid \mathrm{N}(a_i) \notin \mathfrak{p}\}.$$

Il en résulte que $p((\mathrm{X}_0)_s)$ égale $\mathrm{Y}_{\mathrm{N}(s)}$, où l'on a noté $\mathrm{N}(s)$ la section de $\mathscr{L}^n$ sur Y définie par les sections $\mathrm{N}(a_i) \in \mathscr{O}_\mathrm{Y}(\mathrm{V}_i)$. On a donc

$$y \in p((\mathrm{X}_0)_s) = \mathrm{Y}_{\mathrm{N}(s)} \subset p(\mathrm{U}) = \mathrm{V}. \qquad (*)$$

Ceci montre que $\mathscr{L}$ est ample pour $\pi : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$, ce qui achève de montrer que $\pi : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ est *quasi-projectif*.

[(30)] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe.

6. Passage au quotient lorsqu'il existe une quasi-section

Nous allons maintenant prouver un *lemme de caractère technique* qui nous servira dans la démonstration des deux théorèmes que nous avons en vue. Soient S un schéma et

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_2 \arrow[r, shift left=2, "d'_0{,}d'_1{,}d'_2"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \mathrm{X}_1 \arrow[r, shift left, "d_0{,}d_1"] \arrow[r, shift right] & \mathrm{X}_0 \end{tikzcd}$$

un $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$-groupoïde. Nous appellerons *quasi-section du groupoïde* X_*, tout sous-schéma U de X_0 tel qu'on ait (1) et (2) :

(1) La restriction v de d_1 à $d_0^{-1}(\mathrm{U})$ est un *morphisme fini, localement libre et surjectif* de $d_0^{-1}(\mathrm{U})$ sur X_0.

(2) Toute partie E de U formée de points deux à deux équivalents pour la relation d'équivalence définie par X_* (§ 3.e)) est contenue dans un ouvert affine de U. [31]

Si U est une quasi-section de X_*, le $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$-groupoïde

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U}_2 \arrow[r, shift left=2, "u'_0{,}u'_1{,}u'_2"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \mathrm{U}_1 \arrow[r, shift left, "u_0{,}u_1"] \arrow[r, shift right] & \mathrm{U} \end{tikzcd}$$

272 induit par X_* et l'inclusion de U dans X_0 (cf. § 3.a)) vérifie les hypothèses du théorème 4.1. Posons en effet $\mathrm{V} = d_0^{-1}(\mathrm{U})$ et soient u et v les morphismes de source V induits respectivement par d_0 et d_1 :

$$\mathrm{X}_0 \xleftarrow{\ v\ } \mathrm{V} \xrightarrow{\ u\ } \mathrm{U}.$$

D'après le paragraphe 3.b), on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U}_1 \arrow[r] \arrow[d, "u_1"'] & \mathrm{V} \arrow[d, "v"] \\ \mathrm{U} \arrow[r, "\text{inclusion}"] & \mathrm{X}_0 \end{tikzcd}$$

donc u_1 est surjectif et fini localement libre d'après (1). Avec (2), la condition (1) assure donc que le groupoïde U_* vérifie les hypothèses du théorème 4.1. En particulier $\mathrm{Coker}(u_0, u_1)$ existe dans $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$. De plus, d_0 possède une section de sorte que u est un épimorphisme effectif universel (cf. III 1.12) ; il s'ensuit, d'après la proposition 3.1, que $\mathrm{Coker}(u_0, u_1)$ coïncide avec le conoyau $\mathrm{Coker}(v_0, v_1)$ du groupoïde V_* :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V}_2 \arrow[r, shift left=3, "v'_2"] \arrow[r, "v'_1"] \arrow[r, shift right=3, "v'_0"'] & \mathrm{V}_1 \arrow[r, shift left, "v_1"] \arrow[r, shift right, "v_0"'] & \mathrm{V} \end{tikzcd}$$

[31] N.D.E. : Si $x, y \in \mathrm{E}$, il existe $z \in \mathrm{X}_1$ tel que $d_1(x) = x$ et $d_0(z) = y$, c.-à-d., z appartient à l'ensemble $v^{-1}(x)$, qui est fini d'après (1). Donc E est contenu dans l'ensemble fini $d_0(v^{-1}(x)) = d_0 d_1^{-1}(x) \cap \mathrm{U}$.

image réciproque de U_* par le changement de base $u : V \to U$, c'est-à-dire aussi image réciproque de X_* par le changement de base :

$$V \xrightarrow{\text{inclusion}} X_1 \xrightarrow{d_0} X_0 \qquad .$$

[32] D'après le paragraphe 3.c), V_* est isomorphe au groupoïde V'_*, image réciproque de X_* par le changement de base :

$$v : \qquad V \xrightarrow{\text{inclusion}} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \qquad ,$$

et donc V'_* admet un conoyau dans $(\mathbf{Sch}_{/S})$. Or, étant plat, surjectif et fini, $v : V \to X_0$ est fidèlement plat et quasi-compact, donc un épimorphisme effectif universel, d'après III 6.3.2. Par conséquent, d'après la proposition 3.1, le groupoïde X_* admet un conoyau Coker(d_0, d_1) dans $(\mathbf{Sch}_{/S})$. Nous avons donc prouvé la première assertion du point 273
(i) du lemme suivant :

Lemme 6.1. — *Supposons que le* $(\mathbf{Sch}_{/S})$*-groupoïde* X_* *possède une quasi-section. Alors :*

(i) *Il existe un conoyau* (Y, p) *de* (d_0, d_1) *dans* $(\mathbf{Sch}_{/S})$ *; de plus, un tel* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans la catégorie de tous les espaces annelés.*

(i′) p *est surjectif, et est ouvert* (*resp. universellement fermé*) *si* d_0 *l'est.*

(ii) *Supposons* S localement noethérien *et* X_0 localement de type fini (*resp.* de type fini) *sur* S. *Alors* p *et* $Y \to S$ *sont* localement de présentation finie (*resp.* de présentation finie).

(iii) *Le morphisme* $X_1 \to X_0 \times_Y X_0$ *de composantes* d_0 *et* d_1 *est surjectif.*

(iv) *Si* (d_0, d_1) *est un couple d'équivalence,* $X_1 \to X_0 \times_Y X_0$ *est un isomorphisme. De plus, si* $d_0 : X_1 \to X_0$ *est plat,* p *est fidèlement plat.*

Avant de prouver la deuxième assertion de (i), nous allons démontrer (i′), (ii) et (iii).

a) *Démonstration de* (i′) et (ii) :

Nous venons de voir que (Y, p) s'identifie à Coker(v_0, v_1) et Coker(u_0, u_1). Soient donc q et r les épimorphismes canoniques de U et V dans Y :

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[dr, "p"'] & V \arrow[l, "v"'] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "r"] & U \arrow[dl, "q"] \\ & Y & \end{tikzcd} \qquad .$$

Par hypothèse, v est surjectif et fini localement libre, donc ouvert. D'autre part, si $d_0 : X_1 \to X_0$ est ouvert (resp. universellement fermé), alors u, qui en est déduit par

[32] N.D.E. : On a modifié légèrement la suite ; en particulier, dans le lemme 6.1, on a déplacé en (iv) l'hypothèse additionnelle que d_0 soit plat, et l'on a séparé (ii) en : (i′) + (ii), et ajouté la deuxième assertion de (i′).

274 changement de base, l'est aussi. Comme, d'après le théorème 4.1, q est surjectif, entier, et ouvert, alors r est surjectif, et ouvert (resp. universellement fermé) si d_0 l'est. Il en est donc de même pour p, puisque v est surjectif. Ceci prouve (i′).

Supposons maintenant S localement noethérien et X_0 localement de type fini au-dessus de S, de sorte que X_0 est localement noethérien.

Montrons que Y est localement de présentation finie au-dessus de S. Soient $\mathrm{S}' = \operatorname{Spec}\mathrm{R}$ un ouvert affine de S, $\mathrm{Y}' = \operatorname{Spec}\mathrm{B}$ un ouvert affine de Y se projetant dans S' et $\mathrm{U}' = \operatorname{Spec}\mathrm{A}$ l'image réciproque de Y' dans U. Comme R est noethérien, il suffit de montrer que B est une R-algèbre de type fini ; or, d'après les paragraphes 4 et 5, B est contenu dans A qui est une R-algèbre de type fini ; l'assertion résulte donc de ce que R est noethérien et A entier sur B.

Enfin, comme $\mathrm{X}_0 \to \mathrm{S}$ est localement de type fini, p l'est aussi (EGA I, 6.6.6), donc p est localement de présentation finie puisque Y est localement noethérien.

Reste à montrer la dernière assertion de (ii). Supposons de plus X_0 de type fini sur S. Alors, comme p est surjectif, Y est de plus quasi-compact sur S, donc de type fini sur S. Comme S est localement noethérien, alors $\mathrm{X}_0 \to \mathrm{S}$ et $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ sont de présentation finie, et donc $p : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{Y}$ l'est aussi (EGA IV_1, 1.6.2 (v)).

b) *Démonstration de* (iii) :

Comme le groupoïde V_* de base V est isomorphe à la fois à l'image réciproque de U_* par le changement de base u et à l'image réciproque de X_* par le changement de base v, on a un double carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}_1 \arrow[d, "d_0 \boxtimes d_1"'] & \mathrm{V}_1 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "v_0 \boxtimes v_1"'] & \mathrm{U}_1 \arrow[d, "u_0 \boxtimes u_1"'] \\
\mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0 & \mathrm{V} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{V} \arrow[l, "v \times v"'] \arrow[r, "u \times u"] & \mathrm{U} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{U}
\end{tikzcd} .$$

Comme $u_0 \boxtimes u_1$ est surjectif, il en va de même pour $v_0 \boxtimes v_1$. Comme $v \times v$ est surjectif,
275 il en va de même pour le morphisme composé $\mathrm{V}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$, donc pour $d_0 \boxtimes d_1$.

c) *Démonstration de* (i) :

Il reste à prouver que (Y, p) est un conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés. Nous montrons d'abord que Y est obtenu à partir de X_0 en identifiant les points x et y tels qu'il existe $z \in \mathrm{X}_1$ avec $d_0(z) = x$ et $d_1(z) = y$. En effet p est surjectif et on a $pd_0 = pd_1$; en outre, si $p(x) = p(y)$, il y a un point z' de $\mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ dont la première projection est x, la deuxième y. Si z est un point de X_1 tel que $(d_0 \boxtimes d_1)(z) = z'$, on a bien $d_0(z) = x$ et $d_1(z) = y$.

D'autre part, si W est un ouvert saturé de X_0, $\mathrm{W} \cap \mathrm{U}$ est un ouvert saturé de U ; d'après 4.1, $q(\mathrm{W} \cap \mathrm{U})$ est un ouvert de Y. Comme $q(\mathrm{W} \cap \mathrm{U})$ n'est autre que $p(\mathrm{W})$, on voit que Y est muni de la topologie quotient de celle de X_0.

Il reste à démontrer que la suite canonique de faisceaux d'anneaux

$$\mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \to p_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}) \rightrightarrows p_* d_{0*}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}_1}) = p_* d_{1*}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}_1})$$

est exacte.

Soit donc Y' un ouvert de Y et posons $\mathrm{U}' = q^{-1}(\mathrm{Y}')$, $\mathrm{X}'_0 = p^{-1}(\mathrm{Y}')$, etc. [33] Alors, U' est un ouvert de U saturé pour la relation d'équivalence définie par le groupoïde U_*, et il résulte des lemmes 1.1 et 1.2 que Y' est le conoyau, dans $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ et dans $(\mathbf{Esp.An})$, du groupoïde induit par U_* sur U'. De même, X'_0 est un ouvert de X_0 saturé pour la relation d'équivalence définie par X_* et on le diagramme commutatif suivant, où les deux carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}'_0 \arrow[d] & \mathrm{V}' = d_0^{-1}(\mathrm{U}') \arrow[l, "\widetilde{d}_1"'] \arrow[r, "\widetilde{d}_0"] \arrow[d] & \mathrm{U}' \arrow[d] \\
\mathrm{X}_0 & \mathrm{V} = d_0^{-1}(\mathrm{U}) \arrow[l, "d_1"'] \arrow[r, "d_0"] & \mathrm{U}'
\end{tikzcd} .$$

Alors, $\widetilde{d}_1$ est surjectif, et fini localement libre. D'autre part, soit $x \in \mathrm{U}'$. Comme U est une quasi-section, l'ensemble $\mathrm{E} := d_0 d_1^{-1}(x) \cap \mathrm{U}$ est fini et contenu dans un ouvert affine W de U. Alors $\mathrm{E}' = \mathrm{E} \cap \mathrm{U}'$ est un ensemble fini, contenu dans l'ouvert quasi-affine $\mathrm{W} \cap \mathrm{U}'$. Par conséquent, il existe un ouvert affine W' de $\mathrm{W} \cap \mathrm{U}'$ contenant E'. Ceci montre que U' est une quasi-section du groupoïde X'_* induit par X_* sur X'_0. La première assertion de (i), appliquée à X'_* et U', montre alors que Y' est le conoyau *dans* $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ de X'_*.

En particulier, pour tout S-schéma T, on a la suite exacte

$$\mathrm{T}(\mathrm{Y}') \xrightarrow{\mathrm{T}(p|_{\mathrm{X}'_0})} \mathrm{T}(\mathrm{X}'_0) \underset{\mathrm{T}(d_0|_{\mathrm{X}'_1})}{\overset{\mathrm{T}(d_1|_{\mathrm{X}'_1})}{\rightrightarrows}} \mathrm{T}(\mathrm{X}'_1).$$

Or, si T est la « droite affine » $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$ (I 4.3), cette suite s'identifie à la suite : 276

$$\Gamma(\mathrm{Y}', \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \to \Gamma(p^{-1}(\mathrm{Y}'), \mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}) \underset{\delta_0}{\overset{\delta_1}{\rightrightarrows}} \Gamma(d_0^{-1}p^{-1}(\mathrm{Y}'), \mathscr{O}_{\mathrm{X}_1}) = \Gamma(d_1^{-1}p^{-1}(\mathrm{Y}'), \mathscr{O}_{\mathrm{X}_1})$$

qui est donc exacte pour tout ouvert Y'. Ceci achève la preuve de 6.1 (i).

d) *Démonstration de* (iv) :

Si (d_0, d_1) est un couple d'équivalence, il en va de même pour (u_0, u_1). Il s'ensuit que $u_0 \boxtimes u_1 : \mathrm{U}_1 \to \mathrm{U} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{U}$ est un isomorphisme (théorème 4.1), donc aussi $v_0 \boxtimes v_1$ (confer les carrés cartésiens de b)) ; comme $v \times v$ est fidèlement plat et quasi-compact, $d_0 \boxtimes d_1$ est un isomorphisme (SGA 1, VIII 5.4).

De plus, si d_0 est plat, u l'est aussi. Or q est plat, d'après le théorème 4.1, donc r l'est aussi. Comme v est fidèlement plat, alors p est plat, et donc fidèlement plat puisque surjectif.

[33] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit, en particulier le fait que U' soit une quasi-section du groupoïde induit sur X'_0.

7. Quotient par un groupoïde propre et plat

Théorème 7.1. — [34] *Soient* S *un schéma* localement noethérien *et*

$$\mathrm{X}_2 \overset{d_2'}{\underset{d_0'}{\overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\xrightarrow{d_1'}}}}} \mathrm{X}_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{X}_0$$

un $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$*-groupoïde tel que* d_1 *soit* propre et plat*, que* X_0 *soit* quasi-projectif *sur* S [35] *et que le morphisme* $d : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_0$ *de composantes* d_0 *et* d_1 *soit* quasi-fini. *Alors :*

(i) *Il existe un conoyau* (Y, p) *de* (d_0, d_1) *dans* $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ *; de plus, un tel* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans la catégorie de tous les espaces annelés.*

277 (ii) *p est surjectif, ouvert, propre, de présentation finie, et* $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ *est de présentation finie et séparé.* [36]

(iii) *Le morphisme* $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ *de composantes* d_0 *et* d_1 *est surjectif.*

(iv) *Si* (d_0, d_1) *est un couple d'équivalence,* $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$ *est un isomorphisme et p est fidèlement plat.* [37] *De plus,* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans la catégorie des* faisceaux *pour la topologie* (fppf) *et, pour tout changement de base* $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$, Y' *est le conoyau du groupoïde* $\mathrm{X}_* \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ *déduit de* X_* *par le changement de base* $\mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}' \to \mathrm{X}_0$.

En particulier, pour tout changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ *est le conoyau du* S'*-groupoïde* $\mathrm{X}'_* = \mathrm{X}_* \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$*. Donc, dans ce cas, «* la formation du quotient commute au changement de base ».

Soit (Y, p) le conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie de tous les espaces annelés. Le lemme 1.2 montre que, pour prouver (i), il suffit de démontrer que tout point z de X_0 possède un voisinage ouvert saturé U_z tel que, notant $\widetilde{d_0}$ et $\widetilde{d_1}$ les restrictions de d_0 et d_1 à $d_0^{-1}(\mathrm{U}_z) = d_1^{-1}(\mathrm{U}_z)$, et (Q, q) le conoyau de $(\widetilde{d_0}, \widetilde{d_1})$ dans $(\mathbf{Esp.An})$, Q soit un schéma et q un morphisme de schémas.

D'après le lemme 6.1 (i), il suffit donc de montrer que tout point z de X_0 possède un voisinage ouvert saturé U_z tel que le groupoïde induit sur U_z par X_* possède une

---

(34) N.D.E. : Signalons ici l'article de S. Keel et S. Mori ([**KM97**]), où est établi le théorème suivant. Soient X un espace algébrique de type fini sur une base localement noethérienne S et $j : \mathrm{R} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ un groupoïde *plat* dont le stabilisateur $j^{-1}(\Delta_{\mathrm{X}})$ est *fini* sur X ; il existe alors un espace algébrique qui est un quotient géométrique de X par R et un quotient catégorique uniforme ; de plus, si j est séparé, ce quotient est séparé. En particulier, si un S-schéma en groupes G *plat* agit *proprement* sur X, avec stabilisateur fini (i.e. le morphisme $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, $(g, x) \mapsto (x, g \cdot x)$ est propre et le stabilisateur de la diagonale est fini sur X), alors il existe un quotient géométrique $\mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathrm{G}$. Dans le cas d'un S-schéma en groupes réductifs G, il s'agit d'un résultat de J. Kollár ([**Ko97**]).

(35) N.D.E. : Cette hypothèse sur X_0 est nécessaire, cf. la N.D.E. (17) dans le Th. 4.1.

(36) N.D.E. : Dans TDTE III, Th. 6.1, il est indiqué que $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ est quasi-projectif si S est noethérien. Les éditeurs n'ont pas vu comment déduire ceci de l'existence locale de quasi-sections.

(37) N.D.E. : On a explicité les conséquences qui suivent ; voir [**Ray67a**], th. 1 (iii) et la fin de la démonstration du théorème. Signalons aussi qu'une *autre* démonstration du th. 7.1 dans le cas d'une relation d'équivalence, basée sur l'existence des *schémas de Hilbert*, est donnée dans [**AK80**], Th. 2.9, voir aussi [**BLR90**], § 8.2, Th. 12 ; il y est de plus montré, dans ce cas, que $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ est *quasi-projectif.*

quasi-section. On peut même supposer que z est fermé dans la fibre de z au-dessus de S (nous dirons que z est *fermé relativement à* S) [38]. L'existence de U_z résulte alors des lemmes qui suivent :

Lemme 7.2. — *Soient* T *un schéma affine* noethérien, X, Y, *et* Z *des* T-*schémas* de type fini, X *étant* quasi-projectif *sur* T, *et*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & \mathrm{X} \arrow[d, dashed] \\ \mathrm{Z} \arrow[r, dashed] & \mathrm{T} \end{tikzcd}$$

un diagramme de $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{T}})$. *Soit d'autre part z un point de* $v(\mathrm{Y})$ *qui est fermé relativement à* T *et tel que v soit plat aux points de* $v^{-1}(z)$. *Alors, il existe un sous-schéma fermé* F *de* X *tel que* $u(u^{-1}(\mathrm{F}) \cap v^{-1}(z))$ *soit* fini *non vide et que la restriction de v à* $u^{-1}(\mathrm{F})$ *soit plate aux points de* $v^{-1}(z)$.

Soit $\mathrm{T} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$. Il est loisible de supposer X de la forme $\operatorname{Proj} \mathscr{S}$, où $\mathscr{S}$ est l'algèbre symétrique d'un A-module de type fini E.

Si $u(v^{-1}(z))$ est fini, on peut choisir F égal à X. Sinon, nous désignons par $y_1, \dots, y_n$ **278**
les points de la fibre $v^{-1}(z)$ *associés* au faisceau structural $\mathscr{O}_{v^{-1}}(z)$ de $v^{-1}(z)$ (les y_i sont donc tels que, si $\mathscr{O}_i$ désigne l'anneau local de $v^{-1}(z)$ au point y_i, l'idéal maximal de $\mathscr{O}_i$ soit formé de diviseurs de 0). Si t est l'image de z dans T, $u(v^{-1}(z))$ est une partie constructible infinie de la fibre de t dans X. Il existe donc un point x fermé dans cette fibre, appartenant à $u(v^{-1}z)$ et distinct de $u(y_1), \dots, u(y_n)$. Alors $\mathrm{X} - \overline{\{x\}}$ est un voisinage ouvert de $u(y_1), \dots, u(y_n)$, donc contient un voisinage ouvert de la forme $\mathrm{D}_+(f)$, où f est un élément homogène de degré d de $\mathscr{S}$ (les notations sont celles de EGA II, § 2.3).

Par conséquent, le sous-schéma fermé $\mathrm{X}_1 = \mathrm{V}_+(f)$ défini par f contient x et évite les points $u(y_1), \dots, u(y_n)$. Il s'ensuit évidemment que l'image réciproque $\mathrm{Y}_1 = u^{-1}(\mathrm{V}_+(f))$ de ce sous-schéma est distincte de Y et rencontre $v^{-1}(z)$. Nous allons même montrer que la restriction v_1 de v à Y_1 est plate aux points de $v^{-1}(z)$; si $u(v_1^{-1}(z))$ est fini, on n'aura donc qu'à choisir F égal à X_1 ; sinon, on répètera l'argument qu'on vient de développer en remplaçant Y par Y_1, v par v_1, u par le morphisme u_1 induit dans Y_1 par u ; on obtiendra de cette façon une suite décroissante $\mathrm{X}, \mathrm{X}_1, \dots$ de sous-schémas fermés de X ; comme une telle suite s'arrête, $u(u^{-1}(\mathrm{X}_n) \cap v^{-1}(z))$ sera fini non vide pour un certain n et on choisira F égal à X_n.

Il reste donc à montrer que v_1 est plat aux points de $v^{-1}(z)$; soient donc y un point de Y_1 au-dessus de z, $\mathscr{O}_y$ l'anneau local de y dans Y, $\overline{\mathscr{O}}_y$ l'anneau local de y dans $v^{-1}(z)$, $\mathscr{O}_{v(y)}$ l'anneau local de $v(y)$ dans Z. Si $g \in \mathscr{S}_1$ est tel que $\mathrm{D}_+(g)$ soit un voisinage de $u(y)$ dans X, soient φ l'image de f/g^d dans $\mathscr{O}_y$ et $\overline{\varphi}$ l'image de f/g^d dans $\overline{\mathscr{O}}_y$. Il résulte alors de la construction de f que $\overline{\varphi}$ ne divise pas 0 dans $\overline{\mathscr{O}}_y$; comme

[38] N.D.E. : En effet, si l'on a construit un tel voisinage ouvert U_z pour tout point z fermé relativement à S, alors la réunion de ces U_z recouvre X_0, car chaque fibre au-dessus de S du fermé complémentaire est un schéma noethérien sans points fermés, donc vide.

$\mathscr{O}_y$ est plat sur $\mathscr{O}_z$, φ ne divise pas 0 dans $\mathscr{O}_y$ et $\mathscr{O}_y/\mathscr{O}_y\varphi$ est plat sur $\mathscr{O}_z$ (SGA 1, IV 5.7). Or $\mathscr{O}_y/\mathscr{O}_y\varphi$ n'est autre que l'anneau local de y dans Y_1.

279 ***Lemme 7.3***. — *Nous conservons les notations et les hypothèses de* 7.1. *Tout point z de* X_0 *qui est fermé relativement à* S *possède alors un voisinage ouvert saturé* U_z *tel que le groupoïde induit par* X_* *sur* U_z *possède une quasi-section.*

L'énoncé étant local sur S, on peut supposer S affine noethérien et appliquer le lemme précédent au diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & \mathrm{X}_0 \arrow[d, dashed] \\ \mathrm{X}_0 \arrow[r, dashed] & \mathrm{S} \end{tikzcd}$$

de $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$. Soit donc F un sous-schéma fermé de X_0 tel que $d_0(d_0^{-1}(\mathrm{F})\cap d_1^{-1}(z))$ soit fini non vide et que la restriction de d_1 à $d_0^{-1}(\mathrm{F})$ soit plate aux points de $d_1^{-1}(z)$. Notons F_1 et F_2 les images réciproques de F par d_0 et par $d_0d_0' = d_0d_1'$, et notons $\widetilde{d}_0$, $\widetilde{d}_1$, etc., les morphismes induits par d_0, d_1, etc. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}_2 \arrow[r, shift left, "\widetilde{d}_1'"] \arrow[r, shift right, "\widetilde{d}_0'"'] \arrow[d, "\widetilde{d}_2'"'] & \mathrm{F}_1 \arrow[r, "\widetilde{d}_0"] \arrow[d, "\widetilde{d}_1"'] & \mathrm{F} \arrow[d, dashed, "\widetilde{q}"] \\ \mathrm{X}_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X}_0 \arrow[r, dashed, "q"] & \mathrm{S} \end{tikzcd} ,$$

où les deux carrés de gauche sont cartésiens et la première ligne exacte (confer (0,1,2), § 1), et où q et $\widetilde{q}$ désignent les morphismes structuraux.

Montrons d'abord qu'il n'y a qu'un nombre fini de points de F_1 au-dessus de z. [39] Soit en effet s l'image de z dans S ; comme F est de type fini sur S, la fibre $\widetilde{q}^{-1}(s)$ est un schéma noethérien. D'autre part, comme $\widetilde{d}_0$ est propre, $\widetilde{d}_0(\widetilde{d}_1^{-1}(z))$ est un sous-schéma *fermé* de $\widetilde{q}^{-1}(s)$, formé d'un nombre fini de points. Par conséquent (cf. EGA I, 6.2.2), les points de cet ensemble sont fermés dans $\widetilde{q}^{-1}(s)$ et aussi (puisque F est fermé dans X_0) dans la fibre $q^{-1}(s)$ de s dans X_0. Soit y un de ces points ; comme la fibre $q^{-1}(s)$ est de type fini sur $\kappa(s)$, elle contient des voisinages ouverts affines $\operatorname{Spec}\mathrm{B}$ et $\operatorname{Spec}\mathrm{C}$ de y et z, respectivement, où B et C sont des $\kappa(s)$-algèbres de type fini. Alors y et z correspondent à des idéaux maximaux $\mathfrak{p}\subset\mathrm{B}$ et $\mathfrak{q}\subset\mathrm{C}$, les corps $\mathrm{B}/\mathfrak{p}$ et $\mathrm{C}/\mathfrak{q}$ sont de degré fini sur $\kappa(s)$, et donc $(\mathrm{B}/\mathfrak{p})\otimes_{\kappa(s)}(\mathrm{C}/\mathfrak{q})$ est une $\kappa(s)$-algèbre de dimension finie, dont les idéaux maximaux correspondent exactement aux points de $\mathrm{X}_0\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}_0$ dont la deuxième (resp. première) projection est z (resp. y). Il n'y a donc
280 qu'un nombre fini de points u de $\mathrm{X}_0\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}_0$ dont la deuxième projection est z et dont la première projection appartient à $\widetilde{d}_0(\widetilde{d}_1^{-1}(z))$. Enfin, comme $\mathrm{X}_1\to\mathrm{X}_0\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}_0$ est à

[39] N.D.E. : On ajouté des détails, et mis en évidence le rôle de l'hypothèse de *propreté* de d_0 et d_1 dans le théorème 7.1. (On pourra comparer avec l'énoncé et la démonstration du théorème 8.1, où cette hypothèse de propreté est omise.)

fibres finies, un tel point u provient d'un nombre fini de points de X_1, d'où l'assertion cherchée.

Le morphisme $\widetilde{d}_1$ est donc quasi-fini et plat aux points de F_1 au-dessus de z. Comme $\widetilde{d}_1$ est de type fini, alors, d'après SGA 1, IV 6.10 et EGA III, 4.4.10 [(40)], l'ensemble Φ des points de F_1 où $\widetilde{d}_1$ n'est pas à la fois plat et quasi-fini, est fermé dans F_1, donc dans X_1 (puisque F_1 est fermé dans X_1). Comme d_1 est propre, $\widetilde{d}_1(\Phi)$ est fermé, et il ne contient pas z, d'après ce qui précède. Posons $\mathrm{W} = \widetilde{d}_1(\mathrm{F}_1) - \widetilde{d}_1(\Phi)$. Alors, la restriction de $\widetilde{d}_1$ à $\widetilde{d}_1^{-1}(\mathrm{W})$ est [(41)] de présentation finie (vu les hypothèses noethériennes), plate, propre et quasi-finie, donc finie, localement libre, et ouverte, d'après EGA III, 4.4.2, et EGA IV_2, 2.1.12 et 2.4.6. Par conséquent, $\widetilde{d}_1(\mathrm{F}_1)$ est un *voisinage* de z, et W est le plus grand ouvert de X_0 contenu dans $\widetilde{d}_1(\mathrm{F}_1)$ au-dessus duquel $\widetilde{d}_1$ est à la fois plat et quasi-fini.

Nous allons voir dans le lemme 7.4 que les images réciproques de Φ par $\widetilde{d}'_1$ et $\widetilde{d}'_0$ s'identifient toutes les deux à l'ensemble des points de F_2 où $\widetilde{d}'_2$ n'est pas à la fois plat et quasi-fini. Il s'ensuit que $d_0^{-1}(\mathrm{W}) = \widetilde{d}'_2(\mathrm{F}_2) - \widetilde{d}'_2(\widetilde{d}'^{-1}_0\Phi)$ coïncide avec $d_1^{-1}(\mathrm{W}) = \widetilde{d}'_2(\mathrm{F}_2) - \widetilde{d}'_2(\widetilde{d}'^{-1}_1\Phi)$, c'est-à-dire que W est saturé. Par conséquent, si on pose $\mathrm{W}_1 = \widetilde{d}_1^{-1}(\mathrm{W})$, l'égalité $d_0^{-1}(\mathrm{W}) = d_1^{-1}(\mathrm{W})$ entraîne $\widetilde{d}'^{-1}_2 d_0^{-1}(\mathrm{W}) = \widetilde{d}'^{-1}_2 d_1^{-1}(\mathrm{W})$ c'est-à-dire $\widetilde{d}'^{-1}_0(\mathrm{W}_1) = \widetilde{d}'^{-1}_1(\mathrm{W}_1)$. Comme $\widetilde{d}_0$ est fidèlement plat et quasi-compact (car d_0 est, comme d_1, surjectif, propre et plat), et que le carré

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{F}_2 & \xrightarrow{\widetilde{d}'_1} & \mathrm{F}_1 \\
{\scriptstyle \widetilde{d}'_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{d}_0} \\
\mathrm{F}_1 & \xrightarrow{\widetilde{d}_0} & \mathrm{F}
\end{array}$$

est cartésien, il s'ensuit que W_1 est de la forme $\widetilde{d}_0^{-1}(\mathrm{U})$, où U est un ouvert de F (SGA 1, VIII 4.4). Cet ouvert U de F est une quasi-section pour le groupoïde de base W induit par X_*. On peut donc choisir U_z égal à W.

Il nous reste donc à énoncer le lemme 7.4 dont la démonstration est classique :

Lemme 7.4. — *Considérons un carré cartésien de schémas* 281

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{F}_2 & \xrightarrow{v} & \mathrm{F}_1 \\
{\scriptstyle d'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} \\
\mathrm{X}_1 & \xrightarrow{u} & \mathrm{X}_0
\end{array}$$

[(40)] N.D.E. : Si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme *localement de type fini*, l'ensemble des $x \in \mathrm{X}$ isolés dans leur fibre $f^{-1}(f(x))$ est *ouvert* dans X : dans EGA III, 4.4.10, ceci est déduit, pour Y localement noethérien, du « Main Theorem » de Zariski, d'autre part, pour Y arbitraire, cela découle du théorème de semi-continuité de Chevalley (EGA IV_3, 13.1.3 et 13.1.4). Par conséquent, f est *quasi-fini* en x si et seulement si f est de *type fini* en x et x isolé dans $f^{-1}(f(x))$; ceci sera utilisé plus loin, cf. la N.D.E. (42).

[(41)] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

et soit x un point de F_2.

(i) *Si u est plat, d' est plat en x si et seulement si d est plat en $v(x)$.*

(ii) *Si d est localement de type fini, d' est quasi-fini en x si et seulement si d est quasi-fini en $v(x)$.* [42]

Nous avons donc prouvé qu'il existe un recouvrement de X_0 par des ouverts saturés W tels que le groupoïde W_* induit par X_* sur W possède une quasi-section. [43]

D'après le lemme 6.1 et les réductions énoncées après le théorème 7.1, ceci entraîne les assertions (i) et (iii) du théorème 7.1, et le fait que p soit surjectif et ouvert, et que p et $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ soient *localement* de présentation finie. De plus, comme $\mathrm{X}_0 \to \mathrm{S}$ est quasi-projectif, donc séparé et de type fini, alors p est séparé et la démonstration du point (ii) du lemme 6.1 montre que p et $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ sont de présentation finie.

Pour montrer que p est propre, il reste donc à montrer qu'il est universellement fermé. Comme l'assertion est locale sur Y, on peut se placer sur un ouvert saturé W tel que le groupoïde W_* induit par X_* sur W possède une quasi-section U (puisque X_0 est recouvert par de tels ouverts). Reprenant les notations de 6.a), on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{W} \arrow[dr, "p"'] & \mathrm{V} \arrow[l, "v"'] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "r"] & \mathrm{U} \arrow[dl, "q"] \\
& \mathrm{Z} &
\end{tikzcd},$$

où Z est un ouvert de Y, toutes les flèches sont surjectives, et q est entier. De plus, par hypothèse, $d_0 : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_0$ est propre, donc u, qui en est déduit par changement de base, l'est aussi. Par conséquent, r est universellement fermé, et donc p aussi, puisque v est surjectif.

Enfin, p étant surjectif et universellement fermé, et X_0 quasi-projectif donc séparé, la diagonale $\Delta_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathrm{Y})$ est fermée dans $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$, étant l'image par $p \times p$ de la diagonale $\Delta_{\mathrm{X}_0/\mathrm{S}}(\mathrm{X}_0)$. Donc Y est séparé sur S. Ceci achève la démonstration de 7.1 (ii).

Les assertions à prouver dans 7.1 (iv) sont locales en Y ; comme X_0 est recouvert par les ouverts saturés U_z, il suffit de vérifier ces assertions en remplaçant X et Y par U_z et $\mathrm{V} = p(\mathrm{U}_z)$. Comme on l'a déjà vu au début de la démonstration de 7.1, il résulte des lemmes 1.1, 1.2, et 6.1 (i), que $(\mathrm{V}_z, p|_{\mathrm{U}_z})$ est le conoyau dans (**Sch**) et dans (**Esp. An**) du groupoïde induit par X_* sur U_z. Or, l'hypothèse que $d = (d_0, d_1)$ soit un

[42] N.D.E. : Les conditions sont suffisantes, par changement de base (cf. EGA II, 6.2.4 (iii) et EGA IV_2, 2.1.4). Réciproquement, posons $y = d'(x)$ et $z = u(y) = d(v(x))$, et supposons d' *plat en* x et u (donc aussi v) *plat*. Alors $\mathscr{O}_{v(x)} \to \mathscr{O}_x$ est fidèlement plat, ainsi que $\mathscr{O}_z \to \mathscr{O}_y \to \mathscr{O}_x$. Par conséquent, $\mathscr{O}_z \to \mathscr{O}_{v(x)}$ est fidèlement plat (cf. EGA IV_2, 2.2.11 (iv)). Enfin, supposons d *localement de type fini* et d' *quasi-fini en* x. Alors $v(x)$ est isolé dans sa fibre $d^{-1}(z)$, puisque x l'est dans sa fibre $d'^{-1}(y) = d^{-1}(z) \otimes_{\kappa(z)} \kappa(y)$. Donc, d'après le théorème de semi-continuité de Chevalley, il existe un voisinage ouvert de $v(x)$ dont tout point est isolé dans sa fibre (EGA IV_3, 13.1.3 et 13.1.4), de sorte que d est quasi-fini en $v(x)$.

[43] N.D.E. : On a modifié la suite, en tirant profit des ajouts faits dans le lemme 6.1.

monomorphisme est préservée par le changement de base $U_z \to X_0$. Par conséquent, les deux premières assertions de 7.1 (iv) résultent de 6.1 (iv).

Montrons enfin les conséquences signalées à la fin du point (iv) (cf. [**Ray67a**], th. 1 (iii)). Par hypothèse, le groupoïde X_* provient d'une relation d'équivalence $R \to X_0 \times X_0$, et on a établi que R est *effective* (cf. Exp. IV, 3.3.2) et que $p : X_0 \to Y = X_0/R$ est fidèlement plat et de présentation finie. Par conséquent, notant (M) la famille des morphismes fidèlement plats localement de présentation finie, R est (M)-effective. Donc, d'après Exp. IV, 6.3.3, (Y, p) représente le faisceau quotient de X_0 par R pour la topologie (fppf), et les assertions relatives au changement de base découlent de IV, 3.4.3.1.

8. Passage au quotient par un groupoïde plat non nécessairement propre

Théorème 8.1. — [(44)] *Soient* S *un schéma* noethérien *et*

$$X_2 \overset{d'_2}{\underset{d'_0}{\overset{\xrightarrow{d'_1}}{\longrightarrow}}} X_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} X_0$$

un $(\mathbf{Sch}_{/S})$*-groupoïde tel que* d_1 *soit* plat *et* de type fini*, que* X_0 *soit de* type fini *sur* S *et que le morphisme* $X_1 \to X_0 \times_S X_0$ *de composantes* d_0 *et* d_1 *soit* quasi-fini. 282

Il existe alors un ouvert W *de* X_0 *dense, saturé et satisfaisant aux propriétés suivantes :*

(i) *Si* $W_2 \xrightarrow{w'_i} W_1 \xrightarrow{w_j} W$ *est le groupoïde induit par* X_* *sur* W*,* (w_0, w_1) *possède un conoyau* (V, p) *dans* $(\mathbf{Sch}_{/S})$ *; de plus,* (V, p) *est un conoyau de* (w_0, w_1) *dans la catégorie de tous les espaces annelés.*

(ii) *p est surjectif et ouvert.*

(ii′) *p et* $V \to S$ *sont de présentation finie.*

(iii) *Le morphisme* $W_1 \to W \times_V W$ *de composantes* w_0 *et* w_1 *est surjectif.*

(iv) *Si* (d_0, d_1) *est un couple d'équivalence,* $W_1 \to W \times_V W$ *est un isomorphisme et p est fidèlement plat.*

---

(44) N.D.E. : Il existe un *plus grand* ouvert W de X_0 satisfaisant les conclusions du théorème. En effet, soient W un ouvert comme dans le théorème et $W^\sharp$ un ouvert dense et saturé contenu dans W. Puisque p est ouvert, $V^\sharp = p(W^\sharp)$ est un ouvert de V, et $W^\sharp = p^{-1}(V^\sharp)$, puisque $W^\sharp$ est saturé. D'après le lemme 1.1, $V^\sharp$ est un conoyau pour le groupoïde induit sur $W^\sharp$. Ainsi on peut recoller suivant leur intersection $W^\sharp$ deux ouverts W et W′ vérifiant les conclusions du théorème, et les conditions (i), (ii), (iii), (iv), ainsi que le fait que p et $V \to S$ soient localement de présentation finie, sont préservés. La conclusion (ii′) découle, comme dans la démonstration de 6.1 (ii), de l'hypothèse que X_0 soit de type fini sur S noethérien.
Par ailleurs, les lemmes 1.1 et 1.2 montrent aussi que la réunion de tous les ouverts saturés U de X_0 tels que l'ouvert $p(U)$ de Y soit un schéma et que $p|_U : U \to p(U)$ soit un morphisme de schémas, est le plus grand ouvert saturé Ω de X_0 vérifiant la condition (i) de 8.1. Le théorème 8.1 montre que Ω contient un ouvert W dense, mais il n'est pas immédiat que Ω vérifie les propriétés (ii) à (iv).
À ce sujet, le lecteur pourra consulter [**Ray67a**], [**Ray67b**], et l'appendice I de [**An73**], qui donnent des résultats plus précis, et étudient la question de la représentabilité du S-*faisceau* quotient (fppf) $\widetilde{X/R}$ (où l'on a noté R le groupoïde X_* de base $X = X_0$), tout ceci sous des hypothèses plus faibles

Nous allons montrer qu'on peut choisir W de telle façon que le $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$-groupoïde W_* induit par X_* possède une quasi-section (confer § 7). Le théorème 8.1 résultera alors du lemme 6.1.

Admettons provisoirement que, pour tout point $z \in \mathrm{X}_0$ fermé relativement à S (confer § 7), il existe un ouvert saturé W_z, qui possède une quasi-section et rencontre toutes les composantes irréductibles de X_0 passant par z. Alors l'extérieur $\mathrm{X}_0 - \overline{\mathrm{W}}_z$ de W_z dans X_0 est saturé (car le saturé $d_1(d_0^{-1}(\mathrm{X}_0 - \overline{\mathrm{W}}_z))$ de cet extérieur est ouvert et ne rencontre pas W_z). Si cet extérieur n'est pas vide, on peut y choisir un point z' fermé relativement à S et associer à z' un ouvert $\mathrm{W}_{z'}$ comme ci-dessus ; on peut d'ailleurs supposer $\mathrm{W}_{z'}$ contenu dans $\mathrm{X}_0 - \overline{\mathrm{W}}_z$; alors W_z et $\mathrm{W}_{z'}$ sont disjoints et le groupoïde induit par X_* sur $\mathrm{W}_z \cup \mathrm{W}_{z'}$ possède une quasi-section. Le processus doit s'arrêter parce que X_0 n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Il reste donc à construire W_z.

Pour cela il est loisible de supposer S affine ; dans ce cas, soient y un point de X_1
283 tel que $d_1(y) = z$, X un ouvert affine de X_0 contenant $d_0(y)$, Y l'image réciproque de X dans X_1 par d_0, enfin $u : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ et $v : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}_0$ les morphismes induits par d_0 et d_1. Comme X est affine, donc quasi-projectif, on peut appliquer le lemme 7.2 : il y a donc un sous-schéma F de X_0 tel que $d_0^{-1}(\mathrm{F}) \cap d_1^{-1}(z)$ soit non vide, que $d_0(d_0^{-1}(\mathrm{F}) \cap d_1^{-1}(z))$ soit fini et que la restriction de d_1 à $d_0^{-1}(\mathrm{F})$ soit plate aux points de $v^{-1}(z)$. Ce fait nous permet de reprendre les notations du lemme 7.3 en désignant par F_1 et F_2 les images réciproques de F dans X_1 et X_2, etc.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}_2 \arrow[r, shift left, "\widetilde{d}'_1"] \arrow[r, shift right, "\widetilde{d}'_0"'] \arrow[d, "\widetilde{d}'_2"'] & \mathrm{F}_1 \arrow[r, "\widetilde{d}_0"] \arrow[d, "\widetilde{d}_1"'] & \mathrm{F} \\
\mathrm{X}_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X}_0 &
\end{tikzcd}$$

On montre alors comme en 7.3 que $\widetilde{d}_1$ est quasi-fini aux points de $\widetilde{d}_1^{-1}(z)$ de sorte qu'il est naturel de considérer l'ouvert F'_1 de F_1 formé des points où $\widetilde{d}_1$ est à la fois plat et quasi-fini. D'après 7.4, les deux images réciproques de F'_1 par $\widetilde{d}'_1$ et $\widetilde{d}'_0$ sont formées des points de F_2 où $\widetilde{d}'_2$ est plat et quasi-fini, de sorte que ces deux images

(S un schéma arbitraire, X un schéma localement de type fini sur S, et R un S-groupoïde de base X tel que d_0 (et donc d_1) soit plat et de présentation finie). Citons en particulier les résultats suivants. Si $\widetilde{\mathrm{X}/\mathrm{R}}$ est représentable par un S-schéma Y, alors Y est aussi le conoyau dans la catégorie (**Esp. An**). La réciproque est en général fausse (cf. l'exemple 0.4 de [**Mum65**], Chap. 0, § 3, cité dans [**Ray67a**], Rem. 1), mais est vraie si $d = (d_0, d_1)$ est une immersion. Sous cette hypothèse, le morphisme $p : \Omega \to \mathrm{Z} := \Omega/\mathrm{R}_\Omega$ est fidèlement plat et de présentation finie ; si de plus S est localement noethérien, alors un point x de codimension 1 dans X appartient à Ω si et seulement si le graphe du groupoïde induit sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x})$ est fermé. Pour tout ceci, voir [**Ray67a**], Prop. 1, [**Ray67b**], Prop. 1 et Théorèmes 2, 1 et 4, et [**An73**], Théorèmes 5 et 6 pages 66–67, et Prop. 3.3.1 page 49. (Voir aussi, dans le cas d'une action d'un groupe algébrique sur un corps k algébriquement clos, l'article [**DR81**].)

réciproques coïncident et que F'_1 est de la forme $\widetilde{d}_0^{-1}(\mathrm{F}')$, où F' est un ouvert de F (SGA 1, VIII 4.4). Quitte à remplacer F par F', on peut donc supposer que $\widetilde{d}_1$ est quasi-fini et plat. Dans ce cas, nous désignons par W_z le plus grand ouvert de $\widetilde{d}_1(\mathrm{F}_1)$ au-dessus duquel $\widetilde{d}_1$ est *fini* et plat.

Cet ouvert W_z ne contient pas nécessairement z, mais il contient les points génériques des composantes irréductibles de X_0 passant par z [(45)]. Comme d_0 (resp. d_1) est fidèlement plat et de présentation finie (donc ouvert), il résulte alors de SGA 1, VIII 5.7, que $d_0^{-1}(\mathrm{W}_z)$ et $d_1^{-1}(\mathrm{W}_z)$ coïncident tous les deux avec le plus grand ouvert de $\widetilde{d}'_2(\mathrm{F}_2)$ au-dessus duquel $\widetilde{d}'_2$ est fini et plat. On voit par conséquent comme en 7.3 que les deux images réciproques de $\widetilde{d}_1^{-1}(\mathrm{W}_z)$ par $\widetilde{d}'_0$ et $\widetilde{d}'_1$ coïncident, donc que $\widetilde{d}_1^{-1}(\mathrm{W}_z)$ est de la forme $\widetilde{d}_0^{-1}(\mathrm{U})$ où U est un ouvert de F qui est une quasi-section pour le groupoïde induit par X_* sur W_z.

9. Élimination des hypothèses noethériennes dans le théorème 7.1

284

a) Reprenons les notations et les hypothèses du lemme 6.1 et soit $\pi : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un changement de base arbitraire. Désignons par $f' : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ le morphisme de S'-schémas déduit par l'extension π de la base d'un morphisme de S-schémas $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. Avec cette convention, $p' : \mathrm{X}'_0 \to \mathrm{Y}'$ est surjectif ainsi que le morphisme $\mathrm{X}'_1 \to \mathrm{X}'_0 \times_{\mathrm{Y}'} \mathrm{X}'_0$ de composantes d'_0 et d'_1. L'ensemble sous-jacent à Y' s'identifie donc au quotient de l'ensemble sous-jacent à X'_0 par la relation d'équivalence définie dans X'_0 par le S'-groupoïde X'_*. De plus, $q' : \mathrm{U}' \to \mathrm{Y}'$ est entier surjectif de sorte que la topologie de Y' est la topologie quotient de celle de U', donc aussi de celle de X'_0 (confer la preuve du § 6.c).

D'un autre côté, il est clair que U' est une quasi-section du S'-groupoïde X'_* auquel on peut donc appliquer le lemme 6.1. En particulier, X'_* possède un conoyau (Y_1, p_1) et l'espace topologique sous-jacent à Y_1 s'obtient à partir de l'espace topologique sous-jacent à X'_0 en identifiant les points équivalents pour la relation définie par X'_*. Il s'ensuit que le morphisme canonique $\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}'$ est un homéomorphisme ; je dis même que $\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}'$ *est un homéomorphisme universel* : en effet, si S'' est au-dessus de S', soit Y_2 le conoyau de $(d_0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'', d_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'')$. D'après ce qui précède, appliqué aux changements de base $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$ et $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$,

$$\mathrm{Y}_2 \longrightarrow \mathrm{Y}_1 \underset{\mathrm{S}'}{\times} \mathrm{S}'' \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y}_2 \longrightarrow \mathrm{Y} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}'' \simeq \mathrm{Y}' \underset{\mathrm{S}'}{\times} \mathrm{S}''$$

sont des homéomorphismes de sorte qu'il en va de même pour $\mathrm{Y}_1 \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{S}'' \to \mathrm{Y}' \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{S}''$.

b) Des remarques analogues s'appliquent évidemment au cas où le groupoïde X_* possède « localement » des quasi-sections (confer la démonstration du théorème 7.1).

[(46)] Par exemple, on a le théorème suivant : **285**

[(45)] N.D.E. : En effet, soit η un tel point générique. Les hypothèses entraînent que $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0,\eta}$ est un anneau local artinien, et $\mathscr{O}_{\mathrm{F}_1,\eta}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0,\eta}$-module de type fini. Donc, d'après SGA 1, VIII 6.5, il existe un voisinage ouvert de η au-dessus duquel $\widetilde{d}_1$ est fini.

[(46)] N.D.E. : On a détaillé la suite, pour mettre en évidence le théorème 9.0 ci-dessous.

Théorème 9.0. — *Soient* S *un schéma arbitraire et* $X_2 \xrightarrow{d'_j} X_1 \xrightarrow{d_i} X_0$ *un* $(\mathbf{Sch}_{/S})$-*groupoïde tel que :* X_0 *soit* de présentation finie *et* quasi-projectif *sur* S, d_1 de présentation finie, propre *et* plat, *le morphisme* $d_0 \boxtimes d_1 : X_1 \to X_0 \times_S X_0$ quasi-fini. *Alors :*

(1) *Tout point* x *de* X_0 *a un voisinage ouvert* W *qui est saturé et tel que le groupoïde induit par* X_* *dans* W *possède une quasi-section.*

(2) *Soit* (Y, p) *le conoyau de* (d_0, d_1) *dans la catégorie de tous les espaces annelés. Alors* Y *est un schéma,* p *un morphisme de schémas, et* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans* $(\mathbf{Sch}_{/S})$.

(3) p *est surjectif, ouvert et universellement fermé.*

(4) *Le morphisme* $d : X_1 \to X_0 \times_Y X_0$ *de composantes* d_0 *et* d_1 *est surjectif.*

(5) *Si* (d_0, d_1) *est un couple d'équivalence, alors :*

(a) $d : X_1 \to X_0 \times_Y X_0$ *est un isomorphisme et* p *est fidèlement plat.*

(b) p *et* $Y \to S$ *sont de présentation finie, et* (Y, p) *est un conoyau de* (d_0, d_1) *dans la catégorie des faisceaux pour la topologie* (fppf).

Démonstration. Pour (1), la question est locale sur S de sorte qu'on peut supposer $S = \operatorname{Spec} B$ affine. Il existe alors un anneau A de type fini sur $\mathbb{Z}$, un morphisme $S \to T = \operatorname{Spec} A$ et un $(\mathbf{Sch}_{/T})$-groupoïde Z_* tel que X_* s'identifie à $Z_* \times_T S$ (cf. EGA IV_3, 8.8.3, appliqué à $S_0 = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ et $S_i = \operatorname{Spec} A_i$, les A_i parcourant les sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini de B). De plus, on peut supposer que Z_* vérifie les conditions du théorème 7.1 (cf. EGA IV_3, 8.10.5). Par conséquent, Z_* possède « localement » des quasi-sections.

Il en est donc de même pour X_*, d'après a), et les assertions (2), (3), (4) et (5) (a) découlent de 6.1, comme dans la démonstration de 7.1.

c) Montrons que $Y \to S$ est de présentation finie. [(47)] Par hypothèse, $(d_0^{X_*}, d_1^{X_*})$ est un couple d'équivalence, c.-à-d., $d^{X_*} : X_1 \to X_0 \times_S X_0$ est un monomorphisme. D'après EGA IV_3, 8.10.5, on peut supposer, quitte à agrandir A, que $d^{Z_*} : Z_1 \to Z_0 \times_T Z_0$ est un monomorphisme. Comme $T = \operatorname{Spec} A$, avec A noethérien, il résulte alors du théorème 7.1 que le groupoïde Z_* possède un conoyau (Q, q) dans $(\mathbf{Sch}_{/T})$, que q et $Q \to T$ sont de présentation finie, et de plus que $q : Z_0 \to Q$ est fidèlement plat et que d^{Z_*} induit un isomorphisme $Z_1 \xrightarrow{\sim} Z_0 \times_Q Z_0$. Posons $Q_S = Q \times_T S$.

Comme $X_i \cong Z_i \times_T S$, on obtient donc un isomorphisme :

$$d_*^Z \underset{T}{\times} S : X_1 \xrightarrow{\sim} X_0 \underset{Q_S}{\times} X_0.$$

Notons ϕ son inverse, et soit π le morphisme canonique

$$X_0 \underset{Y}{\times} X_0 \longrightarrow X_0 \underset{Q_S}{\times} X_0.$$

(47) N.D.E. : L'original énonce que ceci découle de la proposition 9.1 qui suit. Nous n'avons pas été en mesure de reconstruire cet argument. La démonstration qui suit nous a été indiquée par O. Gabber.

Alors $\phi \circ \pi$ est l'inverse de $d_0 \boxtimes d_1 : \mathrm{X}_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0$. Il en résulte que la relation d'équivalence définie par X_*, c.-à-d., le monomorphisme

$$\mathrm{X}_1 \xrightarrow[\sim]{d_0 \boxtimes d_1} \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_0 \hookrightarrow \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_0$$

s'identifie à la relation d'équivalence $\mathscr{R}(q_{\mathrm{S}})$ définie par le morphisme $q_{\mathrm{S}} : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{Q}_{\mathrm{S}}$. Comme ce dernier est fidèlement plat et de présentation finie, donc un épimorphisme effectif universel, $\mathscr{R}(q_{\mathrm{S}})$ a pour quotient Q_{S} (cf. IV 3.3.2). Par suite, $\mathrm{Y} \cong \mathrm{Q} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{S}$, donc $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ et p sont de présentation finie. De plus, d'après IV 6.3.3, (Y, p) est aussi un conoyau de (d_0, d_1) dans la catégorie des faisceaux pour la topologie (fppf).

Proposition 9.1. — *Considérons des morphismes de schémas*

$$\mathrm{X}_0 \xrightarrow{p} \mathrm{Y} \xrightarrow{q} \mathrm{S}$$

tels que qp soit de type fini (*resp. de présentation finie*) *et p fidèlement plat de présentation finie. Alors q est de type fini* (*resp. de présentation finie*)(*).

Comme p est surjectif et qp quasi-compact, q est quasi-compact. Donc on peut supposer S, Y et X_0 affines d'anneaux A, B, C. On a $\mathrm{B} = \varinjlim \mathrm{B}_i$, où les B_i parcourent les sous-A-algèbres de type fini de B. Comme C est de présentation finie sur B, il existe un indice i_0, une B_{i_0}-algèbre de présentation finie C_{i_0} et un isomorphisme $\mathrm{C} \simeq \mathrm{C}_{i_0} \otimes_{\mathrm{B}_{i_0}} \mathrm{B}$; si on pose $\mathrm{C}_i = \mathrm{C}_{i_0} \otimes_{\mathrm{B}_{i_0}} \mathrm{B}_i$ pour $i \geqslant i_0$, on a donc $\mathrm{C} \simeq \mathrm{C}_i \otimes_{\mathrm{B}_i} \mathrm{B}$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r] & \mathrm{C} \\ \mathrm{B}_i \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{C}_i \arrow[u] \\ \mathrm{A} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Comme C est fidèlement plat sur B, on tire de EGA IV_3, 11.2.6 et 8.10.5 (vi) l'existence d'un $i_1 \geqslant i_0$ tel que C_{i_1} soit fidèlement plat sur B_{i_1} ; par conséquent C_i est fidèlement **286**
plat sur B_i pour $i \geqslant i_1$. Pour $i \geqslant i_1$, l'application canonique $\mathrm{C}_i \to \mathrm{C}$ est alors injective, car déduite de $\mathrm{B}_i \to \mathrm{B}$ par extension fidèlement plate de la base.

Si C est de type fini sur A, il s'ensuit qu'il existe un indice $j \geqslant i_1$ tel que $\mathrm{C}_j = \mathrm{C}$ d'où $\mathrm{B}_j = \mathrm{B}$, puisque C_j est fidèlement plat sur B_j. Par conséquent, B est de type fini sur A.

Supposons maintenant C de présentation finie sur A. D'après ce qui précède, B est de type fini sur A, donc de la forme $\overline{\mathrm{B}}/\mathrm{I}$ où $\overline{\mathrm{B}}$ est une algèbre de polynômes sur A à un nombre fini d'indéterminées, et I un idéal de $\overline{\mathrm{B}}$. Alors I est réunion de ses sous-idéaux de type fini I_α ; d'où l'égalité $\mathrm{B} = \varinjlim \mathrm{B}_\alpha$ avec $\mathrm{B}_\alpha = \overline{\mathrm{B}}/\mathrm{I}_\alpha$. Procédant comme plus haut, il existe un indice α_0, une B_{α_0}-algèbre de présentation finie C_{α_0} et un isomorphisme $\mathrm{C} \simeq \mathrm{C}_{\alpha_0} \otimes_{\mathrm{B}_{\alpha_0}} \mathrm{B}$. Pour $\alpha \geqslant \alpha_0$, on pose encore $\mathrm{C}_\alpha = \mathrm{C}_{\alpha_0} \otimes_{\mathrm{B}_{\alpha_0}} \mathrm{B}_\alpha$ de telle sorte qu'on a $\mathrm{C} \simeq \mathrm{C}_\alpha \otimes_{\mathrm{B}_\alpha} \mathrm{B}$ pour $\alpha \geqslant \alpha_0$. Toujours d'après EGA IV_3, 11.2.6

(*) Cf. EGA IV_4, 17.7.5 pour un résultat plus général.

et 8.10.5 (vi), on conclut comme plus haut que C_α est fidèlement plat sur B_α pour α assez grand. Dans ce cas, le noyau de l'application $C_\alpha \to C$ (resp. $C_\alpha \to C_\beta$ pour $\beta \geqslant \alpha$) s'identifie à $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I/I_\alpha)$ (resp. à $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I_\beta/I_\alpha)$).

Comme C_α et C sont de présentation finie sur A et que $C_\alpha \to C$ est surjectif, $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I/I_\alpha)$ est un idéal de type fini [48] et est réunion des idéaux $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I_\beta/I_\alpha)$. On a donc $C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I_\beta/I_\alpha) = C_\alpha \otimes_{B_\alpha} (I/I_\alpha)$ pour β assez grand, d'où aussi $I_\beta = I$ (car C_α est fidèlement plat sur B_α) ; donc B est de présentation finie sur A.

10. Complément : quotients par un schéma en groupes

Les §§ 10.2–10.4 ci-dessous, rédigés suivant des indications de M. Raynaud, ont pour but d'appliquer les théorèmes précédents au cas d'une action d'un schéma en groupes. Pour la commodité du lecteur, on a commencé par reproduire, dans le § 10.1, les énoncés 2.1 à 2.3 de l'Exp. XVI.

10.1. Théorèmes de représentabilité des quotients. — « Rappelons » d'abord le résultat suivant :

Théorème 10.1.1. — *Soient* S *un schéma,* X *et* Y *deux* S*-schémas,* $f : X \to Y$ *un* S*-morphisme. On suppose que l'on se trouve dans l'un des deux cas suivants :*

α) *Le morphisme f est localement de présentation finie.*

β) *Le schéma* S *est localement noethérien et* X *est localement de type fini sur* S.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *Il existe un* S*-schéma* X′ *et une factorisation de f :*

$$f : X \xrightarrow{f'} X' \xrightarrow{f''} Y,$$

où f' est un S*-morphisme fidèlement plat et localement de présentation finie et f'' est un* monomorphisme.

(ii) *La* (*première*) *projection :*

$$p_1 : X \underset{Y}{\times} X \longrightarrow X$$

est un morphisme plat.

De plus, si les conditions précédentes sont réalisées, (X', f') *est un quotient de* X *par la relation d'équivalence définie par f* (*pour la topologie* (fppf))*, de sorte que la factorisation $f = f'' \circ f'$ de* i) *est unique à isomorphisme près.*

Le cas Y localement noethérien, X de type fini sur Y, est traité dans [**Mur65**], cor. 2 du th. 2. Nous allons voir que l'on peut se ramener à ce cas.

Faisons d'abord quelques remarques :

[48] N.D.E. : cf. EGA IV_1, 1.4.4.

a) L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est triviale. En effet, la première projection :

$$p_1' : \mathrm{X} \underset{\mathrm{X}'}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$$

se factorise à travers $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$:

$$p_1' : \mathrm{X} \underset{\mathrm{X}'}{\times} \mathrm{X} \xrightarrow{u} \mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X} \xrightarrow{p_1} \mathrm{X}$$

Le morphisme u est un isomorphisme, puisque f'' est un monomorphisme, et p_1' est plat, puisque f' est plat, donc p_1 est plat.

b) Les assertions de 10.1.1 sont locales sur Y (donc sont locales sur S) ; elles sont aussi locales sur X, comme il résulte facilement du fait qu'un morphisme plat et localement de présentation finie est ouvert (EGA IV_3, 11.3.1).

c) Sous les hypothèses de 10.1.1 α), vu ce qui précède, nous sommes ramenés au cas où X et Y sont affines et f de présentation finie. Quitte à remplacer S par Y, on peut supposer X et Y de présentation finie sur S. On se ramène alors au cas S noethérien grâce à EGA IV_3, 11.2.6.

d) Sous les hypothèses de 10.1.1 β), on peut supposer S, X, Y affines, S noethérien et X de type fini sur S. Considérons Y comme limite projective filtrante de schémas affines Y_i de type fini sur S. Les schémas $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}_i} \mathrm{X}$ forment une famille filtrante décroissante de sous-schémas fermés de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, dont la limite projective est $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$. Comme $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ est noethérien, on a $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}_i} \mathrm{X} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$ pour i assez grand, de sorte que $f_i : \mathrm{X} \xrightarrow{f} \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}_i$ satisfait aux hypothèses de 10.1.1 ii) s'il en est ainsi de f. Comme la relation d'équivalence définie par f sur X coïncide avec celle définie par f_i, il est clair qu'il suffit de prouver ii) $\Rightarrow$ i) pour f_i, ce qui nous ramène au cas où Y est de type fini sur S.

Application aux schémas en groupes. Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes localement de présentation finie sur S, qui opère (à gauche) sur un S-schéma X. Si $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ possède une section ξ, on rappelle que le stabilisateur $\underline{\mathrm{Stab}}_{\mathrm{G}}(\xi)$ est représentable par un sous-schéma en groupes de G (cf. I, 2.3.3).

Théorème 10.1.2. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes localement de présentation finie sur* S*, qui opère sur un* S*-schéma* X.

On suppose que $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *possède une section* ξ*, telle que le stabilisateur* H *de* ξ *dans* G *soit* plat sur S. *Si l'une des hypothèses ci-dessous est vérifiée :*

a) X *est localement de type fini sur* S*,*

b) S *est localement noethérien,*

alors le faisceau (fppf) *quotient* G/H *est représentable par un* S*-schéma, localement de présentation finie sur* S*, et le* S*-morphisme :*

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{X}, \qquad g \mapsto g \cdot \xi$$

se factorise en :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ G/H \arrow[r, hook, "i"] & X, \end{tikzcd}$$

où p est la projection canonique, qui est un morphisme fidèlement plat localement de présentation finie, et i est un monomorphisme.

Démonstration. Le morphisme f fait de G un X-schéma. Par définition du stabilisateur de ξ, le morphisme :

$$\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G} \underset{\mathrm{X}}{\times} \mathrm{G}, \qquad (g,h) \mapsto (g, gh)$$

est un isomorphisme. Comme H est plat sur S, $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$ est plat sur G, donc la première projection $p_1 : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est un morphisme plat. Par ailleurs, si X est localement de type fini sur S, f est localement de présentation finie (EGA IV_1, 1.4.3 (v)) et sinon, S est supposé localement noethérien. Il suffit alors d'appliquer 10.1.1 au morphisme f. Il reste à voir que G/H est localement de présentation finie sur S, mais cela résulte immédiatement de 9.1.

Corollaire 10.1.3. — *Soient* S *un schéma,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S*-schémas en groupes. On suppose* G *localement de présentation finie sur* S *et que, ou bien* H *est localement de type fini sur* S*, ou bien* S *est localement noethérien.*

Alors, si $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(u)$ *est* plat *sur* S*, le groupe quotient* G/K *est représentable par un* S*-schéma en groupes localement de présentation finie sur* S*, et u se factorise en :*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & H \\ & G/K \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

où p est la projection canonique et i un monomorphisme.

Démonstration : on applique 10.1.2 en prenant $\mathrm{X} = \mathrm{H}$ et pour ξ la section unité de H.

10.2. Stabilisateur de la diagonale. — Soient S un schéma *noethérien*, X un S-schéma de *type fini*, et G un S-schéma en groupes *plat* et de *type fini*, agissant à gauche sur X, i.e. on a une S-action $d_0 : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$. Notons $d_1 : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ la projection sur le second facteur. Suivant le § 2.a), on dispose du groupoïde

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{pr}_{2,3}"] \arrow[r, "\mu\times\mathrm{X}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{G}\times d_0"'] & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

dont on rappelle que le conoyau, s'il existe, est noté $\mathrm{G}\backslash\mathrm{X}$.

Définition 10.2.1. — On désigne par $\mathrm{F} \subset \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ le *stabilisateur de la section diagonale*, i.e. le X-schéma défini par le produit cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{X} \arrow[d, "\Delta"] \\ \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \arrow[r, "(d_0,d_1)"] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \end{tikzcd} .$$

Alors F est un sous-X-schéma en groupes de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$. Comme $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ est de type fini sur S noethérien, donc noethérien, F est de type fini sur S et sur X (EGA I, 6.3.5 et 6.3.6). En outre, si $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ est *séparé*, F est un sous-X-schéma en groupes *fermé* de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$.

On rappelle que l'on dit que G *opère librement* sur X si le morphisme

$$\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X} \xrightarrow{(d_0,d_1)} \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}$$

est un monomorphisme (cf. Exp. III, 3.2.1). Il revient au même de dire que F est le schéma en groupes trivial de base X.

10.3. Cas où F **est quasi-fini sur** X. — Comme F est de type fini sur X, il est quasi-fini sur X si et seulement si les fixateurs des points géométriques de X sont finis.

Théorème 10.3.1. — (49) *Sous les hypothèses de* 10.2, *on suppose que* F *est* quasi-fini *sur* X. *Alors il existe un ouvert* U *de* X, *dense et* G*-saturé, qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Dans* $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$, *le conoyau* $\mathrm{V} = \mathrm{G}\backslash\mathrm{U}$ *existe ; de plus, le schéma* V *est un quotient dans la catégorie des espaces annelés.*

(ii) $p : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *est surjectif, ouvert, et de présentation finie.*

(iii) V *est de présentation finie sur* S.

(iv) *Le morphisme* $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} \to \mathrm{U} \times_{\mathrm{V}} \mathrm{U}$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$, *est surjectif.*

(v) *Supposons de plus que* G *opère* librement *sur* X. *Alors* $\mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *est un* G*-torseur* (*à gauche*) *localement trivial pour la topologie* (fppf). *En particulier,* $\mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *est fidèlement plat.* (50)

Démonstration. On a supposé que le morphisme $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$, est quasi-fini. Le théorème 8.1 s'applique donc au groupoïde défini par (X, G). Ainsi il existe un ouvert dense saturé $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$ tel que le quotient $\mathrm{G}\backslash\mathrm{U}$ existe ; il satisfait les propriétés (i), (ii), (iii).

(49)N.D.E. : Ici aussi, il existe un plus grand ouvert U de X satisfaisant les conclusions du théorème, cf. la N.D.E. (44).

(50)N.D.E. : Si l'on suppose de plus que G est un S-schéma en groupes réductifs et que l'action (libre) de G sur X est linéarisable, on sait alors que $\mathrm{G}\backslash\mathrm{X}$ est représentable et que $\mathrm{X} \to \mathrm{G}\backslash\mathrm{X}$ est un G-torseur (à gauche). Ceci découle de résultats de Raynaud et Seshadri et se trouve dans l'article [**CTS79**] (proposition 6.11).

Pour établir (iv), on se souvient que G opère librement sur X si et seulement si (d_0, d_1) est un couple d'équivalence (III 3.2.1). Dans ce cas, le théorème 8.1 (iv) montre que le morphisme $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U} \to \mathrm{U} \times_{\mathrm{V}} \mathrm{U}$ est un isomorphisme et que p est fidèlement plat et de présentation finie. Ainsi, U est un G-torseur de base V, localement trivial pour la topologie (fppf).

10.4. Cas où F plat sur X. — On note

$$d = (d_0, d_1) : \mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}$$

le morphisme $d(g, x) = (gx, x)$. Rappelons que le graphe faisceautique $\widetilde{\Gamma}$ de la relation d'équivalence associée à (X, G) est le sous-S-faisceau (fppf) de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ image de (d_0, d_1). C'est le faisceau (fppf) associé au foncteur graphe :

$$\mathrm{T} \mapsto \Gamma(\mathrm{T}) = \{(x_0, x_1) \in \mathrm{X}(\mathrm{T}) \times \mathrm{X}(\mathrm{T}) \mid x_0 \in \mathrm{G}(\mathrm{T})x_1\}.$$

Posons $\mathrm{G}_{\mathrm{X}} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$. Pour tout S-schéma T, on a une application surjective

$$\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(\mathrm{T}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{T}), \qquad (g, x) \mapsto (gx, x),$$

qui induit une application bijective

$$\phi(\mathrm{T}) : \mathrm{G}_{\mathrm{X}}(\mathrm{T})/\mathrm{F}(\mathrm{T}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathrm{T});$$

en effet, si $(g, x), (g', x') \in \mathrm{G}_{\mathrm{X}}(\mathrm{T})$ vérifient $(gx, x) = (g'x', x')$, alors $x' = x$ et $g^{-1}g'x = x$, donc $(g^{-1}g'x, x) \in \mathrm{F}(\mathrm{T})$ et (g, x) et (g', x) ont même image dans $\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(\mathrm{T})/\mathrm{F}_{\mathrm{X}}(\mathrm{T})$.

Par définition (cf. IV, 4.4.1 (ii) ou preuve de 5.2.1), le *faisceau-quotient* $\mathrm{G}_{\mathrm{X}}/\mathrm{F}$ est le faisceau (fppf) associé au préfaisceau

$$\mathrm{T} \longmapsto \mathrm{G}_{\mathrm{X}}(\mathrm{T})/\mathrm{F}(\mathrm{T}) \cong \Gamma(\mathrm{T}).$$

On a donc un isomorphisme de faisceaux $\phi : \mathrm{G}_{\mathrm{X}}/\mathrm{F} \to \widetilde{\Gamma}$.

Théorème 10.4.1. — [51] *Sous les hypothèses de* 10.2, *on a :*

a) $\widetilde{\Gamma}$ *est représentable si et seulement si* F *est plat sur* X.

b) *On suppose que* F *est plat sur* X. *Alors les morphismes induits par* d_1 *et* d_0 *:*

$$\mathrm{G}_{\mathrm{X}}/\mathrm{F} \overset{\overline{d}_1}{\underset{\overline{d}_0}{\rightrightarrows}} \mathrm{X}$$

sont fidèlement plats et de présentation finie.

[51] N.D.E. : C'est le point (2) du théorème 3 de [**Ray67b**]. Dans cette Note est esquissée une autre démonstration du th. 10.1.1.

Démonstration de a) : Supposons le faisceau (fppf) G_X/F représentable par un X-schéma Y. Alors, d'après IV 6.3.3, $p : G_X \to Y$ est fidèlement plat et localement de présentation finie, et le second carré du diagramme ci-dessous est cartésien :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & F \times_X G_X \arrow[r] \arrow[d] & G_X \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "e_X"] & G_X \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \qquad ,$$

le premier carré étant obtenu par changement de base par la section unité $e_X : X \to G_X$. Comme p est fidèlement plat et localement de présentation finie, il en est de même de $F \to X$.

Réciproquement, supposons F plat sur X. Posons $X^2 = X \times_S X$. Le morphisme $d : G_X \to X^2$ permet de former le produit fibré :

$$\begin{tikzcd} G_X \times_{X^2} G_X \arrow[r] \arrow[d] & G_X \arrow[d] \\ G_X \arrow[r] & X^2 \end{tikzcd} \qquad .$$

Alors le morphisme $G_X \times_{X^2} G_X \to X^2$ est un $F \times_X X^2$-torseur sur X^2, et est donc plat et de type fini (car F l'est). D'après le théorème 10.1.1, le morphisme d se factorise de façon unique :

$$G_X \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\tau} X \underset{S}{\times} X,$$

où ψ est fidèlement plat (de type fini) et τ est un monomorphisme de schémas.

Par suite, le morphisme de faisceaux $\psi : G_X \to Y$ est donc F-invariant et il vient un morphisme de faisceaux $\overline{\psi} : G_X/F \to Y$. Par ailleurs, vu que ψ est fidèlement plat (de type fini), le monomorphisme de faisceaux τ se factorise par le faisceau image de d, c'est-à-dire $\widetilde{\Gamma}$. L'isomorphisme de faisceaux $G_X/F \cong \widetilde{\Gamma}$ se factorise donc par le monomorphisme $Y \to \widetilde{\Gamma}$. On conclut que Y représente G_X/F.

Démonstration de b) : On suppose F plat sur X. Alors, d'après a) et sa preuve, G_X/F est représentable, et le morphisme $p : G_X \to G_X/F$ est fidèlement plat et de présentation finie. D'autre part, les morphismes $d_i : G_X \to X$ $(i = 0, 1)$ sont fidèlement plats et de présentation finie par hypothèse. Comme $d_i = \overline{d}_i \circ p$, il résulte de EGA IV_2, 2.2.13 (iii) et EGA IV_3, 11.3.16, que $\overline{d}_i$ est fidèlement plat et de présentation finie.

Théorème 10.4.2. — [52] *Sous les hypothèses de* 10.2, *supposons* F plat *sur* X. *Alors il existe un ouvert dense saturé* U *de* X *tel que le quotient* (fppf) $V = G\backslash U$ *soit un* S-*schéma de type fini et que* $U \to V$ *soit fidèlement plat et de présentation finie.*

[52] N.D.E. : Ici aussi, il existe un plus grand ouvert U de X satisfaisant les conclusions du théorème ; en outre, un point $x \in X$ de codimension 1 dans X appartient à U si et seulement si le morphisme $(G_X/F) \times_X \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x}) \to \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x}) \times_S \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})$ est une immersion fermée, cf. la N.D.E. (44).

Démonstration. Le théorème 10.4.1 montre que $G_X/F \cong \widetilde{\Gamma}$ est représentable. Alors le faisceau (fppf) $G\backslash X$ s'identifie au faisceau quotient de

$$G_X/F \underset{\overline{d}_0}{\overset{\overline{d}_1}{\rightrightarrows}} X.$$

D'après ce qui précède, $\overline{d}_i : G_X/F \to X$ est fidèlement plat et de présentation finie $(i = 0, 1)$, et le morphisme

$$G_X/F \xrightarrow{\ \sim\ } \widetilde{\Gamma} \hookrightarrow X \times_S X$$

est un monomorphisme, c.-à-d., $(\overline{d}_0, \overline{d}_1)$ est un couple d'équivalence. Par conséquent, le théorème 8.1 s'applique. Il existe donc un ouvert U de X, dense et saturé, tel que le quotient (fppf) $V = G\backslash U$ soit un S-schéma de type fini, et que $U \to V$ soit fidèlement plat et de présentation finie.

Compte tenu du théorème de platitude générique (EGA IV_2, 6.9.3), on obtient le

Corollaire 10.4.3. — *Sous les hypothèses de* 10.2*, supposons* X réduit*. Alors il existe un ouvert dense saturé* U *de* X *tel que le quotient* (fppf) $G\backslash U$ *soit un* S*-schéma de type fini et que* $U \to G\backslash U$ *soit fidèlement plat et de présentation finie.*

Bibliographie

[53]

[AK80] A. B. Altman, S. L. Kleiman, *Compactifying the Picard Scheme*, Adv. Math. **35** (1980), 50-112.

[An73] S. Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension* 1, Mém. Soc. Math. France **33** (1973), 5-79.

[BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron models*, Springer-Verlag, 1990.

[CTS79] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles*, Math. Ann. **244** (1979), 105-134.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[DR81] J. Dixmier, M. Raynaud, *Sur le quotient d'une variété algébrique par un groupe algébrique*, pp. 327-344 *in* : Mathematical Analysis and Applications (L. Schwartz 65th birthday, éd. L. Nachbin), Adv. Math. Suppl. Stud., Vol. 7A, 1981.

[Fe03] D. Ferrand, *Conducteur, descente et pincement*, Bull. Soc. Math. France **131** (2003), n°4, 553-585.

[Hi62] H. Hironaka, *An example of a non-Kählerian complex analytic deformation of Kählerian complex structures*, Ann. of Math. **75** (1962), n°1, 190-208.

[53] N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé

[KM97] S. Keel, S. Mori, *Quotient by groupoids*, Ann. of Math. **145** (1997), n°1, 193-213.

[Ko97] J. Kollár, *Quotient spaces modulo algebraic groups*, Ann. of Math. **145** (1997), n°1, 33-79.

[Ko08] J. Kollár, *Quotients by finite equivalence relations*, arXiv : 0812.3608.

[Mum65] D. Mumford, *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, 1965 ; 2ème (resp. 3ème) éd. avec J. Fogarty (resp. et F. Kirwan), 1982 (resp. 1994).

[Mur65] J. P. Murre, *Representation of unramified functors. Applications* (*according to unpublished results of A. Grothendieck*, Sém. Bourbaki, Vol. 9, Exp. **294** (1965), Soc. Math. France, 1995.

[Ray67a] M. Raynaud, *Passage au quotient par une relation d'équivalence plate*, pp. 78-85 *in* : Proc. Conf. Local Fields (Driebergen) (éd. T. A. Springer), Springer-Verlag, 1967.

[Ray67b] M. Raynaud, *Sur le passage au quotient par un groupoïde plat*, C. R. Acad. Sci. Paris (Sér. A) **265** (1967), 384-387.

EXPOSÉ VI_{A}

GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES ALGÉBRIQUES

par P. Gabriel

Dans tout ce chapitre, A désignera un anneau local artinien de corps résiduel k. Un **287**
schéma en groupes G sur Spec A sera appelé simplement un A-*groupe*. Cet A-groupe est dit *localement de type fini* si le schéma sous-jacent est localement de type fini sur A ; il est dit *algébrique* si le schéma sous-jacent est de type fini sur A.

0. Remarques préliminaires

0.1. Considérons d'abord un schéma en groupes G sur un schéma quelconque S. Nous appelons *multiplication* le morphisme structural $\mu : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ et *inversion* le morphisme $c : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ qui est défini par les égalités $c(\mathrm{T})(x) = x^{-1}$ (T étant un schéma sur S et x un élément de G(T)). Si U et V sont des parties de l'ensemble sous-jacent à G, nous notons $\mathrm{U} \cdot \mathrm{V}$ l'image par le morphisme multiplication de la partie de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ formée des points dont la première projection appartient à U, la deuxième à V. De même, les notations U^{-1} et $c(\mathrm{U})$ sont équivalentes.

Soient pr_1 la projection de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ sur le premier facteur et $\sigma : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$
le morphisme de composantes pr_1 et μ. Pour tout S-schéma T, $\sigma(\mathrm{T})$ est l'applica- **288**
tion $(x, y) \mapsto (x, xy)$; il s'ensuit que σ est un automorphisme. Le composé de cet automorphisme et de la projection pr_2 de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ sur le deuxième facteur est le morphisme multiplication. Lorsque G est *plat* sur S, pr_2 donc μ sont des morphismes *plats* ; lorsque G est *lisse* sur S, pr_2 donc μ sont des morphismes *lisses*, etc.

0.2. Nous supposons à partir de maintenant que S est le spectre d'un anneau local artinien A de corps résiduel k. Nous désignons par $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$ la catégorie des schémas réduits sur k. Pour tout schéma X sur A, le schéma réduit $\mathrm{X}_{\text{réd}}$ est un objet de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$ et le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_{\text{réd}}$ est adjoint à droite à l'inclusion de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$ dans $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}})$. Il s'ensuit que, pour tout A-groupe G, $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ est un groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$, [(1)] c.-à-d., pour tout k-schéma T *réduit*, $\mathrm{G}_{\text{réd}}(\mathrm{T})$ est muni d'une structure de groupe, fonctorielle en T. On prendra garde que $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ n'est pas nécessairement un

[(1)] N.D.E. : On a ajouté les phrases qui suivent.

k-groupe, car la « multiplication » est seulement un morphisme de $(\mathrm{G}_{\mathrm{réd}} \times_k \mathrm{G}_{\mathrm{réd}})_{\mathrm{réd}}$ vers $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}$. (2)

(3) Toutefois, *si k est un corps parfait*, l'inclusion de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\mathrm{réd}}$ dans $(\mathbf{Sch}_{/k})$ commute aux produits de sorte que les groupes dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\mathrm{réd}}$ s'identifient aux schémas en groupes sur k dont le schéma sous-jacent est réduit. Dans ce cas, si G est un k-groupe, $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}$ est un sous-schéma en groupes de G ; ce sous-groupe n'est *pas invariant* dans G en général.

Par exemple, si k est un corps de caractéristique 3, le groupe constant $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_k$ opère de façon non triviale dans le groupe diagonalisable $\mathrm{D}_k(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ (cf. Exp. I, 4.1 et 4.4) ; si G désigne le produit semi-direct de $\mathrm{D}_k(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ par $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_k$ défini par cette opération, $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}$ s'identifie à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_k$ et n'est pas invariant dans G. (4)

Soient k un corps quelconque, $k^{p^{-\infty}}$ sa clôture parfaite, et H un groupe dans la
289 catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\mathrm{réd}}$. Alors $(\mathrm{H} \otimes_k k^{p^{-\infty}})_{\mathrm{réd}}$ est un schéma en groupes sur le corps parfait $k^{p^{-\infty}}$. Comme $\mathrm{H} \otimes_k k^{p^{-\infty}}$ et $(\mathrm{H} \otimes_k k^{p^{-\infty}})_{\mathrm{réd}}$ ont même espace topologique sous-jacent, on voit que les groupes de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\mathrm{réd}}$ ont en commun avec les k-groupes certaines propriétés topologiques invariantes par extension du corps de base : par exemple, il résultera de 0.3 et des remarques qu'on vient de faire que tout groupe de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\mathrm{réd}}$ est séparé.

Nous rencontrerons dans la suite des groupes de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\mathrm{réd}}$ chaque fois que nous aurons affaire à une partie localement fermée non vide U d'un A-groupe G telle que $\mathrm{U}\cdot\mathrm{U} = \mathrm{U}$ et $\mathrm{U}^{-1} = \mathrm{U}$: en effet, le sous-schéma réduit de G défini par U est un groupe de $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\mathrm{réd}}$.

0.3. *Un* A*-groupe* G *est toujours séparé, car la section unité* $e : \operatorname{Spec} \mathrm{A} \to \mathrm{G}$ *est une immersion fermée.* En effet, soient x l'unique point de Spec A et η le morphisme structural $\mathrm{G} \to \operatorname{Spec} \mathrm{A}$. Comme $\eta\circ e = \mathrm{id}_{\operatorname{Spec} \mathrm{A}}$ alors, pour *tout* ouvert affine $\mathrm{U} = \operatorname{Spec} \mathrm{B}$ de G contenant $e(x)$, le morphisme $\mathrm{B} \to \mathrm{A}$ possède une section, donc est surjectif. Il en résulte que e est une immersion fermée. (5) Or, la diagonale de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}$ s'identifie au foncteur de $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}})^{\circ}$ à valeurs dans $(\mathbf{Ens})$ qui associe à tout schéma S sur A l'image réciproque de l'élément neutre de G(S) par l'application $\varphi(\mathrm{S}) : (x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$ de $\mathrm{G}(\mathrm{S}) \times \mathrm{G}(\mathrm{S})$ dans G(S). On a par conséquent le carré cartésien ci-dessous, de sorte que le morphisme diagonal, qui est déduit d'une immersion fermée par changement de base, est lui-même une immersion fermée :

(2) N.D.E. : Pour des exemples de schémas en groupes G sur un corps non parfait k, tels que $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}$ ne soit pas un k-schéma en groupes, voir 1.3.2 plus bas.

(3) N.D.E. : On a légèrement modifié la suite de 0.2, ainsi que 0.3.

(4) N.D.E. : Pour avoir un exemple analogue avec G *connexe*, on peut considérer, pour $\mathrm{car}(k) = p > 0$, le produit semi-direct de $\boldsymbol{\alpha}_{p,\,k}$ et de $\mathbb{G}_{m,\,k}$.

(5) N.D.E. : Cet argument vaut pour tout anneau local A de dimension zéro, et montre que si S est un schéma discret, tout S-groupe est séparé, cf. VI_{B}, 5.2 ; d'autre part (cf. VI_{B}, 5.6.4), si S contient un point fermé s non isolé, le S-schéma G obtenu en recollant deux exemplaires de S le long de l'ouvert $\mathrm{S} - \{s\}$ n'est pas séparé sur S, mais est muni d'une structure de S-groupe.

$$\begin{tikzcd}
G \times_S G \arrow[r, "\varphi"] & G \\
G \arrow[u, "\text{morphisme diagonal}"] \arrow[r] & \operatorname{Spec} A. \arrow[u, "\text{section unité}"']
\end{tikzcd}$$

0.4. [(6)] Soit G un A-schéma. Nous dirons qu'un point g de G est *strictement rationnel* 290
sur A s'il existe un A-morphisme $s : \operatorname{Spec} A \to G$ qui envoie le seul point de Spec A sur g, i.e. si le morphisme $A \to \mathscr{O}_{G,g}$ admet une rétraction. Remarquons qu'on a alors $\kappa(g) = k$, et donc g est un point fermé de G (si B est l'anneau d'un voisinage ouvert affine de g et $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de B correspondant à g, alors $B/\mathfrak{p} \subset k$ est une A-algèbre finie, donc un anneau artinien intègre, donc un corps).

Supposons désormais que G soit un A-groupe, alors un tel $s : \operatorname{Spec} A \to G$ définit un automorphisme r_s du schéma G sur A qu'on appelle translation à droite par s : pour tout morphisme $\pi : S \to \operatorname{Spec} A$, $r_s(\pi)$ est l'automorphisme de G(S) défini par : $x \mapsto x \cdot G(\pi)(s)$, pour tout $x \in G(S)$. De même, on note ℓ_s la translation à gauche par s, c'est-à-dire l'automorphisme de G défini par les égalités $\ell_s(\pi)(x) = G(\pi)(s) \cdot x$, pour tout $x \in G(S)$.

Comme $G \otimes_A k$ et G ont même espace topologique sous-jacent $\underline{G}$, que $G \otimes_A k$ est un k-groupe et que $s \otimes_A k$ dépend seulement de g et non de s, on voit que les automorphismes de $\underline{G}$ induits par r_s et ℓ_s (ou par $r_{s \otimes k}$ et $\ell_{s \otimes k}$) dépendent seulement de g et non de s ; lorsque P est une partie de $\underline{G}$, nous pouvons donc noter $r_g(P)$ ou $P \cdot g$ (resp. $\ell_g(P)$ ou $g \cdot P$) au lieu de $r_s(P)$ (resp. $\ell_s(P)$), ce qui est conforme à 0.1.

Remarque 0.4.1. — Si g est un point strictement rationnel de G et si $A \to A'$ un morphisme d'anneaux locaux artiniens, alors $G' = G \otimes_A A'$ possède un unique point g' au-dessus de g, et g' est strictement rationnel sur A' ; de plus, si l'on note P' l'image inverse de P dans G', alors $P' \cdot g'$ est l'image inverse de $P \cdot g$ (cf. EGA I, 3.4.8).

Proposition 0.5. — [(7)] *Soient* G *un* A-*groupe et* U, V *deux ouverts denses dans* G. *Alors* $U \cdot V$ (*i.e. l'image de* $U \times_A V$ *par la multiplication*) *est égal à tout l'espace sous-jacent à* G.

En effet, comme G et $G \otimes_A k$ ont même espace sous-jacent, on peut supposer, quitte à remplacer A par k et G par $G \otimes_A k$ que $A = k$. Soit $g \in G$. Posons $K = \kappa(g)$, alors la translation à gauche ℓ_g est un automorphisme de G_K. Comme la projection $G_K \to G$ est ouverte, U_K et V_K sont des ouverts denses de G_K, ainsi que l'image de V_K par λ_g. Il existe donc $v \in V_K$ tel que $u = \ell_g(v)$ appartienne à U_K. Soit L une extension de K contenant $\kappa(v)$, et donc $\kappa(u)$, et soient g_L et v_L les L-points de G_L déduits de g

[(6)] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, en particulier on a ajouté la remarque 0.4.1.

[(7)] N.D.E. : L'original énonçait ce résultat sous l'hypothèse que G soit localement de type fini sur A. Comme il est utile d'en disposer dans le cas général, et comme la démonstration est essentiellement la même, on a énoncé et démontré le résultat dans le cas général. Ceci sera utilisé à plusieurs reprises dans la suite.

et v. Alors $g_{\mathrm{L}} \cdot v_{\mathrm{L}} = u'$ est un point de G_{L} au-dessus de u, et donc $g_{\mathrm{L}} = u' \cdot v_{\mathrm{L}}^{-1}$ est
291 au-dessus de $\mathrm{U} \cdot \mathrm{V}$, d'où $g \in \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}$, ce qui prouve la proposition.

Corollaire 0.5.1. — [(8)] *Si* G *est un* A*-groupe* irréductible*,* G *est* quasi-compact*.*

En effet, soit U un ouvert affine non vide de G, alors U est dense dans G, donc d'après 0.5 le morphisme $\mu : \mathrm{U} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{U} \to \mathrm{G}$ est surjectif, donc G est quasi-compact puisque $\mathrm{U} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{U}$ l'est.

Corollaire 0.5.2. — [(9)] *Soient* G *un* A*-schéma en groupes, et* H *un sous-*A*-schéma en groupes de* G*. Alors* H *est* fermé*.*

Démonstration. Soit k' la clôture parfaite du corps résiduel k de A. Comme les espaces topologiques sous-jacents à G et H sont inchangés par le changement de base $\mathrm{A} \to k \to k'$, on peut supposer que $\mathrm{A} = k$ est un corps *parfait*. On peut alors supposer que G et H sont réduits, donc géométriquement réduits.

Soit $\overline{\mathrm{H}}$ l'adhérence de H, alors $\mu^{-1}(\overline{\mathrm{H}})$ est un fermé de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ contenant $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$. Comme le morphisme $\mathrm{H} \to \operatorname{Spec} k$ (resp. $\overline{\mathrm{H}} \to \operatorname{Spec} k$) est universellement ouvert, et comme H est dense dans $\overline{\mathrm{H}}$, alors $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ est dense dans $\mathrm{H} \times \overline{\mathrm{H}}$ et $\mathrm{H} \times \overline{\mathrm{H}}$ est dense dans $\overline{\mathrm{H}} \times \overline{\mathrm{H}}$, donc $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ est dense dans $\overline{\mathrm{H}} \times \overline{\mathrm{H}}$. Donc $\mu(\overline{\mathrm{H}} \times \overline{\mathrm{H}}) \subset \overline{\mathrm{H}}$ et donc, comme $\overline{\mathrm{H}} \times \overline{\mathrm{H}}$ est réduit, μ induit un morphisme $\mu' : \overline{\mathrm{H}} \times \overline{\mathrm{H}} \to \overline{\mathrm{H}}$.

Soit alors $g \in \overline{\mathrm{H}}$, posons $\mathrm{K} = \kappa(g)$. Comme la projection $\overline{\mathrm{H}}_{\mathrm{K}} \to \overline{\mathrm{H}}$ est ouverte, alors H_{K} et $\ell_g(\mathrm{H}_{\mathrm{K}})$ sont deux ouverts denses de $\overline{\mathrm{H}}_{\mathrm{K}}$, donc il existe $u, v \in \mathrm{H}_{\mathrm{K}}$ tels que $\ell(g)(v) = u$. On en conclut, comme dans la démonstration de 0.5, que g appartient à $\mathrm{H} \cdot \mathrm{H} = \mathrm{H}$, d'où $\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H}$.

1. Propriétés locales d'un A-groupe localement de type fini

292 Nous allons voir d'abord que, si G est *localement de type fini et plat* sur A, on peut « rendre strictement rationnel tout point fermé de G » au moyen d'une extension *finie et plate* de la base.

1.1. Sauf mention expresse du contraire, nous supposerons à partir de maintenant que G est un A-groupe *localement de type fini*. Lorsque A est un corps k, nous obtiendrons dans l'exposé $\mathrm{VII}_{\mathrm{B}}$ des résultats très précis sur les anneaux locaux de G. [(10)] Nous nous contentons ici de quelques résultats élémentaires :

Proposition 1.1.1. — *Soit x un point d'un* A*-groupe* G localement de type fini et plat *sur* A*. Alors l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{G},x}$ est de* Cohen-Macaulay *et il existe un système $a_1, \ldots, a_n$ de paramètres de $\mathscr{O}_{\mathrm{G},x}$ tel que $\mathscr{O}_{\mathrm{G},x}/(a_1, \ldots, a_n)$ soit un* A*-module* fini et plat (*donc* fini et libre)*.*

[(8)] N.D.E. : On a inséré ici ce corollaire, cf. 2.4 et 2.6.2 plus loin.

[(9)] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire, utilisé implicitement dans VIII, 6.7, voir aussi VI_{B} 6.2.5.

[(10)] N.D.E. : Par exemple, ils sont toujours *intersection complète*, cf. $\mathrm{VII}_{\mathrm{B}}$, 5.5.1. De plus, si $\mathrm{car}(k) = 0$ alors G est *lisse* (VI_{B}, 1.6.1, voir aussi $\mathrm{VII}_{\mathrm{B}}$, 3.3.1).

Nous supposons d'abord A égal à son corps résiduel k ; il suffit de prouver alors que $\mathscr{O}_{G,x}$ est de Cohen-Macaulay et on peut se limiter au cas où x est un point fermé (cf. EGA 0_{IV}, 16.5.13). D'après le lemme 1.1.2 ci-dessous, G contient un point fermé y tel que $\mathscr{O}_{G,y}$ soit de Cohen-Macaulay. D'après SGA 1, I § 9, il revient au même de dire que, pour toute extension finie K du corps de base k et tout point $\overline{y}$ de $\overline{G} = G \otimes_k K$ au-dessus de y, $\mathscr{O}_{\overline{G},\overline{y}}$ est de Cohen-Macaulay. Si l'extension K a été choisie assez grande, i.e. si K contient une extension normale de k contenant les corps résiduels $\kappa(y)$ et $\kappa(x)$, alors $\overline{y}$ est (strictement) rationnel sur K ainsi que tout point $\overline{x}$ de $\overline{G}$ au-dessus **293**
de x. [11] Comme l'automorphisme $r_{\overline{x}} \circ (r_{\overline{y}})^{-1}$ applique $\overline{y}$ sur $\overline{x}$, il s'ensuit que $\mathscr{O}_{\overline{G},\overline{x}}$, donc $\mathscr{O}_{G,x}$ (SGA 1, I § 9) sont de Cohen-Macaulay.

Lorsque A est de nouveau supposé quelconque, le raisonnement précédent s'applique à $k \otimes_A G$ de sorte que $k \otimes_A \mathscr{O}_{G,x}$ est de Cohen-Macaulay. Si $a_1, \dots, a_n$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_{G,x}$ dont l'image dans $k \otimes_A \mathscr{O}_{G,x}$ est un système de paramètres, il résulte de SGA 1, IV 5.7 ou de EGA 0_{IV}, 15.1.16, que $a_1, \dots, a_n$ est une suite $\mathscr{O}_{G,x}$-régulière et que $\mathscr{O}_{G,x}/(a_1, \dots, a_n)$ est fini et plat (donc fini et libre) sur A.

Lemme 1.1.2. — *Tout schéma non vide* X*, localement de type fini sur un anneau artinien* A*, contient un point fermé x dont l'anneau local est de* Cohen-Macaulay*.*

On peut évidemment supposer X affine d'algèbre B et raisonner par récurrence sur $\dim X$ (l'assertion est claire si X est discret, tous les anneaux locaux étant alors artiniens). Comme B est de type fini sur A, si $\dim B > 0$, B contient un élément a non inversible et non diviseur de 0. [12] Le sous-schéma fermé $X' = \operatorname{Spec} B/(a)$ de X est alors de dimension strictement inférieure à $\dim X$ et contient par hypothèse de récurrence un point fermé x tel que $\mathscr{O}_{X',x}$ soit de Cohen-Macaulay. Comme $\mathscr{O}_{X',x} = \mathscr{O}_{X,x}/(a)$ et a est non inversible et non diviseur de 0 dans $\mathscr{O}_{X,x}$, alors $\mathscr{O}_{X,x}$ est de Cohen-Macaulay (voir aussi EGA IV_2, 6.11.3).

Proposition 1.2. — *Soient* A *un anneau local artinien,* G *un* A*-groupe* localement de type fini et plat *sur* A *et x un point* fermé *de* G*. Il existe alors une* A*-algèbre* A′ locale, **294**
finie et libre *sur* A *telle que tout point de* $G \otimes_A A'$ *au-dessus de x soit* strictement rationnel *sur* A′.

[13] En effet, soit k_1 une extension normale de degré fini de k contenant le corps résiduel $\kappa(x)$ de x. D'après le lemme V 4.1.2, il existe une A-algèbre A_1 locale, finie et libre sur A, de corps résiduel k_1. Dans ce cas, (cf. N.D.E. (11)) tous les points $g_1, \dots, g_n$ de $G \otimes_A A_1$ au-dessus de $x \in G$ ont k_1 pour corps résiduel (i.e. $g_1, \dots, g_n$ sont rationnels sur A_1 au sens de l'Exp. V, § 4.e)).

[11] N.D.E. : En effet, l'hypothèse sur K entraîne que, pour toute extension L de K, tout k-morphisme $\kappa(x) \to L$ (resp. $\kappa(y) \to L$) se factorise à travers K ; par conséquent, tous les points de $G \otimes_k K$ au-dessus de x ou y ont K pour corps résiduel, i.e. sont (strictement) rationnels sur K.

[12] N.D.E. : En effet, B est un anneau noethérien de Jacobson (cf. [**BAC**], V § 3.4). Si tout élément non inversible est diviseur de zéro, alors tout idéal premier est un idéal premier associé de B, donc, en particulier, B n'a qu'un nombre *fini* d'idéaux maximaux $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$. Comme B est un anneau de Jacobson, l'intersection des $\mathfrak{m}_i$ est le nilradical de B, et il s'ensuit que chaque $\mathfrak{m}_i$ est un idéal premier *minimal* de B, de sorte que $\dim B = 0$.

[13] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Soient donc $B_1, \dots, B_n$ les anneaux locaux de $g_1, \dots, g_n$. D'après 1.1.1, $B_1, \dots, B_n$ possèdent des quotients $B'_1, \dots, B'_n$ qui sont artiniens et finis et libres sur A_1. Posons $A' = B'_1 \otimes_{A_1} \cdots \otimes_{A_1} B'_n$. Alors A' est locale, finie et libre sur A_1 et, pour chaque $i = 1, \dots, n$, l'on a des homomorphismes surjectifs

$$B_i \otimes_{A_1} A' \twoheadrightarrow B'_i \otimes_{A_1} A' \twoheadrightarrow A',$$

le second étant induit par l'application de multiplication $B'_i \otimes_{A_1} B'_i \twoheadrightarrow B'_i$. Par conséquent, A' répond à la question.

1.3. Soit e l'*élément neutre* (ou *origine*) de G, c'est-à-dire l'image du seul point de $\operatorname{Spec} A$ par la section unité $\operatorname{Spec} A \to G$. Par définition même, e est strictement rationnel sur A.

Proposition 1.3.1. — [14] *Soient* G *un groupe* localement de type fini et plat *sur un anneau artinien* A *et* K (*resp.* $\overline{k}$) *la clôture parfaite* (*resp. une clôture algébrique*) *du corps résiduel k de* A.

(1) *Pour tout point fermé x de $\overline{G} = G \otimes_k \overline{k}$, les anneaux locaux $\mathscr{O}_{\overline{G},e}$ et $\mathscr{O}_{\overline{G},x}$ sont isomorphes. En particulier, les espaces tangents $T_e\overline{G}$ et $T_x\overline{G}$ ont même dimension.*

(2) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$G \otimes_A K$ est réduit.*

(i bis) *$\mathscr{O}_{G,e} \otimes_A K$ est réduit.*

(ii) G *est lisse sur* A.

(ii bis) G *est lisse sur* A *à l'origine.*

Démonstration. (1) Soit x un point fermé de $\overline{G}$, il y a exactement un $\overline{k}$-morphisme $s : \operatorname{Spec} \overline{k} \to \overline{G}$ dont l'image est x ; la translation à droite r_s induit alors un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\overline{G},e} = \mathscr{O}_{G,e} \otimes_k \overline{k}$ sur $\mathscr{O}_{\overline{G},x}$, d'où l'assertion (1).

295 Prouvons l'assertion (2). Au moyen de SGA 1, II.2.1, on se ramène tout de suite au cas où A est un corps ($A = k$). Les implications (i) $\Rightarrow$ (i bis), (ii) $\Rightarrow$ (ii bis), (ii) $\Rightarrow$ (i) et (ii bis) $\Rightarrow$ (i bis) sont évidentes, de sorte qu'il suffit de prouver que (i bis) entraîne (ii).

Or, il résulte de (i bis) que $\mathscr{O}_{G,e} \otimes_k \overline{k}$ est réduit. Donc, d'après (1), $\mathscr{O}_{\overline{G},x}$ est réduit, pour tout point fermé x de $\overline{G}$, de sorte que $\overline{G}$ est réduit. Donc, comme $\overline{G}$ est localement de type fini sur $\overline{k}$, il existe au moins un point fermé y tel que $\mathscr{O}_{\overline{G},y}$ soit régulier. Comme, d'après (1), les anneaux locaux des points fermés de $\overline{G}$ sont tous isomorphes à $\mathscr{O}_{\overline{G},e}$, on voit que tous ces anneaux locaux sont réguliers, de sorte que $\overline{G}$ est lisse sur $\overline{k}$, donc G lisse sur k.

[15] On peut maintenant donner les exemples ci-dessous, signalés par M. Raynaud, de schémas en groupes G sur un corps non parfait k, tels que $G_{\text{réd}}$ ne soit pas un k-schéma en groupes.

---

[14] N.D.E. : On a ajouté le point (1), utile dans les exemples 1.3.2 qui suivent.

[15] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit et les exemples 1.3.2.

Exemples 1.3.2. — Soient k un corps non parfait de caractéristique $p > 0$, $t \in k - k^p$, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, et $\alpha \in \overline{k}$ tel que $\alpha^p = t$.

(1) Considérons le groupe additif $\mathbb{G}_{a,\,k} = \operatorname{Spec} k[\mathrm{X}]$ et soit G le sous-schéma en groupes, fini sur k, défini par le polynôme additif $\mathrm{X}^{p^2} - t\mathrm{X}^p$. Alors

$$\mathrm{G}_{\text{réd}} = \operatorname{Spec} k[\mathrm{X}]/\mathrm{X}(\mathrm{X}^{p(p-1)} - t)$$

est étale à l'origine. Si c'était un k-schéma en groupes, il serait lisse (d'après 1.3.1), or $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ n'est pas géométriquement réduit, donc ce n'est pas un k-schéma en groupes.

(2) Considérons $\mathbb{G}^4_{a,\,k} = \operatorname{Spec} k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{U}, \mathrm{V}]$ et soit G le sous-schéma en groupes défini par l'idéal I engendré par les polynômes additifs $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p - t\mathrm{Y}^p$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{U}^p - t\mathrm{V}^p$. Alors, G est de dimension 2 et est irréductible, car $(\mathrm{G}_{\overline{k}})_{\text{réd}} \cong \operatorname{Spec} \overline{k}[\mathrm{Y}, \mathrm{V}]$ l'est.

Soient $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{U}, \mathrm{V}]$ et $\mathfrak{m}$ son idéal d'augmentation. Notons x, y, u, v les images de $d\mathrm{X}, d\mathrm{Y}, d\mathrm{U}, d\mathrm{V}$ dans $\Omega^1_{\mathrm{A}/k} \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{m})$, considérées comme des formes linéaires sur l'espace tangent $k^4 = \mathrm{T}_0\, \mathbb{G}^4_{a,\,k}$. Montrons que le sous-espace $\mathrm{E} = \mathrm{T}_0\, \mathrm{G}_{\text{réd}}$ égale k^4. Sinon, il existerait une forme linéaire $f = ax + by + a'u + b'v$, avec $a, b, a', b' \in k$ non tous nuls, s'annulant sur E. Rappelons que la formation de $\Omega^1_{\mathrm{A}/k}$ (et donc celle des espaces tangents) commute au changement de base (cf. EGA IV_4, 16.4.5) et identifions f à son image dans $(\overline{k}^4)^*$. Comme $(\mathrm{G}_{\overline{k}})_{\text{réd}} \subset (\mathrm{G}_{\text{réd}})_{\overline{k}}$, alors f s'annule sur le sous-espace $\mathrm{T}_0(\mathrm{G}_{\overline{k}})_{\text{réd}}$ de $\overline{k}^4$, qui est défini par les équations $g_1 = x - \alpha y$ et $g_2 = u - \alpha v$, et donc $f = \lambda g_1 + \mu g_2$, avec $\lambda, \mu \in \overline{k}$. Or $\lambda g_1 + \mu g_2$ n'appartient à k^4 que si $\lambda = \mu = 0$! Cette contradiction montre que $\mathrm{E} = k^4$, et donc $\mathrm{T}_0(\mathrm{G}_{\text{réd}})_{\overline{k}} = \overline{k}^4$.

D'autre part, $\mathrm{R} = \mathrm{XV} - \mathrm{YU}$ appartient à $\sqrt{\mathrm{I}}$ car $\mathrm{R}^p = (\mathrm{X}^p - t\mathrm{Y}^p)\mathrm{V}^p - \mathrm{Y}^p(\mathrm{U}^p - t\mathrm{V}^p)$. Par conséquent, l'espace tangent F au point $(\alpha, 1, \alpha, 1)$ de $(\mathrm{G}_{\text{réd}})_{\overline{k}}$ est contenu dans l'hyperplan H de $\overline{k}^4$ d'équation $\alpha\, d\mathrm{V} + d\mathrm{X} - d\mathrm{U} - \alpha\, d\mathrm{Y} = 0$, donc est de dimension $\leqslant 3$. (16) Donc, d'après le point (1) de 1.3.1, $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ n'est pas un k-schéma en groupes.

2. Composantes connexes d'un A-groupe localement de type fini

296

2.1. Considérons d'abord un A-groupe quelconque G et soit G′ la composante connexe de l'origine e de G. Cette composante connexe est évidemment fermée de sorte que nous pouvons l'identifier au sous-schéma fermé *réduit* de G qui a G′ pour espace sous-jacent. (17)

Proposition 2.1.1. — *Pour toute extension* K *du corps résiduel* k *de* A, $\mathrm{G}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ *a pour espace sous-jacent la composante connexe de l'origine dans le* K*-groupe* $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ (*i.e.* G′ *est* géométriquement connexe).

Soit en effet $(\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K})'$ la composante connexe de l'origine dans $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$. Comme l'image de $(\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K})'$ dans G est connexe et contient l'élément neutre de G, cette image est contenue dans G′ de sorte que $(\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K})'$ est contenu dans l'image réciproque

(16) N.D.E. : En fait on voit sans peine que $\sqrt{\mathrm{I}}$ est engendré par P, Q, R en tout point $\neq 0$, donc F = H.

(17) N.D.E. : On verra plus loin (2.2) que G′ est un groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$.

$\mathrm{G}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ de G' dans $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$. La proposition résulte donc de la connexité de $\mathrm{G}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ qui est prouvée dans le lemme 2.1.2 :

Lemme 2.1.2. — *Soient* X *et* Y *deux schémas connexes sur un corps k. Si* X *contient un point rationnel,* $\mathrm{X} \times_k \mathrm{Y}$ *est connexe.*

Nous donnons ci-dessous une démonstration directe de ce résultat de EGA IV_2 (4.5.8 et 4.5.14).

Supposons d'abord Y non vide, connexe et affine d'algèbre B. Dans ce cas, $\mathrm{X} \times_k \mathrm{Y}$ est le spectre de la $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-algèbre quasi-cohérente $\mathscr{B} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \otimes_k \mathrm{B}$. Nous voulons montrer que toute partie U de $\mathrm{X} \times_k \mathrm{Y}$ qui est ouverte, fermée et non vide, coïncide avec
297 $\mathrm{X} \times_k \mathrm{Y}$. Or, U est affine sur X et a pour $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-algèbre affine un facteur direct de $\mathscr{B}$. Il résulte donc du lemme 2.1.3 ci-dessous que l'image de U dans X est ouverte et fermée, i.e. coïncide avec X tout entier. Cette image contient en particulier un point rationnel x de X, de sorte que U rencontre l'image réciproque de x dans $\mathrm{X} \times_k \mathrm{Y}$. Comme cette dernière est isomorphe à Y, donc est connexe, U contient cette image réciproque. Le même résultat serait valable pour le complémentaire de U dans $\mathrm{X} \times_k \mathrm{Y}$, si U était distincte de $\mathrm{X} \times_k \mathrm{Y}$, ce qui serait absurde.

Si Y est maintenant un k-schéma quelconque, ce qui précède montre que les fibres de la projection canonique $\mathrm{X} \times_k \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$ sont connexes. Si x est un point rationnel de X, ces fibres rencontrent toutes le sous-schéma $\{x\} \times_k \mathrm{Y}$ qui est lui-même connexe, d'où la proposition.

Lemme 2.1.3. — *Soient* X *un schéma et* $\mathscr{A}$ *une* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-algèbre* quasi-cohérente *qui est un facteur direct d'un* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-module libre. L'image de* $\operatorname{Spec} \mathscr{A}$ *dans* X *est alors ouverte et fermée.*

Soit V cette image. Il est clair que V est contenue dans le support de $\mathscr{A}$. Réciproquement, si x appartient au support de $\mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}_x$ est non nul et est un $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$-module libre puisque, d'après Kaplansky, [18] tout module projectif sur un anneau local est libre. Par conséquent la fibre de $\operatorname{Spec} \mathscr{A}$ en x, qui est affine d'algèbre $\mathscr{A}_x \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}} \kappa(x)$, n'est pas vide. On voit donc que l'image de $\operatorname{Spec} \mathscr{A}$ coïncide avec le support de $\mathscr{A}$.

Si s est la section unité de $\mathscr{A}$, l'égalité $s_x = 0$ entraîne que s, donc $\mathscr{A}$, sont nuls
298 dans un voisinage du point x. Donc le support de $\mathscr{A}$ est fermé. [19] D'autre part, *« le support d'un module projectif est ouvert »*. En effet, soient $\mathscr{P}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module quasi-cohérent localement projectif, $\mathscr{P}^* = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}(\mathscr{P}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ le $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module dual, et x un point de X tel que $\mathscr{P}_x \neq 0$. Quitte à remplacer X par un voisinage ouvert affine de x suffisamment petit, on peut supposer que $\mathscr{P}$ est facteur direct d'un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module libre. Alors, le morphisme naturel

$$\mathscr{P}^* \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}} \mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \longrightarrow \mathscr{P}_x^* = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}}(\mathscr{P}_x, \mathscr{O}_{\mathrm{X},x})$$

est un isomorphisme. D'après Kaplansky, à nouveau, $\mathscr{P}_x$ est libre (et $\neq 0$) sur $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$, donc il existe $p \in \mathscr{P}_x$ et $\phi \in (\mathscr{P}_x)^*$ tels que $\phi(p) = 1$, et comme $\mathscr{P}_x^* = \mathscr{P}^* \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}} \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$,

---

(18) N.D.E. : cf. I. Kaplansky, *Projective modules*, Ann. of Maths. **68** (1958), 372–377 ; voir aussi [**BAC**], § II.3, Ex. 3.

(19) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

il existe un voisinage ouvert U de x tels que p et ϕ proviennent de sections $\widetilde{p} \in \mathscr{P}(\mathrm{U})$ et $\widetilde{\phi} \in \mathscr{P}^*(\mathrm{U})$, alors l'égalité $\widetilde{\phi}(\widetilde{p}) = 1$ montre que $\widetilde{p}_y \neq 0$ pour tout $y \in \mathrm{U}$.

2.2. Les notations étant toujours celles de 2.1, il est clair que G' est un k-schéma réduit. Le lemme 2.1.2 montre que $\mathrm{G}' \times_k \mathrm{G}'$ est connexe, de sorte que $(\mathrm{G}' \times_k \mathrm{G}')_{\text{réd}}$ est le sous-schéma réduit de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}$ qui a pour espace sous-jacent la composante connexe de l'origine. En particulier, le morphisme multiplication $\mu : \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ induit un morphisme $\mu' : (\mathrm{G}' \times_k \mathrm{G}')_{\text{réd}} \to \mathrm{G}'$ qui fait de G' un groupe dans $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$.

2.2.bis. — [20] On rappelle (cf. Exp. V) que, si P est un schéma, on note $\underline{\mathrm{P}}$ l'espace topologique sous-jacent à P. Alors, on définit un sous-A-foncteur G^0 de G en posant, pour tout A-schéma S,

$$\mathrm{G}^0(\mathrm{S}) = \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{S}) \mid u(\underline{\mathrm{S}}) \subset \underline{\mathrm{G}'}\}.$$

Soit $c : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ le morphisme d'inversion ; comme $c(\underline{\mathrm{G}'}) = \underline{\mathrm{G}'}$, on a $c \circ u \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$ pour tout $u \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$. D'autre part, si $u, v \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$, alors $u \boxtimes v$ envoie $\underline{\mathrm{S}}$ dans le sous-espace de $\underline{\mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}}$ formé des points dont les deux projections appartiennent à $\underline{\mathrm{G}'}$; ce sous-espace s'identifie à l'espace sous-jacent à $\mathrm{G}' \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}'$, qui est connexe d'après le lemme 2.1.2. Par conséquent, $\mu \circ (u \boxtimes v)$ envoie $\underline{\mathrm{S}}$ dans $\underline{\mathrm{G}'}$. Ceci montre que G^0 est un sous-A-foncteur *en groupes* de G.

Si la composante connexe de e est un *ouvert* de $\underline{\mathrm{G}}$, alors le sous-foncteur G^0 est *représentable* par le sous-schéma induit par G sur cet ouvert, qui est donc un *sous-schéma en groupes* de G ; on le notera également G^0. Dans ce cas, avec les notations de 2.1, on a $\mathrm{G}' = (\mathrm{G}^0)_{\text{réd}}$ et les espaces topologiques $\underline{\mathrm{G}'}$ et $\underline{\mathrm{G}^0}$ coïncident. [21]

2.3. Conformément à nos conventions de 1.1, nous supposons de nouveau à partir de maintenant que G est *localement de type fini* sur A. Alors G est localement noethérien, donc *localement connexe* [22], donc : *toute composante connexe de* G *est ouverte.*

Nous noterons alors G^0 le sous-schéma induit par G sur la composante connexe $\underline{\mathrm{G}'}$ de l'élément neutre. D'après 2.2.bis, G^0 est un *sous-schéma en groupes* de G que nous 299
appellerons *la composante neutre de* G ; pour tout A-schéma S on a donc :

$$\mathrm{G}^0(\mathrm{S}) = \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{S}) \mid u(\underline{\mathrm{S}}) \subset \underline{\mathrm{G}^0} = \underline{\mathrm{G}'}\}.$$

Soient G^α une composante connexe quelconque de G et $\nu^\alpha : \mathrm{G}^\alpha \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}$ le morphisme défini par les égalités

$$\nu^\alpha(\mathrm{S})(g, \gamma) = g\gamma g^{-1},$$

pour tout $\mathrm{S} \in (\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}})$, $g \in \mathrm{G}^\alpha(\mathrm{S})$, $\gamma \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$.

---

[20] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, afin de faire le lien avec $\mathrm{VI_B}$, § 3.

[21] N.D.E. : Dans cet exposé, la notation G^0 est réservée au cas où la composante connexe de e est ouverte ; dans $\mathrm{VI_B}$, § 3, cette composante connexe sera notée $\underline{\mathrm{G}^0}$ dans tous les cas. C'est une notation légèrement abusive, mais qui est compatible avec ce qui précède lorsque la composante connexe est l'espace topologique sous-jacent à un sous-schéma en groupes *ouvert* G^0 de G.

[22] N.D.E. : En effet, dans un espace noethérien, les composantes connexes sont en nombre fini, donc chacune est *ouverte* ; voir aussi EGA I, 6.1.9.

Si e est l'origine de G, la restriction de ν^α à $\mathrm{G}^\alpha \times_{\mathrm{A}} \{e\}$ est le morphisme nul ; comme $\mathrm{G}^\alpha \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0$ est connexe d'après 2.1.2, on voit que ν^α se factorise à travers G^0. Donc, pour tout A-schéma S, $\mathrm{G}^0(\mathrm{S})$ est un sous-groupe invariant de G(S). On a donc obtenu la proposition suivante : [23]

Proposition 2.3.1. — *Soit* G *un* A*-groupe localement de type fini. Alors la composante neutre* G^0 *est un sous-schéma en groupes* ouvert et invariant *dans* G.

Proposition 2.4. — *Soit* G *un* A*-groupe localement de type fini.*

(i) G^0 *est irréductible et* $\mathrm{G}^0 \otimes_{\mathrm{A}} k$ *est* géométriquement irréductible *sur* k.

(ii) G^0 *est* quasi-compact, *donc* de type fini *sur* A.

[24] *Démonstration.* (i) Comme G^0 et $\mathrm{G}^0 \otimes_{\mathrm{A}} k$ ont même espace topologique sous-jacent, il suffit de montrer la seconde assertion. Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. D'après 2.2, $(\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k})_{\text{réd}}$ est un $\overline{k}$-groupe localement de type fini et réduit, donc lisse sur $\overline{k}$ (1.3.1). A fortiori les anneaux locaux de $(\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k})_{\text{réd}}$ sont intègres, donc, [25] puisque $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k}$ est localement noethérien, les composantes connexes de $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k}$ sont irréductibles (cf. EGA I, 6.1.10). En particulier, la composante connexe $\mathrm{G}^0 \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k}$ (cf. 2.1.1) est irréductible.

(ii) Montrons maintenant que G^0 est de type fini sur A. Comme G^0 est localement de type fini sur A, il suffit de prouver que G^0 est quasi-compact. Comme G^0 est irréductible, ceci découle de 0.5.1.

300 ***Corollaire 2.4.1***. — *Toute composante connexe de* G *est* irréductible, [26] de type fini *sur* A, [27] *et de même dimension que* G^0.

On peut supposer en effet A égal à son corps résiduel k. Soit alors C une composante connexe de G, x un point fermé de C, $\kappa(x)$ le corps résiduel de x et k' une extension normale de k contenant $\kappa(x)$ et de degré fini sur k. La projection canonique π : $\mathrm{C} \otimes_k k' \to \mathrm{C}$ est ouverte et fermée ; [28] par conséquent, si C' est une composante connexe de $\mathrm{C} \otimes_k k'$, la projection $\mathrm{C}' \to \mathrm{C}$ est surjective, donc C' contient un point $y \in \pi^{-1}(x)$, et un tel point est rationnel sur k' (cf. la démonstration de 1.2), de sorte que C' est l'image par la translation r_y de $\mathrm{G}^0 \otimes_k k'$. Or $\mathrm{G}^0 \otimes_k k'$ est de type fini sur k', d'après 2.4, et $\pi^{-1}(x)$ est fini (de cardinal $\leqslant [k' : k]$), donc $\mathrm{C} \otimes_k k'$ est de type fini sur k', et donc C est de type fini sur k.

---

[23] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 2.3.1, pour mettre en évidence cet énoncé. Notons de plus que G^0 est même un sous-groupe *caractéristique* de G, cf. 2.6.5 (ii).

[24] N.D.E. : Dans l'énoncé, on a remplacé « G^0 est géométriquement irréductible » par « $\mathrm{G}^0 \otimes_{\mathrm{A}} k$ est *géométriquement irréductible* sur k », et l'on a détaillé la démonstration.

[25] N.D.E. : On a détaillé l'original, en ajoutant la référence à EGA I, 6.1.10.

[26] N.D.E. : On prendra garde qu'une composante connexe non neutre n'est pas *géométriquement connexe* en général. Par exemple, si $k = \mathbb{R}$, le groupe $\boldsymbol{\mu}_{3,\mathbb{R}}$, représenté par $\mathbb{R}[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^3 - 1)$, a deux composantes connexes : $\{e\} = \operatorname{Spec} \mathbb{R}$ et $\mathrm{C} = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)$, et $\mathrm{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a deux composantes.

[27] N.D.E. : On a ajouté l'assertion qui suit, cf. $\mathrm{VI_B}$, 1.5.

[28] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

D'autre part, comme $G^0 \otimes_k k'$ est irréductible, d'après 2.4, il en est de même de C', [29] et donc aussi de C, puisque la projection $C' \to C$ est surjective,

Enfin, on a vu plus haut que $C \otimes_k k'$ est réunion disjointe d'un nombre fini de translatés de $G^0 \otimes_k k'$. Comme la dimension est invariante par extension du corps de base (cf. EGA IV_2, 4.1.4), il en résulte que C est de même dimension que G^0. (De plus, d'après EGA IV_2, 5.2.1, on a $\dim_g G = \dim G^0$ pour tout point $g \in G$.)

2.5. On a ajouté ce paragraphe. Les résultats qui suivent apparaissent dans l'Exp. VI_B, mais auraient pu (ou dû) figurer dans VI_A, et il est utile d'en disposer dès à présent, afin de préciser le théorème 3.2 plus bas.

Lemme 2.5.1. — *Soit* $(A, \mathfrak{m})$ *un anneau local artinien, et* $k = A/\mathfrak{m}$ *son corps résiduel.*

(i) *Si* X *est un* A*-schéma tel que* $X \otimes_A k$ *soit localement de type fini* (*resp. de type fini*) *sur* k*, alors il en est de même de* X *sur* A.

(ii) *Soit* $u : X \to Y$ *un morphisme de* A*-schémas. Si* $u \otimes_A k$ *est une immersion* (*resp. une immersion fermée*), *il en est de même de* u.

Démonstration. (i) Supposons $X \otimes_A k$ localement de type fini sur k. Soit $U = \operatorname{Spec} B$ un ouvert affine de X. Par hypothèse, il existe des éléments $x_1, \dots, x_n$ de B dont les images engendrent $B/\mathfrak{m}B$ comme k-algèbre, et il résulte du « lemme de Nakayama nilpotent » que les x_i engendrent B comme A-algèbre. Ceci prouve que X est localement de type fini sur A. Si de plus $X \otimes_A k$ est quasi-compact, il est en de même de X (qui a même espace topologique sous-jacent), et donc X est de type fini sur A. Ceci prouve (i).

Prouvons (ii). Supposons que $u \otimes_A k$ soit une immersion (resp. une immersion fermée). Alors u est un homéomorphisme de X sur une partie localement fermée (resp. fermée) de Y et, pour tout $x \in X$, le morphisme d'anneaux $\phi_x : \mathscr{O}_{Y,u(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ est tel que $\phi_x \otimes_A k$ soit surjectif. D'après le lemme de Nakayama nilpotent, il en résulte que ϕ_x est surjectif, donc u est une immersion (resp. une immersion fermée).

Proposition 2.5.2. — *Soit* A *un anneau local artinien de corps résiduel* k *et soit* u : $G \to H$ *un morphisme* quasi-compact *entre* A*-schémas en groupes* localement de type fini.

(a) *L'ensemble* $u(G)$ *est un fermé de* H, *dont les composantes connexes sont irréductibles et toutes de même dimension.*

(b) *On a* $\dim G = \dim u(G) + \dim \operatorname{Ker}(u)$.

(c) *Si* u *est un monomorphisme, c'est une immersion fermée.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où $A = k$. De plus, comme les propriétés envisagées sont stables par descente (fpqc), et comme la dimension est invariante par extension du corps de base, on peut supposer k algébriquement clos.

Prouvons (a). Notons C le sous-schéma réduit de H dont l'espace topologique sous-jacent est $\overline{u(G)}$. Comme $u(G)$ est stable par le morphisme d'inversion de H, il en est

[29] N.D.E. : On a simplifié l'original ici.

de même de C. D'autre part, $u : \mathrm{G} \to \mathrm{C}$ est quasi-compact et dominant donc, d'après EGA IV_2, 2.3.7, il en est de même de $u \times_k \mathrm{id_G}$ et de $\mathrm{id_H} \times_k u$, donc de leur composée $u \times_k u : \mathrm{G} \times_k \mathrm{G} \to \mathrm{C} \times_k \mathrm{C}$. Par conséquent, la multiplication de H envoie $\mathrm{C} \times_k \mathrm{C}$ dans C, et donc C est un sous-schéma en groupes de H.

Donc, remplaçant H par C, on se ramène au cas où u est dominant. Alors $\mathrm{G}(k)$ est dense dans H, donc rencontre toute composante connexe de H, donc opère transitivement dans l'ensemble de ces composantes connexes. Il suffit donc de montrer que $u(\mathrm{G})$ contient H^0. Remplaçant G par $u^{-1}(\mathrm{H}^0)$, on peut donc supposer que $\mathrm{H} = \mathrm{H}^0$; dans ce cas, d'après 2.4, H est irréductible et de type fini sur k, donc noethérien. D'autre part, u est localement de type fini (cf. EGA I, 6.6.6) et quasi-compact, donc de type fini. Par conséquent, d'après le théorème de constructibilité de Chevalley (cf. EGA IV_1, 1.8.5), $u(\mathrm{G})$ est une partie constructible (et dense) de $\mathrm{H} = \overline{u(\mathrm{G})}$, donc contient un ouvert dense U de H (cf. EGA 0_{III}, 9.2.2). Alors, d'après 0.5, on a $\mathrm{H} = \mathrm{U} \cdot \mathrm{U} \subset u(\mathrm{G})$, d'où $u(\mathrm{G}) = \mathrm{H}$. Compte tenu de 2.4.1, ceci prouve l'assertion (a).

Prouvons (b). Rappelons tout d'abord que le foncteur $\mathrm{Ker}(u)$ (cf. I, 2.3.6.1) est représentable par $u^{-1}(e)$, où e désigne l'élément neutre de H. Comme u est de type fini, $\mathrm{Ker}(u)$ est de type fini sur k. D'autre part, remplaçant H par le sous-schéma fermé réduit $u(\mathrm{G})$, on peut supposer u surjectif. Notons u^0 la restriction de u à G^0. Comme G et $\mathrm{Ker}(u)$ sont équidimensionnels, et comme $\mathrm{Ker}(u)^0 \subset \mathrm{Ker}(u^0)$, on se ramène au cas où G et donc aussi H, sont irréductibles.

Alors, d'après EGA IV_3, 9.2.6.2 et 10.6.1 (ii), l'ensemble des $y \in \mathrm{H}$ tels que $\dim u^{-1}(y) = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{H}$ contient un ouvert non vide V. Puisque u est surjectif, $\mathrm{U} = u^{-1}(\mathrm{V})$ est alors un ouvert non vide de G, donc contient un point fermé x de G, puisque G est un schéma de Jacobson (cf. EGA IV_3, 10.4.8). Alors la translation à droite r_x est un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(u)$ sur $u^{-1}(u(x))$, d'où :

$$\dim \mathrm{Ker}(u) = \dim u^{-1}(u(x)) = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{H}.$$

Prouvons (c), en suivant [**DG70**], I, § 3.4. (Une autre démonstration est donnée dans l'Exp. $\mathrm{VI_B}$, 1.4.2.) On suppose que u est un monomorphisme. Si C est une composante connexe de G, il existe un point fermé $x \in \mathrm{G}$ tel que $\mathrm{C} = r_x(\mathrm{G}^0)$, et si l'on note u_{C} (resp. u^0) la restriction de u à C (resp. à G^0), on a $u_{\mathrm{C}} = r_{u(x)} \circ u^0 \circ r_x^{-1}$, donc il suffit de montrer que u^0 est une immersion fermée. On peut donc supposer que $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$, de sorte que G est irréductible et de type fini sur k.

Soit ξ le point générique de G, alors $\mathscr{O}_{\mathrm{G},\xi}$ est un anneau local artinien, notons $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. D'autre part, soient $h = u(\xi)$, $\mathfrak{n}$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\mathrm{H},h}$, et $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{G},\xi}/\mathfrak{n}\mathscr{O}_{\mathrm{G},\xi}$. Comme u est un monomorphisme, il en est de même du morphisme $u_h : \mathrm{Spec}(\mathrm{A}) \to \mathrm{Spec}(\kappa(h))$ déduit par changement de base, donc le morphisme de multiplication $\mathrm{A} \otimes_{\kappa(h)} \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ est un isomorphisme (cf. EGA I, 5.3.8), d'où $\mathrm{A} = \kappa(h)$. D'après le lemme de Nakayama (puisque $\mathfrak{n}\mathscr{O}_{\mathrm{G},\xi}$ est contenu dans $\mathfrak{m}$, donc nilpotent), il en résulte que le morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{H},h} \to \mathscr{O}_{\mathrm{G},\xi}$ est surjectif.

Soient alors V un ouvert affine de H contenant h, U un ouvert affine $\neq \varnothing$ de G contenu dans $u^{-1}(\mathrm{V})$, $\phi : \mathscr{O}_{\mathrm{H}}(\mathrm{V}) \to \mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})$ le morphisme de k-algèbres induit par u, $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})$ correspondant à η, et $\mathfrak{q} = \phi^{-1}(\mathfrak{p})$. Comme G est de type fini sur k, $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})$ est engendré comme k-algèbre par un nombre fini d'éléments

$a_1, \ldots, a_n$. D'après ce qui précède, il existe des éléments $b_1, \ldots, b_n$ et s dans $\mathscr{O}_{\mathrm{H}}(\mathrm{V})$ tels que $s \notin \mathfrak{q}$ et qu'on ait dans $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})_{\mathfrak{p}}$ les égalités $a_i/1 = \phi(b_i)/\phi(s)$. Il existe donc des éléments $t_1, \ldots, t_n$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U}) - \mathfrak{p}$ tels qu'on ait $t_i(a_i\phi(s) - \phi(b_i)) = 0$. Alors, posant $t = t_1 \ldots t_n\phi(s) \in \mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U}) - \mathfrak{p}$, les égalités $a_i/1 = \phi(b_i)/\phi(s)$ ont déjà lieu dans $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})_t$ et, comme $t \in \mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U}) = k[a_1, \ldots, a_n]$, il existe $b \in \mathscr{O}_{\mathrm{H}}(\mathrm{V})$ tel que $t/1 = \phi(b)/\phi(s)^r$, pour un certain $r \in \mathbb{N}$. Par conséquent, ϕ induit une surjection de $\mathscr{O}_{\mathrm{H}}(\mathrm{V})_{sb}$ sur $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})_t$, et donc u est une immersion locale au point ξ.

L'ouvert W de G formé des points en lesquels u est une immersion locale est donc non vide. Comme G est un schéma de Jacobson, alors W contient un point fermé y et, pour montrer que $\mathrm{W} = \mathrm{G}$, il suffit de montrer que tout point fermé de G appartient à W. Or tout point fermé x est l'image de y par la translation $r_x \circ r_y^{-1}$, donc appartient à W, d'où $\mathrm{W} = \mathrm{G}$. Ceci prouve que u est une immersion locale.

Comme G est irréductible, il en résulte que u est une immersion. En effet, pour tout $x \in \mathrm{G}$, soient U_x et V_x des ouverts de G et H tels que $x \in \mathrm{U}_x$ et que u induise une immersion fermée de U_x dans V_x. Comme U_x est dense dans G, $u(\mathrm{U}_x)$ l'est dans $u(\mathrm{G}) \cap \mathrm{V}_x$, et comme $u(\mathrm{U}_x)$ est fermé dans V_x, on a donc $u(\mathrm{U}_x) = \mathrm{V}_x$. Comme de plus u est injectif, on a $\mathrm{U}_x = u^{-1}(\mathrm{V}_x)$, et il en résulte que u induit une immersion fermée de G dans le sous-schéma ouvert de H recouvert par les V_x. Donc $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est une immersion. Mais on a déjà vu que $u(\mathrm{G})$ est un fermé de H, donc u est une immersion fermée.

Lemme 2.5.3. — [30] *Soient* A *un anneau local artinien,* k *son corps résiduel,* G *un* A*-groupe* plat*,* X *un* A*-schéma muni d'une action à gauche* $\mu : \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *de* G *et d'une section* $s_0 : \operatorname{Spec} \mathrm{A} \to \mathrm{X}$. (*Ceci est le cas, par exemple, si* G' *est un second* A*-groupe et si l'on s'est donné un morphisme de* A*-groupes* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}'$.)

Soit ϕ *le morphisme* $\mu \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times s_0)$ *de* $\mathrm{G} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{A}$ *vers* X. *Si* ϕ *est plat en un point* g *de* G, *alors* ϕ *est plat.*

Démonstration. Comme G est plat sur A alors, d'après le critère de platitude par fibres (EGA IV_3, 11.3.10.2), il suffit de montrer que $\phi \otimes_{\mathrm{A}} k$ est plat, donc on peut supposer que $\mathrm{A} = k$. Dans ce cas, la donnée de s_0 équivaut à celle d'un k-point $x_0 \in \mathrm{X}(k)$, et ϕ est le morphisme $h \mapsto hx_0$.

Soit alors $h \in \mathrm{G}$, montrons que ϕ est plat au point h. Soit K une extension de k contenant une copie de $\kappa(g)$ et de $\kappa(h)$; on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}_{\mathrm{K}} \arrow[r, "\phi_{\mathrm{K}}"] \arrow[d] & \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \arrow[d] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

dans lequel les deux flèches verticales sont fidèlement plates. Donc, d'après V 7.4 (i), ϕ_{K} est plat en tout point $g' \in \mathrm{G}_{\mathrm{K}}$ au-dessus de g, et pour montrer que ϕ est plat en h, il suffit de montrer que ϕ_{K} est plat en un point h' au-dessus de h. On est donc ramené

[30] N.D.E. : On ne fait pas d'hypothèses de finitude dans cet énoncé ; ceci sera utile plus loin (cf. 6.2 et VI_{B}, § 12).

au cas où g et h sont rationnels. Soient alors $u = hg^{-1}$ et ℓ_u (resp. μ_u) la translation à gauche de G (resp. de X) définie par u ; comme $\phi \circ \ell_u = \mu_u \circ \phi$, on obtient un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{\mathrm{G},h} \arrow[r, "\sim"] & \mathscr{O}_{\mathrm{G},g} \\ \mathscr{O}_{\mathrm{X},hx_0} \arrow[r, "\sim"] \arrow[u] & \mathscr{O}_{\mathrm{X},gx_0} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches horizontales sont des isomorphismes. Comme le morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},gx_0} \to \mathscr{O}_{\mathrm{G},g}$ est plat, le morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},hx_0} \to \mathscr{O}_{\mathrm{G},h}$ l'est aussi.

Proposition 2.5.4. — *Soient* A *un anneau local artinien, k son corps résiduel,* G *un* A*-groupe* localement de type fini*,* $\mathrm{X} \neq \varnothing$ *un* A*-schéma* localement de type fini *muni d'une action à gauche de* G*. On suppose que le morphisme* $\phi : \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{X}$ *défini ensemblistement par* $(g, x) \mapsto (gx, x)$*, est surjectif. Alors :*

(i) *Les composantes connexes de* X *sont de type fini, irréductibles et toutes de même dimension.*

(ii) *Plus précisément, soient $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et x un point fermé de* $\mathrm{X} \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k}$ *; son stabilisateur* F *est un sous-schéma en groupes fermé de* $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k}$*, et la dimension des composantes irréductibles de* X *est* $\dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{F}$*.*

Tenant compte du lemme 2.5.1, on peut supposer $\mathrm{A} = k$. Supposons d'abord k *algébriquement clos.* Alors $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ est un k-groupe localement de type fini et donc, remplaçant G par $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ et X par $\mathrm{X}_{\text{réd}}$, on peut supposer G et X réduits.

Comme $\mathrm{G} \times_k \mathrm{X}$ est localement de type fini sur k, alors ϕ est localement de type fini (cf. EGA I, 6.6.6 (v)), donc localement de présentation finie puisque $\mathrm{X} \times_k \mathrm{X}$ est localement noethérien. Soit x un point rationnel de X, alors le morphisme $\phi_x : \mathrm{G} \to \mathrm{X}$, déduit de ϕ par changement de base, est surjectif et localement de présentation finie. Si η est un point maximal de X, alors $\mathscr{O}_{\mathrm{X},\eta}$ est un corps (puisque X est réduit), donc ϕ_x est plat en tout point de G au-dessus de η. Donc, d'après le lemme 2.5.3, ϕ_x est plat. Par conséquent, $\phi_x : \mathrm{G} \to \mathrm{X}$ est fidèlement plat et localement de présentation finie, donc ouvert (cf. EGA IV_2, 2.4.6). Comme G^0 est ouvert dans G, irréductible et quasi-compact (d'après 2.4), alors chaque orbite $\mathrm{G}^0 x = \phi_x(\mathrm{G}^0)$, pour x parcourant les points rationnels de X, est un ouvert de X, irréductible et quasi-compact, donc de type fini sur k (puisque X est localement de type fini sur k).

Comme tout ouvert non vide de X contient un point rationnel, il en résulte que X est recouvert par ces ouverts. De plus, deux tels ouverts sont soit disjoints, soit égaux. En effet, si $\phi_x(\mathrm{G}^0) \cap \phi_y(\mathrm{G}^0)$ est non vide, il contient un point rationnel z et il existe donc deux points rationnels $g, h \in \mathrm{G}^0$ tels que $gx = z = hy$, d'où $x = g^{-1}z$ et $y = h^{-1}z$ et donc $\phi_x(\mathrm{G}^0) = \phi_z(\mathrm{G}^0) = \phi_y(\mathrm{G}^0)$. Il en résulte que les orbites $\phi_x(\mathrm{G}^0)$ sont aussi fermées, et sont donc à la fois les composantes connexes et les composantes irréductibles de X.

Enfin, soient x, y deux points rationnels de X. Comme ϕ_x est surjectif, il existe un point rationnel $g \in \mathrm{G}$ tel que $y = gx$ et, comme G^0 est un sous-groupe invariant de

G, alors l'orbite G^0y est l'image de G^0 par la translation ℓ_g de X, de sorte que G^0y et G^0x ont même dimension.

De plus, d'après I, 2.3.3.1, le stabilisateur de x est représenté par le sous-schéma fermé F de G défini par le carré cartésien ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G} \arrow[d, "\phi_x"] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r] & \mathrm{X} \end{tikzcd} .$$

Alors F est un k-groupe localement de type fini, $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}^0$ est un k-groupe de type fini contenant F^0, et d'après 2.4.1, F et $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}^0$ sont équidimensionels, de même dimension que F^0. Soit $\mathrm{C} = \phi_x(\mathrm{G}^0)$ la composante irréductible de X contenant x. En procédant comme dans la démonstration du point (b) de 2.5.2, on obtient que $\dim \mathrm{C} = \dim \mathrm{G}^0 - \dim \mathrm{F}^0 = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{F}$.

Dans le cas général (i.e. pour k un corps arbitraire), soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Soient C une composante connexe de X et C' une composante connexe de $\mathrm{C} \otimes_k \overline{k}$, alors C' est une composante connexe de $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \otimes_k \overline{k}$. Le morphisme $\pi : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ est ouvert (cf. EGA IV_2, 2.4.10), et comme il est entier, il est aussi fermé ; par conséquent $\pi(\mathrm{C}') = \mathrm{C}$. Comme C' est irréductible et quasi-compacte, alors C est irréductible et quasi-compacte, donc de type fini sur k (puisque X est localement de type fini sur k).

Enfin, comme la dimension est invariante par extension du corps de base (cf. EGA IV_2, 4.1.4), $\dim \mathrm{C} = \dim \mathrm{C}'$, et comme toutes les composantes irréductibles de X' ont la même dimension, il en est de même pour celles de X.

2.6. Compléments. — On a ajouté ce paragraphe, tiré de [**Per75**] II, §§ 1–2, avec des compléments dus à O. Gabber. [31] Ceci montre que les résultats précédents sont valables pour tout schéma en groupes G sur un corps k. (Ceci sera utilisé dans les sections 5, 6 et 7 de l'Exp. $\mathrm{VI_B}$.)

On fixe un corps k. Commençons par le lemme suivant (*loc. cit.*, II 2.1.1), qui n'apparaît pas explicitement dans EGA IV_2, § 4.4 (bien qu'on puisse sans doute le lire entre les lignes au début de *loc. cit.*, § 4.4.1).

Lemme 2.6.0. — *Soient* X *un k-schéma irréductible,* K *une extension de k,* X' *une composante irréductible de* $\mathrm{X_K}$. *La projection* $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *est surjective.*

En effet, soient B une base de transcendance de K sur k et $\mathrm{L} = k(\mathrm{B}) \subset \mathrm{K}$. D'après EGA IV_2, 4.3.2 et 4.4.1, $\mathrm{X_L}$ est irréductible et X' domine $\mathrm{X_L}$. Le morphisme $\mathrm{X}' \to \mathrm{X_L}$ est donc entier et dominant, donc surjectif. Comme $\mathrm{X_L} \to \mathrm{X}$ est surjectif (*loc. cit.*, 4.4.1), $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ l'est aussi.

Pour la suite de 2.6, on fixe un k-schéma en groupes G et une opération $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ de G sur un k-schéma X vérifiant la condition suivante :

$(\star)$ le morphisme $\Phi : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \times \mathrm{X},\ (g,x) \mapsto (gx, x)$ est surjectif

[31] N.D.E. : Ces résultats nous ont été communiqués par O. Gabber, en particulier 2.6.6 qui joue un rôle important dans la section 5 de $\mathrm{VI_B}$.

(c'est le cas en particulier pour G opérant sur lui même par translations à gauche). On dira alors, pour abréger : « Soit X un G-schéma vérifiant $(\star)$ ». Enfin, on note k' la clôture parfaite de k.

Proposition 2.6.1. — *Soit* X *un* G*-schéma vérifiant* $(\star)$.

(i) X *est* géométriquement ponctuellement irréductible *sur k, i.e. pour toute extension* K *de k, chaque $x \in \mathrm{X}_{\mathrm{K}}$ appartient à une unique composante irréductible de* X_{K}.

(ii) *Chaque anneau local de* $(\mathrm{X}_{k'})_{\mathrm{réd}}$ *est* normal.

(iii) *Soient η un point maximal de* $(\mathrm{X}_{k'})_{\mathrm{réd}}$, $\mathrm{C} = \overline{\{\eta\}}$, *et* L *la clôture algébrique de k dans $\kappa(\eta)$. Alors* C *est un* L*-schéma, et est* géométriquement irréductible sur L (*i.e.* $\mathrm{C} \otimes_{\mathrm{L}} \mathrm{K}$ *est irréductible, pour toute extension* K *de* L).

(iv) *En particulier, si x est un point rationnel de* X*, alors la composante irréductible de* X *contenant x est géométriquement irréductible sur k.*

Démonstration. (i) Comme l'hypothèse $(\star)$ est préservée par tout changement de base $k \to \mathrm{K}$, il suffit de montrer que chaque $x \in \mathrm{X}$ appartient à une unique composante irréductible de X. Comme le morphisme $\mathrm{Spec}(k') \to \mathrm{Spec}(k)$ est un homéomorphisme universel, on peut de plus supposer que k est parfait. On peut alors supposer G et X réduits. Soient η un point maximal de X et z un point arbitraire de $\mathrm{Z} = \overline{\{\eta\}}$. Comme X est réduit, l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{X},\eta}$ égale $\kappa(\eta)$, et puisque k est parfait alors, pour toute extension K de k, $\kappa(\eta) \otimes_k \mathrm{K}$ est normal (cf. EGA IV_2, 6.14.2), donc tout point de X_{K} au-dessus de η est normal.

Comme Φ est surjectif, il existe un point γ de $\mathrm{G}\times\mathrm{X}$ tel que $\Phi(\gamma)$ ait pour projections z et η. Soit $\mathrm{K} = \kappa(\gamma)$; il existe alors des points rationnels g et η' de G_{K} et X_{K}, tels que η' soit au-dessus de η et $z' = g\eta'$ au-dessus de z. D'après ce qui précède, η' est un point normal de X_{K} donc il en est de même de z'. Puisque $\pi : \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{X}$ est plat, il en résulte que $z = \pi(z')$ est un point normal de X (cf. EGA IV_2, 2.1.13). Ceci prouve (ii) et (i).

La première assertion de (iii) découle alors de (ii). Puis, comme L est algébriquement clos dans $\kappa(\eta)$, C est géométriquement irréductible sur L, d'après EGA IV_2, 4.5.9.

Enfin, si X possède un point rationnel x, il résulte de (iii) que $\mathrm{L} = k$, et donc X est géométriquement irréductible sur k. Ceci peut aussi se voir directement comme suit (cf. [**Per75**], II 2.1) : soit C la composante irréductible de X contenant x et soit K une extension de k, X_{K} possède un unique point e_{K} au-dessus de e et, d'après (i), e_{K} appartient à une unique composante irréductible C' de X_{K} ; d'autre part, d'après 2.6.0, toute composante irréductible de C_{K} contient e_{K}, donc égale C'.

Notation. — Notons provisoirement C^0 le sous-schéma fermé réduit de G dont l'espace sous-jacent est l'unique composante irréductible de G contenant l'élément neutre e.

Corollaire 2.6.2. — C^0 *est* géométriquement irréductible sur k *et est ensemblistement stable par la loi de groupe, i.e.* $(\mathrm{C}^0_{k'})_{\mathrm{réd}}$ *est un sous-groupe de* $(\mathrm{G}_{k'})_{\mathrm{réd}}$*. Par conséquent,* C^0 *est* quasi-compact.

En effet, d'après 2.6.1, C^0 est géométriquement irréductible sur k, donc $\mathrm{C}^0 \times \mathrm{C}^0$ est irréductible, donc $\nu(\mathrm{C}^0 \times \mathrm{C}^0) \subset \mathrm{C}^0$, où ν désigne le morphisme $(g, h) \mapsto gh^{-1}$. Comme $\operatorname{Spec} k' \to \operatorname{Spec} k$ est un homéomorphisme universel, on a la même conclusion pour $\mathrm{C}^0_{k'}$ puis pour $\mathrm{H} = (\mathrm{C}^0_{k'})_{\text{réd}}$ et donc, puisque $\mathrm{H} \times_{k'} \mathrm{H}$ est réduit, ν induit un morphisme $\mathrm{H} \times_{k'} \mathrm{H} \to \mathrm{H}$, i.e. H est un sous-groupe de $(\mathrm{G}_{k'})_{\text{réd}}$. Par conséquent, d'après 0.5.1, H (et donc aussi C^0) est quasi-compact.

Rappel 2.6.3. — Soit Y un schéma. Rappelons (EGA 0_{III}, 9.1.1) qu'une partie E de Y est dite rétrocompacte si l'inclusion $\mathrm{E} \hookrightarrow \mathrm{Y}$ est quasi-compacte, et que, d'après EGA IV_1, 1.9.5 (v) et 1.10.1, si U est un ouvert rétrocompact de Y, alors l'adhérence $\overline{\mathrm{U}}$ de U est la réunion des adhérences $\overline{\{y\}}$ des points $y \in \mathrm{U}$, et bien sûr il suffit de prendre y parcourant les points *maximaux* de U, i.e. les points maximaux de Y contenus dans U.

Par conséquent, si Y est *quasi-séparé* et si η est un point maximal de Y, alors l'intersection des voisinages fermés de η égale $\overline{\{\eta\}}$: en effet, si $y \in \mathrm{Y} - \overline{\{\eta\}}$, alors y est contenu dans un ouvert affine V ne contenant pas η ; puisque Y est quasi-séparé, V est rétrocompact, donc $\overline{\mathrm{V}}$ est la réunion des $\overline{\{\xi\}}$, pour ξ parcourant les points maximaux de Y appartenant à V, et donc $\eta \notin \overline{\mathrm{V}}$, i.e. $\mathrm{Y} - \mathrm{V}$ est un voisinage fermé de η ne contenant pas y.

Proposition 2.6.4. — *Soit* X *un* G*-schéma vérifiant* $(\star)$ *et soit* U *un ouvert de* X.

(i) $\mathrm{C}^0\mathrm{U}$ *est un ouvert de* X*, égal à la réunion des composantes irréductibles de* X *dont le point générique appartient à* U.

(i′) *Par conséquent, si* X *est irréductible, il est quasi-compact.*

(ii) *Si de plus* U *est rétrocompact dans* X*, alors* $\mathrm{C}^0\mathrm{U}$ *égale* $\overline{\mathrm{U}}$*, donc est une partie ouverte et fermée de* X.

Démonstration. (i) D'abord, $\mathrm{C}^0\mathrm{U}$ est un ouvert, puisque c'est la réunion, pour $g \in \mathrm{C}^0$, des projections des ouverts $g \cdot \mathrm{U}_{\kappa(g)} \subset \mathrm{X}_{\kappa(g)}$ et que chaque projection $\mathrm{X}_{\kappa(g)} \to \mathrm{X}$ est ouverte.

Pour démontrer la seconde assertion de (i), on peut remplacer k par k' (puisque $\operatorname{Spec} k' \to \operatorname{Spec} k$ est un homéomorphisme universel), donc supposer k *parfait*. On peut alors supposer G et X réduits, donc géométriquement réduits.

Soit η un point maximal de X contenu dans U et soit Z son adhérence. Considérons le morphisme $\mu' : \mathrm{C}^0 \times \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$. Comme C^0 est géométriquement irréductible, $\mathrm{C}^0 \times \mathrm{Z}$ est irréductible, notons γ son point générique. Puisque μ' envoie le point $\varepsilon(\eta)$ (où ε désigne la section unité de C^0) sur η, alors γ est envoyé sur une générisation de η, donc sur η. Donc μ' envoie l'espace sous-jacent à $\mathrm{C}^0 \times \mathrm{Z}$ dans Z et donc, puisque $\mathrm{C}^0 \times \mathrm{Z}$ est réduit, μ' se factorise par Z.

Soit maintenant $z \in \mathrm{Z}$. Posons $\mathrm{K} = \kappa(z)$, Alors le morphisme $\mu_z : \mathrm{G}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{X}_{\mathrm{K}}$, $h \mapsto h \cdot z$ est surjectif ; soit α un point maximal de X_{K}, l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_{\mathrm{K}},\alpha}$ est un corps, puisque X_{K} est réduit, donc μ_z est plat en tout point de G_{K} au-dessus de α, donc μ_z est *plat*, d'après le lemme 2.5.3.

D'autre part, μ_z envoie le point générique ω de $\mathrm{C}^0_{\mathrm{K}}$ sur un point $t \in \mathrm{Z}_{\mathrm{K}}$. Soit β un point maximal de Z_{K} tel que $t \in \overline{\{\beta\}}$; comme μ_z est plat, il existe une générisation ξ de

ω telle que $\mu_z(\xi) = \beta$, et comme ω est un point maximal de G_K, on a nécessairement $\xi = \omega$, et donc $\mu_z(\omega)$ égale β, qui est au-dessus de η (puisque $Z_K \to Z$ est plat).

Posons $L = \kappa(\omega)$ et soient ω_L et z_L les L-points déduits de ω et z, alors $\omega_L \cdot z_L = \beta'$ est un point de Z_L au-dessus de β, et donc $z_L = \omega_L^{-1} \cdot \beta' \in C^0_L \cdot U_L$, d'où $z \in C^0 \cdot U$. Ceci prouve (i).

Comme C^0 est quasi-compact, d'après 2.6.2, le point (i′) en découle : si X est irréductible et si U est un ouvert affine non vide, alors X égale C^0U, i.e. est l'image du morphisme $C^0 \times U \to X$, donc est quasi-compact. Enfin, si U est rétrocompact dans X alors (cf. 2.6.3) $\overline{U}$ est la réunion des $\overline{\{\eta\}}$, pour η parcourant les points maximaux de X contenus dans U, donc égale C^0U. Ceci prouve (ii).

On obtient alors le résultat suivant ([**Per75**] II Th. 2.4, voir aussi [**Per76**], Prop. 4.1.1) :

Théorème 2.6.5. — *Soient k un corps,* G *un k-schéma en groupes.*

(i) *Il existe un unique sous-schéma en groupes* G^0 *de* G, *appelé* composante neutre *de* G, *tel que :*

> (a) *L'espace sous-jacent à* G^0 *est la composante irréductible de l'élément neutre.*
>
> (b) $G^0 \to G$ *est une immersion fermée* plate, *i.e.* $\mathscr{O}_{G,g} = \mathscr{O}_{G^0,g}$ *pour tout* $g \in G^0$.

(ii) *De plus,* G^0 *est quasi-compact, géométriquement irréductible, et est un sous-groupe caractéristique de* G.

(iii) *Si* G *est connexe, alors* $G = G^0$.

Démonstration. (i) Rappelons d'abord que G est séparé (0.3), donc a fortiori quasi-séparé. Soit U un ouvert affine de G contenant le point générique ω de C^0. D'après 2.6.3 et 2.6.4, $\overline{U} = C^0U$ est à la fois ouvert et fermé, et $C^0 = \overline{\{\omega\}}$ est ensemblistement l'intersection de ces parties ouvertes et fermées.

Pour U parcourant les ouverts affines contenant ω, on obtient un système projectif de G-schémas $\overline{U}$, dont les morphismes de transition sont affines (puisque ce sont des immersions fermées). On peut donc en former la limite projective G^0 (cf. EGA IV_3, 8.2.2), i.e. pour tout ouvert affine V de G, $G^0 \cap V$ est le spectre de l'algèbre

$$\varinjlim_{U} \mathscr{O}_G(V \cap \overline{U}) = \mathscr{O}_G(V) / \sum_{\overline{U}} I_{\overline{U}}(V),$$

où $I_{\overline{U}}(V)$ désigne le noyau de $\mathscr{O}_G(V) \to \mathscr{O}_G(V \cap \overline{U})$. Il en résulte que G^0 a pour espace sous-jacent C^0, et que $G^0 \to G$ est une immersion fermée. De plus, pour tout $g \in G^0$, $\mathscr{O}_{G^0,g}$ est la limite inductive, pour V parcourant les ouverts affines de G contenant g, des k-algèbres $\mathscr{O}_{G^0}(V \cap G^0) = \varinjlim_U \mathscr{O}_G(V \cap \overline{U})$ et cette double limite inductive s'identifie à

$$\varinjlim_{U} \varinjlim_{\substack{V \\ g \in V \subset \overline{U}}} \mathscr{O}_G(V) = \mathscr{O}_{G,g}$$

i.e. on a $\mathscr{O}_{G^0,g} = \mathscr{O}_{G,g}$ (voir aussi EGA IV_2, 5.13.3 (ii)). Donc $i : G^0 \to G$ est une immersion fermée plate. Réciproquement, cette condition entraîne que $i^*(\mathscr{O}_G) = \mathscr{O}_{G^0}$, et donc G^0 est uniquement déterminé par les conditions (a) et (b). Ceci prouve (i).

Les deux premières assertions de (ii) découlent de 2.6.2. Enfin, soient S un k-schéma et ϕ un automorphisme du S-groupe G_S. Pour tout $s \in S$, ϕ_s envoie $G^0_{\kappa(s)}$ dans lui-même, donc $\phi(G^0_S) \subset G^0_S$. De plus, l'immersion fermée $i_S : G^0_S \hookrightarrow G_S$ déduite de i par changement de base est plate, donc on a $\mathscr{O}_{G_S,\phi(z)} = \mathscr{O}_{G^0_S,\phi(z)}$ pour tout $z \in G^0_S$, et donc $\phi \circ i_S$ se factorise à travers G^0_S. Ceci prouve que G^0 est un sous-groupe caractéristique de G, d'où (ii). Enfin, (iii) est un cas particulier du point (i) de la proposition suivante. [32]

Proposition 2.6.6. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe opérant sur un k-schéma* X *de façon que le morphisme* $G \times X \to X \times X$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$ *soit surjectif. On suppose* X quasi-séparé. *Alors :*

(i) *Toute composante connexe* C *de* X *est* irréductible.

(ii) *Soient η le point générique de* C *et* L *la clôture algébrique de k dans $\kappa(\eta)$. Alors* C *est un* L*-schéma,* géométriquement irréductible sur L*, et le morphisme*

$$G^0_L \times_L C \longrightarrow C \times_L C$$

est surjectif.

(iii) *En particulier, si* C *contient un point rationnel x, alors* C *est géométriquement irréductible sur k et le morphisme $\phi : G^0 \to C$, $g \mapsto gx$ est* surjectif.

Démonstration. (i) Soient C une composante connexe de X, Y une composante irréductible de X contenue dans C, η le point générique de Y, et U un ouvert affine de X contenant η. Comme X est quasi-séparé, U est rétrocompact dans X donc, d'après 2.6.4, $\overline{U} = G^0U$ est une partie ouverte et fermée de X qui rencontre C, donc contient C. Or, d'après 2.6.3, l'intersection des $\overline{U}$, pour U parcourant un système fondamental de voisinages ouverts affines de η, est égale à $\overline{\{\eta\}}$. Il en résulte que $C = \overline{\{\eta\}}$. Ceci prouve (i).

La première assertion de (ii) (et aussi de (iii)) découle de 2.6.1. Commençons par montrer la seconde assertion de (iii). Notons ω (resp. η) le point générique de G^0 (resp. C). Soient $z \in C$ et $K = \kappa(z)$. Comme G^0 (resp. C) est géométriquement irréductible sur k, G^0_K (resp. C_K) est irréductible, notons ξ (resp. β) son point générique. On a vu dans la démonstration de 2.6.4 que le morphisme $\mu_z : G_K \to C_K$, $h \mapsto h \cdot z$ envoie ξ sur β, et de même on a $\phi(\omega) = \eta$.

Soit $L = \kappa(\xi)$ et soient ξ_L, z_L les L-points déduits de ξ et z, alors $\xi_L \cdot z_L = \beta'$ est un point de C_L au-dessus de $\beta \in C_K$, donc aussi au-dessus de $\eta \in C$. Considérons le

[32] N.D.E. : Cette proposition (ainsi que les résultats précédents) nous a été communiquée par O. Gabber, elle sera utilisée pour corriger la démonstration du théorème 5.3 de VI_B.

carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} G^0_L \arrow[r, "\phi_L"] \arrow[d, "\pi_{G^0}"'] & C_L \arrow[d, "\pi_C"] \\ G^0 \arrow[r, "\phi"] & C \end{tikzcd} ,$$

comme $\phi_L(\pi_{G^0}^{-1}(\omega)) = \pi_C^{-1}(\eta)$ (cf. EGA I, 3.4.8), il existe $g \in G^0_L$ tel que $\phi_L(g) = \beta'$. On a donc $z_L = \xi_L^{-1} \cdot \phi_L(g) = \phi_L(\xi_L^{-1} g)$, d'où $\phi(\pi_{G^0}(\xi_L^{-1} g)) = \pi_C(z_L) = z$. Ceci prouve que ϕ est surjectif.

Maintenant, prouvons la deuxième assertion de (ii). Il suffit de montrer que, pour tout $z \in C$, le morphisme $\mu_z : G^0_L \otimes_L \kappa(z) \to C \otimes_L \kappa(z)$ est surjectif, mais cela résulte de (iii), puisque z est un point rationnel de $C \otimes_L \kappa(z)$.

Remarque 2.6.7. — Sous les hypothèses de 2.6.6, si $C(k) = \varnothing$, le morphisme $G^0 \times_k C \to C \times_k C$ n'est pas nécessairement surjectif. Par exemple, pour $k = \mathbb{R}$ et $G = \{\pm 1\}_{\mathbb{R}}$, le G-torseur $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ est connexe, mais le morphisme $G^0 \times_{\mathbb{R}} X \to X \times_{\mathbb{R}} X$ n'est pas surjectif. (Mais l'on a $L = \mathbb{C}$ et le morphisme $G^0 \times_{\mathbb{R}} X \to X \times_{\mathbb{C}} X$ est un isomorphisme.)

3. Construction de quotients $F\backslash G$ (pour G, F de type fini)

301 **3.1.** Soient A un anneau local artinien et $u : F \to G$ un homomorphisme de A-groupes. Si $\mu : F \times_A F \to F$ et $\nu : G \times_A G \to G$ désignent les morphismes de multiplication et λ le morphisme composé

$$F \times_A G \xrightarrow{u \times G} G \times_A G \xrightarrow{\nu} G \quad ,$$

on rappelle que le quotient à gauche $F\backslash G$ de G par F est le conoyau du $(\mathbf{Sch}_{/A})$-groupoïde G_* décrit ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} F \times_A F \times_A G \arrow[r, shift left=2, "F\times\lambda"] \arrow[r, "\mu\times G" description] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{pr}_{2,3}"'] & F \times_A G \arrow[r, shift left, "\lambda"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_2"'] & G \end{tikzcd}$$

(pr_2 et $\mathrm{pr}_{2,3}$ sont les projections de $F \times_A G$ et $F \times_A (F \times_A G)$ sur les deuxièmes facteurs). Nous dirons que G_* est le groupoïde de base G défini par u (cf. Exp. V, § 2.a ; comme dans l'exposé V, nous ne suivons pas dans cet exposé la convention de IV, 4.6.15).

Comme l'unique A-morphisme $F \to \operatorname{Spec} A$ est universellement ouvert (EGA IV_2, 2.4.9), pr_2 est un morphisme ouvert ; il en va donc de même pour λ qui est composé de pr_2 et de l'automorphisme σ de $F \times_A G$ qui est défini par les formules suivantes : $\sigma(S)(x, y) = (x, u(S)(x) \cdot y)$ où S est un A-schéma variable, x et y appartenant à F(S) et G(S). On voit de la même façon que pr_2 et λ sont plats lorsque F est plat sur A.

Remarquons aussi pour terminer ces préliminaires que tout A-morphisme s :
302 $\operatorname{Spec} A \to G$ définit un automorphisme du groupoïde G_* qui induit sur G, $F \times_A G$

et $F \times_A F \times_A G$, les automorphismes r_s, $\mathrm{id}_F \times_A r_s$ et $\mathrm{id}_F \times_A \mathrm{id}_F \times_A r_s$, respectivement. Nous noterons encore r_s cet automorphisme de G_* et nous dirons que r_s est la translation à droite définie par s (confer 0.4).

3.2 Théorème. — *Soient* F *et* G *des groupes* plats et localement de type fini *sur un anneau local artinien* A. *Soit* $u : F \to G$ *un homomorphisme de* A*-groupes* quasi-compact *et de noyau* fini sur A. *Alors :* [33]

(i) *Le quotient à gauche* $F\backslash G$ *de* G *par* F *existe dans* $(\mathbf{Sch}_{/A})$ *et la suite*

$$F \times_A G \overset{\lambda}{\underset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} G \xrightarrow{\ p\ } F\backslash G$$

est exacte dans la catégorie de tous les espaces annelés.

(ii) *Le morphisme canonique* $p : G \to F\backslash G$ *est* surjectif et ouvert*, et* $F\backslash G$ *est une somme directe de schémas* de type fini *sur* A.

(ii′) *Plus précisément,* $X = F\backslash G$ *est muni d'une action à droite de* G*, telle que* $p(e) \cdot g = p(g)$*, pour tout* $g \in G$ *; par conséquent, les composantes connexes de* X *sont* de type fini *sur* A*,* irréductibles *et toutes de dimension* $\dim G - \dim F$*.*

(iii) *Le morphisme canonique* $F \times_A G \to G \times_{(F\backslash G)} G$ *est* surjectif*.*

(iv) *Si* u *est un* monomorphisme [34]*, alors :*

(a) $F \times_A G \xrightarrow{(\lambda,\mathrm{pr}_2)} G \times_{(F\backslash G)} G$ *est un* isomorphisme *et* $G \to F\backslash G$ *est* fidèlement plat et localement de présentation finie*.*

(a′) $F\backslash G$ *représente le faisceau-quotient* (fppf) $\widetilde{F\backslash G}$ *et* $G \to F\backslash G$ *est un* F*-torseur localement trivial pour la topologie* (fppf)*.*

(b) $F\backslash G$ *est* plat *sur* A*, et est* lisse *sur* A si G l'est*.*

(c) $u : F \to G$ *est une immersion fermée et* $F\backslash G$ *est* séparé*.*

(d) *Si, de plus,* F *est un sous-groupe* invariant *de* G*, il existe sur* $F\backslash G$ *une et une seule structure de* A*-groupe telle que* $p : G \to F\backslash G$ *soit un morphisme de* A*-groupes.*

Dans la démonstration de ce théorème, A′ désignera une A-algèbre locale, finie et libre sur A. Si R est une relation faisant intervenir A′, nous dirons que « R(A′) est vraie quand A′ est assez grande » s'il existe une algèbre A_1 locale, finie et libre sur A telle que la relation R(A′) soit vérifiée pour chaque algèbre A′ locale, finie et libre sur 303
A_1.

Nous allons d'abord prouver le théorème lorsque F *et* G *sont de type fini sur* A.

3.2.1. — Supposons un instant que tout point de G possède un voisinage ouvert et saturé W tel que le groupoïde induit par G_* sur W possède une quasi-section (cf. V § 6). Alors, d'après V 6.1, on a les assertions (i), (ii), (iii) et (iv)(a), et $F\backslash G$ est de type fini sur k. De plus, sous l'hypothèse de (iv), comme $G \to F\backslash G$ est fidèlement plat et

[33] N.D.E. : On a ajouté (ii′) et détaillé le point (iv), en tenant compte des ajouts faits en 2.5.2, 2.5.4 et dans l'Exp. V, 6.1.

[34] N.D.E. : dans ce cas, l'hypothèse que G soit plat peut être supprimée, cf. la sous-section 3.3.

localement de présentation finie, l'assertion (b) découle de EGA IV, 2.2.14 et 17.7.7. D'autre part, l'assertion (iv)(a′) découle de (iv)(a), d'après l'Exp. IV, 3.4.3.1, 5.2.2 et 5.1.6. Enfin, on démontrera (iv)(c) en 3.2.5 et (ii′) et (iv)(d) dans la section 5.

Montrons maintenant l'assertion suivante :

(†) *toute partie finie de* F\G *est alors contenue dans un ouvert affine.* [35]

Si U est une quasi-section du groupoïde induit par G_* sur un ouvert saturé W de G, alors $U \otimes_A A'$ est une quasi-section du $(\mathbf{Sch}_{/A'})$-groupoïde induit par $G_* \otimes_A A'$ sur $W \otimes_A A'$. De plus, si U_* est le $(\mathbf{Sch}_{/A})$-groupoïde induit par G_* sur U, alors $U_* \otimes_A A'$ s'identifie au $(\mathbf{Sch}_{/A'})$-groupoïde induit par $G_* \otimes_A A'$ sur $U \otimes_A A'$. [36]

Il résulte alors des démonstrations de l'exposé V que la construction du quotient $X = F\backslash G$ commute à l'extension $A \to A'$ de la base du type considéré ici. [37]

Soient donc $x_1, \dots, x_n$ des points de $X = F\backslash G$ que nous pouvons supposer fermés [38] et $g_1, \dots, g_n$ des points fermés de G se projetant sur $x_1, \dots, x_n$. Soit V un ouvert affine partout dense de X, [39] et soit U l'image réciproque de V dans G. D'après 1.2, il existe une A-algèbre locale A′, finie et libre sur A, telle que les points $g'_1, \dots, g'_p$ de $G' = G \otimes_A A'$ au-dessus de $g_1, \dots, g_n$ soient strictement rationnels sur A′. [40] Comme les morphismes $G' \to G$ et $G \to X$ sont ouverts, $U' = U \otimes_A A'$ est dense dans G′, donc l'ouvert $\bigcap_{i=1}^p (U')^{-1} \cdot g'_i$ est non vide, donc contient un point fermé x. Donc, d'après 1.2 (et 0.4.1), on peut supposer, quitte à agrandir A′, que x est strictement rationnel sur A′. Alors, comme $x \in (U')^{-1} \cdot g'_i$, on a $g'_i \in U' \cdot x$.

Notons V′ l'image inverse de V dans $X' = X \otimes_A A'$; c'est un ouvert affine de X′, et c'est aussi l'image de U′ par la projection $G' \to X'$. Comme la translation à droite r_x est un automorphisme du groupoïde $G_* \otimes_A A'$, elle induit un automorphisme, encore
304 noté r_x, du quotient X′. Par conséquent, l'image $V' \cdot x = r_x(V')$ de $U' \cdot x$ dans X′ est un ouvert affine de X′ contenant les images $x'_1, \dots, x'_p$ de $g'_1, \dots, g'_p$.

---

[35] N.D.E. : Signalons ici que si $A = k$ est un *corps*, alors tout ouvert quasi-compact de F\G est *quasi-projectif* (un résultat dû à Chow pour les groupes algébriques lisses), cf. [**Ray70**], VI 2.6. Par contre, sur l'anneau local artinien $A = \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, il existe des A-schémas abéliens G qui ne sont pas projectifs (*loc. cit.*, XII 4.2).

[36] N.D.E. : Ce qui précède est valable pour *tout* changement de base $A \to A'$.

[37] N.D.E. : Ceci est détaillé en 4.6 plus loin : il s'agit de voir que la formation de l'image directe par les morphismes p, λ et pr_2 commute aux changements de base *plats* $A \to A'$. Comme F et G sont *de type fini* sur A artinien, les morphismes f en question sont tous quasi-compacts et quasi-séparés, et l'égalité $f_*(\mathscr{O}_X) \otimes_A A' = f'_*(\mathscr{O}_{X'})$ (avec des notations évidentes) découle de EGA IV_1, 1.7.21.

[38] N.D.E. : En effet, soient $y_1, \dots, y_n$ des points arbitraires de X ; comme X est de type fini sur A, chaque y_i a dans son adhérence un point fermé x_i, et tout ouvert contenant x_i contient y_i.

[39] N.D.E. : Un tel ouvert existe, puisque X est de type fini sur k : X a un nombre fini de composantes irréductibles $C_1, \dots, C_p$, et il suffit de prendre pour chaque i un ouvert affine non vide contenu dans $C_i - \bigcup_{j \neq i} C_j$. (Ici, on sait de plus, d'après (ii′), que les C_i sont disjointes ...)

[40] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Considérons alors la relation d'équivalence sur $X' = X \otimes_A A'$ définie par la projection $X \otimes_A A' \to X$:

$$X \otimes_A A' \otimes_A A' \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} X \otimes_A A' \longrightarrow X \quad ,$$

où d_0 et d_1 sont induits par les deux injections canoniques de A′ dans $A' \otimes_A A'$. Comme A′ est une A-algèbre finie et libre, disons de rang n, alors d_0 et d_1 sont finis et localement libres de rang n ; par conséquent, on peut appliquer le raisonnement de l'Exp. V, 5.b (tiré de la démonstration de SGA 1, VIII.7.6). On obtient ainsi que $x'_1, \dots, x'_p$ sont contenus dans un ouvert affine *saturé* W′ contenu dans l'ouvert affine $V' \cdot x$. L'image de W′ dans X contient alors $x_1, \dots, x_n$ et est un ouvert affine de X, d'après V, 4.1 (ii).

3.2.2. — Pour toute algèbre A′ locale, finie et libre sur A, désignons maintenant par U(A′) l'ensemble des points de $G \otimes_A A'$ ayant un voisinage ouvert et saturé W tel que le groupoïde induit par $G_* \otimes_A A'$ sur W possède une quasi-section. Il est bien clair que U(A′) est saturé pour les opérations de G(Spec A′) sur $G \otimes_A A'$. Nous allons voir que, lorsque A′ est assez grande, U(A′) est égal à $G \otimes_A A'$.

D'après le théorème V 8.1, U(A) n'est pas vide, donc contient un point fermé y. La preuve se fait alors par récurrence sur $\dim(G - U(A))$. Soient $g_1, \dots, g_n$ des points fermés appartenant aux diverses composantes irréductibles de $G - U(A)$. D'après 1.2, il existe A′ locale, finie et libre sur A, telle que les points $g'_1, \dots, g'_p$ (resp. $x = x_1, \dots, x_r$) de $G' = G \otimes_A A'$ se projetant sur $g_1, \dots, g_n$ (resp. sur y) soient strictement rationnels sur A′. Alors, U(A′) contient $(U(A) \otimes_A A') \cdot x^{-1} g'_i$ pour tout i ; donc U(A′) contient 305
$g'_1, \dots, g'_p$ et l'on a

$$\dim(G' - U(A')) < \dim(G - U(A)).$$

L'hypothèse de récurrence entraîne alors l'existence d'une algèbre A″ locale, finie et libre sur A′, telle qu'on ait $U(A'') = G' \otimes_{A'} A'' = G \otimes_A A''$.

3.2.3. — Nous sommes maintenant en mesure de prouver l'existence de F\G quand F et G sont de type fini sur A. Soit A′ assez grande sur A pour que U(A′) coïncide avec $G \otimes_A A'$ (confer 3.2.2). Nous poserons $A'' = A' \otimes_A A'$ et, pour tout A-schéma X, nous désignerons par X′ et X″ les produits fibrés $X \otimes_A A'$ et $X \otimes_A A''$. D'après 3.2.1 et 3.2.2, les quotients F′\G′ et F″\G″ existent et on a le diagramme commutatif suivant, où les deux premières lignes et colonnes sont *exactes* :

$(*)$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}''\times_{\mathrm{A}''}\mathrm{G}'' \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}''_2"] \arrow[r, shift right, "\lambda''"'] \arrow[d, shift right, "w_1"'] \arrow[d, shift left, "w_2"] & \mathrm{G}'' \arrow[r, "p''"] \arrow[d, shift right, "v_1"'] \arrow[d, shift left, "v_2"] & \mathrm{F}''\setminus\mathrm{G}'' \arrow[d, shift right, "u_1"'] \arrow[d, shift left, "u_2"] \\
\mathrm{F}'\times_{\mathrm{A}'}\mathrm{G}' \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}'_2"] \arrow[r, shift right, "\lambda'"'] \arrow[d, "h"] & \mathrm{G}' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{F}'\setminus\mathrm{G}' \\
\mathrm{F}\times_{\mathrm{A}}\mathrm{G} \arrow[r, shift left, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[r, shift right, "\lambda"'] & \mathrm{G} &
\end{tikzcd}\quad .$$

Dans ce diagramme, pr'_2 et λ' (resp. pr''_2 et λ'') sont obtenus à partir de pr_2 et λ par des changements de base évidents ; les morphismes g et h sont induits par l'injection canonique $\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$. On y désigne par p' et p'' les morphismes canoniques ; les morphismes v_1, v_2 et w_1, w_2 sont induits par les deux injections canoniques de A' dans A''. Enfin, comme la construction du quotient $\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}'$ commute aux deux
306 changements de base $f_1, f_2 : \operatorname{Spec}\mathrm{A}''\rightrightarrows\operatorname{Spec}\mathrm{A}'$, on a, en notant $\pi' : \mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}'\to\operatorname{Spec}\mathrm{A}'$ le morphisme structural, des isomorphismes canoniques, pour $i=1,2$:

$$\tau_i : \mathrm{F}''\backslash\mathrm{G}'' \xrightarrow{\ \sim\ } (\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}') \underset{\pi',f_i}{\times} \operatorname{Spec}\mathrm{A}'' \quad ,$$

et le morphisme u_i est composé de τ_i et de la projection $(\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}')\times_{\pi',f_i}\operatorname{Spec}\mathrm{A}''\to\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}'$.

Or, lorsqu'on a un diagramme du type $(*)$, les deux premières lignes et colonnes étant exactes, on vérifie facilement que $\operatorname{Coker}(\mathrm{pr}_2,\lambda)$ existe si et seulement si il en va de même pour $\operatorname{Coker}(u_1,u_2)$, et ces deux conoyaux s'identifient. L'existence de $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ résultera donc de celle de $\operatorname{Coker}(u_1,u_2)$.

Or il résulte de la compatibilité de la formation de $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ avec les extensions de la base considérées ici (cf. N.D.E. (37) dans 3.2.1, et 4.6 plus loin) que le morphisme composé

$$(\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}')\times_{\pi',f_1}\operatorname{Spec}\mathrm{A}'' \xrightarrow{\ \tau_1^{-1}\ } \mathrm{F}''\backslash\mathrm{G}'' \xrightarrow{\ \tau_2\ } (\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}')\times_{\pi',f_2}\operatorname{Spec}\mathrm{A}''$$

est une donnée de descente sur $\mathrm{F}'\backslash\mathrm{G}'$ relativement à $f : \operatorname{Spec}\mathrm{A}'\to\operatorname{Spec}\mathrm{A}$. D'après 3.2.1 (†) et SGA 1, VIII 7.6, cette donnée de descente est effective, c'est-à-dire que $\operatorname{Coker}(u_1,u_2)$ existe (on pourrait d'ailleurs utiliser directement le théorème 4.1 de l'Exp. V).

3.2.4. — Pour terminer la preuve des assertions (i), (ii), (iii) et (iv)(a) de 3.2 dans le cas où F et G sont de type fini sur A, il reste à étudier le quotient $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$. D'après V 6.1, les assertions (ii), (iii) et (iv)(a) « deviennent vraies » après le changement de base $f : \operatorname{Spec}\mathrm{A}'\to\operatorname{Spec}\mathrm{A}$; d'après EGA IV_2, 2.6.1, 2.6.2 et 2.7.1, ces assertions étaient donc vraies avant le changement de base. Enfin, pour prouver la deuxième assertion de (i), i.e. que $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ est le conoyau de (pr_2,λ) dans la catégorie de tous les espaces annelés, il n'y a qu'à se reporter à V § 6.c).

3.2.5. — [41] Montrons maintenant l'assertion (iv)(c) de 3.2, en reprenant la démonstration de $\mathrm{VI_B}$, 9.2.1. Notons $X = F\backslash G$ et d le morphisme $F \times_A G \to G \times_A G$ de composantes λ et pr_2.

Comme u est une immersion fermée, d'après 2.5.2, et comme $d = \sigma \circ (u \times \mathrm{id}_G)$, où σ est l'automorphisme de $G \times_A G$ défini par $\sigma(x, y) = (xy, y)$, alors d est une immersion fermée. Dautre part, d'après (iv)(a), on a le carré cartésien ci-dessous

$$\begin{tikzcd} F \times_A G \arrow[r, "d"] \arrow[d] & G \times_A G \arrow[d, "p \times p"] \\ X \arrow[r, "\Delta_X"] & X \times_A X \end{tikzcd}$$

et p donc aussi $p \times p$ est fidèlement plat et localement de présentation finie. Donc, par descente (fppf), comme d est une immersion fermée, il en est de même de Δ_X, i.e. X est séparé.

3.3. [42] Dans le théorème 3.2, l'hypothèse que G soit plat peut être supprimée, lorsque $u : F \to G$ est un *monomorphisme*. Cette généralisation est évoquée dans la remarque 9.3 b) de l'Exp. $\mathrm{VI_B}$, et aussi dans [**Ray67a**], Exemple a) i), p. 82. La démonstration, qu'on trouve dans le théorème 4 de [**An73**], découle du théorème 3.2 et du théorème suivant de Grothendieck (mentionné dans [**Ray67a**], Th. 1 ii) et démontré dans [**DG70**], § III.2, 7.1). Si X est un schéma et R une relation d'équivalence dans X, on notera $\widetilde{X/R}$ le *faisceau* (fppf) *quotient* de X par R (cf. IV 4.4.9).

Théorème 3.3.1 (Grothendieck). — *Soient* A *un anneau,* X *un* A*-schéma, et* $d_0, d_1 : R \to X$ *une* A*-relation d'équivalence dans* X*, telle que* d_i *soit* fidèlement plat, de présentation finie*. Soit* X_0 *un sous-schéma fermé saturé de* X*, défini par un idéal nilpotent, et soit* R_0 *la relation d'équivalence induite par* R *sur* X_0*. Alors, si le faisceau-quotient* (fppf) $\widetilde{X_0/R_0}$ *est* représentable *par un* A*-schéma, il en est de même de* $\widetilde{X/R}$

Pour la démonstration, on renvoie à [**DG70**], § III.2, 7.1. Revenons maintenant au cas où A est un anneau *local artinien*. Soit $u : F \to G$ un morphisme *quasi-compact* entre A-groupes *localement de type fini*, et supposons de plus que u soit un *monomorphisme*. Alors, d'après 2.5.2, u est une *immersion fermée*.

On peut maintenant énoncer la variante suivante du théorème 3.2.

Théorème 3.3.2. — *Soient* A *un anneau local artinien,* G *un* A*-groupe* localement de type fini*,* F *un sous-groupe* fermé *de* G*,* plat *sur* A*.* [43] *Alors :*

(i) *Le faisceau-quotient* (fppf) $\widetilde{F\backslash G}$ *est représentable par un* A*-schéma* séparé et localement de type fini $F\backslash G$ *; de plus, la suite*

$$F \times_A G \rightrightarrows G \xrightarrow{\ p\ } F\backslash G$$

[41] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe.

[42] N.D.E. : On a ajouté cette sous-section.

[43] N.D.E. : Pour un exemple où F *n'est pas plat et* $\widetilde{F\backslash G}$ *pas représentable*, voir [**DG70**], § III.3, n°3.3.

est exacte dans la catégorie de tous les espaces annelés.

(ii) $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \xrightarrow{(\lambda, \mathrm{pr}_2)} \mathrm{G} \times_{(\mathrm{F}\backslash\mathrm{G})} \mathrm{G}$ *est un* isomorphisme *et* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *est* fidèlement plat et localement de présentation finie, *de sorte que* p *est un* F*-torseur localement trivial pour la topologie* (fppf).

(iii) *Si* G *est* plat (*resp.* de type fini, *resp.* lisse) *sur* A, *alors* $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *l'est aussi.*

(iv) $\mathrm{X} = \mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *est muni d'une action à droite de* G, *telle que* $p(e) \cdot g = p(g)$, *pour tout* $g \in \mathrm{G}$ *; par conséquent, les composantes connexes de* X *sont* de type fini *sur* A, irréductibles *et toutes de dimension* $\dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{F}$.

(v) *Si, de plus,* F *est un sous-groupe* invariant *de* G, *il existe sur* $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *une et une seule structure de* A*-groupe telle que* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ *soit un morphisme de* A*-groupes.*

Les assertions (i) et (ii) découlent de 3.2 et 3.3.1, et comme $\mathrm{G} \to \mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ est fidèlement plat et localement de présentation finie, l'assertion (iii) découle de EGA IV, 2.2.14, 2.7.1 et 17.7.7. On démontrera les assertions (iv) et (v) dans la section 5. Notons tout de suite le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.3. — *Soient* A *un anneau local artinien,* G *un* A*-groupe localement de type fini,* H *un sous-groupe fermé de* G, *plat sur* A. *On note* p *le morphisme* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ *et* λ (*resp.* pr_1) *le morphisme* $\mathrm{G} \times \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *défini par* $\lambda(g, h) = gh$ (*resp. la projection* $\mathrm{G} \times \mathrm{H} \to \mathrm{G}$). *Alors, pour tout ouvert* U *de* G/H, *on a*

$$\mathscr{O}(\mathrm{U}) = \{\phi \in \mathscr{O}(p^{-1}(\mathrm{U})) \mid \phi \circ \lambda = \phi \circ \mathrm{pr}_1\}$$

i.e. $\mathscr{O}(\mathrm{U})$ *est l'ensemble des* $\phi \in \mathscr{O}(p^{-1}(\mathrm{U}))$ *tels que* $\phi(gh) = \phi(g)$, *pour tout* A*-schéma* S *et* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$, $h \in \mathrm{H}(\mathrm{S})$.

En effet, comme $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ est fidèlement plat et localement de présentation finie, donc couvrant pour la topologie (fppf), cela résulte de IV, 3.3.3.2.

4. Construction de quotients $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ (cas général)

307 Nous supposons maintenant satisfaites les hypothèses du théorème 3.2, F et G n'étant pas nécessairement de type fini sur A.

4.1. Considérons tout d'abord une composante connexe G^{α} de G et montrons que *le saturé* $\mathscr{S}(\mathrm{G}^{\alpha})$ [(44)] *de* G^{α} *pour la relation d'équivalence définie par le groupoïde* G_* *est une partie ouverte et fermée de* G (autrement dit est la réunion de certaines composantes connexes de G).

Ce saturé est l'image de $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^{\alpha}$ par λ, donc est ouvert dans G (confer § 3.1). Si k est le corps résiduel de A et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, il reste à montrer que l'image de $(\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^{\alpha}) \otimes_{\mathrm{A}} k$ par $\lambda \otimes_{\mathrm{A}} k$ est fermée dans $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} k$, ou encore, d'après SGA 1, VIII.4.4, que l'image de $(\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^{\alpha}) \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k}$ par $\lambda \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k}$ est fermée. Comme $\mathrm{G}^{\alpha} \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k}$ est la réunion d'un nombre fini de composantes connexes de $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k}$, on est ramené au cas où A est un corps algébriquement clos, ce que nous allons supposer. Dans ce cas, $\mathscr{S}(\mathrm{G}^{\alpha})$ est la réunion des images de G^{α} par les translations à gauche $\ell_{u(x)}$, où

(44) N.D.E. : On a noté $\mathscr{S}(\mathrm{G}^{\alpha})$ au lieu de $\overline{\mathrm{G}^{\alpha}}$ le saturé de G^{α}.

x parcourt les points fermés de F ; l'assertion résulte donc de ce que ces images sont des composantes connexes de G.

4.2. Prenons en particulier pour G^α la composante connexe G^0 de l'origine de G. Alors $\mathscr{S}(\mathrm{G}^0)$ contient évidemment l'image de F par u qui n'est autre que la classe d'équivalence de l'origine. D'autre part, si F^β est une composante connexe de F, $\mathrm{F}^\beta \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0$ est connexe (2.1.2) de sorte que l'image de $\mathrm{F}^\beta \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0$ par λ est contenue dans la composante connexe de $u(\mathrm{F}^\beta)$ dans G. Autrement dit, $\mathscr{S}(\mathrm{G}^0)$ *est la réunion des composantes connexes qui rencontrent l'image de* F.

On remarquera aussi que le sous-schéma ouvert de G qui a $\mathscr{S}(\mathrm{G}^0)$ pour espace **308**
sous-jacent est un sous-groupe de G (que nous notons encore $\mathscr{S}(\mathrm{G}^0)$) : en effet le morphisme inversion de G conserve l'image de F et permute les composantes connexes de G qui rencontrent cette image ; il suffit donc de montrer que $\nu : \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ applique $\mathscr{S}(\mathrm{G}^0) \times_{\mathrm{A}} \mathscr{S}(\mathrm{G}^0)$ dans $\mathscr{S}(\mathrm{G}^0)$ et pour cela on peut supposer que A est un corps algébriquement clos (avec les notations de 4.1, $\mathscr{S}(\mathrm{G}^0) \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k}$ s'identifie en effet au saturé de $(\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k})^0$ par la relation d'équivalence définie par l'homomorphisme $u \otimes_{\mathrm{A}} \overline{k}$) ; si G^γ et G^δ sont alors des composantes connexes de $\mathscr{S}(\mathrm{G}^0)$, $\mathrm{G}^\gamma \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^\delta$ est connexe et son image par ν rencontre l'image de F ; par conséquent, $u(\mathrm{G}^\gamma \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^\delta)$ est contenu dans une composante connexe de G rencontrant $u(\mathrm{F})$.

4.3. Il résulte de ce qui précède que le groupoïde G_* de base G défini par u est la *somme directe* des groupoïdes $\mathscr{S}(\mathrm{G}_*^\alpha)$ induits par G_* sur les différentes parties ouvertes et fermées de G de la forme $\mathscr{S}(\mathrm{G}^\alpha)$. Le conoyau de G_* est donc la somme directe des conoyaux de ces groupoïdes $\mathscr{S}(\mathrm{G}_*^\alpha)$, qu'on est amené à étudier séparément.

Considérons tout d'abord le groupoïde $\mathscr{S}(\mathrm{G}_*^0)$ induit par G_* sur $\mathscr{S}(\mathrm{G}^0)$. Il est clair que $\mathscr{S}(\mathrm{G}_*^0)$ est le groupoïde de base $\mathscr{S}(\mathrm{G}^0)$ défini par l'homomorphisme de F dans $\mathscr{S}(\mathrm{G}^0)$ induit par u (§ 3.1). Le conoyau dont nous voulons prouver l'existence s'identifie donc à $\mathrm{F}\backslash\mathscr{S}(\mathrm{G}^0)$. Considérons d'autre part le groupoïde

$$\mathrm{G}_2^0 \overset{\ell_2'}{\underset{\ell_0'}{\overset{\ell_1'}{\rightrightarrows}}} \mathrm{G}_1^0 \overset{\ell_1}{\underset{\ell_0}{\rightrightarrows}} \mathrm{G}_0^0 = \mathrm{G}^0$$

induit par $\mathscr{S}(\mathrm{G}_*^0)$ sur G^0. Si l'on se reporte à la construction explicitée en V § 3.b), **309**
l'objet noté alors $\mathrm{Y}_0 \times_{\mathrm{X}_0} \mathrm{X}_1$ n'est autre que $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0$, de sorte que G_1^0 est l'image réciproque de G^0 par le morphisme $\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0 \to \mathscr{S}(\mathrm{G}^0)$ induit par λ.

Je dis que cette image réciproque est $\mathrm{F}_0 \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0$, où l'on note F_0 l'image réciproque de G^0 par u. En effet, si F^β est une composante connexe de F_0, $\mathrm{F}^\beta \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0$ est connexe (2.1.2) et $\lambda(\mathrm{F} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0)$ est contenu dans G^0 ; réciproquement, si F^β est une composante connexe de F non contenue dans F_0, l'image de $\mathrm{F}^\beta \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0$ est encore connexe et contient $u(\mathrm{F}^\beta)$; si $u(\mathrm{F}^\beta)$ n'est pas contenu dans G^0, $\lambda(\mathrm{F}^\beta \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G}^0)$ ne rencontre pas G^0.

Il résulte de ce qui précède que le groupoïde G_*^0 induit par G_* sur G^0 est le groupoïde de base G^0 défini par l'homomorphisme $\mathrm{F}_0 \to \mathrm{G}^0$ induit par u. Comme G^0, et donc

F_0, sont de type fini sur A, alors, d'après le paragraphe 4, G^0_* possède un conoyau qui n'est autre que $F_0\backslash G^0$.

Je dis maintenant que $F_0\backslash G^0$ *s'identifie à* $F\backslash\mathscr{S}(G^0)$. En effet, la démonstration est analogue à celle de la première partie de l'assertion (i) du lemme V § 6.1 ; considérons le diagramme :

$$\mathscr{S}(G^0) \xleftarrow{\ v\ } F\times_A G^0 \xrightarrow{\ \mathrm{pr}_2\ } G^0 \quad ,$$

où v est le morphisme induit par λ. Comme pr_2 possède une section, pr_2 est un épimorphisme effectif universel de sorte que $F_0\backslash G^0$ coïncide avec $\mathrm{Coker}(v_0, v_1)$, où

$$\begin{tikzcd} V_2 \arrow[r, shift left=2, "v'_2"] \arrow[r, "v'_1"] \arrow[r, shift right=2, "v'_0"'] & V_1 \arrow[r, shift left, "v_1"] \arrow[r, shift right, "v_0"'] & V = F\times_A G^0 \end{tikzcd}$$

310 est l'image réciproque par pr_2 du groupoïde G^0_* (cf. V § 3.a), c'est-à-dire également l'image réciproque de $\mathscr{S}(G^0_*)$ par le morphisme composé

$$F\times_A G^0 \xrightarrow{\text{inclusion}} F\times_A \mathscr{S}(G^0) \xrightarrow{\ \mathrm{pr}_2\ } \mathscr{S}(G^0).$$

De même, comme v est fidèlement plat et quasi-compact, $F\backslash\mathscr{S}(G^0)$ coïncide avec le conoyau de l'image réciproque de $\mathscr{S}(G^0_*)$ par le changement de base v. Or cette image réciproque est isomorphe à V_* d'après l'Exp. V, § 3.c ; il résulte de là que l'inclusion canonique de G^0_* dans $\mathscr{S}(G^0_*)$ induit un isomorphisme de $F_0\backslash G^0$ sur $F\backslash\mathscr{S}(G^0)$.

On remarque enfin que : *la construction de* $F\backslash\mathscr{S}(G^0)$ *commute aux changements de base finis et localement libres*, parce qu'il en va de même pour $F_0\backslash G^0$ (cf. N.D.E. (37) et 4.6 plus loin).

4.4. Il reste à construire le conoyau du groupoïde $\mathscr{S}(G^\alpha_*)$ lorsque G^α est une composante connexe quelconque de G. Si A' est une A-algèbre locale, finie et libre assez grande (cf. 3.2), $G^\alpha\otimes_A A'$ est la réunion d'un nombre fini de composantes connexes $C^1,\dots,C^n$ de $G\otimes_A A'$ qui possèdent toutes un point strictement rationnel. Pour tout i, il existe donc une translation à droite r_i de $G\otimes_A A'$ qui applique $G^0\otimes_A A'$ sur C^i ; cette translation induit un isomorphisme du groupoïde $\mathscr{S}(G^0_*)\otimes_A A'$ sur $\mathscr{S}(C^i_*)$, de sorte que le groupoïde induit par $G_*\otimes_A A'$ sur le saturé de C^i possède un conoyau.

Comme $\mathscr{S}(G^\alpha_*)\otimes_A A'$ est la somme directe d'un certain nombre d'entre les $\mathscr{S}(C^i_*)$, alors $\mathscr{S}(G^\alpha_*)\otimes_A A'$ possède un conoyau ; ce conoyau est la somme directe d'un certain nombre d'exemplaires de $(F_0\otimes_A A')\backslash(G^0\otimes_A A')$ de sorte que toute partie finie de ce conoyau est contenue dans un ouvert affine ; de plus, la construction de ce conoyau
311 commute aux extensions finies et localement libres de la base (cf. N.D.E. (37) et 4.6 plus loin). On voit donc comme en 3.2.3 que ce conoyau est de la forme $Y\otimes_A A'$, où Y est un conoyau de $\mathscr{S}(G^\alpha_*)$.

4.5. Nous avons donc construit $\mathrm{F}\backslash\mathrm{G}$ et montré qu'il est somme directe de schémas de type fini sur A. Les autres assertions du théorème 3.2 se ramènent directement à des assertions concernant les groupoïdes $\mathscr{S}(\mathrm{G}_*^\alpha)$. Comme en V § 6, la seconde assertion de (i) découle de la première et de (ii) et (iii), donc il suffit de prouver (ii), (iii) et (iv)(a). Comme A' est une A-algèbre locale, finie et libre, le morphisme $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ est fidèlement plat et de présentation finie, donc, d'après SGA 1, VIII (3.1, 4.6, 5.4), il suffit de vérifier les assertions correspondantes dans le cas du groupoïde $\mathscr{S}(\mathrm{G}_*^\alpha) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$. Or celui-ci est isomorphe à la somme directe d'un nombre fini d'exemplaires de $\mathscr{S}(\mathrm{G}_*^0) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ (confer 4.4), de sorte qu'on est ramené au groupoïde $\mathscr{S}(\mathrm{G}_*^0)$.

Pour ce dernier on continue de calquer la preuve établie en V § 6, comme on a commencé à le faire en 4.3.

4.6. Ajoutons pour terminer ce paragraphe quelques remarques concernant le lemme 6.1 et le § 9.a de l'exposé V : *avec les hypothèses et les notations de* V § 9.a, nous cherchons une condition sous laquelle la construction du conoyau du $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$-groupoïde X_* commute à une extension $\pi : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ de la base. Comme les conoyaux de X_* et X'_* s'identifient aux conoyaux des groupoïdes U_* et U'_* induits par X_* et X'_* sur les quasi-sections U et U', on est ramené au cas d'un $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$-groupoïde vérifiant les hypothèses du théorème V 4.1.

(45) Si l'on note Y le conoyau de U_*, $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ et Y_1 le conoyau de U'_*, on a vu en V § 9.a que le morphisme canonique $\mathrm{Y}_1 \to \mathrm{Y}'$ est un homéomorphisme (et même un homéomorphisme universel) ; on peut donc identifier Y_1 et Y' comme espaces topologiques. Si $p : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}$ est le morphisme canonique et si $p' : \mathrm{U}' \to \mathrm{Y}'$ en est déduit par changement de base, nous voulons alors que la suite de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}$-modules

$$(*) \qquad \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'} \longrightarrow p'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{U}'}) \rightrightarrows p'_* u'_{1*}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}'_1}) = p'_* u_{0*}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}'_1})$$

soit exacte. (46) Comme on s'est placé sous les hypothèses de V 4.1, u_0 et u_1 sont finis et localement libres ; et, d'après V.4.1 (ii), p est entier. Alors, p et $p \circ u_i$ sont affines, donc séparés et quasi-compacts. 312

Par conséquent, si S' est *plat* sur S, il résulte de EGA III_1, 1.4.15 (compte tenu de la correction $\mathrm{Err}_{\mathrm{III}}$ 25 dans EGA III_2), que la suite $(*)$ s'identifie à l'image réciproque de la suite

$$(**) \qquad \mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \longrightarrow p_*(\mathscr{O}_{\mathrm{U}}) \rightrightarrows p_* u_{1*}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}_1}) = p_* u_{0*}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}_1}),$$

qui est une suite exacte. (47) Un raisonnement analogue s'applique lorsque le groupoïde X_* possède « localement » des quasi-sections (cf. la démonstration du théorème V 7.1). On obtient donc la :

Proposition 4.6.1. — *La construction du conoyau de* X_* *commute aux extensions* plates *de la base lorsque* X_* *possède localement des quasi-sections.*

(45) N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

(46) N.D.E. : Dans ce qui suit, on a modifié l'original, les hypothèses supplémentaires faites sur X_* étant superflues.

(47) N.D.E. : On a ajouté d'une part la phrase suivante et, d'autre part, la numérotation 4.6.1 ci-dessous, afin de mettre en évidence le résultat énoncé.

4.7. Considérons maintenant le cas du groupoïde G_* du théorème 3.2 lorsqu'on suppose provisoirement F et G de type fini sur A.

D'après 3.2.2 il existe une algèbre A′ locale, finie et libre sur A telle que le groupoïde $G_* \otimes_A A'$ possède « localement » des quasi-sections. Pour toute extension $T \to \operatorname{Spec} A$ de la base, la suite

$$(F''\backslash G'') \times_{\operatorname{Spec} A} T \rightrightarrows (F'\backslash G') \times_{\operatorname{Spec} A} T \longrightarrow (F\backslash G) \times_{\operatorname{Spec} A} T$$

déduite du diagramme $(*)$ de 3.2.3 est exacte. Si l'on suppose de plus T plat sur Spec A, alors $(F''\backslash G'') \times_{\operatorname{Spec} A} T$ et $(F'\backslash G') \times_{\operatorname{Spec} A} T$ s'identifient respectivement, d'après 4.6, aux conoyaux des groupoïdes

$$(G_* \otimes_A A'') \underset{\operatorname{Spec} A}{\times} T \qquad \text{et} \qquad (G_* \otimes_A A') \underset{\operatorname{Spec} A}{\times} T.$$

Le diagramme déduit de 3.2.3 $(*)$ par le changement de base $T \to \operatorname{Spec} A$ montre alors que $(F\backslash G) \times_{\operatorname{Spec} A} T$ s'identifie au conoyau de $G_* \times_{\operatorname{Spec} A} T$. Un raisonnement analogue est valable dans le cas général (i.e. lorsque G et F sont localement de type fini sur A). On obtient donc : [48]

Proposition 4.7.1. — *Sous les hypothèses du théorème* 3.2, *pour tout* A-*schéma* plat T, $(F\backslash G) \times_{\operatorname{Spec} A} T$ *s'identifie au quotient à gauche de* $G \times_{\operatorname{Spec} A} T$ *par* $F \times_{\operatorname{Spec} A} T$.

5. Liens avec l'Exposé IV et conséquences

313 **5.1.** [49] Nous reprenons les notations du § 3 et les hypothèses du théorème 3.2 ; on a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
F \times_A G \times_A G \arrow[r, "F\times\nu"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{pr}_2\times G"'] \arrow[d, shift left, "\lambda\times G"] & F \times_A G \arrow[d, shift right, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[d, shift left, "\lambda"] \\
G \times_A G \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "p\times G"'] & G \arrow[d, "p"] \\
(F\backslash G) \times_A G \arrow[r, dashed, "\rho"] & F\backslash G
\end{tikzcd} ,$$

qui satisfait aux égalités $\mathrm{pr}_2 \circ (F \times \nu) = \nu \circ (\mathrm{pr}_2 \times G)$ et $\lambda \circ (F \times \nu) = \nu \circ (\lambda \times G)$. En outre, comme G est supposé *plat* sur A, la suite verticale de gauche est exacte d'après 4.7, de sorte que ν induit un morphisme de A-schémas :

$$\rho : \ (F\backslash G) \underset{A}{\times} G \longrightarrow F\backslash G .$$

[48] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.7.1 ci-dessous, afin de mettre en évidence le résultat énoncé.

[49] N.D.E. : On a changé le titre de de cette section (nommée « Compléments » dans l'original).

Ce morphisme ρ fait opérer G à droite sur $F\backslash G$ comme on le vérifie immédiatement ; de plus, le morphisme canonique $G \to F\backslash G$ commute aux opérations de G à droite sur G et $F\backslash G$.

[50] Ceci prouve la première assertion du point (ii′) de 3.2. D'après 2.5.4, on obtient alors que les composantes connexes de $X = F\backslash G$ sont de type fini, irréductibles, et toutes de même dimension. Pour évaluer cette dimension, on peut supposer que $A = k$ et que k est algébriquement clos. D'après I, 2.3.3.1, le stabilisateur du k-point $p(e)$ est représenté par la fibre $H = p^{-1}(p(e))$, et comme $F\backslash G$ est le quotient de G par F dans la catégorie des espaces annelés, cette fibre a pour espace sous-jacent $u(F)$, et comme $\mathrm{Ker}(u)$ est fini, on a donc $\dim H = \dim u(F) = \dim F$. D'après 2.5.4 (ii), on obtient donc que $\dim X = \dim G - \dim F$. Ceci prouve le point (ii′) du théorème 3.2 (et donc aussi le point (iv) de 3.3.2).

5.2. Lorsque l'homomorphisme de A-groupes $u : F \to G$ est un *monomorphisme*, on peut retrouver 5.1 en se servant des résultats de l'exposé IV. En effet, le morphisme canonique $p : G \to F\backslash G$ est fidèlement plat et ouvert d'après 3.2 ; il est donc couvrant pour la topologie (fpqc) (IV 6.3.1) et l'on peut appliquer les corollaires IV.5.2.2 et IV.5.2.4.

En particulier, *si nous supposons, en plus des hypothèses de* 3.2, *que u est l'inclu-* 314
sion dans G *d'un sous-groupe* invariant F, *il existe sur* $F\backslash G$ *une et une seule structure de* A*-groupe telle que le morphisme canonique* $p : G \to F\backslash G$ *soit un homomorphisme de* A*-groupes.* [51] Ceci prouve le point (v) de 3.3.2.

5.3. Nous allons maintenant passer en revue quelques énoncés de l'exposé IV.

5.3.1. — Les énoncés IV 5.2.7 et IV 5.3.1 se traduisent comme suit. Soient F et G deux groupes *localement de type fini* et *plats* sur A, F étant un sous-groupe *invariant fermé* de G. Les applications $H \mapsto F\backslash H$ et $H' \mapsto H' \times_{(F\backslash G)} G$ définissent une *correspondance bijective* entre les A-sous-groupes *plats* de G contenant F et les A-sous-groupes *plats* de $F\backslash G$. Dans cette bijection les sous-groupes *fermés* (resp. *invariants*) de G contenant F correspondent aux sous-groupes *fermés* (resp. *invariants*) de $F\backslash G$. [52]

5.3.2. — La proposition IV 5.2.9 implique le résultat suivant. Soient F, H et G des groupes *localement de type fini et plats* sur A ; on suppose $F \subset H \subset G$, avec F *fermé* dans G et *invariant* dans H. Dans ces conditions, $F\backslash H$ opère librement à gauche sur $F\backslash G$, le schéma quotient $(F\backslash H)\backslash(F\backslash G)$ existe et on a un isomorphisme canonique de schémas à groupe d'opérateurs G :

$$(F\backslash H)\big\backslash(F\backslash G) = H\backslash G \quad .$$

5.3.3. — De IV 5.2.8, enfin, découle l'assertion que voici. Soient F, H et G des groupes *localement de type fini et plats* sur A ; on suppose que F est contenu, *fermé et invariant* 315

[50] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.
[51] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[52] N.D.E. : En plus des énoncés précités de l'Exp. IV, on utilise le fait que, puisque $G \to F\backslash G$ est fidèlement plat, alors un A-sous-groupe H de G est plat sur A si et seulement si $F\backslash H$ l'est.

dans G, que H est contenu dans G et que $\mathrm{F}\cap\mathrm{H}$ est *plat* sur A. Soit alors $\mathrm{F}\overset{\tau}{\times}_{\mathrm{A}}\mathrm{H}$ le A-groupe qui a pour schéma sous-jacent le produit $\mathrm{F}\times_{\mathrm{A}}\mathrm{H}$, la multiplication étant définie par le morphisme « $((x,h),(y,h'))\mapsto(xhyh^{-1},hh')$ » ; de même, soit $u:\mathrm{H}\cap\mathrm{F}\to\mathrm{F}\overset{\tau}{\times}_{\mathrm{A}}\mathrm{H}$ le monomorphisme $x\mapsto(x^{-1},x)$ et soit $\mathrm{F}\cdot\mathrm{H}$ le quotient $(\mathrm{F}\cap\mathrm{H})\backslash(\mathrm{F}\overset{\tau}{\times}_{\mathrm{A}}\mathrm{H})$. Dans ces conditions il existe un isomorphisme canonique

$$\mathrm{F}\backslash(\mathrm{F}\cdot\mathrm{H})=(\mathrm{F}\cap\mathrm{H})\backslash\mathrm{H}\quad.$$

5.4. (53) Soit $u:\mathrm{G}\to\mathrm{H}$ un morphisme *quasi-compact* entre A-groupes *localement de type fini*, tel que le noyau N de u soit *plat* sur A. Dans ce cas, d'après 3.3.2 et 5.2, le A-groupe quotient $\mathrm{C}=\mathrm{N}\backslash\mathrm{G}$ existe et le morphisme $p:\mathrm{G}\to\mathrm{C}$ est fidèlement plat et localement de présentation finie. D'autre part, d'après IV 5.2.6, u induit un monomorphisme $v:\mathrm{C}\to\mathrm{H}$, qui est quasi-compact (car u l'est et $\mathrm{G}\to\mathrm{C}$ est surjectif, cf. EGA IV_1, 1.1.3), donc est une *immersion fermée*, d'après 2.5.2. On a donc obtenu la proposition suivante :

Proposition 5.4.1. — *Soit* $u:\mathrm{G}\to\mathrm{H}$ *un morphisme* quasi-compact *entre* A*-groupes* localement de type fini*, tel que* $\mathrm{N}=\operatorname{Ker}u$ *soit* plat *sur* A*. Alors on a la factorisation :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{H} \\ \mathrm{N}\backslash\mathrm{G} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

où p *est* fidèlement plat, localement de présentation finie*, et* i *une* immersion fermée.

Supposons de plus G *plat* sur A. Alors, d'après 3.3.2, $\mathrm{C}=\mathrm{N}\backslash\mathrm{G}$ est plat sur A et donc le quotient $\mathrm{X}=\mathrm{C}\backslash\mathrm{H}$ existe dans $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{A}})$ et représente le faisceau (fppf) quotient $\widetilde{\mathrm{C}\backslash\mathrm{H}}$, et $q:\mathrm{H}\to\mathrm{X}$ est un C-torseur. Par conséquent, notant $e:\operatorname{Spec}\mathrm{A}\to\mathrm{G}$ la section unité de G, v induit un isomorphisme de faisceaux (fppf) entre $\widetilde{\mathrm{C}}$ et le produit fibré de q et de $q\circ e:\operatorname{Spec}\mathrm{A}\to\mathrm{X}$, qui est représenté par un sous-schéma fermé de H. Par conséquent, v est un *isomorphisme* de C sur un sous-schéma en groupes fermé K de G (égal au stabilisateur du A-point $q\circ e$ de X). (Ceci fournit une autre démonstration du fait que tout monomorphisme quasi-compact $v:\mathrm{C}\to\mathrm{H}$ entre A-groupes localement de type fini, est une immersion fermée, cf. 2.5.2 et VI_{B} 1.4.2.)

Supposons de plus que C soit un sous-groupe *invariant* de H ; dans ce cas, le A-groupe $\overline{\mathrm{H}}=\mathrm{C}\backslash\mathrm{H}$ est le conoyau dans la catégorie des A-groupes du morphisme $u:\mathrm{G}\to\mathrm{H}$, et K est le noyau du morphisme $\mathrm{H}\to\overline{\mathrm{H}}$. Lorsque G et H sont des A-groupes abéliens, K est l'*image* de u dans la catégorie des A-groupes abéliens, alors que $\mathrm{C}=(\operatorname{Ker}u)\backslash\mathrm{G}$ est la *coïmage* de u. Compte tenu de l'isomorphisme $\mathrm{C}\xrightarrow{\sim}\mathrm{K}$ qu'on vient d'établir, on obtient : (53)

Théorème 5.4.2. — *Soit* k *un corps. La catégorie des* k*-groupes algébriques* commutatifs *est abélienne.*

(53) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit ; en particulier, on a ajouté la proposition 5.4.1.
(53) N.D.E. : On a ajouté à ce théorème le numéro 5.4.2.

En effet, lorsque k est un corps, $\mathrm{Ker}(u)$ est plat sur k quelque soit u.

[54] Notons que la sous-catégorie pleine des k-groupes algébriques commutatifs *affines* est épaisse. En effet, considérons une suite exacte de k-groupes algébriques commutatifs :

$$1 \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}/\mathrm{N} \longrightarrow 1\,.$$

Si G est affine, il est clair que N l'est, et G/N l'est aussi d'après un théorème de Chevalley, cf. $\mathrm{VI_B}$, 11.17. Réciproquement, si N et G/N sont affines, alors G l'est aussi d'après $\mathrm{VI_B}$, 9.2 (viii). On obtient donc le

Corollaire 5.4.3. — *Soit k un corps. La catégorie des k-groupes algébriques* commutatifs affines *est abélienne.*

Signalons de plus que la catégorie de tous les k-groupes *commutatifs affines* (pas nécessairement de type fini) est abélienne ; ceci se déduit de $\mathrm{VI_B}$, 11.17 et 11.18.2 (cf. [**DG70**], § III.3, 7.4), voir aussi $\mathrm{VII_B}$, 2.4.2 pour une démonstration utilisant les groupes formels.

5.5. Soit G un groupe *localement de type fini et plat* sur un anneau local artinien A. On sait (2.3) que la composante connexe de l'origine G^0 est un sous-schéma en groupes de G invariant et ouvert, donc également plat sur A. Alors, d'après 3.2 et 5.2, $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ est un A-schéma en groupes, plat sur A. De plus, comme chaque composante connexe G^α de G est saturée pour la relation d'équivalence définie par G^0, alors $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ est la somme directe des $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}^\alpha$ (cf. 4.3). En particulier, la composante connexe de l'origine dans $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ n'est autre que $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}^0 \cong \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}$ et donc $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G} \to \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}$ est un isomorphisme local à l'origine. Par conséquent, $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ est *étale* sur Spec A, d'après $\mathrm{VI_B}$, 1.3. [55] On obtient donc la proposition suivante (pour le point (ii), on renvoie à [**DG70**], § II.5, 1.7–1.10) : 316

Proposition 5.5.1. — *Soient* A *un anneau local artinien et* G *un* A*-groupe* localement de type fini et plat.

(i) $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ *est un* A*-groupe étale.*

(ii) *Par conséquent, si* $\mathrm{A} = k$ *est un corps algébriquement clos,* $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ *est un k-groupe constant, opérant de façon simplement transitive sur l'ensemble des composantes connexes de* G *; donc si* G *est* algébrique*,* $\mathrm{G}^0\backslash\mathrm{G}$ *est fini.*

5.6. Soient maintenant k un corps *parfait* et G un k-groupe *localement de type fini.* Nous avons vu (0.2) que $\mathrm{G_{réd}}$ est alors un sous-schéma en groupes de G. De plus, la classe d'équivalence de l'origine de G pour l'opération de $\mathrm{G_{réd}}$ à gauche sur G est tout l'espace sous-jacent à G. Donc, d'après le théorème 3.2, on obtient :

Proposition 5.6.1. — *Soient k un corps* parfait *et* G *un k-groupe* localement de type fini. *Alors le k-schéma* $\mathrm{G_{réd}}\backslash\mathrm{G}$ *est le spectre d'une k-algèbre finie et locale, de corps résiduel k.*

---

[54] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

[55] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui précède et l'on a ajouté la proposition 5.5.1, pour mettre en évidence ce résultat.

(56) En effet, d'après 3.2, $G_{\text{réd}}\backslash G$ a un seul point, de corps résiduel k, et est un k-schéma de type fini ; c'est donc le spectre d'une k-algèbre locale de dimension finie (cf. EGA I, 6.4.4).

Proposition 5.6.2. — *Soit* $u : F \to G$ *un morphisme entre groupes* localement de type fini *sur un corps* parfait k. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est* plat.

(ii) $u^0 : F^0 \to G^0$ *est* dominant *et le morphisme* $v : F_{\text{réd}}\backslash F \to G_{\text{réd}}\backslash G$ *induit par* u *est* plat.

317 (57) Considérons en effet le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"'] & F_{\text{réd}}\backslash F \arrow[d, "v"] \\ G \arrow[r, "q"] & G_{\text{réd}}\backslash G \end{tikzcd} \quad ,$$

où p et q désignent les projections canoniques. D'après 3.2 (iv), p et q sont fidèlement plats ; par conséquent, si u est plat, alors $q \circ u = v \circ p$ est plat, donc également v.

Réciproquement, supposons v plat et u^0 dominant. Comme u^0 est quasi-compact (F^0 étant de type fini sur k, d'après 2.4, donc noethérien), il envoie donc le point générique ξ de F^0 sur le point générique η de G^0. Soit R la k-algèbre finie locale dont $G_{\text{réd}}\backslash G$ est le spectre, et soit $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. On a des morphismes locaux d'anneaux locaux : $R \to \mathscr{O}_{G,\eta} \to \mathscr{O}_{F,\xi}$. Notons qu'on a un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} G_{\text{réd}} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d, "q"] \\ \operatorname{Spec}(R/\mathfrak{m}) \arrow[r] & \operatorname{Spec}(R) \end{tikzcd}$$

et donc $\mathscr{O}_{G,\eta}/\mathfrak{m}\mathscr{O}_{G,\eta} \cong \mathscr{O}_{G_{\text{réd}},\eta} = \kappa(\eta)$, de sorte que $\mathscr{O}_{F,\xi}/\mathfrak{m}\mathscr{O}_{F,\xi}$ est plat sur $\mathscr{O}_{G,\eta}/\mathfrak{m}\mathscr{O}_{G,\eta}$.

D'autre part, comme q et $v \circ p$ sont plats, G et F sont plats sur R. Par conséquent, d'après le critère local de platitude (cf. EGA IV_3, 11.3.10.2), $\mathscr{O}_{F,\xi}$ est plat sur $\mathscr{O}_{G,\eta}$, c.-à-d., u est plat au point ξ. Donc, d'après 2.5.3, u est plat.

6. Compléments sur les k-groupes non nécessairement de type fini

(58) Signalons encore les résultats suivants, qui seront utiles dans l'ajout VI_B, § 12. On fixe un corps de base k.

(56) N.D.E. : On a ajouté la numérotation 5.6.1, ainsi que la démonstration qui suit.

(57) N.D.E. : On a détaillé la démonstration de (ii) ⇒ (i), et l'on a simplifié le diagramme ci-dessous.

(58) N.D.E. : On a ajouté les résultats qui suivent, tirés de [**Per75**]. Notons que le lemme 6.1 peut s'exprimer, dans le langage de Weil, en disant que « tout point de G est produit de deux points génériques ».

Lemme 6.1. — *Soit* G *un k-groupe. Pour tout $x \in \mathrm{G}$, il existe un point $u \in \mathrm{G} \times \mathrm{G}$ tel que $\mu(u) = x$ et que les deux projections $p_1(u)$ et $p_2(u)$ soient des points maximaux de* G.

Démonstration. Posons $\mathrm{K} = \kappa(x)$. Comme la projection $\mathrm{G}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{G}$ envoie points maximaux sur points maximaux, on est ramené au cas où x est rationnel. Alors la translations à gauche λ_x (resp. ρ_x) nous donne un morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{G} \times \mathrm{G}$, $g \mapsto (\lambda_x(g^{-1}), g)$ (resp. $g \mapsto (g, \rho_x(g^{-1}))$) qui induit un isomorphisme de G sur $\mu^{-1}(x)$, inverse de p_2 (resp. p_1). Donc, si u est un point maximal de $\mu^{-1}(x)$, alors $p_1(u)$ et $p_2(u)$ sont des points maximaux de G et donc u convient.

Corollaire 6.2. — *Soit $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de k-groupes, quasi-compact et dominant.*

(i) *f est surjectif.*

(ii) *Si* H *est réduit, f est fidèlement plat.*

Démonstration. Notons μ_{H} (resp. μ_{G}) la multiplication de H (resp. G). Soit $h \in \mathrm{H}$. D'après 6.1, il existe $u \in \mathrm{H} \times \mathrm{H}$ tel que $\mu_{\mathrm{H}}(u) = h$ et que $\alpha = p_1(u)$ et $\beta = p_2(u)$ soient des points maximaux de H. Comme f est quasi-compact et dominant, $f^{-1}(\alpha)$ et $f^{-1}(\beta)$ sont non vides (cf. EGA IV_1, 1.1.5), et donc il existe $v \in \mathrm{G} \times \mathrm{G}$ tel que $(f \times f)(v) = u$ (cf. EGA I, 3.5.2). Alors $g = \mu_{\mathrm{G}}(v)$ vérifie $f(g) = h$. Ceci montre que f est surjectif.

Supposons de plus H réduit. Alors $\mathscr{O}_{\mathrm{H},\alpha}$ est un corps, et on a vu plus haut que $f^{-1}(\alpha) \neq \varnothing$, donc f est plat en tout point ξ de $f^{-1}(\alpha)$, donc f est plat d'après le lemme 2.5.3.

Rappel 6.3. — Rappelons (cf. EGA IV_3, 11.10.1) qu'un morphisme de schémas $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est dit *schématiquement dominant* s'il vérifie la condition suivante : pour tout ouvert U de Y, si Z est un sous-schéma fermé de U tel que le morphisme $f^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ se factorise à travers Z, alors $\mathrm{Z} = \mathrm{U}$. Lorsque f est quasi-compact et quasi-séparé, ceci équivaut à dire que l'image fermée de X par f est Y (cf. *loc. cit.*, 11.10.3 (iv) et EGA I, 9.5.8).

Proposition 6.4. — *Soit $f : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ un morphisme quasi-compact de k-groupes. Alors l'image fermée de f est un sous-schéma en groupes H' de* G, *et f se factorise en :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & \mathrm{G} \\ \mathrm{H}' \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

où f' est schématiquement dominant, quasi-compact et surjectif.

Démonstration. Comme H est séparé (0.3), f est quasi-compact et séparé, donc $f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{H}})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$-module quasi-cohérent, et l'image fermée H' de f existe et est le sous-schéma fermé de G défini par l'idéal quasi-cohérent $\mathscr{I} = \mathrm{Ker}(\mathscr{O}_{\mathrm{G}} \to f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{H}}))$ (cf. EGA I, § 9.5).

Notons c_{G} et μ_{G} (resp. c_{H} et μ_{H}) les morphismes d'inversion et de multiplication de G (resp. H). Alors $c_{\mathrm{G}} \circ f = f \circ c_{\mathrm{H}}$ se factorise à travers le sous-schéma fermé $c_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}')$, d'où $\mathrm{H}' \subset c_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}')$ et donc $\mathrm{H}' = c_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}')$ (puisque $c_{\mathrm{G}}^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$). De même, comme $f \circ \pi_{\mathrm{H}} = \pi_{\mathrm{G}} \circ (f \times f)$ se factorise par H′, alors $f \times f$ se factorise à travers le sous-schéma fermé $\pi_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{H}')$ de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$. D'autre part, comme la formation de l'image fermée commute aux changements de base plats (EGA III 1.4.15 et IV_1 1.7.21), l'image fermée de $f \times \mathrm{id}_{\mathrm{H}}$ (resp. $\mathrm{id}_{\mathrm{H}'} \times f$) est $\mathrm{H}' \times \mathrm{H}$ (resp. $\mathrm{H}' \times \mathrm{H}'$). Donc, par « transitivité des images fermées » (EGA I, 9.5.5), l'image fermée de $f \times f$ est $\mathrm{H}' \times \mathrm{H}'$, qui est donc contenue dans $\pi_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{H}')$, i.e. la restriction de π_{G} à $\mathrm{H}' \times \mathrm{H}'$ se factorise par H′. Ceci montre que H′ est un sous-schéma en groupes fermé de G. Notons i l'inclusion $\mathrm{H}' \hookrightarrow \mathrm{G}$.

Alors f égale $i \circ f'$, où $f' : \mathrm{H} \to \mathrm{H}'$ est schématiquement dominant et quasi-compact (puisque f est quasi-compact et i séparé). Donc, d'après 6.2, f' est surjectif. Ceci prouve 6.4.

On peut maintenant énoncer le théorème suivant ([**Per75**], V 3.1 & 3.2, voir aussi [**Per76**], 0.0 & 0.1).

Théorème 6.5 (D. Perrin). — *Soit* G *un k-groupe* quasi-compact. *Alors*

(i) G *est limite projective d'un système filtrant* (G_i) *de k-groupes de type fini* (*dont les morphismes de transition* $u_{ij} : \mathrm{G}_j \to \mathrm{G}_i$ *sont affines pour i assez grand*) *et les morphismes* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_i$ *sont fidèlement plats* (*et affines pour i assez grand*).

(ii) *Soit* H *un sous-k-groupe fermé de* G. *Alors le faisceau* (fpqc) *quotient* $\widetilde{\mathrm{G}/\mathrm{H}}$ *est un k-schéma dans les deux cas suivants :*

(1) *L'immersion* $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *est de présentation finie ; dans ce cas,* G/H *est de type fini sur k.*

(2) H *est invariant dans* G.

Pour la démonstration de ce théorème (qui repose sur plusieurs théorèmes intermédiaires), on renvoie à [**Per75**]. Pour la commodité du lecteur, démontrons toutefois les deux corollaires ci-dessous, cf. [**Per75**] V 3.3 à 3.4 ou [**Per76**] 4.2.3 à 4.2.5.

Corollaire 6.6. — *Soit* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme quasi-compact de k-groupes.*

(i) *Si f est schématiquement dominant, il est fidèlement plat.*

(ii) *Ceci est le cas, en particulier, si* H *est affine et si le morphisme* $f^\natural : \mathscr{O}(\mathrm{H}) \to \mathscr{O}(\mathrm{G})$ *est injectif.*

Démonstration. Supposons f schématiquement dominant. Alors, d'après 6.2 (i), f est surjectif donc, d'après 2.5.3, il suffit de montrer que f est plat en l'élément neutre de G. Comme $\mathscr{O}_{\mathrm{H},e} = \mathscr{O}_{\mathrm{H}^0,e}$ (cf. 2.6.5), on peut remplacer H par H^0, et donc supposer H irréductible. Alors H est quasi-compact (*loc. cit.*) et puisque f est quasi-compact, G l'est aussi. D'après 6.5 (i), $\mathrm{H} = \varprojlim_i \mathrm{H}_i$, où chaque H_i est un k-groupe algébrique. Notons N_i le noyau de $\mathrm{G} \to \mathrm{H}_i$, c'est un sous-$k$-groupe fermé invariant de G. De plus, comme la section unité $\{e\} \to \mathrm{H}_i$ est de présentation finie, l'immersion $\mathrm{N}_i \to \mathrm{G}$ l'est aussi, donc d'après 6.5 (ii), le quotient (fpqc) G/N_i est un k-groupe algébrique. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_i"'] & \mathrm{H} \arrow[d, "p_i"] \\ \mathrm{G}/\mathrm{N}_i \arrow[r, "f_i"] & \mathrm{H}_i \end{tikzcd}$$

où f est schématiquement dominant, p_i, q_i sont fidèlement plats (donc schématiquement dominants). Alors $f_i \circ q_i = p_i \circ f$ est schématiquement dominant, et donc f_i l'est aussi. D'autre part, f_i est un monomorphisme, donc une immersion fermée, puisque G/N_i et H_i sont algébriques (2.5.2). Il en résulte que f_i est un isomorphisme, et donc $\mathrm{G} \to \mathrm{H}_i$ est fidèlement plat. Alors, d'après [**BAC**] I § 2.7, Prop. 9, le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est plat ; d'autre part, il est surjectif d'après 6.2 (i), donc il est fidèlement plat. Ceci prouve le point (i), et le point (ii) en découle, car si H est affine et $f^\natural$ injectif, alors l'image fermée de f égale H, donc f est schématiquement dominant (cf. 6.4).

Corollaire 6.7. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* k*-groupes et soit* $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}(u)$*. On suppose* u *quasi-compact.*

(i) *Le faisceau* (fpqc) *quotient* $\widetilde{\mathrm{G}/\mathrm{N}}$ *est représenté par un* k*-schéma en groupes* G/N*, et* u *se factorise en :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{H} \\ \mathrm{G}/\mathrm{N} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

où p *est fidèlement plat et* i *une immersion fermée.*

(ii) *En particulier, si* u *est un monomorphisme,* u *est une immersion fermée, et si* u *est schématiquement dominant,* u *est fidèlement plat.*

Démonstration. (i) D'après 6.4 et 6.6, l'image fermée G' de u est un sous-schéma en groupes fermé de G, et $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est fidèlement plat et quasi-compact. On a évidemment $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{N}$, et donc d'après l'Exp. IV, 3.3.2.1 et 5.1.7, G' représente le faisceau (fpqc) quotient $\widetilde{\mathrm{G}/\mathrm{N}}$.

(ii) La deuxième assertion est contenue dans 6.6, montrons la première. Si u est un monomorphisme, il en est de même de p, alors p est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme effectif, donc un isomorphisme (cf. IV, 1.14). Ceci prouve 6.7

Signalons enfin les corollaires suivants (cf. [**Per76**], 4.2.6 à 4.2.8).

Corollaire 6.8. — *La catégorie des* k*-schémas en groupes quasi-compacts commutatifs est* abélienne.

Tenant compte de 6.7, la démonstration est analogue à celle de 5.4.2.

Corollaire 6.9. — *Si* $\mathrm{car}(k) = 0$*, tout* k*-schéma en groupes* G *est géométriquement réduit.*

En effet, si $g \in \mathrm{G}$ et si K est une clôture algébrique de $\kappa(g)$, on a $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e} \otimes_k \mathrm{K} \simeq \mathscr{O}_{\mathrm{G_K},g_\mathrm{K}}$, donc il suffit de montrer que $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e} = \mathscr{O}_{\mathrm{G}^0,e}$ est géométriquement réduit. On est ainsi ramené au cas où G est connexe, donc quasi-compact (2.6.5). Alors le résultat découle de 6.5 et du théorème de Cartier pour les groupes algébriques (cf. $\mathrm{VI_B}$, 1.6.1 ou [**DG70**] § II.6, Th. 1.1).

Corollaire 6.10. — *Soit* G *un k-groupe quasi-compact. On suppose k algébriquement clos.*

(i) *Soit* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme fidèlement plat de k-groupes. Alors l'application induite* $\mathrm{G}(k) \to \mathrm{H}(k)$ *est surjective.*

(ii) *L'ensemble des points rationnels est dense dans* G.

Pour la démonstration, on renvoie à [**Per75**], V 3.7 & 3.9.

Bibliographie

[59]

[An73] S. Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension* 1, Mém. Soc. Math. France **33** (1973), 5-79.

[BAC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap. I-IV et V-VII, Masson, 1985.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[Per75] D. Perrin, *Schémas en groupes quasi-compacts sur un corps*, Publ. Math. Orsay N°165–75.46 (1ère partie), http://portail.mathdoc.fr/PMO/

[Per76] D. Perrin, *Approximation des schémas en groupes, quasi-compacts sur un corps*, Bull. Soc. Mah. France **104** (1976), 323-335.

[Ray67a] M. Raynaud, *Passage au quotient par une relation d'équivalence plate*, pp. 78-85 *in* : Proc. Conf. Local Fields (Driebergen) (éd. T. A. Springer), Springer-Verlag, 1967.

[Ray67b] M. Raynaud, *Sur le passage au quotient par un groupoïde plat*, C. R. Acad. Sci. Paris (Sér. A) **265** (1967), 384-387.

[Ray70] M. Raynaud, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lect. Notes Maths. **119**, Springer-Verlag, 1970.

[59] N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé

EXPOSÉ $\mathrm{VI_B}$

GÉNÉRALITÉS SUR LES SCHÉMAS EN GROUPES

par J.-E. Bertin

Cet exposé, qui ne correspond à aucun exposé oral du séminaire, est destiné à regrouper un certain nombre de résultats techniques couramment utilisés concernant les schémas en groupes. (*) **318**

1. Morphismes de groupes localement de type fini sur un corps

1.1. Soient A un anneau local artinien, G et H deux A-groupes [2] et $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de A-groupes. Alors u induit un morphisme de groupes $u(\mathrm{A}) : \mathrm{G}(\mathrm{A}) \to \mathrm{H}(\mathrm{A})$. [3] Comme H(A) opère sur H par translation à droite, $u(\mathrm{A})$ définit par restriction une opération de G(A) sur H. Cette opération est compatible avec le morphisme u et l'opération de G(A) sur G définie par translation à droite. Comme G(A) opère transitivement sur les points strictement rationnels de G (voir $\mathrm{VI_A}$ 0.4 pour la définition), on voit que ces points « se comportent tous de la même manière à l'égard de u » ; de là sourdent les propriétés suivantes :

Proposition 1.2. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme* quasi-compact *entre* A-*groupes* localement de type fini *sur* A. *Alors l'ensemble* $u(\mathrm{G})$ *est* fermé *dans* H *et on a* $\dim \mathrm{G} = \dim u(\mathrm{G}) + \dim \mathrm{Ker}\, u$. [4]

Comme u commute avec les morphismes d'inversion de G et H, l'image $u(\mathrm{G})$ est invariante par le morphisme d'inversion de H ; il en est donc de même de $\overline{u(\mathrm{G})}$, son adhérence dans H. Soit d'autre part L l'ensemble des points de $\mathrm{H} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{H}$ dont les deux projections appartiennent à $u(\mathrm{G})$; il est clair que L est l'image du morphisme **319**

(*) Cet exposé a été assez sérieusement remanié depuis son édition multigraphiée, notamment les §§ 10 et 11 ont été entièrement rerédigés. [1]

(1) N.D.E. : et aussi le § 5, cf. les N.D.E. (34) et (46).

(2) N.D.E. : Rappelons la convention adoptée au début de $\mathrm{VI_A}$: un A-groupe est un A-*schéma en groupes* (et un tel schéma est *séparé*, cf. $\mathrm{VI_A}$, 0.3).

(3) N.D.E. : On a remplacé « homomorphisme » par « morphisme ».

(4) N.D.E. : Cet énoncé figure aussi en $\mathrm{VI_A}$, 2.5.2.

$u \times_{\mathrm{A}} u : \mathrm{G} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{G} \to \mathrm{H} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{H}$; donc le morphisme de multiplication de H envoie L dans $u(\mathrm{G})$, autrement dit $u(\mathrm{G}) \cdot u(\mathrm{G}) = u(\mathrm{G})$. D'autre part le lemme 1.2.1 ci-dessous montre que $\overline{\mathrm{L}}$, adhérence de L dans $\mathrm{H} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{H}$, est l'ensemble des points de $\mathrm{H} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{H}$ dont les deux projections appartiennent à $\overline{u(\mathrm{G})}$; donc $\overline{u(\mathrm{G})} \cdot \overline{u(\mathrm{G})} = \overline{u(\mathrm{G})}$ de sorte que le sous-schéma réduit de H qui a pour espace sous-jacent $\overline{u(\mathrm{G})}$ est muni naturellement d'une structure de groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$, où k est le corps résiduel de A (cf. $\mathrm{VI_A}$ 0.2).

Montrons la première assertion de 1.2 : quitte à remplacer A par la clôture algébrique de son corps résiduel k, nous pouvons supposer que A est un corps k algébriquement clos (cf. EGA IV_2, 2.3.12). Quitte à remplacer u par $u_{\text{réd}} : \mathrm{G}_{\text{réd}} \to \mathrm{H}_{\text{réd}}$, on peut supposer G et H réduits ; dans ce cas, ainsi que nous venons de le voir, $\overline{u(\mathrm{G})}$ est l'espace sous-jacent à un sous-schéma en groupes réduit de G ; nous pouvons donc supposer u dominant. Alors $\mathrm{G}(k)$ opère transitivement dans l'ensemble des composantes connexes de H et il suffit de montrer que $u(\mathrm{G}) \cap \mathrm{H}^0$ est fermé : on est ramené au cas où H est connexe, donc irréductible et de type fini ($\mathrm{VI_A}$ 2.4). Alors u est de type fini puisque quasi-compact et localement de type fini ; comme H est noethérien, $u(\mathrm{G})$ est constructible (EGA IV_1, 1.8.5), donc contient un ouvert V de H (EGA 0_{III}, 9.2.2), et alors, d'après $\mathrm{VI_A}$ 0.5, on a $\mathrm{H} = \mathrm{V} \cdot \mathrm{V} \subset u(\mathrm{G}) \cdot u(\mathrm{G}) = u(\mathrm{G})$.

Montrons la seconde assertion. Rappelons tout d'abord que le foncteur $\operatorname{Ker} u$ (cf. I,
320 2.3.6.1) est représentable par $u^{-1}(e)$, où e désigne l'élément neutre de H. Lorsque u est localement de type fini, $\operatorname{Ker} u$ est donc localement de type fini sur A. On se ramène comme précédemment, grâce cette fois-ci à EGA IV_2, 4.1.4, au cas où A est un corps algébriquement clos k. On peut de plus supposer G et H irréductibles et de type fini et u dominant : en effet, k étant algébriquement clos, il est clair que les composantes connexes de G, sur l'ensemble desquelles $\mathrm{G}(k)$ opère transitivement, ont toutes même dimension, et que si u^0 est la restriction de u à G^0, alors $(\operatorname{Ker} u)^0 \subset \operatorname{Ker} u^0$, et $\dim \operatorname{Ker} u^0 = \dim \operatorname{Ker} u$. On voit de même qu'alors u est de type fini sur k. Si η désigne le point générique de H, on a $\dim u^{-1}(\eta) = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{H}$ (EGA IV_3, 10.6.1 (ii)). D'après EGA IV_3, 9.2.3 et 9.2.6, l'ensemble des $y \in \mathrm{H}$ tels que $\dim u^{-1}(y) = \dim u^{-1}(\eta)$ contient un ouvert non vide V. Puisque u est dominant, $\mathrm{U} = u^{-1}(\mathrm{V})$ est alors un ouvert non vide de G, et contient un point fermé x de G, puisque G est un schéma de Jacobson (EGA IV_3, 10.4.7). Alors la translation à droite r_x est un isomorphisme de $\operatorname{Ker} u$ sur $u^{-1}(u(x))$, si bien que :

$$\dim \operatorname{Ker} u = \dim u^{-1}(u(x)) = \dim u^{-1}(\eta) = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{H}.$$

Lemme 1.2.1. — *Soient* $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *et* $g : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ *deux morphismes* quasi-compacts et dominants *de schémas sur un anneau local artinien* A *; alors* $f \times_{\mathrm{A}} g : \mathrm{X}' \times_{\mathrm{A}} \mathrm{Y}' \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{A}} \mathrm{Y}$ *est* dominant (*et* quasi-compact).

En effet, on a $f \times_{\mathrm{A}} g = (\mathrm{id}_{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{A}} g) \circ (f \times_{\mathrm{A}} \mathrm{id}_{\mathrm{Y}'})$. Il suffit donc de montrer que $f \times_{\mathrm{A}} \mathrm{id}_{\mathrm{Y}'}$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{A}} g$ sont dominants. On peut pour cela remplacer A par son corps résiduel k. Dans ce cas, X et Y′ sont plats sur $\mathrm{A} = k$, et comme $f \times_{\mathrm{A}} \mathrm{id}_{\mathrm{Y}'}$ (resp. $\mathrm{id}_{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{A}} g$) est déduit de f (resp. g) par le changement de base plat $\mathrm{Y}' \to \mathrm{A}$ (resp. $\mathrm{X} \to \mathrm{A}$), il est dominant (et quasi-compact), d'après EGA IV_2, 2.3.7.

Contre-exemple 1.2.2. — Soient k un corps de caractéristique 0, G le k-groupe constant $\mathbb{Z}$ et H le k-groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$. Soit $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de k-groupes. Si $u \neq 0$, $u(\mathrm{G})$ n'est pas fermé dans H. **321**

Proposition 1.3. — [(5)] *Soient* A *un anneau local artinien, k son corps résiduel,* G *un* A*-groupe* localement de type fini et plat*,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* A*-groupes. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est* plat (*resp.* quasi-fini*, resp.* non ramifié*, resp.* lisse*, resp.* étale) *en un point de* G. [(6)]

(ii) u *est* plat (*resp.* quasi-fini*, resp.* non ramifié*, resp.* lisse*,* étale)*.*

Démonstration. Il suffit de montrer que (i) entraîne (ii). D'abord, on a le lemme suivant :

Lemme 1.3.0. — *Soient* $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ *des morphismes d'anneaux commutatifs et* $\mathfrak{n}$ *un idéal* nilpotent *de* A*. On suppose que* $\mathrm{C}/\mathfrak{n}\mathrm{C}$ *est une* $(\mathrm{B}/\mathfrak{n}\mathrm{B})$*-algèbre* de type fini*.*

(i) *Alors* C *est une* B*-algèbre* de type fini*.*

(ii) *De plus, si* C *est* plat *sur* A *et si* $\mathrm{C}/\mathfrak{n}\mathrm{C}$ *est une* $(\mathrm{B}/\mathfrak{n}\mathrm{B})$*-algèbre* de présentation finie*, alors* C *est une* B*-algèbre* de présentation finie*.*

En effet, soient $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de C dont les images engendrent $\mathrm{C}/\mathfrak{n}\mathrm{C}$ comme $(\mathrm{B}/\mathfrak{n})$-algèbre. D'après le lemme de Nakayama nilpotent, les x_i engendrent C comme B-algèbre. Ceci prouve (i). Soit ϕ le morphisme surjectif $\mathrm{B}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n] \to \mathrm{C}$ ainsi obtenu, et soit $\mathrm{I} = \mathrm{Ker}(\phi)$.

Supposons maintenant que C soit plat sur A et que $\mathrm{C}/\mathfrak{n}\mathrm{C}$ soit de présentation finie sur $\mathrm{B}/\mathfrak{n}\mathrm{B}$. Alors, d'une part, $\mathrm{I}/\mathfrak{n}\mathrm{I}$ s'identifie au noyau de $\overline{\phi} = \phi \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{n})$. D'autre part, d'après EGA IV_1, 1.4.4, le noyau de $\overline{\phi}$ est un idéal de type fini. Soient alors $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_s$ des éléments de I dont les images engendrent $\mathrm{I}/\mathfrak{n}\mathrm{I}$ comme idéal ; d'après le lemme de Nakayama nilpotent, ils engendrent I. Ceci prouve (ii).

Revenons à la démonstration de 1.3. Soit x un point arbitraire de G. Comme G est plat sur A, alors d'après le critère de platitude par fibres, sous la forme de EGA IV_3, 11.3.10.2, u sera plat en x si $u \otimes_{\mathrm{A}} k$ l'est. De même, d'après le lemme précédent, on

(5) N.D.E. : Dans l'original, 1.3, 1.3.1 et 1.3.1.1 sont énoncés pour A un *corps*. Pour être complet, on a traité le cas d'un anneau local artinien et, pour ce faire, on a ajouté le lemme 1.3.0.

(6) N.D.E. : Rappelons qu'un morphisme de schémas $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est dit de type fini (resp. de présentation finie, resp. quasi-fini) *en* x, s'il existe des ouverts affines : V contenant $f(x)$, et U contenant x, tels que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$ et que $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$ soit une $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{V})$-algèbre de type fini (resp. de présentation finie, resp. et si de plus la fibre $f^{-1}(f(x'))$ est finie, pour tout $x' \in \mathrm{U}$ (voir aussi la N.D.E. (40) de l'Exp. V)). On dit que f est localement quasi-fini (resp. de type fini, de présentation finie) s'il l'est en tout point x. D'autre part, on dit que f est lisse (resp. non-ramifié, resp. étale) *en* x s'il existe un voisinage ouvert U de x tel que le morphisme $f|_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}$ soit lisse (resp. non-ramifié, resp. étale). Au vu de ces définitions, il est clair que l'ensemble des points où f est de présentation finie, resp. de type fini, quasi-fini, lisse, non-ramifié, étale, est un *ouvert* de X. De plus, comme le lieu de platitude d'un morphisme localement de présentation finie est ouvert (EGA IV_3, 11.3.1), alors l'ensemble des points de X où f est *de présentation finie et plat* est aussi ouvert dans X. Tout ceci sera utilisé à de nombreuses reprises dans la suite.

voit que u sera de type fini (resp. de présentation finie) en x si $u \otimes_{\mathrm{A}} k$ l'est. Comme les autres propriétés se vérifient alors sur les fibres (cf. EGA IV_4 17.4.1, 17.5.1 et 17.6.1 pour non ramifié, lisse et étale), on est ramené au cas où $\mathrm{A} = k$.

Soit maintenant x un point de G où l'une des conditions de 1.3 (i) est vérifiée. Comme les propriétés envisagées sont préservées par descente (fpqc) (cf. EGA IV, 2.5.1, 2.7.1 et 17.7.1), on se ramène, en remplaçant k par une clôture algébrique de $\kappa(x)$, au cas où k est algébriquement clos et $x \in \mathrm{G}(k)$.

Comme G est un schéma de Jacobson (cf. EGA IV_3, 10.4.7) et comme l'ensemble W des points de G où u est plat (resp. quasi-fini, non ramifié, lisse, ou étale), est stable par générisation [(7)] (resp. ouvert), il suffit de montrer que tout point y de $\mathrm{G}(k)$ appartient à W. Or, pour un tel point y, la translation $r_y \circ r_x^{-1}$ envoie x sur y, donc u possède en y la propriété voulue, i.e. $y \in \mathrm{W}$.

Corollaire 1.3.1. — *Soient* A *un anneau local artinien, k son corps résiduel,* G *un* A-*groupe* plat. *Les assertions suivantes sont équivalentes :* [(8)]

(i) G *est* localement quasi-fini (*resp.* non ramifié, *resp.* lisse, *resp.* étale) *sur* A en un point.

(ii) G *est* localement quasi-fini (*resp.* non ramifié, *resp.* lisse *resp.* étale) *sur* A.

[(9)] En effet, si G vérifie l'une des conditions de (i) en un point x, il existe un voisinage ouvert U de x qui est de type fini sur A. Par conséquent, il suffit d'appliquer 1.3 au cas où H est le A-groupe unité, compte-tenu du lemme suivant :

322 ***Lemme 1.3.1.1***. — *Soient* A *un anneau local artinien et* G *un* A-*groupe. S'il existe un* ouvert non vide *de* G de type fini *sur* A, *alors* G *est* localement de type fini *sur* A.

D'après le lemme 1.3.0, on peut supposer A égal à son corps résiduel k. De plus, par descente (fpqc), on peut supposer k algébriquement clos (cf. EGA IV_2, 2.7.1). Soit V l'ouvert de G formé des points où G est de type fini sur k ; par hypothèse, $\mathrm{V} \neq \varnothing$. Comme G est un schéma de Jacobson, alors V contient un point fermé x et, pour montrer que $\mathrm{V} = \mathrm{G}$, il suffit de montrer que tout point fermé y de G appartient à V. Or, pour un tel point y, la translation $r_y \circ r_x^{-1}$ envoie x sur y, d'où $y \in \mathrm{V}$.

Corollaire 1.3.2. — *Soient* A *un anneau local artinien,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme entre* A-*groupes* localement de type fini. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est* universellement ouvert*,*

(ii) u *est* ouvert*,*

(iii) u *est* ouvert en un point de G*,*

(iv) *le morphisme* $u^0 : \mathrm{G}^0 \to \mathrm{H}^0$ *déduit de* u *est* dominant*,*

---

(7) N.D.E. : L'original indiquait que $\mathrm{W}_{\mathrm{plat}}$ est ouvert, ce qui ne semble pas *a priori* évident ...

(8) N.D.E. : Notons qu'il *ne suffit pas* de supposer que G soit plat sur A en un point : par exemple, supposant $\mathrm{A} \neq k$, soient H le A-groupe constant $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{A}}$ et G le sous-A-groupe fermé de H dont la composante non neutre est réduite ; alors le morphisme structural $\mathrm{G} \to \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ est un isomorphisme local au point unité e, mais n'est pas plat au point $g \neq e$.

(9) N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit, et l'on a simplifié la démonstration du lemme 1.3.1.1, en invoquant EGA IV, 2.7.1 au lieu de *loc. cit.*, 17.7.5.

(iv′) u^0 *est* surjectif*,*

(v) *il existe une composante connexe* C *de* G *telle que, si* D *désigne la composante connexe de* H *contenant* $u(\mathrm{C})$*, le morphisme* $u' : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ *déduit de* u *soit* dominant*.*

Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iv′) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) sont claires. Comme G^0 est de type fini sur A ($\mathrm{VI_A}$ 2.4), donc noethérien, alors u^0 est quasi-compact donc $u^0(\mathrm{G}^0)$ est fermé dans H^0, d'après 1.2, donc (iv) $\Rightarrow$ (iv′). D'autre part, puisque G^0 (resp. C) est ouvert dans G ($\mathrm{VI_A}$ 2.3) et que H^0 (resp. D) est irréductible ($\mathrm{VI_A}$ 2.4.1), on voit que (ii) entraîne (iv) (resp. que (iii) entraîne (v)). Reste donc à montrer que **323**
(v) implique (i).

L'ouvert C (resp. D) de G (resp. H) sera muni de sa structure de schéma induit, et u' désignera le morphisme $\mathrm{C} \to \mathrm{D}$ déduit de u. Soit k le corps résiduel de A. [10] Comme le changement de base $\operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ est un homéomorphisme universel, on peut supposer $\mathrm{A} = k$. Par hypothèse, u' est dominant et, puisque C est de type fini sur k ($\mathrm{VI_A}$ 2.4.1) donc noethérien, u' est quasi-compact. D'après EGA IV_2, 2.3.7, $u' \otimes_k \overline{k}$ est encore quasi-compact et dominant, où $\overline{k}$ désigne une clôture algébrique de k. Alors, puisque $\mathrm{C} \otimes_k \overline{k}$ est réunion de composantes connexes de $\mathrm{G} \otimes_k \overline{k}$, le morphisme $u \otimes_k \overline{k} : \mathrm{G} \otimes_k \overline{k} \to \mathrm{H} \otimes_k \overline{k}$ vérifie l'assertion (v). Nous sommes ainsi ramenés au cas où $\mathrm{A} = k$ est un corps algébriquement clos, compte tenu de EGA IV_2, 2.6.4.

Dans ce cas, nous pouvons de plus remplacer u par $u_{\text{réd}}$, et nous sommes ramenés au cas où H est réduit. Soient alors ξ (resp. η) le point générique de C (resp. D). Puisque u' est quasi-compact et dominant, $u'(\xi) = \eta$ (cf. EGA IV_1, 1.1.5). D'autre part, comme H est réduit, l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{H},\eta}$ est un corps, et donc u' est plat au point ξ. [11] Donc, d'après 1.3, u est plat ; de plus, puisque u est localement de type fini et que H est localement noethérien, u est localement de présentation finie. Donc, d'après EGA IV_2, 2.4.6, u est universellement ouvert.

Proposition 1.4. — *Soient* A *un anneau local artinien, et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme* quasi-compact *entre* A*-groupes* localement de type fini*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est* propre*,*

(ii) *il existe* $h \in \mathrm{H}$ *tel que la fibre* $u^{-1}(h)$ *soit* non vide et propre sur $\kappa(h)$*,*

(iii) $\operatorname{Ker} u$ *est* propre sur A*.*

Il est clair que (i) entraîne (iii), et que (iii) entraîne (ii). D'autre part, il résulte des hypothèses que u est de type fini et, puisque G est séparé ($\mathrm{VI_A}$ 0.3), u l'est aussi (EGA **324**
I, 5.5.1). Il reste donc à montrer que l'assertion (ii) entraîne que u est universellement fermé, si bien que nous pouvons supposer A égal à son corps résiduel k. [12] Soient k' une clôture algébrique de $\kappa(h)$, $u' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}'$ le morphisme déduit de u par changement de base, h' un point de H' au-dessus de h ; alors la fibre $u'^{-1}(h') = u^{-1}(h) \times_{\kappa(h)} k'$

[10] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[11] N.D.E. : L'original invoquait le théorème de platitude générique (EGA IV_2, 6.9.1), qui n'est pas nécessaire ici.

[12] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

est non-vide et propre, et il suffit de montrer que u' est propre (EGA IV_2, 2.6.4). On peut donc supposer que k est algébriquement clos et $h \in \mathrm{H}(k)$.

Nous avons vu (1.2) qu'alors $u(\mathrm{G})$ est l'ensemble sous-jacent à un sous-schéma en groupes réduit fermé de H ; toute immersion fermée étant propre (EGA II, 5.4.2), nous pouvons supposer que u est surjectif, et que H est réduit. Puisque u est surjectif, le groupe $\mathrm{G}(k)$ opère transitivement sur l'ensemble des points fermés de H ; quel que soit le point fermé y de H, $u^{-1}(y)$ est donc propre sur $\kappa(y)$. D'après EGA IV_3, 9.6.1, l'ensemble des $y \in \mathrm{H}$ tels que $u^{-1}(y)$ ne soit pas propre sur $\kappa(y)$ est localement constructible ; puisqu'il ne contient aucun point fermé, il est vide (cf. EGA IV_3, 10.3.1 et 10.4.7).

[13] Considérons alors le point générique η de H^0 ; d'après ce qui précède, la fibre $u^{-1}(\eta) = \mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \operatorname{Spec} \kappa(\eta)$ est propre sur $\kappa(\eta)$. D'autre part, puisque H est réduit, $\kappa(\eta)$ égale $\mathscr{O}_{\mathrm{H},\eta}$. Comme $\mathscr{O}_{\mathrm{H},\eta}$ est la limitive inductive des anneaux $\mathscr{O}_{\mathrm{H}}(\mathrm{V})$, pour V parcourant les ouverts non vides de H^0, il résulte de EGA IV_3, 8.1.2 a) et 8.10.5 (xii), qu'il existe un ouvert non vide V de H^0 tel que la restriction de u au-dessus de l'ouvert V soit propre. Il est clair alors que les $g \cdot \mathrm{V}$, pour $g \in \mathrm{G}(k)$, forment un recouvrement ouvert de H tel que, pour tout $g \in \mathrm{G}(k)$, la restriction de u au-dessus de l'ouvert $g \cdot \mathrm{V}$ soit propre ; on en déduit que u est propre (cf. EGA II, 5.4.1).

Corollaire 1.4.1. — *Soient* A *un anneau local artinien, et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme entre* A*-groupes* localement de type fini. *Les assertion suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est* localement quasi-fini*,*

(ii) *u est* quasi-fini en un point*,*

(iii) $\operatorname{Ker} u$ est discret*,*

(iv) *la restriction de u à chaque composante connexe de* G *est* finie*.*

325 *Enfin, si u est* quasi-compact*, ces assertions sont équivalentes à la suivante :*

(v) *u est* fini*.*

Il est clair que (iv) entraîne (iii), que (iii) entraîne (ii) (EGA I, 6.4.4), et que dans le cas où u est quasi-compact, les assertions (iv) et (v) sont équivalentes. On a déjà vu en 1.3 que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.

Montrons enfin que (i) entraîne (iv). Soit C une composante connexe de G ; puisque C est de type fini sur A ($\mathrm{VI_A}$ 2.4.1) et que G et H sont séparés ($\mathrm{VI_A}$ 0.2), alors, d'après EGA I, 5.5.1 et 6.3.4, la restriction u' de u à C est séparée et de type fini. [14] Comme les fibres de u' sont discrètes, il en résulte que u' est quasi-fini (cf. EGA II, 6.2.2). Comme tout morphisme quasi-fini et propre est fini (cf. EGA III_1, 4.4.2), il suffit donc de montrer que u' est universellement fermé.

Pour cela, nous pouvons supposer que A est égal à son corps résiduel k. Alors, par descente (fpqc) (cf. EGA IV_2, 2.6.4), il suffit de montrer que $u' \otimes_k \overline{k}$ est universellement fermé, où $\overline{k}$ désigne une clôture algébrique de k. De plus, comme C est de type fini sur k, alors $\mathrm{C} \otimes_k \overline{k}$ est la somme d'un nombre fini de composantes connexes $\mathrm{C}'_1, \dots, \mathrm{C}'_n$

[13] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
[14] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

de $G \otimes_k \overline{k}$, et il suffit de montrer l'assertion pour chaque C'_i. On est ainsi ramené au cas où k est algébriquement clos.

Soit alors g un point fermé de C, si $u^0 : G^0 \to H$ est la restriction de u à G^0, on a $u' = r_{u(g)} \circ u^0 \circ r_{g^{-1}}$, où r_g désigne la translation à droite par g, et donc pour montrer que u' est propre, il suffit de montrer que u^0 l'est. Par hypothèse, u est localement quasi-fini, donc la fibre $\operatorname{Ker} u$ est discrète (et non vide) ; nous avons vu que u^0 est de type fini, donc la fibre $\operatorname{Ker} u^0$ est finie (cf. EGA II, 6.2.2), donc propre, et non vide ; donc u^0 est propre d'après 1.4.

Corollaire 1.4.2. — *Soient* A *un anneau local artinien, et* $u : G \to H$ *un morphisme* quasi-compact *entre* A*-groupes* localement de type fini. *Les assertions suivantes sont équivalentes :* [(15)]

(i) *u est une* immersion fermée,

(ii) *u est un* monomorphisme,

(iii) $\operatorname{Ker} u$ *est* trivial, *i.e. isomorphe au k-groupe unité.* **326**

En particulier, tout sous-schéma en groupes [(16)] de H est fermé.

Il est clair que (i) entraîne (ii), et si l'on considère les foncteurs que représentent respectivement G et H, il est immédiat que les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes. Enfin, si $\operatorname{Ker} u$ est le k-groupe unité, $\operatorname{Ker} u$ est une fibre propre et non vide, donc u est un monomorphisme propre, d'après 1.4, et de présentation finie puisque H est localement noethérien (EGA IV_1, 1.6.1), donc est une immersion fermée (EGA IV_3, 8.11.5).

La dernière assertion résulte de ce que, puisque H est localement noethérien, toute immersion $G \to H$ est quasi-compacte (EGA I, 6.6.4).

Contre-exemple 1.4.3. — Soient k un corps de caractéristique 0, G le k-groupe constant $\mathbb{Z}$ et H le k-groupe $\mathbb{G}_{a,k}$. Soit $u : G \to H$ un morphisme de k-groupes. Si $u \neq 0$, $\operatorname{Ker} u = 0$, mais u n'est pas une immersion fermée (cf. 1.2.2).

Nous utiliserons plus loin les deux résultats suivants qui auraient dû figurer dans l'Exposé VI_A :

Lemme 1.5. — *Soient k un corps et* G *un k-groupe* localement de type fini. *Alors :*

(i) *Toutes les composantes irréductibles de* G *sont de* même dimension.

(ii) *Quel que soit $g \in G$, on a* $\dim_g G = \dim G$.

---

(15) N.D.E. : L'hypothèse que G et H soient localement de type fini peut être enlevée, car d'après [**Per76**, 4.2.4] : tout monomorphisme quasi-compact $u : G \to H$ entre schémas en groupes sur un corps k est une immersion fermée ; voir aussi [**DG70**, III.3.7.2 b)] pour le cas où G et H sont affines (auquel cas tout morphisme $G \to H$ est affine (EGA II, 1.6.2 (v)), donc quasi-compact).

(16) N.D.E. : Dans ce cas particulier, voir aussi VI_A, 0.5.2, valable sans hypothèses de finitude.

[17] On a déjà démontré l'assertion (i) en $\mathrm{VI_A}$, 2.4.1, et l'assertion (ii) en découle. En effet, soient g un point de G et C la composante connexe de G contenant g. Par définition (EGA 0_{IV}, 14.1.2), $\dim_g \mathrm{G}$ est la borne inférieure des entiers $\dim \mathrm{U}$, pour U parcourant les voisinages ouverts de g ; on a donc $\dim_g \mathrm{G} = \dim \mathrm{U}_0$ pour un certain U_0, que l'on peut supposer contenu dans C (puisque $\dim \mathrm{V} \leqslant \dim \mathrm{U}$ si $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$). Alors, comme C est irréductible et de type fini sur k ($\mathrm{VI_A}$, 2.4.1), on a $\dim \mathrm{U}_0 = \dim \mathrm{C} = \deg.\ \mathrm{tr}_k\, \kappa(\xi)$, où ξ est le point générique de C, d'après EGA IV_2, 5.2.1. On a donc $\dim_g \mathrm{G} = \dim \mathrm{C} = \dim \mathrm{G}$.

327 ***Proposition 1.6***. — [18] *Soient* S *un schéma de* caractéristique zéro *et* G *un* S-*schéma en groupes,* localement de présentation finie sur S en tout point de la section unité $\varepsilon(\mathrm{S})$. *Pour que* G *soit* lisse sur S en tout point de la section unité*, il faut et il suffit que le* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-module* $\omega_{\mathrm{G/S}} = \varepsilon^*(\Omega^1_{\mathrm{G/S}})$ (*appelé module conormal à la section unité de* G), *soit* localement libre.

Rappelons qu'un schéma S est dit de *caractéristique zéro* si pour tout point fermé x de S, le corps $\kappa(x)$ est de caractéristique zéro.

Rappelons aussi (II 4.11) que, si π désigne le morphisme structural $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$, on a $\Omega^1_{\mathrm{G/S}} = \pi^*(\omega_{\mathrm{G/S}})$, si bien qu'il revient au même de dire que le $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module $\omega_{\mathrm{G/S}}$ est localement libre, ou que le $\mathscr{O}_\mathrm{G}$-module $\Omega^1_{\mathrm{G/S}}$ est localement libre.

S'il existe un voisinage ouvert U de $\varepsilon(\mathrm{S})$ qui soit lisse sur S, alors, d'après EGA IV_4, 17.2.3, $\Omega^1_{\mathrm{U/S}}$ est localement libre de type fini, ainsi que $\omega_{\mathrm{G/S}} = \varepsilon^*(\Omega^1_{\mathrm{U/S}})$.

Réciproquement, si $\omega_{\mathrm{G/S}}$ est localement libre, il en est de même de $\Omega^1_{\mathrm{G/S}} = \pi^*(\omega_{\mathrm{G/S}})$. Comme S est de caractéristique 0, le critère jacobien (EGA IV_4, 16.12.2) entraîne donc que G est différentiellement lisse sur S. Alors, il résulte de EGA IV_4, 17.12.5, que G est lisse sur S en tout point de la section unité.

Corollaire 1.6.1 (Cartier). — *Étant donné un corps k de* caractéristique zéro*, tout k-groupe* localement de type fini *sur k est* lisse *sur k.*

En effet, il est alors clair que le k-module $\omega_{\mathrm{G}/k}$ est localement libre, donc, d'après 1.6, G est lisse sur k au point unité e, et donc lisse sur k, d'après 1.3.1.

2. « Propriétés ouvertes » des groupes et des morphismes de groupes localement de présentation finie

2.0. Dans tout ce qui suit, S désignera un schéma quelconque ; un S-schéma en groupes sera appelé un S-*groupe*. Étant donné un S-groupe G, nous noterons ε la section unité, $c : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ le morphisme d'inversion et μ le morphisme de multiplication

[17] N.D.E. : L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est un fait général (cf. EGA 0_{IV}, 14.1.6), et (i) $\Rightarrow$ (ii) découle du fait que si X est un schéma irréductible de type fini sur un corps, on a $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{U}$ pour tout ouvert non vide U de X ; le point essentiel ici est donc d'établir l'assertion (i), ce qu'on a déjà fait dans un ajout à $\mathrm{VI_A}$, 2.4.1. On a modifié en conséquence l'énoncé et la démonstration du lemme.

[18] N.D.E. : Dans l'énoncé, on a remplacé « le long de la section unité » par « en tout point de la section unité » ; d'autre part, à la fin de la démonstration, on a explicité les résultats de EGA IV_4 cités en référence.

$G \times_S G \to G$. Pour tout S-schéma X, nous noterons π ou π_X le morphisme structural $X \to S$.

Étant donnée une propriété $\mathscr{P}(u)$ pour un morphisme de S-schémas $u : X \to Y$, 328
nous dirons que $\mathscr{P}(u)$ est *stable par changement de base* si, chaque fois que u vérifie $\mathscr{P}(u)$, il en est de même du morphisme $u_{(Y')}$, quel que soit le S-morphisme $Y' \to Y$. On dit que $\mathscr{P}(u)$ est de *nature locale pour la topologie* $\mathcal{T}$ (cf. Exp. IV, §§ 4 et 6) si $\mathscr{P}(u)$ vérifie les deux conditions suivantes :

a) $\mathscr{P}(u)$ est stable par changement de base,

b) chaque fois qu'il existe une famille de S-morphismes $Y_i \to Y$ couvrante pour la topologie $\mathcal{T}$ et telle que chacun des morphismes $u_{(Y_i)}$ vérifie $\mathscr{P}(u)$, alors u vérifie $\mathscr{P}(u)$.

Proposition 2.1. — *Soit* $\mathscr{P}(u)$ *une propriété pour un morphisme de* S*-schémas, de nature locale pour la topologie* (fpqc). *Soit* $u : G \to H$ *un morphisme de* S*-groupes. Supposons* G plat et universellement ouvert *sur* S.

Soit W le plus grand ouvert de H *au-dessus duquel* u *vérifie la propriété* $\mathscr{P}(u)$ *et soit* $V = u^{-1}(W)$. *Alors* $U = \pi_G(V)$ *est un ouvert de* S *et* V *est un* sous-schéma en groupes ouvert *de* $G|_U$.

L'existence d'un plus grand ouvert W de H au-dessus duquel u vérifie $\mathscr{P}(u)$ résulte de ce que $\mathscr{P}(u)$ est de nature locale pour la topologie de Zariski. Puisque π_G est universellement ouvert, $\pi_G(V)$ est un ouvert U de S. Il suffit de montrer que V est un sous-schéma en groupes de $G|_U$. Nous pouvons donc supposer que $U = S$.

Posons alors $G' = G \times_S V$, $H' = H \times_S V$, $V' = V \times_S V$, $W' = W \times_S V$ et $u' = u_{(V)}$; soit W'_1 le plus grand ouvert de H' au-dessus duquel u' vérifie $\mathscr{P}(u)$; puisque V est plat et universellement ouvert sur S, il en est de même de H' sur H, et le lemme 2.1.1 ci-dessous montre que $W'_1 = W'$. Considérons alors l'automorphisme de V-schémas a 329
(resp. b) de G' (resp. H'), translation à droite par le symétrique de la section diagonale δ (resp. par le symétrique de $u(\delta)$), défini par

$$a(g, v) = (g \cdot v^{-1}, v), \qquad (\text{resp. } (h, v) = (h \cdot u(v^{-1}), v)),$$

quels que soient le morphisme $T \to S$, $g \in G(T)$, $v \in V(T)$ et $h \in H(T)$. Il est clair que $u' \circ a = b \circ u'$, ce qui montre que W' est stable par b, donc que V' est stable par a, si bien que V est un sous-schéma en groupes de G.

Lemme 2.1.1. — *Soit* $\mathscr{P}(u)$ *une propriété pour un* S*-morphisme* u*, de nature locale pour la topologie* (fpqc). *Considérons un carré cartésien de morphismes de* S*-schémas :*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} ,$$

où g *est* plat et ouvert. *Soit* W *(resp.* W'_1*) le plus grand ouvert de* Y *(resp.* Y'*) au-dessus duquel* f *(resp.* $f' = f_{(Y')}$*) vérifie* $\mathscr{P}(u)$*. Alors* $W'_1 = W \times_Y Y'$.

Posons $W' = W \times_Y Y'$; puisque $\mathscr{P}(u)$ est stable par changement de base, on a $W' \subset W'_1$. Comme g est ouvert, $W_1 = g(W'_1)$ est un ouvert de Y. Posons $V_1 = f^{-1}(W_1)$ et $V'_1 = V_1 \times_{W_1} W'_1$; il est clair que $V'_1 = f'^{-1}(W'_1)$. Puisque g est plat et ouvert, le morphisme $W'_1 \to W_1 = g(W'_1)$ déduit de g est fidèlement plat et ouvert, donc couvrant pour la topologie (fpqc) (cf. IV 6.3.1 (iv)). Puisque le morphisme $V'_1 \to W'_1$ déduit de f' vérifie $\mathscr{P}(u)$, il en est de même du morphisme $V_1 \to W_1$ déduit de f, donc $W_1 \subset W$, et $W'_1 \subset g^{-1}(W_1) \subset g^{-1}(W) = W'$; donc $W' = W'_1$.

Remarque 2.1.2. — Un grand nombre de propriétés pour un morphisme sont de nature locale pour la topologie (fpqc) ; citons celles d'être plat, (universellement) ouvert, (localement) de type fini, de présentation finie, quasi-fini (cf. EGA IV_2, 2.5.1, 2.6.1 et 2.7.1), lisse, étale, non-ramifié (EGA IV_4, 17.7.3).

La démonstration de 2.1 n'utilise en fait que des *changements de base par des morphismes plats* ; la proposition s'appliquera donc à une propriété vérifiant la condition b) de 2.0 relativement à la topologie (fpqc), et stable par changements de base par
330 des morphismes plats (exemple : celle d'être quasi-compact et dominant).

Bien entendu, on peut énoncer une proposition analogue concernant les propriétés de nature locale pour une topologie $\mathcal{T}$ plus fine que la topologie de Zariski, la condition à vérifier sur G étant alors que π_G soit universellement ouvert et couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$.

En particulier, si G est plat et localement de présentation finie sur S, on a un énoncé analogue pour les propriétés stables par changements de base par des morphismes plats et localement de présentation finie, et vérifiant la condition b) de 2.0 relativement à la topologie (fpqc) (par exemple, celles d'être régulier, réduit, de Cohen-Macaulay, etc. (EGA IV_2, 6.8)).

Proposition 2.2. — *Soient* G *et* H *deux* S*-groupes et* $u : G \to H$ *un morphisme de* S*-groupes. Alors :* [19]

(i) *Supposons* G *ou* H plat *sur* S*, et* G *ou* H localement de présentation finie *sur* S*, et soit* V le plus grand ouvert *de* G *tel que la restriction de* u *à* V *soit* plate et localement de présentation finie (*resp.* lisse*, resp.* étale)*. Alors* $U = \pi_V(V)$ *est un ouvert de* S*, et* V *est un* sous-schéma en groupes ouvert *de* $G|_U$.

(ii) *Supposons* G *ou* H universellement ouvert *sur* S*, et soit* V le plus grand ouvert *de* G *tel que la restriction de* u *à* V *soit* universellement ouverte*. Alors* $U = \pi_V(V)$ *est un ouvert de* S*, et* V *est un* sous-schéma en groupes ouvert *de* $G|_U$.

Montrons d'abord (i). Montrons que la restriction π_V de π_G à V est plate et localement de présentation finie :

331 a) Si π_G est plat (resp. localement de présentation finie), il en est de même de π_V.

(19)N.D.E. : Dans le cas (i), l'ouvert V est formé de *tous* les points de G en lesquels u est lisse, resp. étale, resp. de présentation finie et plat, cf. la N.D.E. (6). Par contre, dans le cas (ii), V est le plus grand ouvert contenu dans l'ensemble E des points de G en lesquels u est universellement ouvert, mais E n'est pas nécessairement ouvert, comme le montre l'exemple suivant (EGA IV_3, 14.1.3 (i)) : soient k un corps, $H = S = \operatorname{Spec} A$, où $A = k[x]$, et G le S-groupe $\operatorname{Spec} A[y]/(xy)$; alors E égale la section unité de G, qui n'est pas ouverte.

b) Si π_{H} est plat (resp. localement de présentation finie), il en est de même de π_{V}, comme composé de la restriction de u à V et de π_{H}.

Donc, dans les quatre cas envisagés dans l'énoncé, π_{V} est plat et localement de présentation finie, donc universellement ouvert (EGA IV_2, 2.4.6). Posons $\mathrm{U} = \pi_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})$; U est donc un ouvert de S. Il suffit alors de montrer que V est un sous-schéma en groupes ouvert de $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$; nous pouvons donc supposer que U = S.

Posons alors $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{V}' = \mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ et $u' = u_{(\mathrm{V})}$. Alors, V étant plat et localement de présentation finie sur S, il en est de même de H′ sur H. D'après EGA IV_4, 17.7.4, V′ est alors le plus grand ouvert de G′ tel que la restriction de u' à V′ soit plate et localement de présentation finie (resp. lisse, resp. étale). Les automorphismes a et b étant définis comme dans la démonstration de 2.1, il est alors clair que V′ est stable par a, donc que V est un sous-schéma en groupes de G.

Montrons (ii). La restriction π_{V} de π_{G} à V est un morphisme universellement ouvert, soit parce qu'il en est ainsi de π_{G}, soit comme composé de la restriction de u à V et de π_{H} dans le cas où π_{H} est universellement ouvert. Posons $\mathrm{U} = \pi_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})$; U est alors un ouvert de S. Il suffit de montrer que V est un sous-schéma en groupes ouvert de $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$. Nous pouvons donc supposer que U = S.

Posons comme précédemment $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$, $\mathrm{V}' = \mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ et $u' = u_{(\mathrm{V})}$. Alors $\pi_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{S}$ est surjectif et universellement ouvert, il en est de même de $\mathrm{G}' \to \mathrm{G}$, si bien que V′ est le plus grand ouvert de G′ tel que la restriction de **332**
u' à V′ soit universellement ouverte, en vertu de (EGA IV_3, 14.3.4 (i) et (ii)). Les automorphismes a et b étant définis comme précédemment, il est alors clair que V′ est stable par a, donc que V est un sous-schéma en groupes de G.

Corollaire 2.3. — *Soient* G *un* S-*groupe et* V le plus grand ouvert *de* G *qui soit* plat et localement de présentation finie (*resp.* lisse, étale, universellement ouvert) *sur* S. *Alors* $\mathrm{U} = \pi_{\mathrm{V}}(\mathrm{V})$ *est un ouvert de* S, *et* V *est un* sous-schéma en groupes ouvert *de* $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$.

Il suffit d'appliquer 2.2 au cas où H est le S-groupe unité et où u est l'unique morphisme de S-groupes $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$, car alors π_{H} est un isomorphisme et $\pi_{\mathrm{G}} = \pi_{\mathrm{H}} \circ u$.

Corollaire 2.4. — *Soit* G *un* S-*groupe ; s'il existe un* voisinage X de la section unité *ayant une* (*ou plusieurs*) *des propriétés suivantes :*

> X *est* plat et localement de présentation finie (*resp.* lisse, étale, universellement ouvert) *sur* S,

alors il existe un sous-schéma en groupes ouvert *de* G *ayant les mêmes propriétés.*

Il suffit d'appliquer 2.3 en remarquant qu'ici avec les notations de 2.2, on a $\varepsilon(\mathrm{S}) \subset \mathrm{V}$, donc U = S.

Proposition 2.5. — [20] *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S-*groupes.*

[20] N.D.E. : On a détaillé l'énoncé et la démonstration, et dans (i) on a affaibli l'hypothèse sur H, en remplaçant « de présentation finie » par « de type fini ».

(i) *Supposons que* G (*resp.* H) *soit* de présentation finie et plat (*resp.* de type fini) *sur* S aux points de sa section unité. *Alors, les ensembles :*

$$\mathrm{U}_{\mathrm{plat}} \supset \mathrm{U}_{\mathrm{lisse}} \supset \mathrm{U}_{\text{ét.}},$$

formés des points $s \in \mathrm{S}$ *tels que* u_s *soit* plat (*resp.* lisse, étale), *sont* ouverts *dans* S.

333 *Si de plus* G (*resp.* H) *est* localement de présentation finie et plat (*resp.* localement de type fini) *sur* S, *alors l'ensemble* $\mathrm{V}_{\mathrm{plat}}$ (*resp.* $\mathrm{V}_{\mathrm{lisse}}$, $\mathrm{V}_{\text{ét.}}$) *des points de* G *où* u *est* plat (*resp.* lisse, *resp.* étale) *est l'image inverse par* π_{G} *de* $\mathrm{U}_{\mathrm{plat}}$ (*resp.* $\mathrm{U}_{\mathrm{lisse}}$, $\mathrm{U}_{\text{ét.}}$).

(ii) *Supposons que, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, G_s *soit* localement de type fini sur $\kappa(s)$ (*condition vérifiée si* G *est de type fini sur* S *aux points de la section unité* (1.3.1.1)), *et que* u *soit* localement de type fini (*resp.* localement de présentation finie) aux points de la section unité *de* G. *Alors, les ensembles :*

$$\mathrm{U}_{\mathrm{l.q.f.}} \supset \mathrm{U}_{\mathrm{n.r.}}$$

formés des $s \in \mathrm{S}$ *tels que* u_s *soit* localement quasi-fini (*resp.* non ramifié) *sont* ouverts *dans* S.

Si de plus u *est* localement de type fini (*resp.* localement de présentation finie), *alors l'ensemble* $\mathrm{V}_{\mathrm{l.q.f}}$ (*resp.* $\mathrm{V}_{\mathrm{n.r.}}$) *des points de* G *où* u *est* quasi-fini (*resp.* non ramifié) *est l'image inverse par* π_{G} *de* $\mathrm{U}_{\mathrm{l.q.f}}$ (*resp.* $\mathrm{U}_{\mathrm{n.r.}}$).

Montrons (i). Notons d'abord (1.3.1.1) que, pour tout $s \in \mathrm{S}$, G_s est localement de type fini sur $\kappa(s)$. Soit Y l'ouvert de H formé des points où π_{H} est de type fini, et soit X_1 l'ouvert de $u^{-1}(\mathrm{Y})$ formé des points où π_{G} est de présentation finie. D'après EGA IV_3, 11.3.1, l'ensemble X des points de X_1 où π_{G} est de présentation finie et *plat* est ouvert dans X_1, donc dans G.

Soit $u_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ le morphisme déduit de u. Puisque Y (resp. X) contient la section unité de H (resp. G), la restriction π_{X} de π_{G} à X est surjective, et le morphisme $\mathrm{S} \to \mathrm{X}$ déduit de ε_{G} est une S-section de X.

Considérons les ensembles : $\mathrm{W}_{\mathrm{plat}} \supset \mathrm{W}_{\mathrm{lisse}} \supset \mathrm{W}_{\text{ét.}}$, formés des points de X où u_{X} est plat (resp. lisse, resp. étale). Il est clair que $\mathrm{W}_{\mathrm{lisse}}$ et $\mathrm{W}_{\text{ét.}}$ sont ouverts dans X, cf. la N.D.E. (6). D'autre part, comme π_{Y} est localement de type fini et $\pi_{\mathrm{X}} = \pi_{\mathrm{Y}} \circ u_{\mathrm{X}}$ localement de présentation finie, alors, d'après EGA IV_1, 1.4.3 (v), u_{X} est localement de présentation finie. Par conséquent, le lieu de platitude W_{X} de u_{X} est ouvert dans X (EGA IV_3, 11.3.1).

Soit $x \in \mathrm{X}$ et posons $s = \pi_{\mathrm{X}}(x)$; alors d'après EGA IV_2, 11.3.10, (combiné avec EGA IV_4, 17.5.1, resp. 17.6.1), x appartient à $\mathrm{W}_{\mathrm{plat}}$ (resp. $\mathrm{W}_{\mathrm{lisse}}$, $\mathrm{W}_{\text{ét.}}$) si et seulement si u_s est plat (resp. lisse, étale) au point x, ou, ce qui revient au même d'après 1.3, si et seulement si u_s est plat (resp. lisse, étale).

Par conséquent, pour « $\flat$ = plat, lisse ou étale », on a $\mathrm{U}_\flat = \varepsilon_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{W}_\flat)$ et $\mathrm{W}_\flat =$
334 $\pi_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{U}_\flat)$. Comme $\mathrm{W}_\flat$ est ouvert dans X, donc dans G, la première égalité montre que $\mathrm{U}_\flat$ est ouvert dans S.

La seconde assertion de (i) résulte de ce qu'on vient de voir, car alors $\mathrm{Y} = \mathrm{H}$, $\mathrm{X} = \mathrm{G}$, et $\mathrm{V}_\flat = \mathrm{W}_\flat = \pi_{\mathrm{G}}^{-1}(\mathrm{U}_\flat)$.

Montrons l'assertion (ii). Soient $V_{\text{l.t.f.}} \supset V_{\text{l.q.f}}$ les ouverts de G formés des points en lesquels u est de type fini (resp. quasi-fini). Posons $X = V_{\text{l.t.f.}}$ et notons u_X la restriction de u à X. Par hypothèse, X contient $\varepsilon(S)$. Soit $x \in X$ et posons $s = \pi_X(x)$.

Si u est quasi-fini en x alors, par changement de base, u_s est quasi-fini en x, et donc, comme G_s est supposé localement de type fini, u_s est localement quasi-fini, d'après 1.3.1.

Réciproquement, si u_s est localement quasi-fini, alors $u_X^{-1}(u_X(x)) \subset u_s^{-1}(u_s(x))$ est un ensemble fini. Comme $u_X : X \to H$ est localement de type fini, il résulte du théorème de semi-continuité de Chevalley (EGA IV_3, 13.1.3) qu'il existe un voisinage ouvert W de x dans X tel que la fibre $u_X^{-1}(u_X(x'))$ soit discrète, pour tout $x' \in W$. Donc, d'après EGA II, 6.2.2 (et EGA III_2, Err_{III} 20), u_X est quasi-fini en x.

Par conséquent, on a $U_{\text{l.q.f.}} = \varepsilon_G^{-1}(V_{\text{l.q.f.}})$ et $V_{\text{l.q.f.}} = \pi_X^{-1}(U_{\text{l.q.f.}})$, et la première égalité montre que $U_{\text{l.q.f.}}$ est ouvert dans S.

Si de plus G est localement de type fini sur S, alors X = G, et donc $V_{\text{l.q.f}}$ est l'image inverse par π_G de $U_{\text{l.q.f.}}$. Ceci prouve la première moitié de (ii).

Considérons maintenant les ouverts $V_{\text{l.p.f.}} \supset V_{\text{n.r.}}$, formés des points où u est de présentation finie (resp. non ramifié), et supposons que $Z = V_{\text{l.p.f.}}$ contienne la section unité de G. Soit $z \in Z$; posons $s = \pi_Z(z)$ et $h = u_Z(z)$.

Si u est non-ramifié en z alors, par changement de base, u_s est non-ramifié en z, et donc, comme G_s est supposé localement de type fini, u_s est non-ramifié, d'après 1.3.1.

Réciproquement, si u_s est non ramifié au point z, alors la fibre $u_s^{-1}(h) = u^{-1}(h)$ est non ramifiée sur $\kappa(h)$ au point z. Comme Z est un ouvert de G, alors la fibre $u_Z^{-1}(h) = u_s^{-1}(h) \cap Z$ est non ramifiée sur $\kappa(h)$ au point z. Comme u_Z est localement de présentation finie, ceci entraîne, d'après EGA IV_4, 17.4.1, que u_Z est non ramifié au point z.

On a donc $U_{\text{n.r.}} = \varepsilon_G^{-1}(V_{\text{n.r.}})$ et $V_{\text{n.r.}} = \pi_Z^{-1}(U_{\text{n.r.}})$, et la première égalité montre que $U_{\text{n.r.}}$ est ouvert dans S.

Si de plus G est localement de présentation finie sur S, alors Z = G, et donc $V_{\text{n.r.}}$ est l'image inverse par π_G de $U_{\text{n.r.}}$. Ceci achève la preuve de l'assertion (ii).

Corollaire 2.6. — *Soit* $u : G \to H$ *un morphisme de* S*-groupes qui soit un morphisme* radiciel (*ce qui est le cas si* u *est un* monomorphisme (EGA I, 3.5.4)). *On suppose* G (*resp.* H) localement de présentation finie et plat (*resp.* localement de type fini) *sur* S. *Alors l'ensemble* U *des* $s \in S$ *tels que* u_s *soit une immersion ouverte est* ouvert *dans* S, *et la restriction de* u *au-dessus de* U *est une* immersion ouverte.

D'après 2.5 (i), l'ensemble U' des points $s \in S$ tels que u_s soit étale est ouvert dans S. Puisque u est radiciel, il en est de même de u_s, quel que soit $s \in S$, donc d'après EGA IV_4, 17.9.1, on a $U = U'$, ce qui montre que U est ouvert. Enfin, d'après 2.5 (i), la restriction de u au-dessus de U est étale ; puisque u est radiciel, cette restriction est une immersion ouverte (EGA IV_4, 17.9.1).

Proposition 2.7. — *Soit* G *un* S*-groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est* non ramifié *sur* S aux points de la section unité,

(ii) *la section unité est une* immersion ouverte*,*

335 (iii) G *est* de présentation finie *sur* S aux points de la section unité*, et quel que soit* $s \in \mathrm{S}$, G_s *est* non ramifié *sur* $\kappa(s)$.

Si, de plus, on suppose G localement de présentation finie *sur* S*, alors chacune des trois conditions précédentes est équivalente à la suivante :*

(iv) G *est* non ramifié *sur* S.

L'équivalence des assertions (i) et (ii) résulte du lemme plus général 2.7.1 ci-dessous. Remarquons (1.3.1.1) que l'une ou l'autre des conditions (i) ou (iii) entraîne que, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, G_s est localement de type fini sur $\kappa(s)$. Alors (EGA IV_4, 17.4.1), l'assertion (i) équivaut au fait que, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, G_s est non ramifié sur $\kappa(s)$ au point e_s, unité de G_s, ou encore (1.3.1), au fait que G_s est non ramifié sur $\kappa(s)$, donc les assertions (i) et (iii) sont équivalentes. Enfin, si G est localement de présentation finie sur S, les assertions (iii) et (iv) sont équivalentes (EGA IV_4, 17.4.1).

Lemme 2.7.1. — *Soit* G *un* S*-schéma muni d'une section* ε*. Pour que* G *soit* non ramifié sur S aux points de cette section*, il faut et il suffit que* ε *soit une* immersion ouverte.

La condition est nécessaire, d'après EGA IV_4, 17.4.1 $a) \Rightarrow b'')$. Réciproquement, si ε est une immersion ouverte, alors la restriction à $\varepsilon(\mathrm{S})$ du morphisme structural $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ est un isomorphisme, donc G est non ramifié sur S aux points de $\varepsilon(\mathrm{S})$.

Corollaire 2.8. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S*-groupes. Supposons que, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, G_s *soit* localement de type fini *sur* $\kappa(s)$. [21]

336 a) *Si* u *est* localement de type fini*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) u *est* localement quasi-fini*,*

(ii) *quel que soit* $s \in \mathrm{S}$, $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ *est* localement quasi-fini*,*

(iii) $\mathrm{Ker}\, u$ *est* localement quasi-fini *sur* S*,*

(iv) *les fibres de* $\mathrm{Ker}\, u$ *sont* discrètes.

b) *Si* u *est* localement de présentation finie*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(v) u *est* non ramifié*,*

(vi) *quel que soit* $s \in \mathrm{S}$, $u_s : \mathrm{G}_s \to \mathrm{H}_s$ *est* non ramifié*,*

(vii) $\mathrm{Ker}\, u$ *est* non ramifié

(viii) *la section unité* $\mathrm{S} \to \mathrm{Ker}\, u$ *est une* immersion ouverte.

Les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et (v) $\Leftrightarrow$ (vi) résultent de 2.5 (ii), et le rappel 2.8.1 ci-dessous montre que (i) $\Rightarrow$ (iii) et (v) $\Rightarrow$ (vii).

[21] N.D.E. : On a modifié la présentation, en séparant les assertions relatives au cas « quasi-fini » de celles relatives au cas « non ramifié ».

Pour tout $s \in \mathrm{S}$, notons e_s l'élément unité de H_s. Alors (iii) (resp. (vii)) entraîne que, pour tout $s \in \mathrm{S}$,

$$(\operatorname{Ker} u)_s = \operatorname{Ker} u_s = u_s^{-1}(e_s)$$

est localement quasi-fini (resp. non ramifié) sur $\kappa(s) = \kappa(e_s)$, donc que u_s est quasi-fini (resp. non ramifié) au point unité de G_s, donc, d'après 1.3, que u_s est localement quasi-fini (resp. non ramifié). Donc (iii) $\Rightarrow$ (ii) et (vii) $\Rightarrow$ (vi). Enfin, (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) d'après 1.4.1, et (vii) $\Leftrightarrow$ (viii) d'après 2.7.

Rappel 2.8.1. — Rappelons (cf. I 2.3.6.1) qu'étant donné un morphisme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ de S-groupes, on appelle *noyau de* u, et on note $\operatorname{Ker} u$, le sous-foncteur en groupes de G défini en posant, quel que soit le morphisme $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$

$$(\operatorname{Ker} u)(\mathrm{T}) = \{a \in \mathrm{G}(\mathrm{T}) \mid u \circ a = \varepsilon_{\mathrm{H}} \circ f\}.$$

D'après *loc. cit.* (ou EGA I, 4.4.1), ce foncteur est représentable par le S-groupe $\mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{S} = u^{-1}(\varepsilon_{\mathrm{H}}(\mathrm{S}))$, noté simplement $\operatorname{Ker} u$. En particulier, le morphisme structural $\operatorname{Ker} u \to \mathrm{S}$ se déduit de u par changement de base.

Lemme 2.9. — *Soit* $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *un morphisme admettant une* S-*section* ε.

(i) *Si* π *est injectif, il est entier* [(*)]. 337

(ii) *Si* π *est* localement de type fini*, et si, pour tout* $s \in \mathrm{S}$, π_s *est un* isomorphisme*, alors* π *est un* isomorphisme [(**)].

Remarquons tout d'abord que, d'après le lemme 2.9.1 ci-dessous, π, étant un homéomorphisme, est un morphisme affine.

Si π est injectif, ε est surjectif. Puisque ε est une immersion surjective, $\varepsilon(\mathrm{S})$ est isomorphe au sous-schéma fermé de X défini par un nilidéal $\mathcal{I}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$. Puisque ε est une S-section du morphisme π, on a une décomposition en somme directe : $\mathscr{O}_{\mathrm{X}} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \oplus \mathcal{I}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules. Puisque $\mathcal{I}$ est un nilidéal de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$, $\mathcal{I}$ est évidemment entier sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, donc $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ est entier sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, et π est entier.

Supposons maintenant que π soit localement de type fini. Comme $\pi \circ \varepsilon = \mathrm{id}_{\mathrm{S}}$, alors ε est localement de présentation finie (cf. EGA IV_1, 1.4.3 (v)), donc $\mathcal{I}$ est un idéal *de type fini* de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ (EGA IV_1, 1.4.1). Quel que soit $s \in \mathrm{S}$, on a $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_s} = \kappa(s) \oplus \mathcal{I} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \kappa(s)$. Par hypothèse, ε_s est un isomorphisme, donc $\mathcal{I} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \kappa(s) = 0$, pour tout $s \in \mathrm{S}$, donc a fortiori $\mathcal{I} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}} \kappa(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{X}$, ce qui entraîne, d'après le lemme de Nakayama, que $\mathcal{I} = 0$, donc que π est un isomorphisme.

Lemme 2.9.1. — *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de schémas qui soit un* homéomorphisme *; alors* f *est un morphisme* affine [(***)].

Il suffit de montrer que tout point $y \in \mathrm{Y}$ possède un voisinage ouvert W tel que 338
la restriction de f au-dessus de W soit un morphisme affine. Soit donc $y \in \mathrm{Y}$, et

[(*)] C'est aussi un cas particulier de EGA IV_4, 18.12.11, car π est évidemment un homéomorphisme universel.

[(**)] C'est aussi une conséquence immédiate de EGA IV_4, 18.12.6.

[(***)] cf. EGA IV_4, 18.12.7.1 pour un résultat un peu plus général, se prouvant par la même démonstration.

soit V un voisinage ouvert affine de y dans Y. Soit $V' = f^{-1}(V)$. Alors V' est un voisinage ouvert de $x = f^{-1}(y)$ dans X. Il existe un voisinage ouvert affine W' de x dans X contenu dans V'. Posons alors $W = f(W')$. Alors W est un voisinage ouvert de y dans Y contenu dans le schéma affine V, donc W est séparé. Puisque W' est un schéma affine, la restriction de f au-dessus de W est alors un morphisme affine (EGA II, 1.2.3).

Corollaire 2.10. — *Soit* G *un* S-*groupe* localement de type fini. *Supposons que, quel soit* $s \in S$, G_s *soit le* $\kappa(s)$-*groupe unité, alors* G *est le* S-*groupe unité.*

Plus généralement :

Corollaire 2.11. — *Soit* $f : X \to Y$ *un* S-*morphisme* localement de type fini. *Pour que* f *soit un* monomorphisme*, il faut et il suffit que pour tout* $s \in S$*,* f_s *soit un* monomorphisme.

Il est clair que la condition est nécessaire ; montrons qu'elle est suffisante. Si, pour tout $s \in S$, f_s est un monomorphisme, a fortiori pour tout $y \in Y$, f_y est un monomorphisme ; nous pouvons donc supposer que $Y = S$.

D'après EGA I, 5.3.8, pour montrer que f est un monomorphisme, il suffit de montrer que $\Delta_f : X \to X \times_S X$ est un isomorphisme, ou, ce qui revient au même, que la première projection $p : X \times_S X \to X$ est un isomorphisme. Mais, si f_s est un monomorphisme, il résulte de même de EGA I, 5.3.8, que la première projection $X_s \times_{\kappa(s)} X_s \to X_s$ (qui s'identifie à p_s) est un isomorphisme. Or p possède la S-section
339 Δ_f, donc le lemme 2.9 affirme que si pour tout $s \in S$, p_s est un isomorphisme, alors il en est de même de p.

Corollaire 2.12. — *Soit* G *un* S-*schéma possèdant une* S-*section* ε *et tel que le morphisme structural* $\pi : G \to S$ *soit* fermé. *Soit* $s \in S$ *tel que* π *soit* de présentation finie au point $\varepsilon(s)$*, et que* $\varepsilon_s : \operatorname{Spec}(\kappa(s)) \to G_s$ *soit un* isomorphisme (*ou, ce qui revient au même, que* $\pi_s : G_s \to \operatorname{Spec}\kappa(s)$ *soit un isomorphisme*). *Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* s *dans* S *tel que* $\varepsilon|_U : U \to G \times_S U$ *soit un* isomorphisme.

Soit V l'ensemble des points de G où π est non ramifié ; on sait que V est ouvert (cf. N.D.E. (6)) et contient $\varepsilon(s)$. Donc $W = \varepsilon^{-1}(V)$ est un ouvert de S contenant s, et tel que pour tout $t \in W$, π soit non ramifié en $\varepsilon(t)$. Comme π est fermé, il en est de même de $\pi_{|W}$, donc nous pouvons supposer que $W = S$.

Alors, d'après 2.7.1, $X = G - \varepsilon(S)$ est une partie fermée de G ne rencontrant pas G_s donc, puisque π est fermé, $F = \pi(X)$ est une partie fermée de S ne rencontrant pas s ; posons $U = S - F$; alors U est un ouvert de S tel que $\varepsilon|_U$ soit un isomorphisme de U sur $G|_U$.

3. Composante neutre d'un groupe localement de présentation finie

3.0. Étant donnée une partie A (resp. B) d'un S-schéma X (resp. Y), par abus de notation, $A \times_S B$ désignera la partie de $X \times_S Y$ formée des points dont la première projection appartient à A et la deuxième à B.

Étant donnée une partie A d'un S-groupe G, nous dirons que A est *stable pour la loi de groupe de* G si on a : $c(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$ et $\mu(\mathrm{A} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$.

Définition 3.1. — Soit G un S-foncteur en groupes vérifiant la condition suivante : **340**

(+) quel que soit $s \in \mathrm{S}$, le foncteur $\mathrm{G}_s = \mathrm{G} \otimes_{\mathrm{S}} \kappa(s)$ est représentable.

On notera alors $\underline{\mathrm{G}_s^0}$ la composante connexe de l'élément neutre du $\kappa(s)$-groupe G_s [22]. On définit un sous-S-foncteur en groupes de G, appelé *composante neutre de* G, noté G^0, en posant quel que soit le morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$:

$$\mathrm{G}^0(\mathrm{T}) = \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{T}) \mid \forall\, s \in \mathrm{S}, \quad u_s(\mathrm{T}_s) \subset \underline{\mathrm{G}_s^0}\}.$$

On a ainsi défini le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{G}^0$ de $(\widehat{\mathbf{Sch}}_{/\mathrm{S}})$-gr. dans $(\widehat{\mathbf{Sch}}_{/\mathrm{S}})$-gr.

Remarque 3.2. — (i) Soit G un S-foncteur en groupes vérifiant la condition (+), alors $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}^0/\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$, en vertu de l'exposé II. [23] En effet, pour tout S-schéma T, notons I_{T} le T-schéma des nombres duaux sur T et $\tau : \mathrm{T} \to \mathrm{I}_{\mathrm{T}}$ la section zéro (cf. II, 2.1). Par définition, on a

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{T}) = \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{I}_{\mathrm{T}}) \mid u \circ \tau = e\},$$

où $e : \mathrm{T} \to \mathrm{G}$ désigne la composée de $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ et de la section unité $\mathrm{S} \to \mathrm{G}$, et de même

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}^0/\mathrm{S})(\mathrm{T}) &= \{u \in \mathrm{G}^0(\mathrm{I}_{\mathrm{T}}) \mid u \circ \tau = e\}\\ &= \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{I}_{\mathrm{T}}) \mid u \circ \tau = e \quad \text{et} \quad u_s((\mathrm{I}_{\mathrm{T}})_s) \subset \underline{\mathrm{G}_s^0}, \quad \forall\, s \in \mathrm{S}\}.\end{aligned}$$

Or, pour tout $s \in \mathrm{S}$, T_s et $(\mathrm{I}_{\mathrm{T}})_s = \mathrm{I}_{\mathrm{T}_s}$ ont même ensemble sous-jacent, donc si $u \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{T})$, on a $u_s(\mathrm{I}_{\mathrm{T}_s}) = e_s$, où e_s désigne le point unité de G_s, d'où $u \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}^0/\mathrm{S})(\mathrm{T})$. Donc l'inclusion $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}^0/\mathrm{S})(\mathrm{T}) \subset \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{T})$ est une égalité pour tout T, d'où $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}^0/\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$.

(ii) Soient G et G′ deux S-foncteurs en groupes vérifiant (+), alors :

a) si $\mathrm{G} \subset \mathrm{G}'$, alors $\mathrm{G}^0 \subset \mathrm{G}'^0$,

b) si $\mathrm{G} \subset \mathrm{G}'$ et $\mathrm{G}'^0 \subset \mathrm{G}$, alors $\mathrm{G}^0 = \mathrm{G}'^0$,

c) si pour tout $s \in \mathrm{S}$, G_s est *localement de type fini* sur $\kappa(s)$, alors G^0 satisfait la propriété (+), d'après $\mathrm{VI_A}$.2.3, et l'on a $(\mathrm{G}^0)^0 = \mathrm{G}^0$.

Proposition 3.3. — *Soit* G *un* S-*foncteur en groupes vérifiant la condition* (+) *et soit* S′ *un* S-*schéma. Alors* $(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}')^0 = \mathrm{G}^0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, *autrement dit le foncteur* $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{G}^0$

[22] N.D.E. : C'est une notation légèrement abusive, mais qui est compatible avec les notations de $\mathrm{VI_A}$, 2.3 lorsque cette composante connexe est l'espace topologique sous-jacent à un sous-schéma en groupes *ouvert* G^0 de G, cf. $\mathrm{VI_A}$, 2.2.bis.

[23] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

commute aux changements de base, i.e. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}}})\text{-gr.} \arrow[r, "\mathrm{G}\mapsto\mathrm{G}^0"] \arrow[d] & (\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}}})\text{-gr.} \arrow[d] \\
(\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}'}})\text{-gr.} \arrow[r] & (\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}'}})\text{-gr.}
\end{tikzcd}$$

341 Il suffit en effet de vérifier que, pour tout $s' \in \mathrm{S}'$, dont on désigne par s l'image dans S, $((\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}') \otimes_{\mathrm{S}'} \kappa(s'))^0 = (\mathrm{G}_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s'))^0$ égale $\mathrm{G}_s^0 \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s')$; or cela résulte de $\mathrm{VI_A}$, 2.1.2. Notons, pour un usage ultérieur en 4.2, que l'on n'a pas utilisé la structure de groupe de G_s, mais seulement le fait que G_s^0 possède un point rationnel, à savoir $\varepsilon(s)$, donc est géométriquement connexe (voir aussi EGA IV_2, 4.5.14).

Cas particulier 3.4. — Soit G un S-schéma en groupes ; notons $\underline{\mathrm{G}^0}$ le sous-ensemble de G réunion des $\underline{\mathrm{G}_s^0}$ lorsque s parcourt S. Alors $\underline{\mathrm{G}^0}$ est une partie de G stable pour la loi de groupe de G (cf. 3.0), et quel que soit le morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ on a :

$$\mathrm{G}^0(\mathrm{S}') = \{u \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid u(\underline{\mathrm{S}'}) \subset \underline{\mathrm{G}^0}\}.$$

Lorsque $\underline{\mathrm{G}^0}$ est une partie ouverte de G, il est clair que G^0 est représentable par le sous-schéma de G induit sur l'ouvert $\underline{\mathrm{G}^0}$.

Proposition 3.5. — *Soient* S *un schéma* quasi-compact et quasi-séparé*, et* G *un* S-*groupe à* fibres localement de type fini*. Il existe alors un* ouvert quasi-compact U *de* G *contenant* $\underline{\mathrm{G}^0}$.

La section unité ε étant une immersion, $\varepsilon(\mathrm{S})$ est un sous-espace quasi-compact de G, donc il existe un ouvert quasi-compact V de G qui contient $\varepsilon(\mathrm{S})$. Puisque S est quasi-séparé, et que V est quasi-compact, V est quasi-compact sur S (EGA IV_1, 1.2.4), donc $\mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V}$ est quasi-compact sur S, donc quasi-compact. Alors $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V} = \mu(\mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{V})$ est quasi-compact. Posons $\mathrm{V}_s = \mathrm{V} \cap \mathrm{G}_s$ et $\mathrm{V}_s^0 = \mathrm{V} \cap \mathrm{G}_s^0$. Alors V_s^0 est un ouvert de G_s^0, dense dans G_s^0 puisque G_s^0 est irréductible ($\mathrm{VI_A}$ 2.4), donc $\mathrm{V}_s^0 \cdot \mathrm{V}_s^0 = \mathrm{G}_s^0$ ($\mathrm{VI_A}$ 0.5), ce qui montre que $\mathrm{V}_s \cdot \mathrm{V}_s \supset \mathrm{G}_s^0$, donc que $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V} \supset \underline{\mathrm{G}^0}$. Enfin, puisque $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V}$ est quasi-compact, il existe un ouvert quasi-compact U de G contenant $\mathrm{V} \cdot \mathrm{V}$ et a fortiori $\underline{\mathrm{G}^0}$.

Corollaire 3.6. — *Soit* G *un* S-*groupe à* fibres localement de type fini et connexes*. Alors* G *est* quasi-compact sur S.

342 Notre assertion étant locale sur S (EGA I, 6.6.1), on est ramené au cas où S est affine. D'après 3.5, il existe alors un ouvert quasi-compact U de G contenant $\underline{\mathrm{G}^0} = \mathrm{G}$, donc G est quasi-compact, donc quasi-compact sur le schéma affine S (EGA I, 6.6.4 (v)).

Proposition 3.7. — [24] *Soit* G *un* S-*groupe* localement de présentation finie*, alors :*

(i) $\underline{\mathrm{G}^0}$ *est* ind-constructible *dans* G.

(ii) *Si de plus* G *est* quasi-séparé sur S*, et* S quasi-compact et quasi-séparé*, alors* $\underline{\mathrm{G}^0}$ *est* constructible.

(iii) *Par conséquent, si* G *est* quasi-séparé sur S*,* $\underline{\mathrm{G}^0}$ *est* localement constructible.

Montrons d'abord la première assertion. Puisque $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ est localement de présentation finie, étant donné $s \in \mathrm{S}$, il existe un ouvert U de G contenant $\varepsilon(s)$ et un ouvert V de S contenant s tels que $\pi(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$ et que le morphisme $\pi' : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ déduit de π soit de présentation finie. Alors $\mathrm{T} = \varepsilon^{-1}(\mathrm{U})$ est un ouvert de S et si l'on note $\mathrm{W} = \pi'^{-1}(\mathrm{T})$ et $\pi'' = \pi'|_{\mathrm{W}}$, alors $\pi'' : \mathrm{W} \to \mathrm{T}$ est de présentation finie, et admet comme section le morphisme $\varepsilon'' : \mathrm{T} \to \mathrm{W}$ déduit de ε.

Pour tout $t \in \mathrm{T}$, comme G^0_t est irréductible ($\mathrm{VI_A}$ 2.4), $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}^0_t$ est dense dans G^0_t, donc irréductible, donc connexe : c'est donc la composante connexe de $\pi''^{-1}(t)$ contenant $\varepsilon''(t)$. Il résulte alors de EGA IV_3, 9.7.12, que la réunion W^0 des $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}^0_t$, pour $t \in \mathrm{T}$, est localement constructible dans W. D'autre part, il résulte de $\mathrm{VI_A}$ 0.5, que $\underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T}) = \mathrm{W}^0 \cdot \mathrm{W}^0$, i.e. $\underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$ est l'image de $\mathrm{W}^0 \times_{\mathrm{T}} \mathrm{W}^0$ par le morphisme $\mu'' : \mathrm{W} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{W} \to \pi^{-1}(\mathrm{T})$ déduit de μ. [25] Comme $\mathrm{W} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{W}$ (resp. $\pi^{-1}(\mathrm{T})$) est de présentation finie (resp. localement de présentation finie) sur T, alors μ'' est localement de présentation finie et quasi-séparé, d'après EGA IV_1, 1.4.3 et 1.2.2 ; si de plus $\pi^{-1}(\mathrm{T})$ est quasi-séparé sur T, alors μ'' est quasi-compact (*loc. cit.* 1.2.4), donc de présentation finie. Comme $\mathrm{W}^0 \times_{\mathrm{T}} \mathrm{W}^0$ est localement constructible dans $\mathrm{W} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{W}$ (puisque W^0 l'est dans W), il résulte du théorème de constructibilité de Chevalley (*loc. cit.*, 1.8.4 et 1.9.5 (viii)) que $\underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$ est ind-constructible dans $\pi^{-1}(\mathrm{T})$, et est localement constructible dans $\pi^{-1}(\mathrm{T})$ si G (et donc $\pi^{-1}(\mathrm{T})$) est quasi-séparé sur T. Ceci prouve les assertions (i) et (iii).

Supposons maintenant G quasi-séparé sur S, et S quasi-compact et quasi-séparé. **343**
Alors, d'après 3.5, il existe un ouvert quasi-compact U de G contenant $\underline{\mathrm{G}^0}$. Puisque G est quasi-séparé sur S, G est quasi-séparé, donc l'ouvert U est rétrocompact (EGA IV_1, 1.2.7), et il suffit de montrer que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est constructible dans U (EGA 0_{III}, 9.1.8).

[24] N.D.E. : Rappelons les définitions et résultats suivants (cf. EGA 0_{III}, § 9.1 et EGA IV_1, §§ 1.8 et 1.9). Soit X un espace topologique.
(i) Un ouvert U de X est dit *rétrocompact* si l'inclusion $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$ est quasi-compacte, i.e. si $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ est quasi-compact pour tout ouvert quasi-compact $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$.
(ii) Une partie C de X est dite *constructible* si c'est une réunion finie de parties de la forme $\mathrm{U} - \mathrm{V}$, où U et V sont des ouverts rétrocompacts dans X.
(iii) Une partie L de X est dite *localement constructible* si pour tout $x \in \mathrm{X}$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $\mathrm{L} \cap \mathrm{U}$ soit constructible dans U. (N. B. Si X est quasi-compact et quasi-séparé, L est alors constructible.)
(iv) Une partie I de X est dite *ind-constructible* si pour tout $x \in \mathrm{X}$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $\mathrm{I} \cap \mathrm{U}$ soit réunion de parties localement constructibles dans U.
Soit maintenant $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de schémas. D'après le théorème de constructibilité de Chevalley (cf. EGA IV_1, 1.8.4 et 1.9.5 (viii)), si f est de présentation finie (resp. localement de présentation finie), alors l'image par f de toute partie localement constructible est localement constructible (resp. ind-constructible).

[25] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

De plus, U étant quasi-compact, donc quasi-compact sur S (EGA IV_1, 1.2.4), et quasi-séparé sur S, la restriction de π à U est de présentation finie, donc d'après EGA IV_3, 9.7.12, $\underline{\mathrm{G}^0}$ est localement constructible dans U, donc constructible dans U, puisque U est quasi-compact et quasi-séparé (EGA IV_1, 1.8.1). Ceci prouve (ii), et il en résulte que pour tout ouvert T quasi-compact et quasi-séparé de S (par exemple, pour tout ouvert affine de S), $\underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$ est constructible.

Corollaire 3.8. — *Soient* S_0 *un schéma* quasi-compact et quasi-séparé*,* I *un ensemble préordonné filtrant croissant,* $(\mathscr{A}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *un système inductif de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$*-algèbres commutatives et* quasi-cohérentes*,* $\mathscr{A} = \varinjlim \mathscr{A}_i$*,* $\mathrm{S}_i = \operatorname{Spec} \mathscr{A}_i$ *pour* $i \in \mathrm{I}$*, et* $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathscr{A}$ (cf. EGA II, 1.3.1)*.*

Soit G *un* S_0*-schéma en groupes* localement de présentation finie*. Alors l'application canonique* $\varinjlim \mathrm{G}^0(\mathrm{S}_i) \to \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$ *est* bijective*.*

Puisque G est localement de présentation finie sur S, l'application canonique $\varinjlim \mathrm{G}(\mathrm{S}_i) \to \mathrm{G}(\mathrm{S})$ est bijective, d'après EGA IV_2, 8.14.2 c). Il s'ensuit immédiatement que l'application canonique $\varinjlim \mathrm{G}^0(\mathrm{S}_i) \to \mathrm{G}^0(\mathrm{S})$ est injective. Montrons qu'elle est surjective. Soit $g \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S}) \subset \mathrm{G}(\mathrm{S})$. Il existe $i \in \mathrm{I}$ tel que g se factorise au moyen de $g_i \in \mathrm{G}(\mathrm{S}_i)$ à travers $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$; par hypothèse, $g^{-1}(\underline{\mathrm{G}^0}) = \mathrm{S}$. Mais, d'après 3.7, $\underline{\mathrm{G}^0}$ est ind-constructible dans G, donc $g_i^{-1}(\underline{\mathrm{G}^0})$ l'est dans S_i. Il résulte alors de EGA IV_2, 8.3.4, qu'il existe un indice $j \geqslant i$ tel que $g_j^{-1}(\underline{\mathrm{G}^0}) = \mathrm{S}_j$, où g_j est l'application déduite de g_i par le changement de base $\mathrm{S}_j \to \mathrm{S}_i$. Cela montre que $g_j \in \mathrm{G}^0(\mathrm{S}_j)$, donc que g
344 provient d'un élément de $\varinjlim \mathrm{G}^0(\mathrm{S}_i)$.

Proposition 3.9. — *Soit* G *un* S*-groupe* localement de présentation finie*. Supposons que* G^0 *soit* représentable *; alors le morphisme canonique* $i : \mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}$ *est une* immersion ouverte *; de plus,* G^0 *est* quasi-compact *sur* S*.*

Puisque G^0 est un sous-foncteur du foncteur G, le morphisme i est un monomorphisme, donc est radiciel. D'après la définition du foncteur G^0, on vérifie immédiatement sur la définition (EGA IV_4, 17.1.1) que i est un morphisme formellement étale (en remarquant que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est l'image de i dans G). Enfin, il résulte de la caractérisation (EGA IV_3, 8.14.2 c)) des S-schémas localement de présentation finie à l'aide du foncteur qu'ils représentent, et de 3.8, que, puisque G est localement de présentation finie sur S, il en est de même de G^0. Donc i est localement de présentation finie (cf. EGA IV_1, 1.4.3) ; c'est donc un morphisme radiciel et étale ; donc une immersion ouverte (EGA IV_4, 17.9.1).

Enfin, la dernière assertion résulte de 3.6.

Théorème 3.10. — *Soit* G *un* S*-groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est* lisse *sur* S aux points de la section unité*.*

(ii) G *est* plat et localement de présentation finie *sur* S aux points de la section unité*, et pour tout* $s \in \mathrm{S}$*,* G_s *est* lisse *sur* $\kappa(s)$*.*

(iii) *Il existe un sous-schéma en groupes ouvert* G' *de* G*,* lisse *sur* S.

(iv) G^0 *est* représentable *par un sous-schéma ouvert de* G*,* lisse *sur* S.

Il est clair que (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) et, d'après 1.3.1 et 2.4, (i) entraîne (ii) et (iii). De plus, (ii) $\Rightarrow$ (i) d'après EGA IV_4, 17.5.1.

Montrons enfin que (iii) entraîne (iv). Le lemme 3.10.1 ci-dessous montre que G' contient $\underline{\mathrm{G}^0}$, et que $\underline{\mathrm{G}'^0} = \underline{\mathrm{G}^0}$. Il suffit donc de montrer que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est ouvert dans G, car 345
on a déjà vu (3.4) qu'alors G^0 sera représentable par le sous-schéma en groupes lisse induit par G' sur l'ouvert $\underline{\mathrm{G}'^0} = \underline{\mathrm{G}^0}$. On peut donc supposer que $\mathrm{G}' = \mathrm{G}$.

Pour montrer que $\underline{\mathrm{G}^0}$ est ouvert, il suffit de montrer que tout $s \in \mathrm{S}$ possède un voisinage T dans S tel que $\underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$ soit ouvert dans $\pi^{-1}(\mathrm{T})$. Soit $s \in \mathrm{S}$. Puisque $\mathrm{G} = \mathrm{G}'$, alors π est localement de présentation finie, donc on peut construire, comme dans la démonstration de 3.7, un ouvert T de S contenant s, et un ouvert W de G contenant $\varepsilon(s)$, tels que le morphisme $\pi'' : \mathrm{W} \to \mathrm{T}$ déduit de π soit de présentation finie et admette comme section le morphisme $\varepsilon'' : \mathrm{T} \to \mathrm{W}$ déduit de ε. Pour tout $t \in \mathrm{T}$, $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}^0_t$ est alors la composante connexe de $\pi''^{-1}(t)$ contenant $\varepsilon''(t)$. Puisque π est lisse, il en est de même de π'' qui est donc lisse et de présentation finie. Alors, d'après EGA IV_3, 15.6.5, la réunion W^0 des $\mathrm{W} \cap \mathrm{G}^0_t$ pour $t \in \mathrm{T}$ est *ouverte* dans W.

D'autre part, d'après VI_A 0.5, on a $\mathrm{W}^0 \cdot \mathrm{W}^0 = \underline{\mathrm{G}^0} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$, et il faut montrer que ceci est ouvert dans $\pi^{-1}(\mathrm{T})$. Nous pouvons donc supposer désormais que $\mathrm{T} = \mathrm{S}$; il reste à montrer que $\mathrm{W}^0 \cdot \mathrm{W}^0$ est ouvert dans G. Puisque π est universellement ouvert, il en est de même de μ (VI_A 0.1). Donc, puisque W^0 est ouvert dans G, il en est de même de $\mathrm{W}^0 \cdot \mathrm{W}^0 = \mu(\mathrm{W}^0 \times_\mathrm{S} \mathrm{W}^0)$.

Ce résultat sera amélioré en 4.4.

Lemme 3.10.1. — *Soit* G *un* S*-groupe à* fibres localement de type fini. *Alors tout sous-schéma en groupes ouvert* H *de* G *contient* $\underline{\mathrm{G}^0}$, *et vérifie :* $\underline{\mathrm{G}^0} = \underline{\mathrm{H}^0}$.

Soit $s \in \mathrm{S}$; posons $\mathrm{G}'_s = \mathrm{H}_s \cap \mathrm{G}^0_s$; alors G'_s est un ouvert de G^0_s, qui est dense dans G^0_s puisque G^0_s est irréductible (VI_A 2.4), donc $\mathrm{G}'_s \cdot \mathrm{G}'_s = \mathrm{G}^0_s$ (VI_A 0.5), ce qui montre que $\mathrm{G}^0_s = \mathrm{G}'_s \cdot \mathrm{G}'_s \subset \mathrm{H}_s \cdot \mathrm{H}_s = \mathrm{H}_s$. On a donc $\mathrm{G}^0_s = \mathrm{H}^0_s$ pour tout s, d'où $\underline{\mathrm{G}^0} \subset \mathrm{H}$ et $\underline{\mathrm{G}^0} = \underline{\mathrm{H}^0}$.

Proposition 3.11. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme entre* S*-groupes* localement de 346
présentation finie. *Si* u *est* plat, *l'application* $u^0 : \underline{\mathrm{G}^0} \to \underline{\mathrm{H}^0}$ *déduite de* u *est* surjective *; la réciproque est vraie si* G *est* plat *sur* S *et si* H *est à* fibres réduites. [26]

Supposons u plat ; alors pour tout $s \in \mathrm{S}$, u_s est plat et localement de présentation finie, donc ouvert (EGA IV_2, 2.4.6), donc le morphisme $u^0_s : \mathrm{G}^0_s \to \mathrm{H}^0_s$ est surjectif, d'après 1.3.2. [27] Donc l'application $u^0 : \underline{\mathrm{G}^0} \to \underline{\mathrm{H}^0}$ est surjective.

Réciproquement, supposons l'application $u^0 : \underline{\mathrm{G}^0} \to \underline{\mathrm{H}^0}$ surjective, G plat sur S et H à fibres réduites. Alors, pour tout $s \in \mathrm{S}$, le morphisme $u^0_s : \mathrm{G}^0_s \to \mathrm{H}^0_s$ est surjectif, donc plat en tout point au-dessus du point générique η de H^0_s (puisque $\mathscr{O}_{\mathrm{H}^0_s,\eta}$ est un

[26] N.D.E. : comparer avec VI_A, 5.6.

[27] N.D.E. : On a raccourci l'original, en référant ici à 1.3.2. D'autre part, on a simplifié ci-dessous l'original, en supprimant une référence au théorème de platitude générique (EGA IV_2, 6.9.1), qui n'est pas nécessaire ici.

corps), donc u_s est plat d'après 1.3. Donc u est plat, d'après le « critère de platitude par fibres » (EGA IV_3, 11.3.11).

4. Dimension des fibres des groupes localement de présentation finie

Proposition 4.1. — *Soit* G *un* S-*schéma* localement de type fini*, muni d'une* S-section ε*, et tel que pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, on ait* $\dim \mathrm{G}_s = \dim_{\varepsilon(s)} \mathrm{G}_s$ (*ce qui est le cas si* G *est un* S-*groupe* (1.5)).

(i) *La fonction* $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ *est* semi-continue supérieurement *dans* S.

(ii) *Si, de plus,* G *est* localement de présentation finie *sur* S*, cette fonction est* localement constructible.

Soit $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural. Le théorème de semi-continuité de Chevalley (EGA IV_3, 13.1.3) affirme que la fonction $x \mapsto \dim_x \pi^{-1}(\pi(x))$ est semi-continue
347 supérieurement dans G. Or, pour tout $s \in \mathrm{S}$, on a

$$\dim \mathrm{G}_s = \dim \pi^{-1}(s) = \dim_{\varepsilon(s)} \pi^{-1}(\pi(\varepsilon(s)))\,;$$

et puisque la fonction $s \mapsto \varepsilon(s)$ est continue dans S, la fonction composée $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ est semi-continue supérieurement dans S.

Supposons G localement de présentation finie sur S. Pour montrer que la fonction $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ est localement constructible, on voit en raisonnant comme précédemment qu'il suffit de montrer que la fonction $x \mapsto \dim_x \pi^{-1}(\pi(x))$ est localement constructible dans G, ce qui résulte de EGA IV_3, 9.9.1.

Proposition 4.2. — *Soit* $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ *un* S-*schéma* localement de présentation finie*, muni d'une* S-section ε *et vérifiant les deux conditions suivantes* (*qui sont vérifiées si* G *est un* S-*groupe, d'après* 1.5 *et* $\mathrm{VI_A}$ 2.4.1) :

a) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *et tout* $x \in \mathrm{G}_s$*, on a* $\dim \mathrm{G}_s = \dim_x \mathrm{G}_s$ (*ou, ce qui revient au même* (1.5)*, pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, toutes les composantes irréductibles de* G_s *ont même dimension*).

b) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, si on note* G_s^0 *la composante connexe de* G_s *contenant* $\varepsilon(s)$*,* G_s^0 *est* géométriquement irréductible.

Soit $s \in \mathrm{S}$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est* universellement ouvert *sur* S aux points de G_s^0.

(i bis) G *est* universellement ouvert *sur* S en tout point d'un voisinage de $\varepsilon(s)$ dans G_s^0. [(28)]

(ii) *La fonction* $t \mapsto \dim \mathrm{G}_t$ *est* constante dans un voisinage de s *dans* S.

(iii) $\underline{\mathrm{G}^0}$ *est* « universellement ouvert sur S aux points de G_s^0 »*, c.-à-d., étant donnés* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $s' \in \mathrm{S}'_s$, $g \in \mathrm{G}^0_{s'}$ *et* V *un voisinage ouvert de* g *dans* $\mathrm{G}' = \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$*, alors* $\pi(\mathrm{V} \cap \underline{\mathrm{G}'^0})$ *est un voisinage ouvert de* s' *dans* S'. [(29)]

---

(28) N.D.E. : On trouve dans l'original : « en les points de $\varepsilon(s)$ » ; il n'est pas suffisant de supposer que G soit universellement ouvert sur S en $\varepsilon(s)$, comme le montre l'exemple donné dans la N.D.E. (19). On a corrigé la preuve en conséquence.

(29) N.D.E. : On a ajouté la condition (iii), signalée par O. Gabber ; elle sera utile plus loin (5.7).

Évidemment (i) $\Rightarrow$ (i bis). D'après EGA IV_3, 14.3.3.1 (ii), l'ensemble des points de G_s^0 où π_{G} est universellement ouvert est *fermé* dans G_s^0. Donc, comme G_s^0 est irréductible, on a (i bis) $\Rightarrow$ (i).

Montrons que (i) entraîne (ii). Soit T l'ensemble des $t \in \mathrm{S}$ tels que $\dim \mathrm{G}_t = \dim \mathrm{G}_s$. D'après 4.1, T est localement constructible donc, d'après EGA IV_1, 1.10.1, pour montrer que T est un voisinage de s, il suffit de montrer que toute générisation 348
s' de s appartient à T.

Soient x le point générique de G_s^0 et U un ouvert de G contenant x. Comme π_{G} est universellement ouvert en ξ, alors, d'après EGA IV_3, 14.3.13, pour toute générisation s' de s, on a : $\dim(\mathrm{U} \cap \mathrm{G}_{s'}) \geqslant \dim_x(\mathrm{U} \cap \mathrm{G}_s)$. Compte-tenu de notre hypothèse a), ceci entraîne $\dim \mathrm{G}_{s'} \geqslant \dim \mathrm{G}_s$. Or, la fonction $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ étant semi-continue supérieurement, d'après 4.1, on a aussi $\dim \mathrm{G}_{s'} \leqslant \dim \mathrm{G}_s$, d'où $s' \in \mathrm{T}$. Ceci prouve que (i) $\Rightarrow$ (ii).

Il est clair que (iii) $\Rightarrow$ (i) ; montrons que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Comme la dimension des fibres est inchangée par extension du corps de base et comme la formation de $\underline{\mathrm{G}}^0$ commute au changement de base (cf. la démonstration de 3.3), on peut supposer que $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$ et $s' = s$. De plus, comme tout ouvert V de G rencontrant G_s^0 contient le point générique η de G_s^0, on peut supposer que $g = \eta$.

On peut de plus supposer S affine. Soit U un voisinage ouvert affine de $\varepsilon(s)$, il est alors de présentation finie sur S. Remplaçant S par $\varepsilon^{-1}(\mathrm{U})$ puis U par $\mathrm{U} \cap \pi^{-1}(\mathrm{S})$, on se ramène au cas où $\pi : \mathrm{U} \to \mathrm{S}$ est de présentation finie et admet $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{U}$ pour section. Alors, d'après EGA IV_3, 9.7.12, $\underline{\mathrm{G}}^0 \cap \mathrm{U}$ est constructible dans U. Alors, remplaçant V par un ouvert affine contenu dans $\mathrm{V} \cap \mathrm{U}$, on obtient que $\underline{\mathrm{G}}^0 \cap \mathrm{V}$ est constructible dans V. Comme $\pi : \mathrm{V} \to \mathrm{S}$ est de présentation finie, alors $\pi(\underline{\mathrm{G}}^0 \cap \mathrm{V})$ est localement constructible dans S, d'après le théorème de constructibilité de Chevalley (cf. EGA IV_1, 1.8.4).

Donc, d'après *loc. cit.*, 1.10.1, pour montrer que $\pi(\underline{\mathrm{G}}^0 \cap \mathrm{V})$ est un voisinage ouvert de s, il suffit de montrer que pour toute générisation t de s, il existe une générisation ξ de η appartenant à $\underline{\mathrm{G}}^0$ (et donc à $\underline{\mathrm{G}}^0 \cap \mathrm{V}$). Or le point générique ξ de G_t^0 est une générisation de η. En effet, $\varepsilon(s)$ appartient à l'adhérence X de $\{\xi\}$ dans G donc, d'après le théorème de semi-continuité de Chevalley (cf. EGA IV_3, 13.1.3), on a $\dim_{\varepsilon(s)} \mathrm{X}_s \geqslant \dim_\xi \mathrm{X}_t$; d'autre part, l'hypothèse (ii) entraîne que $\dim_\xi \mathrm{G}_t^0 = \dim_{\varepsilon(s)} \mathrm{G}_s$. Il en résulte qu'une des composante irréductibles de X_s contenant $\varepsilon(s)$ est égale à G_s^0, d'où $\eta \in \overline{\{\xi\}}$. Ceci prouve que (ii) $\Rightarrow$ (iii), ce qui démontre la proposition.

[30] On peut aussi démontrer l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) comme suit. Puisque π est localement de présentation finie, il existe un ouvert U de G contenant $\varepsilon(s)$ et un ouvert V de S contenant s tels que $\pi(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$ et que le morphisme $\pi' : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ déduit de π soit de présentation finie. Posons alors $\mathrm{T} = \varepsilon^{-1}(\mathrm{U})$ et $\mathrm{W} = \pi'^{-1}(\mathrm{T}) = \mathrm{U} \cap \pi^{-1}(\mathrm{T})$. Alors le morphisme $\pi'' : \mathrm{W} \to \mathrm{T}$ déduit de π' est de présentation finie et admet comme section le morphisme $\varepsilon'' : \mathrm{T} \to \mathrm{W}$ déduit de ε. De plus, pour tout $t \in \mathrm{T}$, G_t^0 étant

[30] N.D.E. : Ce qui précède nous a été communiqué par O. Gabber ; on a également conservé la démonstration de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) donnée dans l'original.

irréductible, $W \cap G_t^0$ est dense dans G_t^0, donc irréductible, donc connexe : c'est donc la composante connexe de $\pi''^{-1}(t)$ contenant $\varepsilon''(t)$.

Comme $W \cap G_t^0$ est un ouvert dense de G_t^0, on a, d'après 1.5 et EGA IV_2, 5.2.1, $\dim(W \cap G_t^0) = \dim G_t^0 = \dim G_t$, donc la fonction $t \mapsto \dim W \cap G_t^0$ est constante dans un voisinage de s dans T. Montrons enfin que, quel que soit $t \in T$, $W \cap G_t^0$ est géométriquement irréductible. Soit K une extension de $\kappa(t)$, alors $(W \cap G_t^0) \otimes_{\kappa(t)} K = (W \otimes_{\kappa(t)} K) \cap (G_t^0 \otimes_{\kappa(t)} K)$ est un ouvert non vide de $G_t^0 \otimes_{\kappa(t)} K$, donc est irréductible puisque $G_t^0 \otimes_{\kappa(t)} K$ l'est.

Nous sommes alors dans les conditions d'application de EGA IV_3, 15.6.6 (ii), qui affirme que π'' (donc π) est universellement ouvert aux points de $W \cap G_s^0$. Mais, d'après EGA IV_3, 14.3.3.1 (ii), le sous-ensemble de G_s formé des points où π est universellement ouvert est fermé dans G_s ; puisqu'il contient $W \cap G_s^0$, il contient donc son adhérence G_s^0.

349 ***Corollaire 4.3***. — *Soit* G *un* S-*groupe* plat et localement de présentation finie. *Alors la fonction* $s \mapsto \dim G_s$ *est* localement constante *sur* S.

Cela résulte immédiatement de 4.2, car tout morphisme plat et localement de présentation finie est universellement ouvert (EGA IV_2, 2.4.6).

Corollaire 4.4. — *Soit* G *un* S-*groupe* localement de présentation finie *sur* S aux points de la section unité. *Considérons les conditions :*

(i) G *est* lisse *sur* S aux points de la section unité (cf. 3.10).

(ii) *Pour tout* $s \in S$, G_s *est* lisse *sur* $\kappa(s)$, *et la fonction* $s \mapsto \dim G_s$ *est* localement constante *sur* S.

(iii) *Pour tout* $s \in S$, G_s *est* lisse *sur* $\kappa(s)$, *et il existe un* voisinage V de la section unité *tel que* $\pi_V : V \to S$ *soit* universellement ouvert.

(iv) *Pour tout* $s \in S$, G_s^0 *est* lisse *sur* $\kappa(s)$, *et* G^0 *est* représentable *par un sous-schéma en groupes ouvert de* G, universellement ouvert *sur* S.

Alors on a les implications suivantes : (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).

Si on suppose de plus S réduit, *alors les conditions* (i) *à* (iv) *sont équivalentes, et impliquent que* G^0 *est* lisse *sur* S. [31]

Montrons que (i) entraîne (ii). Pour tout $x \in G$, on a $\dim_x \pi^{-1}(\pi(x)) = \dim \pi^{-1}(\pi(x))$, d'après 1.5. Par conséquent, d'après EGA IV_4, 17.10.2, la fonction

$$x \mapsto \dim_x \pi^{-1}(\pi(x)) = \dim \pi^{-1}(\pi(x))$$

est continue au voisinage de la section unité ; donc la fonction $s \mapsto \dim G_s$ est continue dans S, donc localement constante dans S. D'autre part, pour tout $s \in S$, G_s est lisse sur $\kappa(s)$, d'après 1.3.1.

Montrons que (ii) entraîne (iv). Il suffit de montrer que $\underline{G}^0$ est *ouvert* dans G, car alors, d'après 3.4, G^0 sera représentable par le sous-schéma en groupes induit sur $\underline{G}^0$,

[31] N.D.E. : Bien entendu, on ne peut se dispenser ici de l'hypothèse que S soit réduit : si k est un corps et $S = \operatorname{Spec} k[\delta]$, où $\delta^2 = 0$, le k-groupe trivial $G = \operatorname{Spec} k$ est un S-groupe vérifiant (ii)–(iv), mais n'est pas plat, donc pas lisse, sur A.

et les propriétés de G^0 citées dans l'énoncé résulteront de 2.4 et 4.2. Étant donné 350
$s \in S$, construisons comme dans la démonstration de 3.10, W, T, π'', ε'' et W^0. Alors, d'après EGA IV_3, 15.6.7, W^0 est *ouvert* dans W. D'autre part, sous l'hypothèse 4.4 (ii), il résulte de 4.2 que π est universellement ouvert en tout point de W^0, donc (VI_A 0.1) μ est universellement ouvert en tout point de $W^0 \times_S W^0$, ce qui montre que $W^0 \cdot W^0$ est ouvert, et on termine comme dans la démonstration du théorème 3.10.

Il est clair que (iv) $\Rightarrow$ (iii), et (iii) $\Rightarrow$ (ii) résulte de 4.2 appliqué à V.

Enfin, supposons (ii)–(iv) vérifiés et montrons que G^0 est lisse sur S si S est réduit. [32] Pour cela, on peut supposer $G = G^0$. Alors G est de présentation finie sur S en vertu de 5.5 ci-dessous. Ainsi, π_G est de présentation finie, à fibres géométriquement intègres, de dimension localement constante sur S. Alors, d'après EGA IV_3, 15.6.7, le morphisme $G \times_S S_{\text{réd}} \to S_{\text{réd}}$ déduit de π_G est plat, donc π_G est *plat* si S est réduit. Dans ce cas, $G = G^0$ est lisse sur S, d'après le théorème 3.10.

5. Séparation des groupes et espaces homogènes

Proposition 5.1. — *Pour qu'un* S*-groupe* G *soit* séparé*, il faut et il suffit que la section unité de* G *soit une* immersion fermée*.*

La condition est nécessaire (EGA I, 5.4.6) ; elle est suffisante en vertu du diagramme cartésien suivant (cf. VI_A 0.3) :

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \arrow[r, "\mu\circ(\mathrm{id}_G \times c)"] & G \\ G \arrow[u, "\Delta_{G/S}"] \arrow[r, "\pi"] & S \arrow[u, "\varepsilon"'] \end{tikzcd} .$$

Proposition 5.2. — *Si* S *est discret, tout* S*-groupe est séparé.*

En effet, S est alors égal à $\coprod_{s\in S} \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{S,s}$, et, d'après EGA I, 5.5.5, il suffit de montrer que pour tout $s \in S$, $G \times_S \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{S,s}$ est séparé, ce qui résulte de VI_A 0.3, 351
puisque $\mathscr{O}_{S,s}$ est un anneau local de dimension 0. [33]

Théorème 5.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes* localement de présentation finie *sur* S *et* universellement ouvert *sur* S au voisinage de la section unité, X *un* S*-schéma sur lequel* G *opère de façon que le morphisme :*

$$\Phi : G \underset{S}{\times} X \longrightarrow X \underset{S}{\times} X, \qquad (g,x) \mapsto (gx, x)$$

soit surjectif. *On suppose de plus que, pour tout* $s \in S$ *:*

(i) *il existe un sous-schéma ouvert* U *de* X*,* séparé *sur* S*, tel que* U_s *soit* dense *dans* X_s*,*

---

[32] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[33] N.D.E. : On a remplacé « artinien » par « de dimension 0 » (et l'on a mentionné cette généralisation dans VI_A 0.3).

(ii) *la fibre* X_s *est* localement de type fini *sur* $\kappa(s)$. [34]

Alors X *est* séparé *sur* S.

Corollaire 5.4. — *Soient* S, G, X *comme dans les hypothèses préliminaires de* 5.3. *Supposons de plus* X à fibres localement de type fini et connexes. *Alors :*

(i) X *est* séparé sur S.

(ii) *S'il existe un ouvert* V *de* X, *quasi-compact sur* S *et rencontrant chaque fibre* X_s *non-vide* [35], *alors* X *est* quasi-compact *sur* S.

Démonstration. (i) En effet, soit $s \in S$ tel que $X_s \neq \varnothing$. Comme le morphisme $\Phi_s : G_s \times_{\kappa(s)} X_s \to X_s \times_{\kappa(s)} X_s$ déduit de Φ par changement de base, est surjectif, et comme X_s est connexe, alors X_s est irréductible, d'après VI_A, 2.5.4. Donc, si U est un ouvert affine de X tel que U_s soit non vide, U_s est dense dans X_s, et le théorème s'applique.

Pour prouver (ii), on peut supposer S affine. Alors V est quasi-compact et, d'après 3.5, il existe un ouvert quasi-compact U de G contenant $\underline{G}^0$. Soit $s \in S$ tel que $X_s \neq \varnothing$. Alors X_s est irréductible (VI_A, 2.6.6) et donc, puisque U_s contient G^0_s, le morphisme $U_s \times_{\kappa(s)} V_s \to X_s$, $(g, x) \mapsto gx$ est surjectif (VI_A, 2.6.4). Par conséquent le morphisme $U \times_S V \to X$ est surjectif et donc X est quasi-compact (puisque U et V le sont) ; comme on a supposé S affine, donc séparé, il en résulte que X est quasi-compact sur S (cf. EGA I, 6.6.4 (v)).

Remarque 5.4.1. — [36] On verra au cours de la démonstration que la conclusion du théorème 5.3 est vraie si l'on fait seulement l'hypothèse : (i′) il existe un sous-schéma ouvert U de X, *séparé* sur S, tel que U_s soit *dense dans toute composante irréductible* de X_s. (Celle-ci est conséquence de (i) si X_s a localement un nombre fini de composantes irréductibles, ce qui est le cas sous l'hypothèse (ii).) D'autre part, on verra plus loin que 5.4 est également vrai sous l'hypothèse que chaque fibre X_s soit quasi-séparée et connexe.

---

[34] N.D.E. : On a corrigé l'original en supposant G universellement ouvert sur S *au voisinage* de la section unité et en ajoutant l'hypothèse (ii) ; voir plus loin des exemples dûs à O. Gabber, qui montrent que les énoncés 5.3 et 5.4 de l'original sont faux sans hypothèses additionnelles. D'autre part, signalons que le th. 5.3 est une version remaniée du th. 5.3A ci-dessous, qui figure dans l'édition 1965 de SGAD, et est dû à M. Raynaud, cf. les Notes (∗) dans l'Exp. X, 8.5 et 8.8.

Théorème 5.3A (Raynaud). — *Soient* G *un* S-*groupe localement de présentation finie, universellement ouvert sur* S, *et à fibres connexes. Alors* G *est* séparé *sur* S.
Plus généralement, tout S-*schéma* X *localement de présentation finie sur* S, *muni d'une action de* G *telle que le morphisme* $\Phi : G \times_S X \to X \times_S X$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$ *soit surjectif, est* séparé *sur* S.

[35] N.D.E. : Sans cette hypothèse, on a le contre-exemple suivant, signalé par O. Gabber : soient $G = S$ un schéma local de point fermé s, tel que $S^* = S - \{s\}$ ne soit pas quasi-compact, et X la réunion disjointe de $\{s\}$ et de S^*.
[36] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, cf. la N.D.E. (34).

Corollaire 5.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes,* localement de présentation finie*,* à fibres connexes*,* et universellement ouvert *sur* S*. Alors* G *est* séparé et de présentation finie *sur* S. [37]

En effet, d'après 3.6 et 5.4, G est quasi-compact et séparé sur S, et comme G est localement de présentation finie sur S, il est donc de présentation finie sur S.

5.6. *Démonstration du théorème* 5.3. Avant d'établir 5.3, prouvons quelques lemmes.

Lemme 5.6.0. — [38] (i) *Soient* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ *des anneaux intègres, avec* B entier *sur* A*, et soit* $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ *tel que* A *soit* unibranche *au point* $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathrm{A}$*. Alors le morphisme* $\pi : \mathrm{Spec}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ *est* ouvert *au point* $\mathfrak{q}$.

(ii) *Soient* X, Y *deux préschémas* irréductibles*,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme* dominant*,* x *un point de* X *tel que* f *soit* quasi-fini *en* x *et que* $y = f(x)$ *soit un point* unibranche *de* Y*. Alors* f *est* ouvert *au point* x*. En particulier, si* $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y})$ *est un préschéma* local *de point fermé* y*, alors* $f(\mathrm{U}) = \mathrm{Y}$ *pour tout voisinage* U *de* x*.*

(i) Soient K (resp. L) le corps des fractions de A (resp. B), A' le normalisé de A, et B' le sous-anneau de L engendré par A' et B. Alors B' est entier sur A'. Posons $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$, $\mathrm{Y}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}')$, $\mathrm{X}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{B}')$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d] & \mathrm{Y}' \arrow[d, "\phi"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

dans lequel tous les morphismes sont entiers et surjectifs.

Comme A est unibranche en $\mathfrak{p}$, Y' possède un *unique* point $\mathfrak{p}'$ au-dessus de $\mathfrak{p}$; par conséquent, si U est un voisinage ouvert de $\mathfrak{p}'$ dans Y', alors $\phi(\mathrm{Y}' - \mathrm{U})$ est un fermé ne contenant pas $\mathfrak{p}$, de sorte que l'ouvert complémentaire est contenu dans $\phi(\mathrm{U})$. Ceci montre que $\phi : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ est ouvert en $\mathfrak{p}'$, et il suffit donc de montrer que π' est ouvert. On est ainsi ramené au cas où $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$ est normal.

Soit N une extension quasi-galoisienne de K contenant L, soit $\widetilde{\mathrm{X}} = \mathrm{Spec}(\widetilde{\mathrm{B}})$, où $\widetilde{\mathrm{B}}$ est la clôture intégrale de B dans N, et soit $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(\mathrm{N}/\mathrm{K})$. Comme $\widetilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ est surjectif, il suffit de montrer que $\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{Y}$ est ouvert. Soient U un ouvert de $\widetilde{\mathrm{X}}$ et $\mathrm{U}' = \bigcup_{g \in \mathrm{G}} g\mathrm{U}'$. Comme G agit transitivement sur les fibres de $\widetilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{Y}$ (cf. [**BAC**], Chap. V, § 2.3, Prop. 6), alors $\widetilde{\pi}(\mathrm{U})$ égale $\widetilde{\pi}(\mathrm{U}')$, et ce dernier est égal à l'ouvert complémentaire du fermé $\widetilde{\pi}(\widetilde{\mathrm{X}} - \mathrm{U}')$. Ceci prouve (i).

---

[37] N.D.E. : Signalons ici le résultat suivant ([**Ray70a**], VI 2.5) : si S est *normal*, G lisse à fibres connexes, et si X est un G-espace homogène (fppf) (i.e. les morphismes $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ et $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ sont couvrants pour la topologie (fppf)), localement de type fini sur S, alors X est localement *quasi-projectif* sur S. En particulier, G est quasi-projectif sur S. Voir aussi la N.D.E. (35) dans VI_{A}.

[38] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, communiqué par O. Gabber, qui améliore EGA IV_3, 14.4.1.2 et corrige la démonstration de *loc. cit.*, 14.4.1.3 sans en modifier les hypothèses (comparer avec l'erratum ($\mathrm{Err}_{\mathrm{IV}}$, 38) dans EGA IV_4).

(ii) On peut supposer Y et X réduits. D'après le « théorème principal de Zariski » (cf. EGA IV_3, 8.12.9), il existe des voisinages ouverts affines U de x, et $\mathrm{V} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ de y, tels que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$, et une factorisation :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{V}' \arrow[d, "u"] \\ & \mathrm{V} \end{tikzcd} ,$$

où j est une immersion ouverte et u est fini. Remplaçant V' par l'adhérence de $j(\mathrm{U})$, on peut supposer V' irréductible, donc $\mathrm{V}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$, où B est une A-algèbre intègre, finie sur A. De plus, comme f est dominant, u l'est aussi, de sorte que le morphisme $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est injectif. Comme, par hypothèse, A est unibranche au point y, il résulte de (i) que u est ouvert au point $j(x)$, et donc $f = u \circ j$ est ouvert au point x. Ceci prouve la première assertion de (ii). La seconde en découle, car si Y est un préschéma local de point fermé y, tout ouvert contenant y égale Y. (Dans le cas où $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y})$, on peut aussi utiliser, au lieu de EGA IV_3, 8.12.9, la forme locale du théorème principal de Zariski, qu'on trouve par exemple dans [**Pes66**], ou [**Ray70b**], Ch. IV, Th. 1.)

Lemme 5.6.1.0. — [39] *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *un morphisme* localement de présentation finie, $s \in \mathrm{S}$, *et* $x \in \mathrm{X}_s$. *Soit* $n = \dim_x(\mathrm{X}_s)$ *et soit* q *le morphisme structural* $\mathbb{A}^n_{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$.

Supposons donné un morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}}$ quasi-fini *tel que* $f = q \circ u$, *et supposons* f universellement ouvert *au point générique* z *d'une composante irréductible* $\mathfrak{z}$ *de* X_s, *contenant* x *et de dimension* n. *Alors* u *est* universellement ouvert *au point* $x \in \mathrm{X}$.

Remarquons d'abord que : (†) *les hypothèses sont préservées par tout changement de base* $\pi : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *couvrant* s (i.e. tel que $\pi^{-1}(s) \neq \varnothing$). En effet, soit $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un tel morphisme, soit

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}' \arrow[r, "u'"] \arrow[dr, "f'"'] & \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}'} \arrow[d, "q'"] \\ & \mathrm{S}' \end{tikzcd}$$

le diagramme obtenu par changement de base, et soient s' un point de S' au-dessus de s et x' un point de $\mathrm{X}'_{s'}$ au-dessus de x. Comme $\mathrm{X}'_{s'} = \mathrm{X}_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s')$ alors, par relèvement des générisations et invariance de la dimension par extension de corps (EGA IV_2, 2.3.4 (i) et 4.1.4), x' est contenu dans une composante irréductible $\mathfrak{z}'$ de $\mathrm{X}'_{s'}$ dont le point générique z' est au-dessus de z, et l'on a $n \leqslant \dim \mathfrak{z}' \leqslant \dim_{x'} \mathrm{X}'_{s'} \leqslant n$, d'où $\dim \mathfrak{z}' = n = \dim_{x'} \mathrm{X}'_{s'}$. Comme f est universellement ouvert en x, alors f' est universellement ouvert en x'.

Posons $\mathrm{Y} = \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}}$. D'après EGA IV_3, 14.3.3.1 (i), pour prouver que u est universellement ouvert en x, il suffit de prouver que, pour tout entier $r \geqslant 0$ et tout point x' de

(39) N.D.E. : On a explicité ce lemme, utilisé dans la démonstration du lemme 5.6.1

$\mathrm{X}' = \mathrm{X}[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_r]$ au-dessus de x, le morphisme $u' : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}' = \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}}[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_r]$ est ouvert au point x'. Or, notant $\mathrm{S}' = \mathrm{S}[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_r]$ et q' la projection $\mathrm{Y}' \cong \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{S}'$, on est dans la situation obtenue par le changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Donc, d'après ce qui précède, on est ramené à montrer que u est ouvert au point x.

Posons $y = u(x)$. Comme u est localement de présentation finie (puisque f et q le sont, cf. EGA IV_1, 1.4.3) alors, d'après EGA IV_1, 1.10.3, il suffit de montrer que $u(\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}) = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y})$. Pour cela, on peut supposer S affine et intègre. Soit alors $\pi : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ sa normalisation, notons $u' : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ le morphisme déduit de u par changement de base. Comme le morphisme $\pi_{\mathrm{Y}} : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ est entier et surjectif, on a

$$\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}) = \bigcup_{y'} \pi_{\mathrm{Y}}(\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}',y'})),$$

la réunion étant prise sur tous les points de Y' au-dessus de y ; il suffit donc de montrer que, pour chaque tel y', et tout $x' \in \mathrm{X}'_{y'}$ au-dessus de x, on a $u'(\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{X}',x'}) = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}',y'}$. Comme les hypothèses sont préservées par le le changement de base $\pi : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, on est ainsi ramené au cas de S', i.e. on peut supposer que S est un schéma intègre et normal.

Maintenant, les hypothèses sur f entraînent, d'après EGA IV_3, 14.3.13, qu'il existe une composante irréductible Z de X contenant z (et donc x), dominant S et telle que

$$\dim_z(\mathrm{Z}_s) = n = \dim(\mathrm{Z}_\eta),$$

où η est le point générique de S. Soit ξ le point générique de Z. Comme u donc aussi $u_\eta : \mathrm{Z}_\eta \to \mathbb{A}^n_\eta$ est quasi-fini, alors l'adhérence dans $\mathbb{A}^n_\eta$ du point $u_\eta(\xi) = u(\xi)$ est de dimension n, donc $u(\xi)$ est le point générique de $\mathbb{A}^n_\eta$, qui est aussi le point générique de $\mathrm{Y} = \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}}$. Par conséquent, notant g la restriction de u à Z, le morphisme $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ est quasi-fini et dominant. Comme Y est normale il résulte du lemme 5.6.0 que g est ouvert, de sorte que u est ouvert en tout point de Z, en particulier au point x. Par conséquent, on a $u(\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}) = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$, et ceci achève la démonstration du lemme 5.6.1.0.

Le lemme suivant remplace avantageusement EGA IV_3, 14.5.10 [(40)], en ce qu'il est indépendant d'hypothèses noethériennes.

Lemme 5.6.1. — *Soient* S *un schéma,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *un* S*-schéma* localement de présen- 352
tation finie*,* s *un point de* S*,* x *un point* fermé *de* X_s*. On suppose que* f *est* universellement ouvert *au point générique* z *d'une composante irréductible* $\mathfrak{z}$ *de* X_s*, contenant* x *et telle que* $\dim_x(\mathrm{X}_s) = \dim \mathfrak{z}$*. Alors, il existe un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \arrow[r, "f"] & \mathrm{S} \\
\mathrm{S}'' \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "\pi"'] & \mathrm{S}' \arrow[u, "w"']
\end{tikzcd} \quad ,$$

(40)N.D.E. : On a corrigé l'original, qui indiquait 19.5.10.

où S' *est un schéma* affine, *w un morphisme* étale, *π un morphisme* fini surjectif, de présentation finie, *et $\phi^{-1}(s)$ est formé d'un seul point s'', tel que $h(s'') = x$ et $\kappa(s'') = \kappa(x)$.* [41]

Démonstration. D'abord, on peut supposer $S = \operatorname{Spec} A$ et $X = \operatorname{Spec} B$, où B est une A-algèbre de présentation finie. Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ les idéaux premiers de A et B correspondant à s et x, respectivement, de sorte que $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{q}$. Posons $n = \dim_x X_s$, et soient $t_1, \ldots, t_n$ des éléments de B dont les images dans $\mathscr{O}_{X_s,x} = B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}$ forment un système de paramètres. Alors, $\mathscr{O}_{X_s,x}/(t_1, \ldots, t_n)$ est de dimension finie sur $\kappa(x)$ et donc aussi sur $\kappa(s)$, puisque x est un point fermé du $\kappa(s)$-schéma algébrique X_s. Par conséquent, le S-morphisme

$$u : X \longrightarrow \mathbb{A}^n_S = \operatorname{Spec}(A[T_1, \ldots, T_n]),$$

défini par $T_i \mapsto t_i$, est de présentation finie, x est isolé dans sa fibre $u^{-1}(u(x))$, et l'on a $u(x) = \tau_0(s)$, où $\tau_0 : S \to \mathbb{A}^n_S$ désigne la « section nulle » de $\mathbb{A}^n_S \to S$, correspondant au morphisme de A-algèbres $A[T_1, \ldots, T_n] \to A$ qui envoie chaque T_i sur 0. Comme l'ensemble des points de X qui sont isolés dans leur fibre au-dessus de $\mathbb{A}^n_S$ est ouvert (EGA IV_3, 13.1.4), on peut supposer, quitte à rétrécir X, que u est *quasi-fini* et que $u^{-1}(u(x)) = \{x\}$. D'après le lemme 5.6.1.0, u est universellement ouvert au point x.

Soit $B_0 = B/(t_1, \ldots, t_n)$ et soient $X_0 = X \times_{\mathbb{A}^n_S} \tau_0(S) = \operatorname{Spec} B_0$ et $u_0 : X_0 \to S$ le morphisme déduit de u par le changement de base $\tau_0 : S \hookrightarrow \mathbb{A}^n_S$. Alors u_0 est quasi-fini et de présentation finie, universellement ouvert au point x, et x est l'unique point de X_0 au-dessus de s.

Soit A' le hensélisé de l'anneau local $A_{\mathfrak{p}} = \mathscr{O}_{S,s}$, et soient $S' = \operatorname{Spec}(A')$, $B'_0 = B_0 \otimes_A A'$, et $X'_0 = X_0 \times_S S' = \operatorname{Spec}(B'_0)$. Alors le point fermé s' de S' est l'unique point de S' au-dessus de s, on a $\kappa(s') = \kappa(s)$, et X'_0 possède un unique point x' au-dessus de s' ; on a $\kappa(x') = \kappa(x)$ et x' est aussi l'unique point de X'_0 au-dessus de s et de x. Comme A' est hensélien alors, d'après EGA IV_4, 18.5.11, X'_0 est somme disjointe de deux parties ouvertes et fermées :

$$(*) \qquad X'_0 = V \sqcup W, \qquad \text{où} \quad V = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{X'_0,x'});$$

et l'anneau local $\mathscr{O}_{X'_0,x'}$ est *fini* et *de présentation finie* sur A'. La restriction π de u'_0 à V est donc finie et de présentation finie. De plus, puisque $u'_0 : X'_0 \to S'$ est ouvert en x', on a $u'_0(V) = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{S',s}) = S'$, de sorte que π est *surjectif.*

Ceci prouve le résultat voulu lorsque $S = S'$. Dans le cas général, A' est limite inductive filtrante de sous-algèbres A_i étales sur A, et telles que $S_i = \operatorname{Spec}(A_i)$ possède un unique point s_i au-dessus de s (et l'on a $\kappa(s_i) = \kappa(s)$). Alors, $B'_0 = \varinjlim B_i$, où $B_i = B_0 \otimes_A A_i$. Posons $X_i = \operatorname{Spec}(B_i) = X_0 \times_S S_i$ et $C = \mathscr{O}_{X'_0,x'}$. D'après $(*)$ plus haut, on a $C \cong B'_0/fB'_0$, pour un certain idempotent $f \in B'_0$, et il existe un indice i et $f_i \in B_i$ tel que f soit l'image de f_i dans B'_0. Posons $C_i = B_i/f_iB_i$ et $V_i = \operatorname{Spec}(C_i)$.

[41] N.D.E. : Par conséquent, h induit une section σ de $X \times_S S'' \to S''$ telle que $\sigma(s'')$ soit au-dessus de x ; comparer avec EGA IV_3, 14.5.10.

Alors $\mathrm{C} = \mathrm{C}_i \otimes_{\mathrm{A}_i} \mathrm{A}'$, d'où $\mathrm{V} = \mathrm{V}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S}'$, et C_i est une A_i-algèbre de présentation finie (puisqu'il en est ainsi de B_i). Par conséquent, les morphismes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}'_0 \arrow[dr, "u'_0"] & \\
\mathrm{V} \arrow[u, "h'"] \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{S}'
\end{tikzcd}$$

proviennent par le changement de base $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}_i$ de morphismes de présentation finie :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}_i \arrow[dr, "u_i"] & \\
\mathrm{V}_i \arrow[u, "h_i"] \arrow[r, "\pi_i"] & \mathrm{S}_i.
\end{tikzcd}$$

Pour tout $j \geqslant i$, soit $\mathrm{V}_j = \mathrm{V}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S}_j$ et soit $\pi_j : \mathrm{V}_j \to \mathrm{S}_j$ le morphisme (de présentation finie) déduit de π_i par changement de base. Comme $\pi : \mathrm{V} \to \mathrm{S}'$ est fini et surjectif, alors, d'après EGA IV_2, 8.10.5, il existe un indice j tel que $\pi_j : \mathrm{V}_j \to \mathrm{S}_j$ soit fini et surjectif. Alors, $w : \mathrm{S}_j \to \mathrm{S}$ est étale affine, S_j a un unique point s_j au-dessus de s, et V_j a un unique point x_j au-dessus de s_j (puisque x' est l'unique point de $\mathrm{V} = \mathrm{V}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}'$ au-dessus de s') :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}_j \arrow[r] \arrow[dr, "u_j"] & \mathrm{X}_0 \arrow[r] \arrow[dr, "u_0"] & \mathrm{X} \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "u"] & \\
\mathrm{V}_j \arrow[u, "h_j"] \arrow[r, "\pi_j"] & \mathrm{S}_j \arrow[r, "w"] & \mathrm{S} \arrow[r, "\tau_0"] & \mathbb{A}^n_{\mathrm{S}}.
\end{tikzcd}$$

Donc x_j est l'unique point de V_j au-dessus de s, son image par le morphisme $\mathrm{V}_j \to \mathrm{X}_j \to \mathrm{X}$ est x, et l'on a $\kappa(x_j) = \kappa(x)$. **353**

Lemme 5.6.2.0. — [42] *Soient k un corps et* G *un k-schéma* de type fini *non vide.*

(i) *Soient* K *une extension de k et* W *un ouvert dense de* G_{K}. *Notons π la projection* $\mathrm{G}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{G}$, *alors*

$$\mathrm{U} = \{g \in \mathrm{G} \mid \mathrm{W} \textit{ contient chaque point maximal de } \pi^{-1}(g)\}$$

est un ouvert dense de G. (N. B. *Si g est un point fermé de* G *appartenant à* U, *on a donc* $\pi^{-1}(g) \subset \mathrm{W}$.)

(ii) *Supposons de plus* G géométriquement irréductible. *Soient* $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de k-schémas, x un point de* X, *et Ω un ouvert de* Y *tel que* $\mu_x^{-1}(\Omega_{\kappa(x)}) \neq \varnothing$, *où μ_x désigne le morphisme* $\mathrm{G}_{\kappa(x)} \to \mathrm{Y}_{\kappa(x)}$, $g \mapsto \mu(g, x)$. *Alors :*

$$\mathrm{U} = \{g \in \mathrm{G} \mid \mu \textit{ envoie tout point maximal de } g \times x \textit{ dans } \Omega\}$$

[42] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, communiqué par O. Gabber. Il permet de simplifier la démonstration de 5.6.2, et de démontrer le théorème 5.3, ainsi que 5.4, sous une forme plus générale, voir 5.7 et 5.8 plus bas.

est un ouvert dense de G*, et pour tout point fermé* g *de* G *appartenant à* U*, on a* $\mu(g \times x) \subset \Omega$ *et donc* $\mu(g', x) \in \Omega_{\kappa(x)}$ *(resp.* $\mu(g, x') \in \Omega_{\kappa(g)}$*), pour tout point* $g' \in \mathrm{G}_{\kappa(x)}$ *au-dessus de* g *(resp.* $x' \in \mathrm{X}_{\kappa(g)}$ *au-dessus de* x*).*

(iii) *Supposons que* $\mathrm{G} = \mathrm{H}^0$*, où* H *est un* k*-schéma en groupes localement de type fini, opérant sur un* k*-schéma* X *non vide, de façon que le morphisme* $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, $(h, x) \mapsto (hx, x)$ *soit surjectif. Soit* U *un ouvert de* X*. Alors :*

(a) $\mathrm{G} \cdot \mathrm{U}$ *est un ouvert de* X*, égal à la réunion des composantes irréductibles de* X *dont le point générique appartient à* U*.*

(b) *Supposons* U dense dans chaque composante irréductible de X*. Alors, pour tout sous-ensemble fini* A *de* X*, il existe un point fermé* $g \in \mathrm{G}$ *tel que* $g \cdot \mathrm{A}' \subset \mathrm{U}_{\kappa(g)}$*, où* A′ *est l'image inverse de* A *dans* $\mathrm{X}_{\kappa(g)}$*. En particulier, le morphisme* $\mathrm{G} \times \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ *est surjectif.*

Démonstration. (i) Soit $\overline{k}$ une clôture séparable de k et soit L une extension de k contenant une copie de $\overline{k}$ et de K. Notons π_{L} (resp. ϕ) la projection $\mathrm{G}_{\mathrm{L}} \to \mathrm{G}$ (resp. $\mathrm{G}_{\mathrm{L}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{K}}$). Comme, pour tout $g \in \mathrm{G}$, ϕ envoie les points maximaux de $\pi_{\mathrm{L}}^{-1}(g)$ de façon surjective sur ceux de $\pi^{-1}(g)$, on voit que $\mathrm{U} = \{g \in \mathrm{G} \mid \mathrm{W}_{\mathrm{L}}$ contient chaque point maximal de $\pi_{\mathrm{L}}^{-1}(g)\}$. Donc, remplaçant K par L, on se ramène au cas où K contient $\overline{k}$.

Comme la projection $p : \mathrm{G}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{G}_{\overline{k}}$ est surjective et ouverte, $\mathrm{V} = p(\mathrm{W})$ est un ouvert dense de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$, et comme $p^{-1}(g) = \mathrm{Spec}(\kappa(g) \otimes_{\overline{k}} \mathrm{K})$ est irréductible pour tout $g \in \mathrm{G}_{\overline{k}}$ (cf. EGA IV_2, 4.3.3), alors pour tout $g \in \mathrm{V}$, le point générique de $p^{-1}(g)$ appartient à W. D'autre part, soit $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$; comme la projection $q : \mathrm{G}_{\overline{k}} \to \mathrm{G}$ est surjective et que $\mathscr{G}$ agit transitivement sur les fibres de q, alors $\mathrm{U} = q(\mathrm{V}')$, où V′ est l'intersection des $\mathscr{G}$-conjugués de V.

Or, soit Z le fermé $\mathrm{G}_{\overline{k}} - \mathrm{V}$, muni de la structure de sous-schéma fermé réduit. Comme $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ et donc Z sont de présentation finie sur $\overline{k}$, alors Z provient par changement de base d'un sous-schéma fermé réduit Z_1 de $\mathrm{G} \otimes_k k_1$, pour une certaine extension galoisienne finie k_1 de k, donc les $\mathscr{G}$-conjugués de Z sont en nombre fini, de sorte que leur réunion est encore un fermé rare F de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$, et $\mathrm{V}' = \mathrm{G}_{\overline{k}} - \mathrm{F}$ est un ouvert dense de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$. Donc, comme la projection $q : \mathrm{G}_{\overline{k}} \to \mathrm{G}$ est surjective et ouverte, alors $\mathrm{U} = q(\mathrm{V}')$ est un ouvert dense de G. De plus, pour tout point fermé g de G, la fibre $\pi^{-1}(g)$ est formée d'un nombre fini de points fermés de G_{K}, donc si $g \in \mathrm{U}$ alors $\pi^{-1}(g) \subset \mathrm{W}$. Ceci prouve (i), et (ii) en découle.

D'autre part, on a démontré (iii)(a) dans VI_{A}, 2.6.4. Enfin, si U est dense dans chaque composante irréductible de X, alors $\mathrm{X} = \mathrm{G} \cdot \mathrm{U}$, donc pour tout $x \in \mathrm{X}$, $\mu_x^{-1}(\mathrm{U}_{\kappa(x)})$ est un ouvert non vide de $\mathrm{G}_{\kappa(x)}$, et alors (iii)(b) découle de (ii).

Corollaire 5.6.2. — *Soient* S, G, X *comme dans les hypothèses préliminaires de* 5.3*, et soient* U *un ouvert de* X*,* $s \in \mathrm{S}$*, et* A *une partie finie de* X_s*. On suppose* U_s *dense dans* X_s *et* X_s *localement de type fini sur* $\kappa(s)$*.* [43]

[43] N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse sur X_s et l'on a simplifié (et corrigé) la démonstration, en tenant compte de l'ajout 5.6.2.0. D'autre part, la démonstration montre que la conclusion est valide si l'on suppose seulement que U_s est dense dans chaque composante irréductible de X_s.

Alors il existe un morphisme $f : \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$*, composé d'un morphisme fini surjectif* $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$ *et d'un morphisme étale* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*, et un morphisme* $h : \mathrm{S}'' \to \mathrm{G}$*, tels que l'image inverse* A'' *de* A *dans* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''$ *(i.e. dans* $\mathrm{X}_s \times_{\operatorname{Spec}\kappa(s)} \mathrm{S}''_s$*) soit contenue dans* $\ell_h^{-1}(\mathrm{U}_{\mathrm{S}''})$*, où* ℓ_h *désigne la translation de* $\mathrm{X}_{\mathrm{S}''} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''$ *définie par l'élément* $h \in \mathrm{G}(\mathrm{S}'')$*.*

Démonstration. Comme X_s est localement de type fini sur $\kappa(s)$ les composantes connexes de X_s sont ouvertes, et irréductibles (cf. VI_{A}, 2.5.4), donc U_s est dense dans chaque composante irréductible de X_s.

Donc, d'après le lemme 5.6.2.0, il existe un point fermé $g \in \mathrm{G}^0_s$ tel que $g \cdot a' \in \mathrm{U}_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(g)$ pour tout $a' \in \mathrm{X}_{\kappa(g)}$ au-dessus d'un point de A. **354**

D'après le lemme 5.6.1, il existe un morphisme $f : \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}$, composé d'un morphisme fini surjectif $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$ et d'un morphisme étale $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, et un morphisme $h : \mathrm{S}'' \to \mathrm{G}$, tels que $f^{-1}(s)$ soit formé d'un seul point s_0, et que $h(s_0) = g$ et $\kappa(s_0) = \kappa(g)$. Alors, notant A'' l'image inverse de A dans $\mathrm{X}_s \times_{\operatorname{Spec}\kappa(s)} \mathrm{S}''_s = \mathrm{X}_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s_0) = \mathrm{X}_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(g)$, la translation ℓ_h de $\mathrm{X}_{\mathrm{S}''}$ envoie A'' dans $\mathrm{U}_s \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s_0)$.

Lemme 5.6.3. — *Soit* X *un* S*-schéma. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X *est* séparé sur S.

(ii) *Pour tout* S*-schéma* T*, toute section* $\sigma : \mathrm{T} \to \mathrm{X}_{\mathrm{T}}$ *est une* immersion fermée*.*

(iii) *Pour tout* S*-schéma* réduit T*, deux* S*-morphismes* f_1 *et* f_2 *:* $\mathrm{T} \to \mathrm{X}$ *qui coïncident sur un ouvert dense* U *de* T *sont égaux.*

(iv) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *et tout couple de points* x_1*,* x_2 *de* X_s*, il existe un morphisme* $\phi : \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *et un sous-schéma ouvert* V *de* $\mathrm{X}_{\mathrm{S}''}$*,* séparé *sur* S''*, tels que :*

a) $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *est* ouvert*,* $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$ fermé surjectif*, et* $\phi^{-1}(s) \neq \varnothing$*.*

b) *L'image inverse de* $\{x_1, x_2\}$ *dans* $\mathrm{X}_{\mathrm{S}''}$ *est contenue dans* V*.*

(iv′) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$*, tout couple de points* $x_1, x_2 \in \mathrm{X}_s$ *est contenu dans un ouvert* V *de* X*, séparé sur* S*.* [44]

L'implication (ii) ⇒ (i) est claire (prendre $\mathrm{T} = \mathrm{X}$ et $\sigma =$ la section diagonale), ainsi que (i) ⇒ (iv′) ⇒ (iv). D'autre part, on a (i) ⇒ (ii) d'après EGA I, 5.4.6.

(iii) ⇒ (ii). Soit $\sigma : \mathrm{T} \to \mathrm{X}_{\mathrm{T}}$ une section de $p : \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{T}$. D'après EGA I, 5.3.13, σ est une immersion, i.e. un isomorphisme de T sur un sous-schéma localement fermé E de X_{T}. Pour montrer que E est fermé, on peut supposer T et E réduits. Soit $\overline{\mathrm{E}}$ le sous-schéma fermé réduit de X_{T} ayant l'adhérence de E pour espace sous-jacent, de sorte que E est un sous-schéma ouvert dense de $\overline{\mathrm{E}}$. Alors l'immersion $i : \overline{\mathrm{E}} \hookrightarrow \mathrm{X}_{\mathrm{T}}$ et $\sigma \circ p \circ i$ coïncident sur E, donc sur $\overline{\mathrm{E}}$ d'après l'hypothèse (iii). Donc tout point de $\overline{\mathrm{E}}$ appartient à $\sigma(\mathrm{T}) = \mathrm{E}$, d'où $\overline{\mathrm{E}} = \mathrm{E}$.

[44] N.D.E. : On a simplifié la formulation de la condition (iv) et ajouté la condition (iv′). D'autre part, on a ajouté la démonstration de l'implication (i) ⇒ (iii), utilisée dans la preuve de (iv) ⇒ (iii). Remarquons par ailleurs que si $\mathrm{T} = \operatorname{Spec} k[\varepsilon, x]/(\varepsilon^2, \varepsilon x)$ (k un corps), $\mathrm{X} = \mathrm{T}_{\text{réd}} = \operatorname{Spec} k[x]$, alors les morphismes $\phi_\lambda : \mathrm{T} \to \mathrm{X}$ définis par $x \mapsto x + \lambda\varepsilon$ ($\lambda \in k$) coïncident sur l'ouvert dense $\operatorname{Spec} \mathrm{B}_x$ mais ne sont pas égaux.

(i) ⇒ (iii). Supposons X séparé sur S et soient T un S-schéma réduit, f_1, f_2 deux S-morphismes $\mathrm{T} \to \mathrm{X}$ qui coïncident sur un ouvert dense U de T, et g le morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ de composantes f_1 et f_2. Comme $\mathrm{D} = \Delta_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathrm{X})$ est fermé, son image inverse par g est un fermé de T contenant U, donc égal à T, et puisque T est réduit, g se factorise par D (cf. EGA I, 5.2.2) ; par conséquent $f_1 = p_1 \circ g$ égale $p_2 \circ g = f_2$.

(iv) ⇒ (iii). Soient T un S-schéma *réduit* et f_1, f_2 deux S-morphismes $\mathrm{T} \to \mathrm{X}$ qui coïncident sur un ouvert dense U. Comme T est réduit, pour voir que $f_1 = f_2$, il suffit de voir que $f_1 = f_2$ ensemblistement. En effet, supposons ceci établi, et soient $t \in \mathrm{T}$, V un ouvert affine de X contenant $f_1(t) = f_2(t)$, et W le voisinage ouvert de t égal à l'image inverse de V par l'application continue sous-jacente à f_1 et f_2 ; alors les morphismes $f_i|_{\mathrm{W}} : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ coïncident sur l'ouvert dense $\mathrm{U} \cap \mathrm{W}$ de W. Comme V est séparé et W réduit, ceci entraîne que $f_1|_{\mathrm{W}} = f_2|_{\mathrm{W}}$, d'où $f_1 = f_2$.

Soient donc $t \in \mathrm{T}$ et s son image dans S, montrons que les points $x_1 = f_1(t)$ et $x_2 = f_2(t)$ de X_s sont égaux. Soient $\phi : \mathrm{S}'' \to \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et V un ouvert de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''$ comme dans (iv) ; posons $\mathrm{T}' = \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ et $\mathrm{T}'' = \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}''$ et notons $g : \mathrm{T}'' \to \mathrm{T}$ et $f_i'' : \mathrm{T}'' \to \mathrm{X}_{\mathrm{S}''}$ $(i = 1, 2)$ les morphismes obtenus par changement de base.

Comme U est dense dans T et que $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ est ouvert, l'image réciproque U' de U dans T' est dense dans T'. Soit U'' l'image réciproque de U' dans T'' et soit F le sous-schéma réduit de T'' ayant $\overline{\mathrm{U}''}$ pour espace sous-jacent. Comme $\mathrm{T}'' \to \mathrm{T}'$ est surjectif et fermé, l'image de F contient U' et est fermée, donc égale T'. Par
355 conséquent, $\mathrm{F} \cap g^{-1}(t)$ contient un point u.

Pour $i = 1, 2$, notons h_i la restriction à F de f_i''. Alors, $h_i(u)$ est un point de $\mathrm{X}_{\mathrm{S}''}$ au-dessus de $f_i(t) = x_i$ donc appartient à V, puisque V contient l'image inverse de $\{x_1, x_2\}$ dans $\mathrm{X}_{\mathrm{S}''}$.

Alors, $\mathrm{W} = h_1^{-1}(\mathrm{V}) \cap h_2^{-1}(\mathrm{V})$ est un ouvert de F, contenant u, et les S''-morphismes $h_i|_{\mathrm{W}} : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ coïncident sur l'ouvert dense $\mathrm{U}'' \cap \mathrm{W}$ de W. Comme V est séparé sur S'', on a $h_1|_{\mathrm{W}} = h_2|_{\mathrm{W}}$, d'où $h_1(u) = h_2(u)$, et donc $f_1(t) = f_2(t)$. Ceci prouve (iv) ⇒ (iii).

Le théorème 5.3 résulte alors de 5.6.2 et de l'implication (iv) ⇒ (i) de 5.6.3.

Contre-exemple 5.6.4. — Tout S-groupe G n'est pas séparé. Soit S un schéma ayant un point fermé non isolé s ; soit G le schéma obtenu en recollant deux exemplaires de S le long de l'ouvert $\mathrm{S} - \{s\}$, on voit aisément que G n'est pas séparé sur S, et qu'il est muni d'une structure naturelle de S-groupe, dont toutes les fibres sont neutres, sauf la fibre G_s qui est isomorphe au groupe à deux éléments $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.[45]

Théorème 5.7. — [46] *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe* localement de présentation finie *sur* S *tel que la fonction* $s \mapsto \dim \mathrm{G}_s$ *soit* localement constante *sur* S*,* X *un*

[45] N.D.E. : On a reproduit cet exemple en VI_{A} 0.3, N.D.E. (5).

[46] N.D.E. : D'une part, on a supprimé le corollaire 5.6.5, qui était une répétition de 5.5. D'autre part, l'original énonçait en remarque 5.7 le corollaire 5.7.1 ci-dessous, renvoyant pour la démonstration à 4.7, numéro qui n'existe pas dans le Lect. Notes 151 (mais qui figurait dans l'édition 1965 de SGAD, dont les n[os] 4.5 et 4.6 sont devenus 5.6.1 et 5.6.2) ; on a ajouté le théorème 5.7, communiqué par O. Gabber, qui précise l'énoncé précité de SGAD.

S-*schéma sur lequel* G *opère, et* U *un ouvert de* X*,* séparé *sur* S*. Alors* $\underline{\mathrm{G}^0}\cdot\mathrm{U}$ *est un* ouvert *de* X*,* séparé *sur* S*.*

Démonstration. Notons $\mu : \mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ l'opération de G sur X ; c'est la composée de l'automorphisme $(g,x)\mapsto(g,gx)$ de $\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}$ et de la projection sur X. Comme $\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{U}$ est un ouvert de $\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}$, il résulte de 4.2 (iii) que $\mathrm{V}=\underline{\mathrm{G}^0}\cdot\mathrm{U}$ est ouvert dans X.

Alors, en procédant comme dans la démonstration de 5.6.2, on déduit de l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) de 5.6.3 que V est séparé sur S. 356

Corollaire 5.7.1. — *Soient* S *et* G *comme en* 5.7 *et soient* σ,τ *deux* S*-sections de* G^0 *(i.e.* $\sigma,\tau\in\mathrm{G}^0(\mathrm{S})$*). Alors le sous-schéma* $\mathrm{S}(\sigma,\tau)\subset\mathrm{S}$ *des coïncidences de* σ *et* τ *(i.e. l'image inverse de la diagonale de* $\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{G}$ *par le morphisme* (σ,τ)*) est* fermé*.*

En effet, pour tout $s\in\mathrm{S}$, soit U un ouvert affine de G contenant $\varepsilon(s)$, alors $\mathrm{V}=\varepsilon^{-1}(\mathrm{U})$ est un voisinage ouvert de s dans S, et comme $\mathrm{G}^0\mathrm{U}$ est séparé, alors $\mathrm{S}(\sigma,\tau)\cap\mathrm{V}$ est fermé dans V.

Remarque 5.7.2. — Gabber nous signale qu'on peut montrer que si S est local hensélien, de point fermé s, alors l'intersection des ouverts $\mathrm{G}^0\mathrm{U}$, où U parcourt les voisinages ouverts affines de $\varepsilon(s)$, est un sous-schéma en groupes ouvert de G, séparé sur S.

5.8. Compléments. — [47] Commençons par rappeler la proposition VI_{A} 2.6.6 :

Proposition 5.8.1. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe localement de type fini opérant sur un k-schéma* X *de façon que le morphisme* $\mathrm{G}\times\mathrm{X}\to\mathrm{X}\times\mathrm{X}$*,* $(g,x)\mapsto(gx,x)$ *soit surjectif. On suppose* X quasi-séparé*. Alors les composantes connexes de* X *sont irréductibles.*

Corollaire 5.8.2. — *Soient* S, G, X *comme dans les hypothèses préliminaires de* 5.3*. Supposons de plus que chaque fibre* X_s *soit* quasi-séparé et connexe*. Alors* X *est* séparé et quasi-compact *sur* S*.*

En effet, d'après la proposition précédente, chaque fibre X_s est irréductible, et la suite de la démonstration est identique à celle de 5.4.

Exemple 5.8.3. — Fixons un corps k algébriquement clos. Rappelons d'abord que tout espace topologique X « localement booléen » (i.e. possédant une base d'ouverts compacts), muni du faisceau des fonctions localement constantes à valeurs dans k, est un k-schéma (cf. [**DG70**], I § 1, 2.12). On dira alors que X est un k-schéma localement booléen.

Remarquons d'autre part que tout espace topologique E admettant une base d'ouverts séparés (et de même tout schéma X) admet un ouvert dense séparé. En effet, comme toute réunion croissante d'ouverts séparés est un ouvert séparé (pour un schéma X ceci résulte de 5.6.3), il existe un tel ouvert U qui soit maximal. Mais alors U est dense, car s'il existait un ouvert non vide V tel que $\mathrm{U}\cap\mathrm{V}=\varnothing$, alors V contiendrait

[47] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe de compléments et de contre-exemples, tous communiqués par O. Gabber.

un ouvert séparé $W \neq \varnothing$, et $U \cup W$ serait encore séparé, contredisant la maximalité de U.

Maintenant, soit C l'espace de Cantor, qu'on peut voir comme l'espace sous-jacent au groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit. Pour tout point p de C, soit $C(p)$ une autre copie de C, et soit X l'espace obtenu en recollant chaque $C(p)$ à C le long de $C - \{p\}$, alors X est un k-schéma localement booléen non séparé, et C est un ouvert dense de X.

Soit G le groupe des automorphismes du k-schéma X (i.e. des homéomorphismes de X). Alors G agit de façon transitive sur X. En effet, X est la réunion de C et, pour chaque point $p \in C$, d'un second point p', qui peut être caractérisé comme l'unique point x de $X - \{p\}$ tel que $(C - \{p\}) \cup \{x\}$ soit séparé. Il en résulte que tout automorphisme ϕ de C se prolonge en un automorphisme ϕ_X de X tel que $\phi_X(p') = \phi_X(p)'$ pour tout p. D'autre part, l'application $\theta_p : X \to X$ qui échange p et p' et qui fixe les autres points, est un automorphisme de X. Enfin, le groupe des automorphismes de C agit transitivement sur C : par exemple, en utilisant la structure de groupe de C, il suffit de considérer les translations.

Donc le k-groupe discret G (donc localement de type fini), opère sur le k-schéma X de façon que le morphisme $G \times X \to X \times X$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$ soit surjectif, mais X n'est pas séparé (bien que C soit un ouvert dense séparé).

Exemple 5.8.4. — On conserve les notations de l'exemple précédent. En utilisant la description de C comme ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on voit que C privé d'un point p est homéomorphe à une réunion disjointe dénombrable de copies de C. En effet, utilisant par exemple la structure de groupe de C, on se ramène par translation au cas où p est l'élément 0, i.e. la suite nulle ; alors $C - \{0\}$ est la réunion disjointe des sous-espaces $C_i = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_i = 1 \text{ et } u_j = 0 \text{ pour } j < i\}$, pour $i \in \mathbb{N}$, chacun homéomorphe à C. Pour tout sous-ensemble fini non vide F de C, on en déduit, en procédant par récurrence sur $|F|$, que $C - F$ est homéomorphe à une réunion disjointe dénombrable de copies de C, donc à C privé d'un point.

Pour chaque F de cardinal 2, soit $C(F)$ une autre copie de C, notons q_F le point 0 de $C(F)$ et choisissons un homéomorphisme $\phi_F : C(F) - \{q_F\} \xrightarrow{\sim} C - F$; soit alors X' l'espace obtenu en recollant chaque $C(F)$ à C au moyen de ϕ_F. Alors X' est un k-schéma localement booléen, non séparé. De plus, il résulte de la construction que toute fonction localement constante $f : X' \to k$ est constante. En effet, si $x, y \in C$ et $F = \{x, y\}$, chaque voisinage de q_F rencontre tout voisinage de x ou y, donc si $f : X \to k$ est localement constante, on a $f(x) = f(q_F) = f(y)$, et si $F' = \{z, t\}$, avec $z, t \in C$, on a de même $f(q_{F'}) = f(z) = f(q_{\{z,x\}}) = f(x)$. Par conséquent, X' est *connexe*.

De plus, tout point $x \in X'$ possède un voisinage pointé homéomorphe à $(C, 0)$. Plus précisément, fixons pour chaque F un homéomorphisme d'espaces topologiques pointés $h_F : (C, 0) \xrightarrow{\sim} (C(F), q_F)$ et notons T le groupe des translations de C. Alors, si $x = q_F$ on dispose de l'homéomorphisme q_F, et si $x \in C$, la translation $t_x \in T$ est un homéomorphisme $(C, 0) \xrightarrow{\sim} (C, x)$ (et c'est l'unique élément de T ayant cette propriété).

Notons L le groupe libre engendré par les h_{F} et soit $\mathrm{G} = \mathrm{T} * \mathrm{L}$ le « produit libre » (= coproduit) de T et L. Pour tout $h \in \{h_{\mathrm{F}}\}_{|\mathrm{F}|=2} \cup \mathrm{T}$, soit $\sigma(h)$ le générateur de G correspondant à h et soit $\mathrm{S}(h)$ (resp. $\mathrm{B}(h)$) la source (resp. le but) de h. Il est commode de poser aussi $\sigma(h_{\mathrm{F}}^{-1}) = \sigma(h_{\mathrm{F}})^{-1}$ et $\mathrm{S}(h_{\mathrm{F}}^{-1}) = \mathrm{B}(h_{\mathrm{F}})$ (resp. $\mathrm{B}(h_{\mathrm{F}}^{-1}) = \mathrm{S}(h_{\mathrm{F}})$), et de noter E l'ensemble formé de T, et des h_{F} et h_{F}^{-1}.

Sur l'espace produit $\mathrm{P} = \mathrm{G}\times\mathrm{X}'$ (où G est muni de la topologie discrète), considérons la relation d'équivalence engendrée par les relations :

$$\big(g\sigma(h), x\big) \sim \big(g, h(x)\big) \qquad \text{lorsque} \qquad x \in \mathrm{S}(h)$$

pour tout $h \in \mathrm{E}$, et soit Z l'espace quotient. Alors Z est obtenu à partir de la réunion disjointe $\coprod_{g\in\mathrm{G}}\{g\} \times \mathrm{X}'$ par recollement d'ouverts et donc, pour tout ouvert Ω de P, son saturé $\widetilde{\Omega}$ est ouvert (cf. [**BTop**], I § 5.1, Exemple 2). Explicitement, comme tout ouvert de P est la réunion de ses intersections avec les « tranches » $\{g\} \times \mathrm{X}'$, il suffit de considérer un ouvert de la forme $\{1\} \times \mathrm{W}$, où W est un ouvert de X′. Dans ce cas, le saturé est la réunion de $\{1\} \times \mathrm{W}$, et de

$$\{\sigma(h_1)\} \times h_1^{-1}(\mathrm{W} \cap \mathrm{B}(h_1)), \qquad \{\sigma(h_1)\sigma(h_2)\} \times h_2^{-1}\big(h_1^{-1}(\mathrm{W} \cap \mathrm{B}(h_1)) \cap \mathrm{B}(h_2)\big),$$

etc., pour toutes les suites finies $h_1, \dots, h_n$ d'éléments de E, donc est ouvert. Donc la projection $\pi : \mathrm{P} \to \mathrm{Z}$ est ouverte

Notons de plus que le mot $\sigma(h_1)\cdots\sigma(h_n)$ est un mot réduit de G, sauf si l'un des h_i est l'élément neutre de T ou si deux h_i consécutifs appartiennent à T, ou si (h_i, h_{i+1}) égale $(h_{\mathrm{F}}, h_{\mathrm{F}}^{-1})$ ou $(h_{\mathrm{F}}^{-1}, h_{\mathrm{F}})$. Donc, si $x \in \mathrm{X}'$ et si un élément $\beta = (\sigma(h_1)\cdots\sigma(h_n), h_n^{-1}\cdots h_1^{-1}(x))$ appartient à $\{1\} \times \mathrm{X}'$, alors on peut supposer que chaque h_i est une translation t_i, et dans ce cas l'égalité $\sigma(t_1\cdots t_n) = 1$ entraîne que $t_1\cdots t_n = 1$, et donc $\beta = (1, x)$. Comme la relation d'équivalence est compatible avec l'action de G (agissant sur $\mathrm{P} = \mathrm{G} \times \mathrm{X}'$ par translations à gauche sur le premier facteur), on en déduit que pour tout $g \in \mathrm{G}$, la restriction de π à $\{g\} \times \mathrm{X}'$ est *injective*.

Soit alors $z \in \mathrm{Z}$ arbitraire et soit $(g, x) \in \mathrm{P}$ un représentant de z. D'après ce qui précède, $\mathrm{U} = \pi(\{g\} \times \mathrm{X}')$ est un voisinage ouvert de z, et l'application continue $\{g\} \times \mathrm{X}' \to \mathrm{U}$ induite par π est ouverte et bijective, donc un homéomorphisme. Ceci montre que Z est localement isomorphe à X′ (donc aussi à C), donc est encore un k-schéma localement booléen.

Enfin, G agit transitivement sur Z. En effet, comme tout $z \in \mathrm{Z}$ est G-conjugué à un élément de la forme $\pi\big((1, x)\big)$, il suffit de voir que tout élément $(1, x) \in \mathrm{P}$ est équivalent à un élément $(\sigma(h), 0)$; or si $x \in \mathrm{C}$ on peut prendre pour h la translation t_x, et si $x = q_{\mathrm{F}}$ on peut prendre $h = h_{\mathrm{F}}$. Donc Z est un k-schéma localement booléen muni d'une action transitive du groupe discret G, mais Z n'est pas séparé.

6. Sous-foncteurs et sous-schémas en groupes (*)

Définition 6.1. — (i) Soient X un S-foncteur (c'est-à-dire un foncteur de $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})^{\circ}$ dans (**Ens**)), G un S-foncteur en groupes, u et v deux S-*morphismes* de X dans G. On appelle *transporteur de u dans v* et on note $\underline{\mathrm{Transp}}(u, v)$ le sous S-foncteur de G défini comme suit :

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Transp}}(u,v)(\mathrm{S}') &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid (\operatorname{int} g)\circ u_{\mathrm{S}'} = v_{\mathrm{S}'}\}\\ &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid g_{\mathrm{S}''}u_{\mathrm{S}''}(x)g_{\mathrm{S}''}^{-1} = v_{\mathrm{S}''}(x), \quad \forall\, x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}''),\ \mathrm{S}''\to\mathrm{S}'\}.\end{aligned}$$

En particulier, $\underline{\mathrm{Transp}}(u,u)$ est un sous-S-foncteur *en groupes* de G ; on l'appelle *centralisateur de* u et on le note $\underline{\mathrm{Centr}}(u)$.

(ii) Soient G un S-foncteur en groupes, X et Y deux *sous*-S-*foncteurs* de G ; on appelle *transporteur de* X *dans* Y (resp. *transporteur strict de* X *dans* Y) et on note $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ (resp. $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$) les sous-S-foncteurs de G définis comme suit :

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})(\mathrm{S}') &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid (\operatorname{int} g)(\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}) \subset \mathrm{Y}_{\mathrm{S}'}\}\\ &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid g_{\mathrm{S}''}\mathrm{X}(\mathrm{S}'')g_{\mathrm{S}''}^{-1} \subset \mathrm{Y}(\mathrm{S}''), \quad \forall\,\mathrm{S}''\to\mathrm{S}'\}\end{aligned}$$

$$\text{resp.}\quad \begin{aligned}\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})(\mathrm{S}') &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid (\operatorname{int} g)(\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{Y}_{\mathrm{S}'}\}\\ &= \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \mid g_{\mathrm{S}''}\mathrm{X}(\mathrm{S}'')g_{\mathrm{S}''}^{-1} = \mathrm{Y}(\mathrm{S}''), \quad \forall\,\mathrm{S}''\to\mathrm{S}'\}.\end{aligned}$$

Notons qu'on a

$$\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \cap c(\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y},\mathrm{X})),$$

où c désigne le morphisme d'inversion de G. [49]

(iii) Soient G un S-foncteur en groupes, H un sous-S-foncteur de G, i le S-morphisme canonique $\mathrm{H}\to\mathrm{G}$; on appelle *centralisateur* et *normalisateur* de H dans G les
357 sous-S-foncteurs en groupes de G suivants :

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Centr}}(i) = \underline{\mathrm{Transp}}(i,i) \qquad , \qquad \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{H}).$$

Enfin, on appelle *centre de* G le S-foncteur en groupes $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{id}_{\mathrm{G}}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{G}$; on le notera $\underline{\mathrm{Centr}}\,\mathrm{G}$.

Remarque 6.1.1. — [50] Il résulte des définitions que les foncteurs $\underline{\mathrm{Transp}}(u,v)$ et $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ (et donc aussi $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$) *commutent au changement de base* :

(*)Sur ce même thème, voir également les résultats de XI 6, dont la place naturelle serait dans le présent exposé VI_{B}. On y trouvera en particulier des critères de représentabilité pour certains sous-foncteurs en groupes d'un schéma en groupes donné. [48] N.D.E. : On a inséré ces résultats dans ce qui suit (n[os] 6.5.2 à 6.5.5).

[49] N.D.E. : Si $u : \mathrm{X}\to\mathrm{G}$ et $v : \mathrm{Y}\to\mathrm{G}$ sont deux morphismes *arbitraires* de S-foncteurs, soit $u(\mathrm{X})$ le foncteur-image de u, défini par $u(\mathrm{X})(\mathrm{S}') = u(\mathrm{S}')(\mathrm{X}(\mathrm{S}')) \subset \mathrm{G}(\mathrm{S}')$, c'est un sous-foncteur de G, de même que le foncteur-image $v(\mathrm{Y})$; on peut alors considérer le *transporteur de l'image de u dans l'image de v*, $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u(\mathrm{X}),v(\mathrm{Y}))$. On voit ainsi que, dans la définition (ii), il n'est pas nécessaire de se restreindre à des *sous-foncteurs*, i.e. au cas où u et v sont des monomorphismes. Cette restriction imposait parfois dans l'original des répétitions dans les hypothèses, telles que : « Soient $u,v : \mathrm{X}\to\mathrm{G}$ des morphismes de S-foncteurs, $w : \mathrm{H}\to\mathrm{G}$ et $w' : \mathrm{K}\to\mathrm{G}$ des monomorphismes, alors $\underline{\mathrm{Transp}}(u,v)$, $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(w) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ et $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{K})$ vérifient ... », qui peuvent être évitées en considérant $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u(\mathrm{X}),v(\mathrm{Y}))$. On a fait de telles modifications dans 6.2 et, plus loin, dans 10.11.

[50] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, utilisée implicitement dans la proposition 6.2.

pour tout $S' \to S$, si G', X', Y', u', v' sont déduits de G, X, Y, u, v par changement de base, on a :

$$\underline{\mathrm{Transp}}(u,v)_{S'} = \underline{\mathrm{Transp}}(u',v') \qquad \text{et} \qquad \underline{\mathrm{Transp}}(X,Y)_{S'} = \underline{\mathrm{Transp}}(X',Y').$$

Proposition 6.2. — [51] *Soit* G *un* S*-groupe. Considérons pour un sous-foncteur* T *du foncteur* G*, la propriété suivante :*

$(+_{\mathrm{f}})$ pour tout $s \in S$, T_s est représentable par un sous-schéma *fermé* de G_s.

Soient $u, w : X \to G$ *et* $v : Y \to G$ *des morphismes de* S*-schémas. Alors :*

(i) $\underline{\mathrm{Transp}}(u,w)$ *et* $\underline{\mathrm{Centr}}(u) = \underline{\mathrm{Transp}}(u,u)$ *vérifient la condition* $(+_{\mathrm{f}})$.

(ii) $\underline{\mathrm{Transp}}_G(u(X), v(Y))$ *et* $\underline{\mathrm{Norm}}_G\, v(Y)$ *vérifient la condition* $(+_{\mathrm{f}})$ *si, pour tout* $s \in S$, v_s *est une* immersion fermée.

(iii) $\underline{\mathrm{Transpstr}}_G(X,Y)$ *vérifie la condition* $(+_{\mathrm{f}})$ *si, pour tout* $s \in S$, u_s *et* v_s *sont des* immersions fermées.

Ceci découle de la remarque 6.1.1 et du corollaire 6.2.5 ci-dessous. [52]

Définition 6.2.1. — Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas. On dit que f est *essentiellement libre*, ou encore que X *est essentiellement libre sur* S, si on peut trouver un recouvrement de S par des ouverts affines S_i, pour tout i un S_i-schéma S'_i affine et fidèlement plat sur S_i, et un recouvrement $(X'_{ij})_j$ de $X'_i = X \times_S S'_i$ par des ouverts affines X'_{ij}, tels que pour tout (i,j), l'anneau de X'_{ij} soit un module *projectif* [53] sur l'anneau de S'_i.

Proposition 6.2.2. — a) *Si* X *est essentiellement libre sur* S*, il est* plat *sur* S*, la réciproque étant vraie si* S *est artinien.*

b) *Si* S *est le spectre d'un corps, tout* S*-schéma est essentiellement libre sur* S.

c) *Si* X *est essentiellement libre sur* S, *alors* $X' = X \times_S S'$ *est essentiellement libre sur* S'*, pour tout* $S' \to S$*. La réciproque est vraie si* $S' \to S$ *est fidèlement plat et quasi-compact.*

---

(51) N.D.E. : On a modifié l'énoncé, comme indiqué dans la N.D.E. (49).

(52) N.D.E. : L'original faisait référence aux résultats de l'Exp. VIII, § 6. Pour la commodité du lecteur, on a reproduit ces résultats (à l'exception de VIII, 6.3 et 6.8) dans les n^os 6.2.1 à 6.2.5 ci-dessous. D'ailleurs, ceci était suggéré par A. Grothendieck dans une Note au début de VIII.6 : « *Le présent numéro est indépendant de la théorie des groupes diagonalisables ; sa place naturelle serait dans* VI_B. ».

(53) N.D.E. : D'une part, on a remplacé le mot « libre » par « projectif », comme indiqué dans VIII, Remarque 6.8. D'autre part, la notion de S-schéma essentiellement libre est intimement liée à la notion géométrique de S-schéma *plat et pur*, introduite et étudiée par M. Raynaud et L. Gruson ([**RG71**]), cf. l'ajout 6.9 plus bas.

La démonstration est immédiate, en utilisant pour la réciproque dans a) le fait qu'un module plat sur un anneau local artinien est libre. [54]

L'introduction de la définition 6.2.1 est justifiée par le

Théorème 6.2.3. — *Soient* S *un schéma,* Z *un* S*-schéma* essentiellement libre*,* Y *un sous-schéma* fermé *de* Z*. Considérons le foncteur* $\mathrm{F} = \prod_{\mathrm{Z/S}} \mathrm{Y/Z} : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ *défini par la condition suivante :* $\mathrm{F}(\mathrm{S}') = \varnothing$ *lorsque* $\mathrm{Y}_{\mathrm{S}'} \neq \mathrm{Z}_{\mathrm{S}'}$*,* $\mathrm{F}(\mathrm{S}')$ *est réduit à un élément dans le cas contraire.* [55]

(i) *Ce foncteur est* représentable *par un* sous-schéma fermé T de S.

(ii) *Si de plus* Y → Z *est* de présentation finie*, il en est de même de* T → S.

Notons d'abord que le foncteur envisagé est un faisceau pour la topologie (fpqc) : comme $\mathrm{F}(\mathrm{S}') = \varnothing$ ou $\{\mathrm{pt}\}$ pour tout S′, ceci se ramène à vérifier que si (S_i) est un recouvrement ouvert de S (resp. S′ → S un morphisme fidèlement et quasi-compact), et si chaque $\mathrm{Y}_{\mathrm{S}_i} \to \mathrm{Z}_{\mathrm{S}_i}$ (resp. si $\mathrm{Y}'_{\mathrm{S}} \to \mathrm{Z}_{\mathrm{S}'}$) est un isomorphisme, il en est de même de Y → Z ; or ceci est clair (resp. résulte de SGA 1, VIII 5.4 ou EGA IV_2, 2.7.1).

De plus, d'après SGA 1, VIII 1.9, les morphismes fidèlement plats et quasi-compacts sont de *descente effective* pour la catégorie fibrée des flèches d'immersion fermée. Ceci nous permet de nous borner avec les notations de 6.2.1 au cas où $\mathrm{S} = \mathrm{S}'_i$.

Soit alors (Z_j) un recouvrement de Z par des ouverts affines tels que $\mathscr{O}(\mathrm{Z}_j)$ soit un module libre sur $\mathrm{A} = \mathscr{O}(\mathrm{S})$, et soient $\mathrm{Y}_j = \mathrm{Y} \cap \mathrm{Z}_j$ et $\mathrm{F}_j : (\mathbf{Sch})^{\circ}_{/\mathrm{S}} \to (\mathbf{Ens})$ le foncteur défini en termes de $(\mathrm{Z}_j, \mathrm{Y}_j)$ comme F en termes de (Z, Y). C'est un sous-foncteur du foncteur final, et on a évidemment $\mathrm{F} = \bigcap_j \mathrm{F}_j$, ce qui nous ramène à prouver que chaque F_j est représentable par un sous-schéma fermé T_j de S (car alors F sera représentable par le sous-schéma fermé T intersection des T_j). On peut donc supposer Z également affine, Z = Spec(B), où B est un A-module projectif. Soit L un A-module libre de base $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, dont B est facteur direct en tant que A-module, et soient $\varphi_\lambda : \mathrm{L} \to \mathrm{A}$ les formes « coordonnées » par rapport à cette base. Soit E un ensemble de générateurs de l'idéal J de B définissant le sous-schéma Y de Z, et soit I l'idéal dans A engendré par les coordonnées $\varphi_\lambda(x)$, pour $x \in \mathrm{E}$. Pour toute A-algèbre C, on voit alors que le morphisme $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C} \to (\mathrm{B/J}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$ est un isomorphisme si et seulement si l'image de $x \otimes 1$ dans $\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$ est nulle, pour tout $x \in \mathrm{E}$, ce qui équivaut à dire que le noyau de A → C contient l'idéal I. Ceci montre que $\mathrm{T} = \mathscr{V}(\mathrm{I}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{A/I})$ satisfait à la condition voulue, ce qui prouve (i).

De plus, si Y → Z est de présentation finie, on peut prendre E fini, et alors I est un idéal de type fini de A, i.e. l'immersion fermée T → S est de présentation finie.

---

[54] N.D.E. : En effet, soient $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ un anneau local artinien, k son corps résiduel, M un A-module arbitraire, $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ des éléments de M dont les images forment une base de $\mathrm{M}/\mathfrak{m}\mathrm{M}$ sur k. Soient F le A-module libre de base $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$, et $\phi : \mathrm{F} \to \mathrm{M}$ le A-morphisme défini par $\phi(e_i) = x_i$. Alors $\mathrm{Q} = \mathrm{Coker}\,\phi$ vérifie $\mathrm{Q} = \mathfrak{m}\mathrm{Q}$, d'où, puisque $\mathfrak{m}$ est nilpotent, Q = 0. Supposons de plus M *plat* sur A ; alors $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}\,\phi$ vérifie $\mathrm{K} \otimes_{\mathrm{A}} k = 0$, i.e. $\mathrm{K} = \mathfrak{m}\mathrm{K}$, d'où K = 0.

[55] N.D.E. : cf. Exp. II § 1, où ce foncteur est noté $\prod_{\mathrm{Z/S}} \mathrm{Y}$; pour tout S′ → S, $\mathrm{F}(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{Y}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{Z}_{\mathrm{S}'})$, qui ici égale $\{\mathrm{id}_{\mathrm{Z}_{\mathrm{S}'}}\}$ si $\mathrm{Y}'_{\mathrm{S}} = \mathrm{Z}_{\mathrm{S}'}$, et est vide sinon. D'autre part, on a ajouté l'assertion (ii), utilisée dans la démonstration de 6.5.3.

Exemples 6.2.4. — Donnons des exemples importants de foncteurs qui se ramènent à des foncteurs $\prod_{\mathrm{Z/S}} \mathrm{Y/Z}$ du type envisagé dans 6.2.3 et pour lesquels il est utile par la suite d'avoir des critères de représentabilité. On désigne par S un schéma, par X, Y, Z etc. des schémas sur S.

a) Donnons-nous un S-morphisme

$$q : \mathrm{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}), \tag{x}$$

(« X opère sur Y, à valeurs dans Z »), i.e. un morphisme :

$$r : \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{Z}. \tag{xx}$$

Considérons un sous-schéma Z′ de Z, d'où un monomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}') \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$$

qui fait du premier foncteur un sous-foncteur du second, soit X′ l'image inverse de ce sous-foncteur par le morphisme q, c'est le sous-foncteur de X tel que X′(T) soit l'ensemble des $x \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$ tels que $q(x) : \mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$ se factorise par Z'_{T}. Ce foncteur X′ peut se décrire de la façon suivante : on pose $\mathrm{P} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$, soit P′ l'image inverse de Z′ par $r : \mathrm{P} \to \mathrm{Z}$, alors on a un isomorphisme évident

$$\mathrm{X}' \simeq \prod_{\mathrm{P/X}} \mathrm{P}'/\mathrm{P}. \tag{xxx}$$

On obtient donc : *si* Y *est essentiellement libre sur* S *et* Z′ *fermé dans* Z, *le sous-foncteur* X′ *de* X *est représentable par un sous-schéma fermé de* X.[56] *Si de plus* $\mathrm{Z}' \to \mathrm{Z}$ *est de présentation finie, il en est de même de* $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$.

b) Donnons-nous deux façons de faire opérer X sur Y à valeurs dans Z, i.e. deux morphismes

$$q_1, q_2 : \mathrm{X} \rightrightarrows \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}),$$

et posons $\mathrm{X}' = \mathrm{Ker}(q_1, q_2)$: c'est le sous-foncteur de X tel que X′(T) soit l'ensemble des $x \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$ tels que les deux morphismes $q_1(x)$, $q_2(x) : \mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \rightrightarrows \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$ soient égaux. Or la donnée de q_1, q_2 équivaut à la donnée d'un morphisme

$$q : \mathrm{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Z}),$$

ou encore, d'un morphisme $r : \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \to \mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Z}$; posons alors $\mathrm{U} = \mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Z}$, soit U′ le sous-schéma diagonal de $\mathrm{Z} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Z}$, alors X′ n'est autre que l'image inverse du sous-foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{U}')$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{U})$ par q, donc peut se mettre sous la forme (xxx), avec $\mathrm{P} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$, et P′ = image inverse de la diagonale par r, i.e. noyau de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{Z}$. On est donc sous les conditions de (a).

On voit par suite que : *si* Y *est essentiellement libre sur* S *et* Z *séparé sur* S, *alors le sous-foncteur* X′ *de* X *est représentable par un sous-schéma fermé de* X.[56] *Si de plus* $\mathrm{Z} \to \mathrm{S}$ *est localement de type fini, alors* $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *est de présentation finie.*

---

[56] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

c) Donnons-nous un morphisme

$$q : \mathrm{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}),$$

i.e. « X opère sur Y ». Soit X' le « noyau » de ce morphisme, i.e. le sous-foncteur X' de X tel que $\mathrm{X}'(\mathrm{T})$ soit l'ensemble des $x \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$ tels que $q(x) : \mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Y}_{\mathrm{T}}$ soit l'identité. Ce foncteur est justiciable de b), comme on voit en introduisant un deuxième homomorphisme

$$q' : \mathrm{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y})$$

« en faisant opérer X trivialement sur Y ». Donc : *si* Y *est essentiellement libre et séparé sur* S*, le sous-foncteur* X' *noyau de* q *est représentable par un sous-schéma fermé de* X.[56] *Si de plus* $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ *est localement de type fini, alors* $\mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *est de présentation finie.*

d) Sous les conditions de c), considérons le sous-foncteur Y' de Y « des invariants sous X », donc $\mathrm{Y}'(\mathrm{T})$ est l'ensemble des $y \in \mathrm{Y}(\mathrm{T})$ tels que le morphisme correspondant $\overline{q}(y) : \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Y}_{\mathrm{T}}$ soit « le T-morphisme constant de valeur y ». Introduisant q' comme dans c), et les homomorphismes correspondants à q et q' :

$$\overline{q}, \overline{q'} :\ \mathrm{Y} \rightrightarrows \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}),$$

on voit que Y' est précisément $\mathrm{Ker}(\overline{q}, \overline{q'})$, et est donc justiciable encore de b) (avec les rôles de X, Y renversés et $\mathrm{Z} = \mathrm{Y}$).

Par suite, *si* X *est essentiellement libre sur* S*,* Y *séparé sur* S*, alors le sous-foncteur* Y' *de* Y *des invariants sous* X *est représentable par un sous-schéma fermé de* Y.[56] *Si de plus* $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ *est localement de type fini, alors* $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ *est de présentation finie.*

e) Des constructions du type explicité dans les exemples précédents sont surtout fréquentes en théorie des groupes. Ainsi, lorsque G est un S-schéma en groupes opérant sur le S-schéma X :

$$q : \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}),$$

le noyau de q (« le sous-groupe de G opérant trivialement ») est un sous-schéma fermé de G pourvu que X soit essentiellement libre et séparé sur S (exemple c)), et le sous-objet X^{G} des invariants est un sous-schéma fermé de X, pourvu que G soit essentiellement libre sur S, et X séparé sur S (exemple d)).

Soient Y, Z des sous-schémas de X ; considérons le sous-foncteur $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ de G (« *transporteur de* Y *en* Z »), dont les points à valeurs dans un T sur S sont les $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$ tels que l'automorphisme correspondant de X_{T} satisfasse $g(\mathrm{Y}_{\mathrm{T}}) \subset \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$, i.e. induise un morphisme $\mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{X}_{\mathrm{T}}$ se factorisant en $\mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$. Donc : *si* Y *est essentiellement libre sur* S*, et* Z *fermé dans* X*, alors* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ *est un sous-schéma fermé de* G (exemple a)).

On peut aussi considérer le *transporteur strict de* Y *en* Z*,*[57] dont les points à valeurs dans un T sur S sont les $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$ tels que $g(\mathrm{Y}_{\mathrm{T}}) = \mathrm{Z}_{\mathrm{T}}$, qui n'est autre que $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) \cap \sigma(\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Z}, \mathrm{Y}))$, où σ est le morphisme d'inversion de G. Par suite,

[57] N.D.E. : noté $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$.

si Y *et* Z *sont essentiellement libres sur* S *et fermés dans* X*, le transporteur strict de* Y *en* Z *est un sous-schéma fermé de* G*.*

Un cas important est celui où X = G, G opérant sur lui-même par automorphismes intérieurs. Si H est un sous-schéma de G, le transporteur strict de H en H est aussi appelé le *normalisateur* de H dans G, et noté $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}$ H. Donc : *si* H *est un sous-schéma en groupes fermé de* G*, essentiellement libre sur* S*, alors* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}$ H *est représentable par un sous-schéma en groupes fermé de* G*.*

Soit enfin Z un sous-schéma de G, alors son *centralisateur* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Z})$ dans G est le sous-foncteur en groupes de G défini par le procédé de d), quand on considère que « Z opère sur G » par les opérations induites par celles de G ; donc *si* Z *est essentiellement libre sur* S *et* G *est séparé sur* S*,* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Z})$ *est un sous-schéma en groupes fermé de* G. En particulier, *si* G *est essentiellement libre et séparé sur* S*, alors le* centre C *de* G*, qui n'est autre que* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{G})$*, est un sous-schéma en groupes fermé de* G.

Lorsque S est le spectre d'un corps, 6.2.2 b) montre que dans les exemples a) à e) ci-dessus, les conditions « essentiellement libre » sont automatiquement satisfaites, il ne reste que des conditions de séparation. Se rappelant qu'un schéma en groupes sur un corps est nécessairement séparé (VI_{A}, 0.3), on trouve par exemple :

Corollaire 6.2.5. — *Soit* G *un schéma en groupes sur un corps k et soient* Y, Y' *deux sous-schémas de* G*. Alors :*

(i) *Le centralisateur de* Y *dans* G *est un sous-schéma en groupes fermé de* G *; c'est en particulier le cas pour le* centre $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{G})$ *de* G*.*

(i′) *Plus généralement, si* $u,\ v : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *sont des morphismes de schémas,* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(u, v)$ *est représentable par un sous-schéma fermé de* G*.*

(ii) *Si* Y *est* fermé*, le transporteur* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}', \mathrm{Y})$ *est un sous-schéma fermé de* G*. Si* Y′ *est également* fermé*, on a la même conclusion pour* $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}', \mathrm{Y})$*.*

(iii) *Pour* tout *sous-schéma* en groupes [(58)] H *de* G*,* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est un sous-schéma en groupes fermé de* G*.*

Corollaire 6.2.6. — [(59)] *Soient k un corps,* G *un k-groupe algébrique connexe. Alors* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{G})$ *est représentable par un sous-schéma en groupes fermé* Z *de* G*, et* G/Z *est un k-groupe algébrique* affine*.*

Démonstration. Bien entendu, la première assertion est contenue dans 6.2.5 (i), mais on va voir qu'elle découle aussi de la démonstration de la seconde assertion. En effet, G opère par la représentation adjointe sur les k-espaces vectoriels de dimension finie $\mathrm{V}_n = \mathscr{O}_{\mathrm{G},e}/\mathfrak{m}_e^{n+1}$ (où $\mathfrak{m}_e$ est l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e}$), notons K_n le noyau du morphisme $\rho_n : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V}_n)$. D'après VI_{A} 5.4.1, ρ_n induit une immersion fermée $\mathrm{G}/\mathrm{K}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{V}_n)$, donc chaque G/K_n est affine. Comme G est noethérien, l'intersection K des K_n est égale à l'un des K_n, donc G/K est affine.

[(58)] N.D.E. : En effet, sur un corps k, tout sous-schéma en groupes de G est *fermé*, cf. VI_{A}, 0.5.2. D'autre part, 6.2.5 achève l'insertion des résultats tirés de VIII § 6.

[(59)] N.D.E. : On a inséré ici ce corollaire (cf. Exp. XII, 6.1), qui sera utile plus loin. Par ailleurs, on revient en 6.3 au texte originel de VI_{B}.

D'autre part, notant Z le centre de G, il est clair que $Z \subset K$. Montrons que $Z = K$. Notons $\widehat{\mathscr{O}}_{G,e}$ le complété de $\mathscr{O}_{G,e}$ pour la topologie $\mathfrak{m}_e$-adique et $\widehat{S}$ son spectre (resp. $S = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{G,e}$). Comme $\widehat{S} \to S$ est fidèlement plat et comme les deux morphismes :

$$K \times_k S \longrightarrow S, \qquad (g, x) \mapsto gxg^{-1} \quad \text{resp.} \quad (g, x) \mapsto x$$

coïncident après changement de base $\widehat{S} \to S$, ils coïncident, i.e. K agit trivialement sur $\mathscr{O}_{G,e}$. Or, d'après 6.2.4 e), le sous-objet G^K des invariants de G sous K (qui n'est autre que $\underline{\mathrm{Centr}}_G(K)$) est un sous-schéma fermé de G, donc défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_G$. Comme G^K majore $S = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{G,e}$ et comme $\mathscr{I}$ est de type fini (puisque G est noethérien), il existe un voisinage ouvert U de e tel que $\mathscr{I}|_U = 0$. Alors le sous-groupe $G^K = \underline{\mathrm{Centr}}_G(K)$ contient U donc aussi $U \cdot U$, qui égale G puisque G est irréductible (VI_A 0.5). Donc $\underline{\mathrm{Centr}}_G(K) = G$, d'où $K \subset Z$ et donc $Z = K$.

Remarque 6.3. — Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe et H un sous-
358 schéma en groupes de G ; supposons G et H de type fini sur k et réduits ; alors $\underline{\mathrm{Norm}}_G H$ (resp. $\underline{\mathrm{Centr}}_G H$) est représentable par un sous-schéma en groupes de G, *dont le sous-schéma réduit associé* n'est autre que le normalisateur (resp. le centralisateur) de H dans G au sens de *Bible*.

Proposition 6.4. — *Soient* G *un* S-*groupe, et* $u : X \to G$ *un monomorphisme de* S-*schémas. Posons* $T = \underline{\mathrm{Transp}}_G(X, X)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est un sous-foncteur* en groupes *de* G.

(ii) $T = \underline{\mathrm{Transpstr}}_G(X, X) = \underline{\mathrm{Norm}}_G X$.

Ces conditions sont vérifiées dans chacun des deux cas suivants :

a) X *est* de présentation finie *sur* S.

b) T *est* représentable *par un schéma* de présentation finie *sur* S.

L'équivalence des conditions (i) et (ii) résulte de ce que, quel que soit le morphisme $S' \to S$, quels que soient $t, t' \in T(S')$, on a $tt' \in T(S')$, et de ce que $\underline{\mathrm{Transpstr}}_G(X, X) = T \cap c(T)$ (cf. 6.1 (ii)).

Plaçons-nous dans le cas a). Soit $t \in T(S)$, alors $\mathrm{int}(t)$ est un monomorphisme de X dans X, donc un S-automorphisme de X (EGA IV_4, 17.9.6), si bien que t appartient à $\underline{\mathrm{Transpstr}}_G(X, X)$, d'où a).

Dans le cas b), il est clair que $\mu(T \times_S T) \subset T$, et l'assertion résulte du lemme suivant :

Lemme 6.4.2. — [(60)] *Soit* G *un* S-*schéma* de présentation finie, *muni d'une loi associative* (au sens de EGA 0_{III} 8.2.5). *Supposons que pour tout* S-*schéma* S′ *et tout* $g \in G(S')$, *les translations à droite et à gauche par* g *dans l'ensemble* G(S′) *soient* injectives *et que* $G(S) \neq \varnothing$. *Alors* G *est un* S-groupe.

---

(60) N.D.E. : On a conservé la numérotation de l'original : il n'y a pas de n°6.4.1.

Il suffit de montrer que, quel que soit le S-schéma S′, l'ensemble G(S′) est un groupe ; or, de l'hypothèse résulte aussitôt que les translations à droite et à gauche par tout élément $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ sont des S-monomorphismes de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$. **359**
Ce sont donc des S-*automorphismes*, puisque G est de présentation finie sur S (EGA IV_4, 17.9.6), si bien que les translations à droite et à gauche par g dans l'ensemble G(S′) sont bijectives, et on est ramené au lemme suivant :

Lemme 6.4.3. — *Soit* G *un ensemble non vide muni d'une loi associative telle que les translations à droite et à gauche soient bijectives. Alors* G *est un groupe.*

La démonstration est laissée au lecteur.

Définition 6.5. — Soient G un S-groupe, H un S-foncteur, et $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ un *monomorphisme.*

(i) On appelle *centralisateur connexe de* H *dans* G et on note $\underline{\mathrm{Centr}}^0_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ la composante neutre du foncteur $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ (cf. 3.1 et 6.1 (iii)).

(i′) Pour tout morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$, on définit de même le foncteur $\underline{\mathrm{Centr}}^0(u)$ (cf. 6.2 (iv)).

(ii) Lorsque pour tout $s \in \mathrm{S}$, u_s est une immersion fermée, on appelle *normalisateur connexe de* H *dans* G, et on note $\underline{\mathrm{Norm}}^0_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ la composante neutre du foncteur $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$.

N. B. D'après 1.4.2, l'hypothèse de (ii) est vérifiée lorsque H un S-*schéma en groupes*, que G et H sont *localement de type fini* sur S et que u est un morphisme de S-groupes *quasi-compact.*

Proposition 6.5.1. — *Soit* G *un* S-*groupe* localement de présentation finie *et* quasi-séparé *sur* S, H *un* S-*groupe* lisse à fibres connexes *et* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un* monomorphisme. *Soit* N *le normalisateur de* H *dans* G (cf. 6.1). *D'après* 6.5.5 *ci-dessous,* N *est* représentable *par un sous-schéma en groupes* fermé *de* G *et* de présentation finie *sur* G. *Ceci étant, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le morphisme canonique* $\mathrm{H} \to \mathrm{N}$ *est une* immersion ouverte.

(ii) $\mathrm{N}^0 = \mathrm{H}$ (cf. 3.10).

(iii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *on a* $\mathrm{H}_s = (\mathrm{N}_s)^0$. **360**

La condition (i) entraîne (ii) d'après le lemme 3.10.1, puisque $\mathrm{H}^0 = \mathrm{H}$. D'autre part, il est clair que (ii) entraîne (iii), car $\mathrm{H}_s = (\mathrm{N}^0)_s = (\mathrm{N}_s)^0$.

Montrons enfin que (iii) entraîne (i). Puisque $\mathrm{H}_s = (\mathrm{N}^0)_s$, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, alors $\mathrm{H}_s \to \mathrm{N}_s$ est une immersion ouverte. De plus, H et N sont localement de présentation finie sur S, et H est plat sur S, donc (EGA IV_4, 17.9.5), $\mathrm{H} \to \mathrm{N}$ est une immersion ouverte.

[61] Pour la commodité du lecteur, on a inclus ci-dessous les résultats 6.8 à 6.11 de l'Exp. XI.

[61] N.D.E. : On a inséré ici les n$^{\text{os}}$ 6.5.2 à 6.5.5, tirés de l'Exp. XI, 6.8 à 6.11. Ceci était d'ailleurs suggéré par A. Grothendieck dans une Note au début de XI 6 : « *Le présent numéro n'utilise pas les résultats des n^{os}* 3, 4, 5 (de XI) ; *sa place naturelle serait dans* VI_{B}. ».

Théorème 6.5.2. — *Soit* X *un schéma* lisse *sur* S*, à fibres* géométriquement irréductibles. [62]

(i) *Pour tout sous-schéma* fermé Y *de* X*, le foncteur* $\prod_{X/S} Y/X$ *est* représentable *par un sous-schéma* fermé T *de* S.

(ii) *De plus, si* $Y \to X$ *est de présentation finie, il en est de même de* $T \to S$.

Comme $f : X \to S$ est fidèlement plat localement de présentation finie, il est couvrant pour la topologie (fpqc). Comme d'autre part $T = \prod_{X/S} Y/X$ est évidemment un sous-*faisceau* de S pour la topologie (fpqc), il s'ensuit que la question de la représentabilité de T par un sous-schéma fermé de S est de nature locale sur S pour la topologie (fpqc), [63] et il en est de même de la question de décider si T est de présentation finie sur S (cf. EGA IV_2, 2.7.1). Quitte à faire alors le changement de base $S' \to S$, avec $S' = X$, on est ramené au cas où X admet une section ε sur S. On peut de plus supposer S affine et a fortiori quasi-compact. On a alors :

Corollaire 6.5.3. — *Sous les conditions de* 6.5.2*, supposons que* S *soit* quasi-compact*, que* $X \to S$ admette une section ε*, et que* $Y \to X$ *soit* de présentation finie. *Alors il existe un entier* $n \geqslant 0$ *tel que l'on ait*

$$\prod_{X/S} Y/X = \prod_{X_n/S} Y_n/X_n\,,$$

où X_n *est le* n*-ième voisinage infinitésimal de l'immersion* $\varepsilon : S \to X$*, et* $Y_n = Y \cap X_n$.

Lorsque Y est de présentation finie sur X, ce corollaire implique bien 6.5.2, car X étant lisse sur S, X_n est fini et localement libre sur S, donc a fortiori « essentiellement libre » sur S (cf. 6.2.1), donc $\prod_{X_n/S} Y_n/X_n$ est représentable par un sous-schéma fermé T de S, de présentation finie sur S, d'après 6.2.3.

Prouvons d'abord 6.5.3 (et donc 6.5.2) lorsque S est *noethérien.* Soit $T_n = \prod_{X_n/S} Y_n/X_n$, alors les T_n forment une suite décroissante de sous-schémas fermés de S, et S étant noethérien, cette suite est stationnaire. Soit $R = \bigcap_{n\geqslant 0} \prod_{X_n/S} Y_n/X_n$ leur valeur commune pour n grand, on a évidemment $T \subset R$, et il suffit d'établir que l'on a $R \subset T$. Quitte à faire le changement de base $R \to S$, on est ramené au cas où $R = S$, i.e. $Y_n = X_n$ pour tout n, i.e. $Y \supset X_n$ pour tout n, et il faut alors prouver que $T = S$, i.e. $Y = X$.

Or $Y \supset X_n$ pour tout n implique (grâce au fait que X est localement noethérien) que Y est, au voisinage de chaque point de $\varepsilon(S)$, un sous-schéma ouvert induit de X, [64] donc il existe un ouvert induit U de X, contenant $\varepsilon(S)$, tel que $U \subset Y$. En vertu de EGA IV_3, 11.10.10, les fibres de X/S étant intègres, U est schématiquement dense dans X, donc (Y étant un sous-schéma fermé majorant U) on a $Y = X$. Cela prouve 6.5.3 donc 6.5.2 lorsque S est noethérien.

[62] N.D.E. : D'une part, on a corrigé l'original, en remplaçant « connexes » par « irréductibles » (cf. la démonstration). D'autre part, d'après [**RG71**] I, 3.3.4 (iii) et 4.1.1, il suffit de supposer que X est plat sur S, à fibres géométriquement irréductibles et sans composantes immergées.

[63] N.D.E. : Voir par exemple l'ajout 1.7 dans l'Exp. VIII.

[64] N.D.E. : voir, par exemple, la démonstration de 6.2.6.

Le cas général procède par réduction au cas précédent. Pour tout $s \in \mathrm{S}$, il existe un voisinage ouvert affine U de s et un voisinage ouvert affine V de $\varepsilon(s)$ tel que $f(\mathrm{V}) \subset \mathrm{U}$. Alors $f(\mathrm{V})$ est un voisinage ouvert de s contenu dans U, et si S′ est un voisinage ouvert affine de s contenu dans $\varepsilon^{-1}(\mathrm{V}) \cap f(\mathrm{V})$, et $\mathrm{X}' = \mathrm{V} \cap f^{-1}(\mathrm{S}')$, alors X′ et S′ sont des ouverts affines de X resp. S, et X′/S′ admet une section. À cause de la nature locale de 6.5.2 et 6.5.3 on peut supposer $\mathrm{S} = \mathrm{S}'$. Alors X′ est un ouvert affine de X contenant $\varepsilon(\mathrm{S})$. Comme chaque fibre X_s est supposée irréductible, X'_s est schématiquement dense dans X_s et donc, d'après EGA IV_3, 11.10.10, X′ est schématiquement dense dans X, et de même, pour tout changement de base $\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}$, $\mathrm{X}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_1$ est schématiquement dense dans $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_1$.

Il en résulte que $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{X} = \prod_{\mathrm{X}'/\mathrm{S}} \mathrm{Y}'/\mathrm{X}'$, où $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \cap \mathrm{X}'$. Cela nous ramène au cas où $\mathrm{X} = \mathrm{X}'$, donc on peut supposer S et X *affines*. De plus, si $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ et si J est l'idéal de B qui définit Y, alors J est limite inductive de ses sous-idéaux de type fini, donc Y est intersection de sous-schémas fermés Y_i de X qui sont de présentation finie sur X, et par suite $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{X} = \bigcap_i \prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}_i/\mathrm{X}$, ce qui nous ramène, pour prouver 6.5.2, au cas où Y est de présentation finie sur X, avec S et X affines.

Mais alors X et Y sur S proviennent par changement de base $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_0$ d'une situation analogue X_0 et Y_0 sur S_0, avec S_0 noethérien, ce qui nous ramène au cas où S et noethérien, qui a déjà été traité. Cela achève la démonstration de 6.5.2 et 6.5.3.

Corollaire 6.5.4. — *Soient* X *un* S*-schéma en groupes lisse de présentation finie, à fibres connexes,* Y *un schéma en groupes de présentation finie sur* S*,* $i : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *un monomorphisme de* S*-schémas en groupes.*

(i) *Alors* $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{X}$ *est représentable par un sous-schéma fermé de présentation finie de* S.

(ii) *Si de plus* S *est quasi-compact, on a pour* n *assez grand :*

$$\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{Y}/\mathrm{X} = \prod_{\mathrm{X}_n/\mathrm{S}} \mathrm{Y}_n/\mathrm{X}_n\,,$$

où X_n *désigne le* n*-ième voisinage infinitésimal de la section unité* $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$*, et* $\mathrm{Y}_n = \mathrm{X}_n \cap \mathrm{Y}$.

La démonstration est essentiellement celle de 6.5.3. [65] D'une part, i est localement de présentation finie (cf. EGA IV_1, 1.4.3). D'autre part, les sections unité de Y et de X induisent des immersions bijectives $\mathrm{S} \to \mathrm{Y}_n$ et $\mathrm{S} \to \mathrm{X}_n$, donc des isomorphismes de $\mathrm{S}_{\mathrm{réd}}$ avec $(\mathrm{Y}_n)_{\mathrm{réd}}$ et $(\mathrm{X}_n)_{\mathrm{réd}}$. Par conséquent, i_n est quasi-compact donc de type fini, et l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Y}_n)_{\mathrm{réd}} \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\sigma"'] & \mathrm{Y}_n \arrow[d, "i_n"] \\
& \mathrm{X}_n
\end{tikzcd}$$

[65] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, ajoutant des références à EGA IV.

où σ, τ sont des immersions fermées et τ est surjectif. Comme i_n est séparé (étant un monomorphisme), il en résulte que i_n est propre (cf. EGA II, 5.4.3). Donc i_n est un monomorphisme propre de présentation finie, donc une immersion fermée (cf. EGA IV_3, 8.11.5). Par suite, en vertu de 6.2.3 déjà utilisé, $\prod_{\mathrm{X}_n/\mathrm{S}} \mathrm{Y}_n/\mathrm{X}_n$ est représentable par un sous-schéma fermé T_n de S de présentation finie sur S, et il reste donc à prouver la dernière assertion de 6.5.4 dans le cas où on suppose de plus S affine.

On se réduit immédiatement encore au cas où S est noethérien, et on est ramené à prouver qu'alors on a $\mathrm{R} = \mathrm{T}$ (avec les notations de la démonstration de 6.5.3), ou encore que $\mathrm{Y} \supset \mathrm{X}_n$ pour tout n implique $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$. Or l'hypothèse implique que $i : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est étale en les points de la section unité de Y sur S, donc Y est lisse sur S en les points de la section unité, d'où il résulte que l'ouvert U des points de Y en lesquels Y est lisse sur S est un sous-groupe ouvert induit de Y (cf. 2.3). Alors $\tau : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ est un monomorphisme étale en vertu de 2.5, donc une immersion ouverte, or les fibres de X étant connexes et tout sous-groupe ouvert d'un groupe algébrique étant aussi fermé, il s'ensuit que τ est une immersion ouverte surjective i.e. un isomorphisme. Donc $\mathrm{U} = \mathrm{X}$ et a fortiori $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$, ce qui achève la démonstration de 6.5.4.

Procédant comme dans 6.2.4 e), on conclut de 6.5.4 :

Corollaire 6.5.5. — *Soient* G *un* S*-schéma en groupes* localement de type fini et quasi-séparé *sur* S, H *un schéma en groupes* lisse de présentation finie sur S à fibres connexes, $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de* S*-groupes. Alors :*

a) $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *et* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *sont représentables par des sous-schémas fermés de* G*, de présentation finie sur* G.

a′) *De même, pour tout monomorphisme* $j : \mathrm{K} \to \mathrm{G}$ de présentation finie *de* S*-schémas en groupes,* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}, \mathrm{K})$ *est représentable par un sous-schéma fermé de* G*, de présentation finie sur* G.

b) *Si* G *est quasi-compact, il existe un entier* $n \geqslant 0$ *tel que* (*si* H_n *désigne le* n*-ième voisinage infinitésimal de la section unité de* H) *on ait :*

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_n) \qquad \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_n)$$
$$\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}, \mathrm{K}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_n, \mathrm{K}) = \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}_n, \mathrm{K}_n).$$

Démonstration. [(66)] Notons d'abord que l'hypothèse faite sur G entraîne que le monomorphisme $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ est de présentation finie (EGA IV_1, 1.2.4 et 1.4.3) ainsi que l'immersion diagonale $\Delta_{\mathrm{G}/\mathrm{S}} : \mathrm{G} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ (*loc. cit.* 1.4.3.1). Le cas de $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ se ramène donc au cas du transporteur, en faisant $\mathrm{H} = \mathrm{K}$. Tenant compte de 6.2.4 e), on va appliquer 6.5.4 au schéma en groupes $\mathrm{X} = \mathrm{H}_{\mathrm{G}} = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ au-dessus du schéma de base G, et au sous-schéma en groupes Y suivant.

Dans le cas de $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}, \mathrm{K})$, on prend pour Y l'image inverse de K_{G} par le morphisme de G-groupes $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$, $(h, g) \mapsto (ghg^{-1}, g)$. Dans le cas de

(66) N.D.E. : On a détaillé ce qui suit. D'autre part, ceci achève l'insertion de XI, 6.8 à 6.11, i.e. on revient en 6.6 ci-dessous au texte originel de VI_{B}.

$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$, on prend pour Y l'image inverse du sous-groupe diagonal $\Delta_{\mathrm{G/S}}(\mathrm{G})_{\mathrm{G}}$ de $(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G})_{\mathrm{G}}$ par le morphisme de G-groupes :

$$\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}, \qquad (h, g) \mapsto (h, ghg^{-1}, g).$$

Définition 6.6. — Soient G un S-foncteur en groupes, H un sous-S-foncteur en groupes ; on dit que H est *invariant* (resp. *central*, resp. *caractéristique*) dans G si $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H} = \mathrm{G}$ (resp. si $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H} = \mathrm{G}$, resp. si, quels que soient le S-schéma T et l'automorphisme $a \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{T\text{-}gr.}}(\mathrm{G}_{\mathrm{T}})$ on a : $a(\mathrm{H}_{\mathrm{T}}) \subset \mathrm{H}_{\mathrm{T}}$), autrement dit, si, quel que soit le S-schéma T, le sous-groupe H(T) de G(T) est invariant dans G(T) (resp. central dans G(T), resp. invariant par tout automorphisme de G_{T}).

N. B. Si H est central (resp. caractéristique), il est invariant.

Remarque 6.7. — Soient G et H deux S-groupes et $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ un *monomorphisme*. Pour que H soit invariant (resp. central) dans G, il faut et il suffit que le morphisme

$$\mu \circ \big(c \circ \mathrm{pr}_2,\ \mu \circ (u \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}})\big) : \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$$

(défini par $(h, g) \mapsto g^{-1}hg$ quels que soient $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ et $h \in \mathrm{H}(\mathrm{S}')$), se factorise à travers u (resp. soit égal à $u \circ \mathrm{pr}_1$), et pour que H soit caractéristique dans G, il faut et il suffit que pour tout S-schéma T et tout T-automorphisme de groupe a de G_{T}, $a \circ u(\mathrm{T})$ se factorise à travers $u(\mathrm{T})$.

Exemple 6.8. — Soit G un S-foncteur en groupes. Alors $\underline{\mathrm{Centr}}\,\mathrm{G}$ est caractéristique et central. Si, pour tout $s \in \mathrm{S}$, G_s est *représentable*, alors G^0 est caractéristique. Cela 361
résulte des définitions et de 3.3.

6.9. [67] Dans [**RG71**], I 3.3.3, les auteurs introduisent la notion géométrique de S-schéma *pur*, qui est locale sur S pour la topologie étale ; on renvoie à *loc. cit.* pour la définition précise. Signalons simplement les points suivants :

a) (*loc. cit.*, Th. 3.3.5) Si B est une A-algèbre plate de présentation finie, alors B est un A-module projectif si et seulement si Spec(B) est pur sur Spec(A).

b) Par conséquent, si $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ est localement de présentation finie, plat et pur, alors X est essentiellement libre sur S.

c) (*loc. cit.*, 3.3.4 (iii)) Si $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ est localement de type fini, plat, à fibres géométriquement irréductibles et sans composantes immergées, alors X est pur sur S.

Comme tout schéma en groupes localement de type fini sur un corps est de Cohen-Macaulay (cf. VI_{A}, 1.1.1), donc sans composantes immergées, on obtient en particulier :

d) Tout S-schéma en groupes G localement de présentation finie, plat et à fibres connexes est pur sur S, donc essentiellement libre sur S.

On peut alors reprendre tous les énoncés de 6.2.4 e) en tenant compte des résultats (b) et (d) ci-dessus.

[67] N.D.E. : On a ajouté cette sous-section.

7. Sous-groupes engendrés ; groupe des commutateurs

Dans ce numéro, k désigne un corps fixé.

Proposition 7.1. — *Soient* G *un k-groupe,* $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de k-schémas* géométriquement réduits [68] *; pour tout $i \in \mathrm{I}$, soit $f_i : \mathrm{X}_i \to \mathrm{G}$ un k-morphisme.*

(i) *Il existe un plus petit sous-k-schéma en groupes fermé de* G *majorant chacun des f_i, noté $\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})$. C'est un k-schéma* géométriquement réduit*, donc* lisse *dans le cas où* G *est supposé* localement de type fini *sur k* (1.3.1).

(ii) *Posons $\mathrm{X} = \coprod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i$, et soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ le morphisme dont la restriction à X_i est f_i, pour tout $i \in \mathrm{I}$. Posons $\mathrm{X}^1 = \mathrm{X} \coprod \mathrm{X}$, soit $f^1 : \mathrm{X}^1 \to \mathrm{G}$ le morphisme dont les restrictions à X sont respectivement f et $c \circ f$. Pour tout $n > 1$, posons*

$$\mathrm{X}^n = \mathrm{X}^1 \underset{k}{\times} \mathrm{X}^{n-1} \qquad \textit{et} \qquad f^n = \mu \circ (f^1 \underset{k}{\times} f^{n-1}) : \mathrm{X}^n \longrightarrow \mathrm{G}.$$

Alors $\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})$ est le sous-schéma réduit *de* G *ayant pour espace sous-jacent l'adhérence de la réunion des $f^n(\mathrm{X}^n)$, pour $n \geqslant 1$.*

(iii) *Pour tout k-schéma* S, *$\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})_{\mathrm{S}}$ est le* plus petit sous-schéma en groupes fermé *de G_{S} majorant chacun des $f_{i,\mathrm{S}} : \mathrm{X}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$.*

(iii′) *De plus, $\Gamma_{\mathrm{G}}((f_i)_{i\in\mathrm{I}})_{\mathrm{S}}$ est le* plus petit sous-schéma en groupes *de G_{S} majorant chacun des $f_{i,\mathrm{S}}$.* [69]

Remarquons tout d'abord que, pour démontrer (i), (iii) et (iii′), en définissant X et f comme dans (ii), on est ramené au cas où I est réduit à un élément.

Soit H le sous-schéma réduit de G d'ensemble sous-jacent $\overline{\bigcup_{n\geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n)}$. Alors la famille de morphismes $f^n : \mathrm{X}^n \to \mathrm{H}$ est schématiquement dominante (cf. EGA IV_3, 11.10.4), donc tout sous-schéma fermé de G qui majore les f^n majore aussi H. De plus, d'après *loc. cit.*, 11.10.7, H est *géométriquement réduit*. Donc pour montrer (i)
362 et (ii), il suffit de montrer que H est un sous-schéma *en groupes* de G, donc que la restriction de c à H et la restriction de μ à $\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}$ se factorisent à travers l'injection $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$.

Puisque H est géométriquement réduit, $\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}$ est réduit, et il suffit de vérifier que $c(\mathrm{H}) \subset \mathrm{H}$ et que $\mu(\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}) \subset \mathrm{H}$ (ensemblistement). Mais d'après EGA IV_3, 11.10.6, la réunion des $f^n_{(\mathrm{H})}(\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{H})$ est schématiquement dense dans $\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}$. De même, quel que soit $n \geqslant 1$, la réunion des $f^m_{(\mathrm{X}^n)}(\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{X}^m)$, pour $m \geqslant 1$, est schématiquement dense dans $\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{H}$. Donc il suffit de montrer que $\mu(f^n_{(\mathrm{H})}(f^m_{(\mathrm{X}^n)}(\mathrm{X}^n \times_k \mathrm{X}^m))) \subset \mathrm{H}$ et que $c(f^n(\mathrm{X}^n)) \subset \mathrm{H}$. Or

$$\mu(f^n_{(\mathrm{H})}(f^m_{(\mathrm{X}^n)}(\mathrm{X}^n \underset{k}{\times} \mathrm{X}^m))) = \mu((f^n \underset{k}{\times} f^m)(\mathrm{X}^n \underset{k}{\times} \mathrm{X}^m)) = f^{n+m}(\mathrm{X}^{n+m}) \subset \mathrm{H};$$

et, puisque $c(f^1(\mathrm{X}^1)) \subset f^1(\mathrm{X}^1)$, on a, quel que soit n, $c(f^n(\mathrm{X}^n)) \subset f^n(\mathrm{X}^n) \subset \mathrm{H}$. Ceci démontre (i) et (ii).

---

[68] N.D.E. : On a remplacé, ici et dans la suite, la terminologie peu usitée « *séparable* » par la terminologie usuelle « *géométriquement réduit* », cf. EGA IV_2, 4.6.2.

[69] N.D.E. : L'original énonçait (iii′) sous l'hypothèses additionnelle que G soit localement de type fini sur k, mais celle-ci peut-être omise, d'après VI_{A}, 0.5.2.

Montrons maintenant (iii). Soit G' un sous-schéma en groupes *fermé* de G_S majorant f_S ; il s'agit de montrer que G' majore H_S, ou, ce qui revient au même, que $\mathrm{H}_\mathrm{S} = \mathrm{H}_\mathrm{S} \times_{\mathrm{G}_\mathrm{S}} \mathrm{G}'$. Posons $\mathrm{H}'_\mathrm{S} = \mathrm{H}_\mathrm{S} \times_{\mathrm{G}_\mathrm{S}} \mathrm{G}' = \mathrm{G}' \cap \mathrm{H}_\mathrm{S}$. Puisque G' et H_S majorent tous deux les f^n_S, il en est de même de H'_S. Or (EGA IV_3, 11.10.6), puisque la famille des $f^n : \mathrm{X}^n \to \mathrm{H}$ est schématiquement dominante, il en est de même de la famille des $f^n_\mathrm{S} : \mathrm{X}^n_\mathrm{S} \to \mathrm{H}_\mathrm{S}$, si bien que H'_S, qui majore chacun des f^n_S, est égal à H_S d'après EGA IV_3, 11.10.1 c). Ceci prouve (iii).

Montrons enfin que H_S est le plus petit sous-schéma en groupes (non nécessairement fermé) de G_S majorant f_S.

Soit G' un sous-schéma en groupes de G_S majorant f_S. Il s'agit de même de montrer que, si on pose $\mathrm{H}'_\mathrm{S} = \mathrm{H}_\mathrm{S} \times_{\mathrm{G}_\mathrm{S}} \mathrm{G}'$, on a $\mathrm{H}'_\mathrm{S} = \mathrm{H}_\mathrm{S}$. Il suffit pour cela de montrer que H'_S est fermé dans H_S et d'appliquer (iii). Il suffit donc de montrer que H_S et H'_S ont même ensemble sous-jacent, a fortiori il suffit de montrer que, pour tout $s \in \mathrm{S}$, H_s égale

$$\mathrm{H}'_s := \mathrm{H}'_\mathrm{S} \underset{\mathrm{S}}{\times} \kappa(s) = \mathrm{H}_s \underset{\mathrm{G}_s}{\times} \mathrm{G}'_s.$$

Or, d'après VI_A, 0.5.2, le sous-$\kappa(s)$-schéma en groupes G'_s est *fermé* dans G_s. Donc H'_s est fermé dans H_s, et alors le raisonnement précédent, appliqué à H'_s, à H_s et aux f^n_s, montre que $\mathrm{H}'_s = \mathrm{H}_s$.

Corollaire 7.1.1. — [70] *Soit* G *un* k*-groupe localement de type fini et soient* A, B *deux sous-*k*-groupes de* G*,* lisses et de type fini*, et* i_A (*resp.* i_B) *l'inclusion de* A (*resp.* B) *dans* G*. On suppose que* B normalise A*, alors* $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \Gamma_\mathrm{G}(i_\mathrm{A}, i_\mathrm{B})$.

En effet, soit $\mathrm{H} = \mathrm{A} \rtimes \mathrm{B}$ le produit semi-direct de A et B (cf. I, 2.3.5), c'est un k-groupe lisse et de type fini. Alors, le morphisme de groupes $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$, $(a, b) \mapsto ab$, est quasi-compact donc, d'après 1.2, $u(\mathrm{H}) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$ est un sous-schéma fermé réduit de G, qui est un groupe dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/k})_{\text{réd}}$. Or, d'après EGA IV_3, 11.10.7, $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \overline{u(\mathrm{H})}$ est géométriquement réduit (puisque H l'est), donc c'est un sous-groupe fermé de G. Comme on a évidemment $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \subset \Gamma_\mathrm{G}(i_\mathrm{A}, i_\mathrm{B})$, le corollaire en découle.

Définitions et remarques 7.2. — [71] (i) Étant donné un k-groupe G, une famille $(\mathrm{X}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ **363**
de k-schémas géométriquement réduits, et pour chaque $i \in \mathrm{I}$, un k-morphisme $f_i : \mathrm{X}_i \to \mathrm{G}$, on appelle *sous-schéma en groupes fermé de* G *engendré par la famille* $(f_i)_{i \in \mathrm{I}}$, et nous noterons dans ce numéro $\Gamma_\mathrm{G}((f_i)_{i \in \mathrm{I}})$, le plus petit sous-schéma en groupes fermé de G majorant chacun des f_i. Si X est un sous-schéma de G, géométriquement réduit sur k, et si f est l'immersion $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{G}$, on écrira $\Gamma_\mathrm{G}(\mathrm{X})$ au lieu de $\Gamma_\mathrm{G}(f)$.

(i′) Avec les notations de 7.1 (ii), il nous arrivera de poser $\Gamma'_\mathrm{G}(f) = \bigcup_{n \geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n)$. Notons que $\Gamma'_\mathrm{G}(f)$ est une partie de G stable pour la loi de groupe (au sens de 3.0).

(ii) Il est clair que si X_1 et X_2 sont deux k-schémas géométriquement réduits et $f_1 : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{G}$ et $f_2 : \mathrm{X}_2 \to \mathrm{G}$ deux k-morphismes tels que les ensembles $\overline{f_1(\mathrm{X}_1)}$ et $\overline{f_2(\mathrm{X}_2)}$ soient égaux, alors $\Gamma_\mathrm{G}(f_1) = \Gamma_\mathrm{G}(f_2)$.

---

[70] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire, pour signaler ce cas particulier de 7.1.

[71] N.D.E. : On a mis en (i′) le point (viii) de l'original, et l'on a mis en évidence les points (vi) et (vii) sous la forme du corollaire 7.2.1 et de la définition 7.2.2 ci-dessous.

(iii) Soit E une partie de G telle que le sous-schéma réduit $\overline{\mathrm{E}}$ de G soit géométriquement réduit. On appelle *sous-schéma en groupes fermé de* G *engendré par* E, et on note $\Gamma_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})$ le sous-schéma en groupes $\Gamma_{\mathrm{G}}(i)$, où i est l'injection du sous-schéma réduit $\overline{\mathrm{E}}$ de G dans G.

(iv) Comme tout sous-schéma en groupes de G est fermé, d'après $\mathrm{VI_A}$, 0.5.2, [72] on parlera de « *sous-schéma en groupes engendré* » au lieu de « *sous-schéma en groupes fermé engendré* ».

(v) Soit X un k-schéma géométriquement réduit et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ un k-morphisme. Supposons que $f(\mathrm{X})$ *contienne l'élément unité* e de G. Posons $\mathrm{X}'^{1} = \mathrm{X} \times_k \mathrm{X}$ et $f'^{1} = \mu \circ (f \times_k (c \circ f))$, et pour $n > 1$,

$$\mathrm{X}'^{n} = \mathrm{X}'^{1} \underset{k}{\times} \mathrm{X}'^{n-1} \qquad \text{et} \qquad f'^{n} = \mu \circ (f'^{1} \underset{k}{\times} f'^{n-1}).$$

Alors $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ est le sous-schéma réduit de G dont l'espace sous-jacent est l'adhérence de la réunion des $f'^{n}(\mathrm{X}'^{n})$, pour $n \geqslant 1$.

En effet, rappelant la notation de 7.1 (ii) : $\mathrm{X}^1 = \mathrm{X} \sqcup \mathrm{X}$ et $\mathrm{X}^n = \mathrm{X}^1 \times_k \mathrm{X}^{n-1}$, pour $n \geqslant 2$, on a les inclusions suivantes, où la première résulte de l'hypothèse $e \in f(\mathrm{X})$:

$$f^n(\mathrm{X}^n) \subset f'^{n}(\mathrm{X}'^{n}) \subset f^{2n}(\mathrm{X}^{2n}), \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Ceci montre de plus que, pour qu'il existe un entier n tel que $f^n(\mathrm{X}^n) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, il faut et il suffit qu'il existe un entier m tel que $f'^{m}(\mathrm{X}'^{m}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

364 On déduit de la remarque 7.2 (v) le

Corollaire 7.2.1. — *Soient* X *un* k*-schéma* géométriquement réduit et géométriquement connexe*, et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *un* k*-morphisme tel que* $f(\mathrm{X})$ contienne l'élément neutre *de* G*. Alors, le* k*-groupe* $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ *est* connexe*, donc* irréductible.

En effet, chacun des X'^{n} est alors connexe, donc la réunion des $f'^{n}(\mathrm{X}'^{n})$ (qui contiennent tous l'élément neutre), est connexe, et il en est de même de son adhérence $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$. Donc $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ est irréductible, d'après $\mathrm{VI_A}$, 2.4 (lorsque G, donc aussi $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, est localement de type fini sur k) et 2.6.5 (iii) (dans le cas général).

Définition 7.2.2. — Soit G un k-groupe.

a) Soient A et B deux sous-k-schémas en groupes *géométriquement réduits* de G. On appelle *sous-schéma en groupes des commutateurs de* A *et* B dans G et on note $(\mathrm{A}, \mathrm{B})_{\mathrm{G}}$ ou simplement (A, B), le sous-schéma en groupes fermé de G engendré par le morphisme $\nu : \mathrm{A} \times_k \mathrm{B} \to \mathrm{G}$ défini par : $(a, b) \mapsto aba^{-1}b^{-1}$, pour tout k-schéma S et $a \in \mathrm{A}(\mathrm{S})$, $b \in \mathrm{B}(\mathrm{S})$.

b) Supposons G *géométriquement réduit* sur k. On appelle *groupe dérivé* de G, et on note $\mathfrak{D}(\mathrm{G})$ [73], le groupe (G, G).

N. B. Pour que G soit commutatif, il faut et il suffit que $\mathfrak{D}(\mathrm{G})$ soit le k-groupe unité.

---

(72) N.D.E. : On a supprimé ici l'hypothèse que G soit localement de type fini sur k.

(73) N.D.E. : On a changé la notation Der(G) de l'original, afin d'éviter tout risque de confusion avec un espace de dérivations.

Rappels 7.3.0. — [74] Rappelons que si $\phi : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ est un morphisme de S-schémas, le *préfaisceau image* $\phi(\mathrm{Y})$ est le S-foncteur qui à tout S' au-dessus de S associe le sous-ensemble $\phi(\mathrm{Y}(\mathrm{S}'))$ de $\mathrm{Z}(\mathrm{S}')$. Remarquons que si T est un sous-schéma de Z et si l'inclusion de préfaisceaux $\phi(\mathrm{Y}) \hookrightarrow \mathrm{Z}$ se factorise par T, i.e. si $\phi \circ h \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$ pour tout S-morphisme $h : \mathrm{S}' \to \mathrm{Y}$, on a ensemblistement $\phi(\mathrm{Y}) \subset \mathrm{T}$ (prendre $h = \mathrm{id}_{\mathrm{Y}}$), et *la réciproque est vraie si* Y *est réduit*, car dans ce cas ϕ se factorise par T.

Rappelons aussi que, d'après 6.2, si H est un sous-k-schéma en groupes fermé de G, alors $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ et $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}$ sont représentables par des sous-k-schémas en groupes fermés de G.

Corollaire 7.3. — *Soient* G *un k-groupe,* X *un k-schéma* géométriquement réduit*, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ un k-morphisme.*

(i) *Soient* S *un k-schéma et u un endomorphisme du* S*-groupe* G_{S}.

(a) *Si l'on a $u(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) \subset \Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$ (ensemblistement), alors le morphisme $u : \Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$ se factorise à travers $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$.*

(b) *Si u est un* automorphisme *du* S*-groupe* G_{S} *et si l'on a $u(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) = f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})$ (ensemblistement), alors u induit un automorphisme de $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$. En particulier, si un élément $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ vérifie* $\mathrm{int}(g)(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) = f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})$ *(ensemblistement), alors $g \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}}}(\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}})(\mathrm{S})$.*

(c) *Si $u \circ f_{\mathrm{S}} = f_{\mathrm{S}}$, alors la restriction de u au sous-groupe $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$ de G_{S} est l'identité. En particulier, si un élément $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ vérifie* $\mathrm{int}(g)(f_{\mathrm{S}}) = f_{\mathrm{S}}$*, alors $g \in \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}}}(\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}})(\mathrm{S})$.*

(ii) *Soit* H *un sous-schéma en groupes de* G*, alors* H *centralise (resp. normalise) $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ si et seulement si, pour tout $\mathrm{S} \to \mathrm{Spec}\,k$ et $h \in \mathrm{H}(\mathrm{S})$, on a :* $\mathrm{int}(h) \circ f_{\mathrm{S}} = f_{\mathrm{S}}$ *(resp.* $\mathrm{int}(h)(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) \subset \Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$*), i.e. si pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$, les éléments $h_{\mathrm{S}'}$ et $f(x)$ de $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ commutent (resp. $h_{\mathrm{S}'}f(x)h_{\mathrm{S}'}^{-1} \in \Gamma_{\mathrm{G}}(f)(\mathrm{S}')$).*

(iii) *En particulier, soient* Y *un second k-schéma* géométriquement réduit *et* **365**
$\phi : \mathrm{Y} \to \mathrm{G}$ un k-morphisme. Supposons que, quel que soit le k-schéma S', pour tout $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}')$ et $y \in \mathrm{Y}(\mathrm{S}')$, les éléments $\phi(y)$ et $f(x)$ de $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ commutent (resp. $\mathrm{int}(\phi(y))(f(x)) \in \Gamma_{\mathrm{G}}(f)(\mathrm{S}')$*).*

Alors, $\Gamma_{\mathrm{G}}(\phi)$ est un sous-k-groupe de $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, resp. $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

(iv) *Si g est un k-point de* G*, alors le k-groupe $\Gamma_{\mathrm{G}}(\{g\})$ est* commutatif.

(v) *Soient* A *et* B *deux sous-schémas en groupes de* G géométriquement réduits *sur k. Si* A *et* B *sont* invariants *(resp.* caractéristiques*), il en est de même de* (A, B).

Démonstration. (i) Prouvons (a). Posons $\Gamma_{\mathrm{S}} = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$. Alors $u^{-1}(\Gamma_{\mathrm{S}})$ est un sous-S-schéma en groupes fermé de G_{S} donc, d'après 7.1 (iii), il suffit de montrer que f_{S} se factorise à travers $u^{-1}(\Gamma_{\mathrm{S}})$. Or, comme $u(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) \subset \Gamma_{\mathrm{S}}$ et comme X_{S} est réduit, alors $u \circ f_{\mathrm{S}}$ se factorise à travers Γ_{S}, donc f_{S} se factorise à travers $u^{-1}(\Gamma_{\mathrm{S}})$. Ceci prouve (a).

[74] N.D.E. : On a ajouté ces rappels, et l'on a modifié en conséquence, et détaillé, l'énoncé de 7.3.

Alors, la première assertion de (b) est une conséquence de (a), appliqué à u et u^{-1} (et en fait il suffit de supposer que $u(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) \subset \Gamma_{\mathrm{S}}$ et $u^{-1}(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) \subset \Gamma_{\mathrm{S}}$), et la seconde assertion en est le cas particulier où $u = \mathrm{int}(g)$.

Prouvons (c). Considérons le morphisme de S-groupes $\mathrm{G}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}_{\mathrm{S}}$, $g \mapsto (u(g), g)$ et notons H l'image inverse de la diagonale, c'est un sous-schéma en groupes de G_{S}. Puisque G est séparé sur k (VI_{A} 0.3), G_{S} est séparé sur S, donc H est fermé dans G_{S}. Comme, par hypothèse, H majore f_{S}, il contient $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)_{\mathrm{S}}$, d'après 7.1 (iii). Ceci prouve la première assertion de (c), et la seconde en est le cas particulier où $u = \mathrm{int}(g)$.

Prouvons (ii). Posons $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ et notons i l'inclusion $\Gamma \hookrightarrow \mathrm{G}$. Alors H est contenu dans $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\Gamma)$ si et seulement si, pour tout k-schéma S et $h \in \mathrm{H(S)}$, on a $\mathrm{int}(h)(\Gamma_{\mathrm{S}}) \subset \Gamma_{\mathrm{S}}$ (cette condition appliquée à h et h^{-1} entraînant que $\mathrm{int}(h)(\Gamma_{\mathrm{S}}) = \Gamma_{\mathrm{S}}$) ; et d'après (i)(a) ceci est le cas si et seulement si $\mathrm{int}(h)(f_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}})) \subset \Gamma_{\mathrm{S}}$.

De même, H est contenu dans $\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\Gamma)$ si et seulement si, pour tout k-schéma S et $h \in \mathrm{H(S)}$, on a $\mathrm{int}(h) \circ i_{\mathrm{S}} = i_{\mathrm{S}}$, et d'après (i)(c) ceci est le cas si et seulement si $\mathrm{int}(h)(f_{\mathrm{S}}) = f_{\mathrm{S}}$. Ceci prouve (ii).

Prouvons (iii). Compte-tenu de (ii), l'hypothèse entraîne que ϕ se factorise par C (resp. N) ; comme ce dernier est un sous-groupe fermé de G, d'après 6.2, il contient donc $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, d'après 7.1 (i).

366 L'assertion (iv) découle de (iii), lorsqu'on prend pour f et ϕ l'immersion fermée $\mathrm{Spec}\, k \hookrightarrow \mathrm{G}$ définie par g : dans ce cas, pour tout k-schéma S, X(S) et Y(S) n'ont qu'un point, qui est envoyé par f (resp. ϕ) sur g.

Montrons enfin (v). Soit ν le morphisme $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$ et soit ν' sa restriction à $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$; par définition (7.2.2), $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(\nu')$. Soient S un k-schéma, et u un automorphisme intérieur (resp. un automorphisme de S-groupe) de G_{S}. On a $u \circ \nu_{\mathrm{S}} = \nu_{\mathrm{S}} \circ (u \times u)$. D'autre part, l'hypothèse entraîne que u induit un automorphisme u_1 de A_{S} (resp. u_2 de B_{S}), donc

$$u\big(\nu'_{\mathrm{S}}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{B}_{\mathrm{S}})\big) = \nu'_{\mathrm{S}}\big(u_1(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}) \times_{\mathrm{S}} u_2(\mathrm{B}_{\mathrm{S}})\big) = \nu'_{\mathrm{S}}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{B}_{\mathrm{S}}).$$

Donc, d'après (i)(b), u induit un automorphisme de $(\mathrm{A}, \mathrm{B})_{\mathrm{S}}$. Ceci prouve (v).

Proposition 7.4. — *Soient* G *un k-groupe* localement de type fini*,* X *un k-schéma* de type fini, géométriquement réduit et géométriquement connexe*, et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ un k-morphisme tel que* $f(\mathrm{X})$ contienne l'élément neutre e *de* G*. Alors, avec les notations de* 7.1 (ii)*, il existe un entier* N *tel qu'on ait* (*ensemblistement*) *:*

$$f^{\mathrm{N}}(\mathrm{X}^{\mathrm{N}}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f).$$

D'après 7.1 (iii) et EGA IV_2, 2.6.1, nous pouvons supposer k algébriquement clos. D'après le corollaire 7.2.1, nous pouvons supposer que $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$; enfin, il suffit de montrer qu'il existe un entier N tel que l'on ait : $f'^{\mathrm{N}}(\mathrm{X}'^{\mathrm{N}}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$, avec les notations de 7.2 (v).

Premier cas. Supposons X *irréductible.* Alors les $\overline{f'^{n}(\mathrm{X}'^{n})}$ forment une suite croissante de fermés irréductibles dans l'espace G, qui est noethérien, puisque $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$ est de type fini sur k ($\mathrm{VI_A}$ 2.4). Donc cette suite est stationnaire, et il existe un entier m tel que $\overline{f'^m(\mathrm{X}'^m)} = \Gamma_\mathrm{G}(f)$.

De plus, puisque X et G sont de type fini sur k, les morphismes f'^n sont de type fini sur k. Par conséquent, $f'^m(\mathrm{X}'^m)$ est constructible dans G (EGA IV_1, 1.8.5), donc contient un ouvert U de son adhérence $\Gamma_\mathrm{G}(f)$ (EGA 0_IV, 9.2.3). Alors, d'après $\mathrm{VI_A}$ 0.5, on a :

$$\Gamma_\mathrm{G}(f) \subset \mathrm{U}\cdot\mathrm{U} \subset f'^{2m}(\mathrm{X}'^{2m}) \subset \Gamma_\mathrm{G}(f),$$

d'où $f'^{2m}(\mathrm{X}'^{2m}) = \Gamma_\mathrm{G}(f)$.

Deuxième cas. Supposons que X ait *exactement deux* composantes irréductibles A_1 **367**
et A_2. Alors, puisque X est connexe, et k algébriquement clos, il existe $a \in (\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2)(k)$. Donc les quatre parties irréductibles $\mathrm{A}_i \times_k \mathrm{A}_j$ $(i, j = 1, 2)$ recouvrent $\mathrm{X}\times_k \mathrm{X}$, et l'image de chacune d'entre elles par le morphisme $f'^1 = \mu \circ (f \times_k (c \circ f))$ contient e. Si f'^1_{ij} désigne la restriction de f'^1 au sous-schéma réduit $\mathrm{A}_i \times_k \mathrm{A}_j$, posons

$$\mathrm{Y} = (\mathrm{A}_1 \underset{k}{\times} \mathrm{A}_1) \underset{k}{\times} (\mathrm{A}_1 \underset{k}{\times} \mathrm{A}_2) \underset{k}{\times} (\mathrm{A}_2 \underset{k}{\times} \mathrm{A}_2) \underset{k}{\times} (\mathrm{A}_2 \underset{k}{\times} \mathrm{A}_1) \qquad \text{et}$$

$$g = \mu \circ \Big(\big(\mu \circ (f'^1_{11} \underset{k}{\times} f'^1_{12})\big) \underset{k}{\times} \big(\mu \circ (f'^1_{22} \underset{k}{\times} f'^1_{21})\big)\Big).$$

Alors Y est irréductible, réduit et de type fini, donc on vient de voir qu'il existe un entier m tel que $g'^m(\mathrm{Y}'^m) = \Gamma_\mathrm{G}(g)$. Or, pour tout $n \geqslant 1$, on a $f'^n(\mathrm{X}'^n) \subset g'^n(\mathrm{Y}^n) \subset f'^{4n}(\mathrm{X}'^{4n})$, d'où $\Gamma_\mathrm{G}(f) = \Gamma_\mathrm{G}(g)$ et $f'^{4m}(\mathrm{X}'^{4m}) = \Gamma_\mathrm{G}(f)$.

Cas général. Raisonnons par récurrence sur le nombre des composantes irréductibles de X (ce nombre est fini puisque X, étant de type fini sur k, est noethérien). Supposons la proposition démontrée dans le cas où X a au plus $r-1$ composantes irréductibles, et supposons qu'il en ait r, à savoir $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_r$. Alors e appartient à l'image de l'un des A_i ; supposons par exemple que $e \in f(\mathrm{A}_1)$. Posons alors $\mathrm{Y} = \Gamma_\mathrm{G}(f_r)$, où f_r désigne la restriction de f au sous-schéma réduit $\mathrm{X}_r = \mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_{r-1}$ (nous supposons la numérotation des A_i choisie de façon que ce schéma soit connexe, ce qui est toujours possible). Alors Y est un sous-groupe de G, fermé, réduit, et irréductible, d'après le corollaire 7.2.1.

Posons $\mathrm{Z} = \overline{f(\mathrm{A}_r)}$, et soient $\mathrm{T} = \mathrm{Y} \cup \mathrm{Z}$, muni de la structure de sous-schéma fermé réduit, et i l'injection de T dans G. Il est clair (7.2 (ii)) que $\Gamma_\mathrm{G}(i) = \Gamma_\mathrm{G}(f)$ et que T est connexe (car puisque X est connexe, $\mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_{r-1}$ et A_r ont en commun un point a, et Y et Z ont en commun le point $f(a)$). De plus, $e \in \mathrm{T}$, et T a au plus deux composantes irréductibles, puisque Y et Z sont irréductibles. D'après l'hypothèse de **368**
récurrence, il existe un entier m tel qu'on ait : $\overline{f'^m_r(\mathrm{X}'^m_r)} = \Gamma_\mathrm{G}(f_r) = \mathrm{Y}$. Comme $\mathrm{X} = \mathrm{X}_r \cup \mathrm{A}_r$ et comme $\mathrm{Z} = \overline{f(\mathrm{A}_r)}$ est contenu dans $\overline{f'^m(\mathrm{X}'^m)}$ (puisque $e \in f(\mathrm{A}_1)$), on a donc :

$$f(\mathrm{X}) \subset \mathrm{Y} \cup \mathrm{Z} \subset \overline{f'^m(\mathrm{X}'^m)}.$$

D'autre part, puisque T a au plus deux composantes irréductibles, on a déjà vu qu'il existe un entier p tel que $i'^p(\mathrm{T}'^p) = \Gamma_\mathrm{G}(i) = \Gamma_\mathrm{G}(f)$. Or, $\mathrm{T} \subset \overline{f'^m(\mathrm{X}'^m)}$, donc $\overline{f'^{mp}(\mathrm{X}'^{mp})} = \Gamma_\mathrm{G}(f)$, et on montre, comme dans le premier cas, que cette dernière égalité entraîne $f'^{2mp}(\mathrm{X}'^{2mp}) = \Gamma_\mathrm{G}(f)$.

Lemme 7.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes,* X *un* S*-préschéma,* $f : X \to G$ *un* S*-morphisme. On suppose que* X *et* G *sont* localement de présentation finie *sur* S*, et que pour tout* $s \in S$ *et tout* point maximal g *de* G_s*, il existe un point* x *de* X *tel que* $f(x) = g$ *et que* f *soit* plat en x. *Alors le morphisme* $\mu \circ (f \times_S f) : X \times_S X \to G$ *est* couvrant *pour la topologie* (fppf).

[75] D'après EGA IV_3, 11.3.1, l'ensemble V des points de X en lesquels f est plat est *ouvert* et $f|_V$ est un morphisme *ouvert*, donc $U = f(V)$ est un ouvert de G ; de plus, d'après l'hypothèse, $U \cap G_s$ est dense dans G_s, pour tout $s \in S$. Notons ϕ la restriction à $V \times_S V$ de $\mu \circ (f \times_S f)$.

Il suffit de montrer que ϕ est couvrant pour la topologie (fppf), et pour cela il suffit de montrer que ϕ est fidèlement plat et de présentation finie (cf. IV, 6.3.1 (iv)). Or ϕ est égal au composé $V \times_S V \xrightarrow{f|_V \times f|_V} U \times_S U \xrightarrow{\mu} G$, où le premier morphisme est fidèlement plat et localement de présentation finie, puisque $f|_V$ l'est. Il suffira donc de prouver qu'il en est de même de la restriction de μ à $U \times_S U$.

Or, $G \to S$ étant localement de présentation finie et plat, il en est de même de $\mu : G \times_S G \to G$ (qui est isomorphe au morphisme déduit de $G \to S$ par le changement de base $G \to S$, cf. VI_A 0.1), donc aussi du morphisme induit $U \times_S U \to G$. Pour prouver que ce dernier est surjectif, il suffit de regarder fibre par fibre, où cela résulte de VI_A 0.5, puisque $U \cap G_s$ est un ouvert dense de G_s, pour tout $s \in S$.

Remarque 7.6.0. — [76] Soient S un schéma, H un S-groupe, et $f : X \to H$ un morphisme de S-schémas. Le *sous-préfaisceau en groupes* de H *engendré par l'image de* f, qu'on notera $\langle \mathrm{Im}\, f\rangle$, est le sous-$k$-foncteur en groupes de H qui à tout S-schéma S′ associe le sous-groupe de H(S′) engendré par $f(X(S'))$. Comme chaque élément de ce sous-groupe s'écrit comme un produit fini $f(x_1)^{\varepsilon_1} \cdots f(x_n)^{\varepsilon_n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, $x_i \in X(S')$ et $\varepsilon_i = \pm 1$, on voit donc que si l'on note $X^1 = X \coprod X$ et qu'on définit les morphismes $f^n : X^n \to H$ comme en 7.1, alors $\langle \mathrm{Im}\, f\rangle$ n'est autre que le *préfaisceau image* du morphisme

$$f^\infty : X^\infty \longrightarrow H,$$

où $X^\infty = \coprod_{n \geqslant 1} X^n$ et $f^\infty : X^\infty \to H$ est le S-morphisme dont la restriction à chaque X^n est f^n.

Proposition 7.6. — [77] *Soient* S *un schéma,* X *un* S*-schéma* plat et localement de présentation finie *sur* S, H *un* S*-groupe,* localement de présentation finie sur S et à fibres réduites*, soit* $f : X \to H$ *un morphisme de* S*-schémas, et soit* $f^\infty : X^\infty \to H$ *le*
369 S*-morphisme introduit plus haut. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) H *représente le* S-faisceau (fppf) *associé au préfaisceau* $\langle \mathrm{Im}\, f\rangle$.

(ii) f^∞ *est* couvrant *pour la topologie* (fppf).

---

[75] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[76] N.D.E. : On a ajouté cette définition, qui dans l'original était contenue dans l'énoncé de la proposition 7.6.

[77] N.D.E. : L'original énonçait ce résultat sous les hypothèses du cas particulier, mais la forme plus générale était utilisée implicitement dans la démonstration de 10.12 ; on a récrit l'énoncé en conséquence.

(iii) f^∞ *est* surjectif, *i.e.* $\mathrm{H} = \bigcup_{n\geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n)$.

Si de plus H *est* quasi-compact*, ces conditions équivalent aussi à la suivante :*

(iv) *Il existe un entier* n *tel que* $f^n : \mathrm{X}^n \to \mathrm{H}$ *soit* couvrant *pour la topologie* (fppf) (*et a fortiori surjectif*).

Ceci s'applique en particulier dans le cas où X *est un* k*-schéma localement de type fini et géométriquement réduit,* G *un* k*-groupe localement de type fini,* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *un morphisme de* k*-schémas,* $\mathrm{H} = \Gamma_{\mathrm{G}}(\phi)$ *et où* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{H}$ *est le morphisme induit par* ϕ.

Démonstration. Le faisceau considéré dans (i) est le faisceau image de X^∞ par f^∞ donc, d'après IV 4.4.3, dire que H représente ce faisceau équivaut à dire que f^∞ est couvrant, et ceci implique que f^∞ soit surjectif. Réciproquement, supposons f^∞ surjectif et montrons qu'il est alors couvrant pour la topologie (fppf).

Soient $s \in \mathrm{S}$, η un point maximal de la fibre H_s, et $x \in \mathrm{X}_s^\infty$ tel que $f^\infty(x) = \eta$ (un tel x existe, puisque f^∞ est surjectif). Comme la fibre H_s est réduite, $\mathscr{O}_{\mathrm{H}_s,\eta}$ est un corps, donc f_s^∞ est plat au point x. Comme X^∞ et H sont localement de présentation finie sur S, et X^∞ plat sur S, il résulte du critère de platitude par fibres (EGA IV_3, 11.3.10) que f^∞ est plat au point x. Donc, d'après le lemme 7.5, le morphisme

$$\mu \circ (f^\infty \underset{\mathrm{S}}{\times} f^\infty) : \mathrm{X}^\infty \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{X}^\infty \longrightarrow \mathrm{H}$$

est couvrant pour la topologie (fppf). Or, puisque $\mathrm{X}^n \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}^m$ est canoniquement isomorphe à X^{n+m}, et que, dans cet isomorphisme, $\mu \circ (f^n \times_{\mathrm{S}} f^m)$ correspond à f^{n+m}, il est clair que $\mu \circ (f^\infty \times_{\mathrm{S}} f^\infty)$ se factorise à travers f^∞, si bien que f^∞ est couvrant pour la topologie (fppf). Ceci prouve que (iii) $\Rightarrow$ (ii), d'où l'équivalence des conditions (i), (ii) et (iii).

Notons de plus que, puisque les morphismes $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ et $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ sont localement de présentation finie, il en est de même de $f : \mathrm{X} \to \mathrm{H}$ (cf. EGA IV_1, 1.4.3 (v)), et comme $\mu : \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$ est aussi de présentation finie (cf. VI_{A}, 0.1), il en résulte que chaque $f^n : \mathrm{X}^n \to \mathrm{H}$ l'est aussi. Donc, d'après EGA IV_1, 1.9.5 (viii), les $f^n(\mathrm{X}^n)$ sont des parties ind-constructibles de H.

Supposons de plus H *quasi-compact* (alors S l'est aussi, puisque $\mathrm{H} \to \mathrm{S}$ est surjectif). Alors, d'après EGA IV_1, 1.9.9, on conclut qu'il existe p tel que $f^p(\mathrm{X}^p) = \mathrm{H}$. Comme précédemment, on déduit alors du fait que les fibres de H sont réduites et du lemme 7.5, que le morphisme $\mu \circ (f^p \times_{\mathrm{S}} f^p) : \mathrm{X}^p \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}^p \to \mathrm{H}$ est *couvrant* pour la topologie (fppf) ; comme ce morphisme égale $f^{2p} : \mathrm{X}^{2p} \to \mathrm{H}$, cela achève de prouver 7.6.

Remarque 7.6.1. — Évidemment les conditions équivalentes de 7.6 impliquent que le faisceau F envisagé est représentable. La réciproque est fausse en général : [78] par exemple, si k est de caractéristique 0, soit $\mathrm{G} = \mathbb{G}_{a,k}$ et soit $f : \operatorname{Spec} k \to \mathrm{G}$ le morphisme donné par le point 1 de $\mathrm{G}(k)$, alors F est représenté par le k-groupe constant $\mathbb{Z}_k$, tandis que $\Gamma_{\mathrm{G}}(f) = \mathrm{G}$, donc le monomorphisme $\mathbb{Z}_k \hookrightarrow \mathrm{G}$ n'est pas surjectif.

Plaçons-nous, pour simplifier, sous les hypothèses du cas particulier de 7.6, et supposons F représentable. Alors, il résulte de EGA IV_3, 8.14.2 que F est *localement*

[78] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

370 *de présentation finie* sur k, donc la question est alors si le monomorphisme dominant $\mathrm{F} \to \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ est un isomorphisme, ou encore, une immersion fermée. Ce sera le cas, en vertu de 1.4.2, si F est *quasi-compact*, et, d'après $\mathrm{VI_A}$, 0.5.1, ceci sera vérifié si F est *connexe*, donc, en particulier (7.2.1), si X est connexe et si $f(\mathrm{X})$ contient l'élément unité de G.

Lemme 7.7. — *Soient k un corps* algébriquement clos, G *un k-groupe* localement de type fini, X *un k-schéma* géométriquement réduit et localement de type fini, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{G}$ *un k-morphisme et* H *un sous-schéma en groupes de* G *tel que* $\mathrm{H} \subset f(\mathrm{X})$. *Posons*

$$\Gamma' = \bigcup_{n\geqslant 1} f^n(\mathrm{X}^n), \qquad \Gamma'_0 = \Gamma' \bigcap \mathrm{G}(k), \qquad \mathrm{H}_0 = \mathrm{H}(k)$$

et supposons H_0 d'indice fini *dans* Γ'_0.

Alors il existe un entier m tel que $f^m(\mathrm{X}^m) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ (*cf.* 7.6), *et* $\Gamma_{\mathrm{G}}(f)$ *est réunion d'un nombre* fini *de translatés de* H.

Quel que soit $n \geqslant 1$, $f^n(\mathrm{X}^n)$ est une partie ind-constructible de G (EGA IV_1, 1.9.5 (viii)), il en est donc de même de Γ', si bien que, puisque G est un schéma de Jacobson, Γ'_0 est dense dans Γ'. Par hypothèse, il existe une suite finie $a_1, \dots, a_r$ de points de Γ'_0 telle que $\Gamma'_0 = a_1\mathrm{H}_0 \cup \cdots \cup a_r\mathrm{H}_0$, d'où

$$\Gamma_{\mathrm{G}}(f) = \overline{\Gamma'} = \overline{\Gamma'_0} = \overline{a_1\mathrm{H}_0 \cup \cdots \cup a_r\mathrm{H}_0} = \overline{a_1\mathrm{H}_0} \cup \cdots \cup \overline{a_r\mathrm{H}_0} = a_1\overline{\mathrm{H}_0} \cup \cdots \cup a_r\overline{\mathrm{H}_0},$$

la dernière égalité résultant du fait que la translation par a_i est un homéomorphisme de G sur G. On a donc $\Gamma_{\mathrm{G}}(f) = a_1\mathrm{H} \cup \cdots \cup a_r\mathrm{H}$. Il est d'autre part clair qu'il existe un entier p tel que chacun des a_i ($1 \leqslant i \leqslant r$) appartienne à $f^p(\mathrm{X}^p)$. Enfin, puisque $\mathrm{H} \subset f(\mathrm{X})$, on a, pour tout i : $a_i\mathrm{H} \subset f^{p+1}(\mathrm{X}^{p+1})$, si bien que $f^{p+1}(\mathrm{X}^{p+1}) = \Gamma_{\mathrm{G}}(f)$.

Proposition 7.8. — *Soient* G *un k-groupe* localement de type fini, A *et* B *deux sous-k-schémas en groupes* géométriquement réduits (*donc lisses aux points génériques de leurs composantes irréductibles, donc* lisses *d'après* 1.3) *de* G. *Supposons remplie l'une des conditions* a) *ou* b) *suivantes :*

a) A *et* B *sont* invariants et de type fini *sur k.*

371 b) A *est* connexe *et* B *est* de type fini *sur k.*

Alors (A, B) *est* de type fini *sur k, et représente le* faisceau *associé pour la topologie* (fppf) (*ou* (fpqc)) *au préfaisceau en groupes des commutateurs de* A *et* B *dans* G. *De plus,* [(79)] *les k-groupes* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}^0)$ *et* $(\mathrm{A}^0, \mathrm{B})$ *sont* connexes, *et l'on a*

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B})^0 = (\mathrm{A}, \mathrm{B}^0) \cdot (\mathrm{A}^0, \mathrm{B}).$$

D'après 7.6, pour montrer que (A, B) est le faisceau associé désiré, il suffit de montrer qu'il existe un entier n tel que $\nu^n((\mathrm{A} \times_k \mathrm{B})^n) = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ (notations de 7.2.2). Pour montrer cela, ainsi que pour montrer les deux autres assertions, on peut supposer

[(79)] N.D.E. : On a précisé ce qui suit et, dans la démonstration, on a détaillé la réduction au cas où k est algébriquement clos.

k algébriquement clos. En effet, soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. D'après 7.1 (iii) et $\mathrm{VI_A}$ 2.4, on a, avec des notations évidentes :

$$(\mathrm{A},\mathrm{B})_{\overline{k}} = (\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}_{\overline{k}}), \qquad ((\mathrm{A},\mathrm{B})^0)_{\overline{k}} = (\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}_{\overline{k}})^0, \qquad (\mathrm{A},\mathrm{B}^0)_{\overline{k}} = (\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}^0_{\overline{k}}), \quad \text{etc.}$$

Par conséquent, si on montre que $(\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}_{\overline{k}})$ est de type fini sur $\overline{k}$ (resp. que $(\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}^0_{\overline{k}})$ et $(\mathrm{A}^0_{\overline{k}},\mathrm{B}_{\overline{k}})$ sont connexes, et que le morphisme $(\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}^0_{\overline{k}}) \times_{\overline{k}} (\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}^0_{\overline{k}}) \to (\mathrm{A}_{\overline{k}},\mathrm{B}_{\overline{k}})^0$ est surjectif), alors les assertions analogues seront vraies sur k, d'après EGA IV_2, 2.7.1 et 2.6.1.

Soient alors $\mathrm{B}^1,\dots,\mathrm{B}^p$ les composantes connexes de B autres que la composante neutre B^0 (celles-ci sont en nombre fini puisque B est supposé de type fini sur k, donc noethérien), et dans le cas (a), soient de même $\mathrm{A}^1,\dots,\mathrm{A}^q$ celles de A. (Dans le cas (b), on ne considérera que $\mathrm{A}^0 = \mathrm{A}$). Soit ν_{ij} la restriction de ν à $\mathrm{A}^i \times_k \mathrm{B}^j$. Alors chacun des A^i et des B^j est irréductible ($\mathrm{VI_A}$ 2.4.1), il en est donc de même de $\mathrm{A}^0 \times_k \mathrm{B}^j$ et de $\mathrm{A}^i \times_k \mathrm{B}^0$. Puisque l'élément neutre de G appartient à A^0 et à B^0, il appartient à $\nu_{0j}(\mathrm{A}^0 \times_k \mathrm{B}^j)$ et à $\nu_{i0}(\mathrm{A}^i \times_k \mathrm{B}^0)$. Alors chacun des $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{0j})$ et des $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{i0})$ est connexe (7.2.1). De même, si u_{0j} (resp. u_{i0}) désigne l'injection de $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{0j})$ (resp. $\Gamma_{\mathrm{G}}(\nu_{i0})$) dans G, alors

$$(\mathrm{A}^0,\mathrm{B}) = \Gamma_{\mathrm{G}}((u_{0j})_{j=0}^p) \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{A},\mathrm{B}^0) = \Gamma_{\mathrm{G}}((u_{i0})_{i=0}^q)$$

sont connexes. De plus, on déduit aisément de 7.4 et des constructions précédentes, qu'il existe un indice r tel que $(\mathrm{A}^0,\mathrm{B})$ et $(\mathrm{A},\mathrm{B}^0)$ soient inclus dans $\nu^r((\mathrm{A}\times_k \mathrm{B})^r)$. Dans le cas b), on a $(\mathrm{A},\mathrm{B}) = (\mathrm{A}^0,\mathrm{B})$, et on a terminé.

Plaçons-nous maintenant dans le cas (a). [80] On sait déjà que $(\mathrm{A}^0,\mathrm{B})$ et $(\mathrm{A},\mathrm{B}^0)$ sont des sous-k-groupes de G lisses et connexes, donc de type fini (cf. $\mathrm{VI_A}$, 2.4). D'autre part, comme A^0 est un sous-groupe caractéristique de A (cf. $\mathrm{VI_A}$, 2.6.5), c'est un sous-groupe invariant de G et donc, d'après 7.3 (v), $(\mathrm{A}^0,\mathrm{B})$ est un sous-groupe invariant de G, et de même pour $(\mathrm{A},\mathrm{B}^0)$. Donc, d'après 7.1.1, le sous-groupe **372**
H de G engendré par $(\mathrm{A},\mathrm{B}^0)$ et $(\mathrm{A}^0,\mathrm{B})$ n'est autre que $(\mathrm{A},\mathrm{B}^0)\cdot(\mathrm{A}^0,\mathrm{B})$. En particulier, on a donc $\mathrm{H} \subset \nu^{2r}((\mathrm{A}\times_k \mathrm{B})^{2r})$.

Étant donnée une partie X de G stable pour la loi de groupe (cf. 3.0), nous noterons X_0 le groupe des k-points de G appartenant à X. Posons $\Gamma' = \bigcup_{q\geqslant 1} \nu^q((\mathrm{A}\times_k \mathrm{B})^q)$. Alors, d'après la proposition 7.9 ci-dessous, on a :

$$(\mathrm{A}^0,\mathrm{B})_0 = (\mathrm{A}^0_0,\mathrm{B}_0), \qquad (\mathrm{A},\mathrm{B}^0)_0 = (\mathrm{A}_0,\mathrm{B}^0_0) \qquad \text{et} \qquad \Gamma'_0 = (\mathrm{A}_0,\mathrm{B}_0),$$

si bien que $\mathrm{H}_0 = (\mathrm{A}^0_0,\mathrm{B}_0)\cdot(\mathrm{A}_0,\mathrm{B}^0_0)$ est d'indice fini dans Γ'_0 (*Bible*, Exp. 3, Appendice) puisque A_0 et B_0 sont invariants, et que A^0_0 (resp. B^0_0) est d'indice fini dans A_0 (resp. B_0). Nous sommes alors dans les conditions du lemme 7.7 : puisque $\mathrm{H} \subset \nu^{2r}((\mathrm{A}\times_k \mathrm{B})^{2r})$, il existe un entier m tel que $\nu^{2rm}((\mathrm{A}\times_k \mathrm{B})^{2rm}) = (\mathrm{A},\mathrm{B})$, et il existe une suite finie $a_1,\dots,a_n$ de k-points de G telle que : $(\mathrm{A},\mathrm{B}) = a_1\mathrm{H}\cup\cdots\cup a_n\mathrm{H}$. Alors, puisque H est de type fini sur k, chacun des $a_i\mathrm{H}$ est quasi-compact, donc leur réunion (A,B) est quasi-compacte, donc de type fini sur k. Puisque H est irréductible, il en est de même de chacun des $a_i\mathrm{H}$ et puisque $e \in \mathrm{H}$, il est clair que $\mathrm{H} = (\mathrm{A},\mathrm{B})^0$.

[80] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, en tenant compte de l'ajout 7.1.1.

Proposition 7.9. — *Soient k un corps* algébriquement clos*,* G *un k-groupe* localement de type fini*.*

(i) *Soient* A *et* B *deux parties* ind-constructibles *de* G*. Notons* A_0 *l'ensemble des points rationnels de* G *appartenant à* A*. Alors* $(A\cdot B)_0 = A_0\cdot B_0$*, le second produit étant pris dans le groupe* $G(k)$*.*

(ii) *Soient* X *un k-schéma* géométriquement réduit et localement de type fini*, et* $f : X \to G$ *un k-morphisme. Posons* $\Gamma'_G(f) = \bigcup_{n\geqslant 1} f^n(X^n)$*. Alors* $\Gamma'_G(f)_0$ *est le sous-groupe de* $G(k)$ *engendré par* $f(X)_0$*.*

373 (iii) *En particulier, soient* A *et* B *deux sous-schémas en groupes* lisses *de* G *; posons* $\Gamma' = \bigcup_{n\geqslant 1} \nu^n(A\times_k B)^n$ (notations de 7.2.2)*. Alors* Γ'_0 *est le groupe des commutateurs de* $A(k)$ *et* $B(k)$ *dans* $G(k)$*.*

Démontrons (i). Il est clair que $A_0\cdot B_0 \subset (A\cdot B)_0$. Réciproquement, soit $z \in (A\cdot B)_0$. Alors $\mu^{-1}(z)$ est un fermé de $G\times_k G$, et $A\times_k B$ (cf. 3.0) est une partie ind-constructible de $G\times_k G$, si bien que $\mu^{-1}(z)\cap(A\times_k B)$ est une partie ind-constructible non vide de $G\times_k G$; d'après EGA IV_3, 10.4.8, elle contient donc un point rationnel de $G\times_k G$, dont les projections x et y sont des points rationnels de G tels que $x\in A$, $y\in B$ et $x\cdot y = z$, si bien que $(A, B)_0 = A_0\cdot B_0$.

Pour montrer (ii), remarquons que, f^n étant localement de type fini, $f^n(X^n)$ est une partie ind-constructible de G (EGA IV_4, 1.9.5 (viii)). L'assertion (i) permet alors de montrer par récurrence que, si on pose $A = f(X)_0$, on a : $f^n(X^n)_0 = (A\cup A^{-1})^n$, et par conséquent,

$$\Gamma'_G(f)_0 = \bigcup_{n\geqslant 1} f^n(X^n)_0 = \bigcup_{n\geqslant 1}(A\cup A^{-1})^n,$$

qui est le sous-groupe de $G(k)$ engendré par $A = f(X)_0$.

Enfin, (iii) résulte de (ii) et des définitions.

Corollaire 7.10. — *Sous les conditions de* 7.8*, si k est algébriquement clos, alors* $(A, B)(k)$ *est le sous-groupe des commutateurs de* $A(k)$ *et* $B(k)$ *dans* $G(k)$*.*

En effet, il suffit d'appliquer 7.9 (iii), 7.8 et 7.6.

8. Schémas en groupes résolubles ou nilpotents

8.1. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie munie d'une topologie $\mathcal{T}$ (cf. IV § 4). Pour tout préfaisceau P sur $\mathscr{C}$, on notera $P^\flat$ le faisceau associé.

Soient G un préfaisceau en groupes sur $\mathscr{C}$, A et B deux sous-préfaisceaux en groupes de G, et soit $\underline{\mathrm{Comm}}(A, B)$ le préfaisceau en groupes des commutateurs de A et B dans G ; c.-à-d., pour tout $S\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $\underline{\mathrm{Comm}}(A, B)(S)$ est le sous-groupe de G(S) engendré
374 par les commutateurs $aba^{-1}b^{-1}$, avec $a\in A(S)$ et $b\in B(S)$. On note

$$\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(A, B) = \underline{\mathrm{Comm}}(A, B)^\flat.$$

On aura besoin, dans la démonstration de 8.2, des résultats suivants. [81]

Lemme 8.1.1. — *Soient* $\mathrm{A} \subset \mathrm{G}$ *des* faisceaux *en groupes, avec* A invariant *dans* G.

(i) $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G},\mathrm{A})$ *est le plus petit sous-faisceau en groupes invariant* C *de* G *tel que le faisceau* $(\mathrm{A}/\mathrm{C})^\flat$*, associé au préfaisceau quotient* A/C*, soit* central dans $(\mathrm{G}/\mathrm{C})^\flat$.

(ii) *En particulier,* $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G},\mathrm{G})$ *est le plus petit sous-faisceau en groupes invariant* C *de* G *tel que le faisceau quotient* $(\mathrm{G}/\mathrm{C})^\flat$*, soit* commutatif.

Évidemment, (ii) est le cas particulier A = G de (i), donc il suffit de montrer (i). Soit C un sous-faisceau en groupes de A, invariant dans G, et tel que le faisceau quotient $(\mathrm{A}/\mathrm{C})^\flat$ soit *central dans* $(\mathrm{G}/\mathrm{C})^\flat$. D'après le lemme IV 4.4.8.1, les préfaisceaux A/C et G/C sont *séparés*, et donc, d'après IV 4.3.11, tous les morphismes dans le diagramme ci-dessous sont des monomorphismes :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A}/\mathrm{C} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{G}/\mathrm{C} \arrow[d, hook] \\ (\mathrm{A}/\mathrm{C})^\flat \arrow[r, hook] & (\mathrm{G}/\mathrm{C})^\flat \end{tikzcd}$$

Comme $(\mathrm{A}/\mathrm{C})^\flat$ est central dans $(\mathrm{G}/\mathrm{C})^\flat$, alors A/C est central dans G/C, d'où $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{G},\mathrm{A}) \subset \mathrm{C}$, et donc C contient $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G},\mathrm{A})$, d'après IV 4.3.12.

Réciproquement, $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{G},\mathrm{A})$ est un sous-préfaisceau en groupes de A, invariant dans G, et séparé (cf. IV 4.3.1, N.D.E. (24)), donc, d'après IV 4.4.8.2 (i) et IV 4.3.11, $\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G},\mathrm{A})$ est un sous-faisceau en groupes de A, invariant dans G et contenant $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{G},\mathrm{A})$. Par conséquent, le préfaisceau A/C est central dans G/C et donc, d'après IV 4.4.8.2 (ii), $(\mathrm{A}/\mathrm{C})^\flat$ est central dans $(\mathrm{G}/\mathrm{C})^\flat$. Ceci prouve le lemme 8.1.1.

Lemme 8.1.2. — *Soient* G *un faisceau en groupes,* A, B *deux sous-préfaisceaux en groupes de* G.

(i) *Le morphisme* $\tau : \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \to \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}^\flat,\mathrm{B}^\flat)$ *est un* monomorphisme couvrant.

(ii) *Par conséquent, on a un isomorphisme*

$$\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{A}^\flat,\mathrm{B}^\flat).$$

Démonstration. (i) Comme A (resp. B) est un sous-préfaisceau de G, alors $\mathrm{A}^\flat$ (resp. $\mathrm{B}^\flat$) est un sous-préfaisceau de G contenant A (resp. B), et il en résulte que τ est un monomorphisme.

Montrons que τ est couvrant. Soient $\mathrm{S} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et $g \in \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}^\flat,\mathrm{B}^\flat)(\mathrm{S})$. Alors, il existe un entier $n \geqslant 1$ et, pour $i = 1,\dots,n$, des éléments $a'_i \in \mathrm{A}^\flat(\mathrm{S})$, $b'_i \in \mathrm{B}^\flat(\mathrm{S})$, et $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, tels que

$$g = (a'_1, b'_1)^{\varepsilon_1} \cdots (a'_n, b'_n)^{\varepsilon_n},$$

[81] N.D.E. : Ces résultats sont signalés sans démonstration dans l'original ; on les a mis en évidence sous la forme des lemmes 8.1.1 et 8.1.2, et l'on a détaillé les démonstrations.

où (a, b) désigne le commutateur $aba^{-1}b^{-1}$, et il existe un raffinement R de S tel que $a'_i \in \mathrm{A}(\mathrm{R})$ et $b'_i \in \mathrm{B}(\mathrm{R})$ pour tout i. Alors, g est le morphisme composé

$$\mathrm{R} \xrightarrow{(a'_1,\ldots,b'_n)} (\mathrm{A}\times\mathrm{B})^n \xrightarrow{\Phi^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}} \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A},\mathrm{B}),$$

où $\Phi = \Phi^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$ est le morphisme défini ensemblistement par :

$$\Phi(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) = (a_1, b_1)^{\varepsilon_1} \cdots (a_n, b_n)^{\varepsilon_n},$$

pour tout $\mathrm{T} \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et $a_i \in \mathrm{A}(\mathrm{T})$, $b_i \in \mathrm{B}(\mathrm{T})$. Ceci montre que $g \in \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A},\mathrm{B})(\mathrm{R})$ et il en résulte, comme dans la démonstration de IV 4.3.11 (i), que $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \to \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}^\flat,\mathrm{B}^\flat)$ est couvrant.

Comme $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}^\flat,\mathrm{B}^\flat) \to \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}^\flat,\mathrm{B}^\flat)^\flat$ est aussi un monomorphisme couvrant (IV 4.3.11 (iv)), il en est de même de $\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \to \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}^\flat,\mathrm{B}^\flat)^\flat$ et donc, d'après IV 4.3.12, on obtient un isomorphisme :

$$\underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A},\mathrm{B})^\flat \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{A}^\flat,\mathrm{B}^\flat)^\flat.$$

Ceci prouve le lemme 8.1.2.

Proposition 8.2. — *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, $\mathcal{T}$ une topologie sur $\mathscr{C}$,* G *un faisceau en groupes sur $\mathscr{C}$, n un entier $\geqslant 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Si on pose :* $\mathrm{K}_0 = \mathrm{G}$, *et pour* $p \geqslant 1$, $\mathrm{K}_p = \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{K}_{p-1},\mathrm{K}_{p-1})$ (*resp.* $\mathrm{K}_p = \underline{\mathrm{Comm}}(\mathrm{G},\mathrm{K}_{p-1})$), *alors* K_n *est le préfaisceau en groupes unité.*

(ii) *Si on pose* $\mathrm{K}'_0 = \mathrm{G}$, *et pour* $p \geqslant 1$, $\mathrm{K}'_p = \underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{K}'_{p-1},\mathrm{K}'_{p-1})$ (*resp.* $\mathrm{K}'_p = \underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G},\mathrm{K}'_{p-1})$), *alors* K'_n *est le faisceau en groupes unité.*

(iii) *Il existe une suite* $\mathrm{G} = \mathrm{H}_0 \supset \mathrm{H}_1 \supset \cdots \supset \mathrm{H}_n$ *de sous-faisceaux* invariants *de* G, *telle que, quel que soit i, le faisceau quotient* $\mathrm{H}_i/\mathrm{H}_{i+1}$ *soit commutatif* (*resp. central dans* $\mathrm{G}/\mathrm{H}_{i+1}$), *et que* H_n *soit le faisceau unité.*

Il est clair que $\mathrm{K}_n \subset \mathrm{K}'_n$; par conséquent (ii) entraîne (i). Montrons que (i) entraîne (ii). On a $\mathrm{K}'_1 = \underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G},\mathrm{G}) = \mathrm{K}_1^\flat$, et on déduit par récurrence du lemme 8.1.2 que $\mathrm{K}'_p = \mathrm{K}_p^\flat$ pour tout p. Par conséquent, si K_n est le préfaisceau unité, alors $\mathrm{K}'_n = \mathrm{K}_n^\flat$ est le faisceau unité.

Enfin les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes d'après le lemme 8.1.1.

375 ***Définition 8.2.1***. — Lorsque ces conditions sont satisfaites, le faisceau G est dit *résoluble de classe n* (resp. *nilpotent de classe n*). Lorsqu'il existe un entier n tel que ces conditions soient satisfaites, on dit que G est *résoluble* (resp. *nilpotent*).

On notera que, d'après la condition (i), ceci ne dépend pas de la topologie $\mathcal{T}$.

Proposition 8.3. — *Soient k un corps,* S *un k-schéma non vide,* Ω *une extension* algébriquement close *de k,* G *un k-groupe* lisse de type fini. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est résoluble de classe n* (*resp. nilpotent de classe n*).

(ii) $\mathrm{G}\times_k \mathrm{S}$ *est résoluble de classe n* (*resp. nilpotent de classe n*).

(iii) *Le groupe* $\mathrm{G}(\Omega)$ *est résoluble de classe n* (*resp. nilpotent de classe n*).

(iv) *Si on pose* $\mathrm{K}_0 = \mathrm{G}$ *et si on considère, pour* $p \geqslant 1$, *les* k-groupes $\mathrm{K}_p = (\mathrm{K}_{p-1}, \mathrm{K}_{p-1})$ (*resp.* $\mathrm{K}_p = (\mathrm{G}, \mathrm{K}_{p-1})$) (*cf.* 7.2.2), *alors* K_n *est le* k*-groupe unité.*

L'équivalence des conditions (i) et (ii) résulte de la proposition 8.2, étant donné que la formation du préfaisceau en groupes des commutateurs commute aux changements de base (IV 4.1.3).

L'équivalence de (i) et (iv) résulte de ce que, d'après 7.8, le k-groupe $\mathrm{K}_p = (\mathrm{K}_{p-1}, \mathrm{K}_{p-1})$ (resp. $\mathrm{K}_p = (\mathrm{G}, \mathrm{K}_{p-1})$) représente le *faisceau* $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{K}_{p-1}, \mathrm{K}_{p-1})$ (resp. $\underline{\mathrm{Comm}}_{\mathcal{T}}(\mathrm{G}, \mathrm{K}_{p-1})$), où $\mathcal{T}$ est la topologie (fppf) (ou (fpqc)).

Pour montrer que les conditions (iii) et (iv) sont équivalentes, on peut supposer que $k = \Omega$, et alors l'équivalence des conditions (iii) et (iv) résulte de 7.10.

Proposition 8.4. — *Soit* G *un* S*-groupe* de présentation finie, *tel que pour tout* $s \in \mathrm{S}$, G_s *soit* lisse *sur* $\kappa(s)$. *Soit* T *l'ensemble des* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* G_s *soit* résoluble (*resp.* nilpotent).

(i) *Alors* T *est* localement constructible *dans* S.

(ii) *Si on suppose de plus* G plat et séparé *sur* S (*i.e. lorsque* G *est* lisse, quasi-compact et séparé *sur* S), *alors* T *est* fermé *dans* S.

Il est clair qu'on peut supposer S affine d'anneau A. Il existe alors, d'après 10.1 et 10.10 b), [(*)] un sous-anneau noethérien A' de A et un A'-groupe de type fini G' tel que $\mathrm{G}' \otimes_{\mathrm{A}'} \mathrm{A}$ soit isomorphe à G. D'après EGA IV_3, 11.2.6 et 8.10.5 [(82)], si G est plat et séparé sur S, on peut supposer G' plat et séparé sur $\mathrm{S}' = \operatorname{Spec} \mathrm{A}'$. [(83)] Comme G est de présentation finie sur S, alors (EGA IV_3, 9.7.7) l'ensemble des $s \in \mathrm{S}$ tels que G_s soit géométriquement réduit (ou, ce qui revient au même, *lisse* sur $\kappa(s)$) est localement constructible. Donc, d'après EGA IV_3, 9.3.3, on peut supposer que, pour tout $s' \in \mathrm{S}'$, $\mathrm{G}'_{s'}$ est lisse sur $\kappa(s')$. D'autre part, si s' désigne l'image de s dans S', on a : $\mathrm{G}'_{s'} \otimes_{\kappa(s')} \kappa(s) \simeq \mathrm{G}_s$. Donc, d'après 8.3, pour que G_s soit résoluble (resp. nilpotent), il faut et il suffit qu'il en soit de même de $\mathrm{G}'_{s'}$. Nous somme donc ramenés au cas où S est un schéma affine noethérien. 376

Montrons alors que T est constructible. En appliquant le critère (EGA 0_{III}, 9.2.3), on voit, en raisonnant comme précédemment, qu'on est ramené à montrer que, dans le cas où S est noethérien et *intègre*, T ou $\mathrm{S} - \mathrm{T}$ contient un ouvert non vide de S.

Supposons donc S intègre et noethérien, de point générique η. Posons, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{K}_s^0 = \mathrm{G}_s$, et $\mathrm{K}_s^p = (\mathrm{K}_s^{p-1}, \mathrm{K}_s^{p-1})$ (resp. $\mathrm{K}_s^p = (\mathrm{G}, \mathrm{K}_s^{p-1})$). Montrons d'abord que la suite des sous-schémas fermés K_η^p est stationnaire. Il résulte de 7.3 (v) que chacun des K_η^p est *invariant*, donc la suite des K_η^p est décroissante ; cette suite est alors stationnaire puisque G_η est noethérien ; il existe donc un entier n tel que, pour tout $p \geqslant n$, on ait : $\mathrm{K}_\eta^p = \mathrm{K}_\eta^n$.

D'autre part, d'après 10.12.1 et 10.13, il existe un ouvert non vide S' de S et 377

[(*)] Nous nous servirons au cours de cette démonstration de résultats établis au numéro 10, qui ne dépendent, pas plus que le numéro 9, du présent n°8.

[(82)] N.D.E. : On a corrigé 10.8.5 en 8.10.5.
[(83)] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

un S′-groupe *de présentation finie* D tel que pour tout $s \in S'$, on ait $D_s = K_s^n$ et $(D_s, D_s) = D_s$ (resp. $(G_s, D_s) = D_s$). Nous pouvons supposer que $S' = S$. Alors, quel que soit $s \in S$, et quel que soit $p \geqslant n$, on a $D_s = K_s^p$, si bien que G_s est résoluble (resp. nilpotent) si et seulement si D_s est isomorphe au $\kappa(s)$-groupe unité.

Mais d'après EGA IV_3, 9.6.1 (xi), l'ensemble des $s \in S$ tels que le morphisme structural $D_s \to \operatorname{Spec} \kappa(s)$ soit un isomorphisme est constructible, [84] donc ou bien est rare, ou bien contient un ouvert non vide de S. On a donc obtenu que T est localement constructible.

Montrons que si, de plus, G est plat et séparé sur S, alors T est fermé. Puisque T est localement constructible, pour que T soit fermé, il faut et il suffit que T soit stable par spécialisation (cf. EGA IV_1, 1.10.1).

Soient donc $s \in S$ et s' une spécialisation de s dans S. Puisqu'on s'est ramené au cas où S est noethérien, alors, d'après EGA II, 7.1.9, il existe un anneau de valuation discrète A et un morphisme $\operatorname{Spec}(A) \to S$ tel que s (resp. s') soit l'image du point générique α (resp. du point fermé a) de Spec(A). Il suffit alors de montrer que si on pose $G' = G \otimes_S A$, et si G'_α est résoluble (resp. nilpotent), il en est de même de G'_a. Remarquons que, puisque G est plat et séparé sur S, G'_α est plat et séparé sur A, de sorte qu'on est ramené au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A.

Alors, puisque G_α est supposé résoluble (resp. nilpotent), il existe un entier q tel que K_α^q (avec les notations introduites précédemment) soit isomorphe au $\kappa(\alpha)$-groupe unité. Pour tout n, notons $\overline{K_\alpha^n}$ l'adhérence schématique (au sens de EGA IV_2, 2.8.5) de K_α^n dans G. Montrons, par récurrence sur p, que $(\overline{K_\alpha^p})_a \supset K_a^p$. Notons d'abord que,
378 puisque G est *plat* sur A, alors $\overline{G_\alpha}$ est égal à G (EGA IV_2, 2.8.5), donc $(\overline{K_\alpha^0})_a = K_a^0$.

Soit $p \geqslant 0$. Supposons avoir établi que $K_a^p \subset (\overline{K_\alpha^p})_a$, et notons ν_a, ν_α, $\overline{\nu}$, $\overline{\nu}_a$ les morphismes suivants, définis comme dans 7.2.2 :

$$\begin{array}{lcl}
\text{cas } \textit{résoluble} & & \text{cas } \textit{nilpotent} \\
\nu_a : K_a^p \times_{\kappa(a)} K_a^p \to G_a, & \text{resp.} & G_a \times_{\kappa(a)} K_a^p \to G_a, \\
\nu_\alpha : K_\alpha^p \times_{\kappa(\alpha)} K_\alpha^p \to G_\alpha & \text{resp.} & G_\alpha \times_{\kappa(\alpha)} K_\alpha^p \to G_\alpha, \\
\overline{\nu} : \overline{K_\alpha^p} \times_A \overline{K_\alpha^p} \to G, & \text{resp.} & G \times_A \overline{K_\alpha^p} \to G, \\
\overline{\nu}_a : (\overline{K_\alpha^p})_a \times_{\kappa(a)} (\overline{K_\alpha^p})_a \to G_a, & \text{resp.} & G_a \times_{\kappa(a)} (\overline{K_\alpha^p})_a \to G_a.
\end{array}$$

Puisque ν_α se factorise à travers K_α^{p+1}, alors $\overline{\nu}$ se factorise à travers $\overline{K_\alpha^{p+1}}$, qui est évidemment un sous-schéma en groupes de G, donc $\overline{K_\alpha^{p+1}}$ contient $\Gamma_G(\overline{\nu})$. D'après 7.1 (iii), on a $\Gamma_G(\overline{\nu})_a = \Gamma_{G_a}(\overline{\nu}_a)$; et, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$K_a^p \underset{\kappa(a)}{\times} K_a^p \subset (\overline{K_\alpha^p})_a \underset{\kappa(a)}{\times} (\overline{K_\alpha^p})_a \qquad \text{resp.} \qquad G_a \underset{\kappa(a)}{\times} K_a^p \subset G_a \underset{\kappa(a)}{\times} (\overline{K_\alpha^p})_a,$$

si bien que $K_a^{p+1} = \Gamma_{G_a}(\nu_a) \subset \Gamma_{G_a}(\overline{\nu}_a) = \Gamma_G(\overline{\nu})_a \subset (\overline{K_\alpha^{p+1}})_a$.

[84] N.D.E. : Compte tenu du fait que S est supposé affine, donc quasi-compact et quasi-séparé (cf. EGA 0_{III}, 9.1.12).

Mais puisque K^q_α est isomorphe au $\kappa(\alpha)$-groupe unité, et que le A-groupe unité est plat sur A et est isomorphe à un sous-schéma fermé de G (puisque G est *séparé* sur A, cf. 5.1), il résulte de EGA IV_2, 2.8.5 que l'adhérence schématique $\overline{\mathrm{K}^q_\alpha}$ est isomorphe au A-groupe unité. Comme on vient de voir que $\mathrm{K}^q_a \subset (\overline{\mathrm{K}^q_\alpha})_a$, ceci entraîne que K^q_a est isomorphe au $\kappa(a)$-groupe unité, si bien que G_a est résoluble (resp. nilpotent).

9. Faisceaux quotients

Le présent numéro se borne pour l'essentiel à un rappel dans le cas particulier d'espaces homogènes de groupes, de faits généraux bien connus sur le passage au quotient par des relations d'équivalences plates (cf. Exp. IV).

Définition 9.1. — Étant donné un *monomorphisme* $u : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ de S-groupes, on note G/G' (resp. $\mathrm{G}'\backslash\mathrm{G}$) et on appelle *faisceau quotient à droite* (resp. *à gauche*) *de* G *par* G′ le faisceau (pour la topologie (fpqc)) quotient de G par la relation d'équivalence **379**
définie par le monomorphisme :

$$\mathrm{G}\underset{\mathrm{S}}{\times}\mathrm{G}' \xrightarrow{\delta\circ(\mathrm{id}_\mathrm{G}\times u)} \mathrm{G}\underset{\mathrm{S}}{\times}\mathrm{G} \qquad (\text{resp. } \mathrm{G}'\underset{\mathrm{S}}{\times}\mathrm{G} \xrightarrow{\gamma\circ(u\times\mathrm{id}_\mathrm{G})} \mathrm{G}\underset{\mathrm{S}}{\times}\mathrm{G}),$$

où δ (resp. γ) désigne l'automorphisme de $\mathrm{G}\times_\mathrm{S}\mathrm{G}$ défini par $(g,h) \mapsto (g,gh)$ (resp. $(h,g)\mapsto(hg,g)$) pour $g,h\in\mathrm{G}(\mathrm{T})$.

Proposition 9.2. — *Soit* $u : \mathrm{G}'\to\mathrm{G}$ *un* monomorphisme *de* S*-groupes. Supposons que* G/G' *soit* représentable *par un* S*-schéma* G″*. Alors :*

(i) *Le morphisme canonique* $p : \mathrm{G}\to\mathrm{G}''$ *est* couvrant *pour la topologie* (fpqc).

(ii) *Si on pose* $\varepsilon'' = p\circ\varepsilon$ *(ce morphisme s'appelle* section unité de G″*), les diagrammes suivants sont cartésiens :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G}\times_\mathrm{S}\mathrm{G}' & \xrightarrow{\mu\circ(\mathrm{id}_\mathrm{G}\times u)} & \mathrm{G} \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{G} & \xrightarrow{p} & \mathrm{G}'' \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{G}' & \xrightarrow{u} & \mathrm{G} \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{S} & \xrightarrow{\varepsilon''} & \mathrm{G}'' \end{array} \quad .$$

En particulier, u est une immersion.

(iii) *Il existe sur* G″ *une structure unique de* S*-schéma à* groupe d'opérateurs *à gauche* G*, telle que p soit un morphisme de* S*-schémas à groupe d'opérateurs* G.

(iv) *Si on suppose de plus que* G′ *est* invariant *dans* G*, il existe sur* G″ *une structure unique de* S-groupe *telle que p soit un morphisme de* S*-groupes.*

(v) *Soit* S_0 *un* S*-schéma ; posons* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G}\times_\mathrm{S}\mathrm{S}_0$*, et* $\mathrm{G}'_0 = \mathrm{G}'\times_\mathrm{S}\mathrm{S}_0$ *; alors* $\mathrm{G}_0/\mathrm{G}'_0$ *est représentable par* $\mathrm{G}''_0 = \mathrm{G}''\times_\mathrm{S}\mathrm{S}_0$. [85]

(vi) *Soit* $\mathscr{P}$ *une propriété pour un* S*-morphisme. Supposons* $\mathscr{P}$ stable par changement de base *; alors si* $p : \mathrm{G}\to\mathrm{G}''$ *vérifie* $\mathscr{P}$*, il en est de même du morphisme* **380**
structural $\pi' : \mathrm{G}'\to\mathrm{S}$.

[85] N.D.E. : c.-à-d., le quotient est *universel*, cf. Exp. IV § 3.

(vii) *Soit* $\mathscr{P}$ *une propriété pour un* S*-morphisme. Supposons* $\mathscr{P}$ de nature locale pour la topologie (fpqc) (*cf.* 2.0 *et* 2.1.2). *Alors, pour que le morphisme* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}''$ *vérifie* $\mathscr{P}$*,* il faut et il suffit *qu'il en soit de même de* $\pi' : \mathrm{G}' \to \mathrm{S}'$.

(viii) *Soit* $\mathscr{P}$ *une propriété pour un* S*-morphisme ; supposons* $\mathscr{P}$ de nature locale pour la topologie (fpqc)*, et* stable par composition *; alors, si les morphismes structuraux* $\mathrm{G}'' \to \mathrm{S}$ *et* $\mathrm{G}' \to \mathrm{S}$ *vérifient* $\mathscr{P}$*, il en est de même du morphisme structural* $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$.

(ix) *Supposons* G réduit *; alors* G″ *est* réduit.

(x) *Pour que* G″ *soit* séparé *sur* S*, il faut et il suffit que* u (*ou, ce qui revient au même,* ε'') *soit une* immersion fermée.

(xi) *Pour que* G′ *soit* plat *sur* S*, il faut et il suffit que* p *soit un morphisme* plat (*ou, ce qui revient au même,* fidèlement plat).

Dans ce cas, pour que G″ *soit* plat *sur* S*, il faut et il suffit que* G *soit* plat *sur* S.

(xii) *Pour que* G′ *soit* plat et localement de présentation finie *sur* S*, il faut et il suffit que* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}''$ *soit* fidèlement plat et localement de présentation finie.

Dans ce cas, pour que G″ *soit* localement de présentation finie (*resp.* localement de type fini, de type fini, lisse, étale, non ramifié, localement quasi-fini, quasi-fini) *sur* S*, il suffit qu'il en soit de même de* G *sur* S*,* (*et la condition est également* nécessaire dans les deux premiers cas*, cf.* (viii)).

(xiii) *Supposons* G′ plat et de présentation finie *sur* S.

a) *Alors* p *est* de présentation finie et fidèlement plat *;*

b) *de plus, pour que* G *soit* de présentation finie *sur* S*, il faut et il suffit qu'il en soit de même de* G″.

381 Rappelons que la relation d'équivalence considérée est effective universelle (IV 4.4.9). Alors les assertions (i), (iii), (iv), (v) et la première assertion de (ii) résultent de IV 4.4.3, 5.2.2, 5.2.4, 3.4.5 et 3.3.2 (iii). La seconde assertion de (ii) résulte de la première, comme le montre le diagramme cartésien suivant, puisque $(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}') \times_{\mathrm{G}} \mathrm{S}$ est isomorphe à G′ :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G}' \arrow[r, "((\varepsilon\circ\pi'),\, \mathrm{id}_{\mathrm{G}'})"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}' \arrow[r, "\mu\circ(\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times u)"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathrm{G} \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{S} \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathrm{G} \arrow[r, "p"] & \mathrm{G}''
\end{tikzcd} .$$

Enfin, il est clair que ε'' est une S-section de G″, donc une immersion (EGA I, 5.3.13) ; d'après le diagramme cartésien précédent, il en est de même de u, ce qui achève de montrer (ii). De plus, (vi) est une conséquence immédiate du second diagramme cartésien de (ii).

Montrons (vii). D'après (i), p est couvrant pour la topologie (fpqc) ; donc, d'après (ii), pour montrer que p vérifie $\mathscr{P}$, il suffit de montrer que la première projection $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ vérifie $\mathscr{P}$, ce qui résulte de ce que $\mathscr{P}$ est stable par changement de base, puisque pr_1 provient de π' par changement de base.

Il est clair que (viii) résulte de (vii), car $\pi = \pi'' \circ p$, où $\pi'' : \mathrm{G}'' \to \mathrm{S}$ désigne le morphisme structural.

Montrons (ix). D'après (i), p est un épimorphisme ; puisque G est réduit, p se factorise à travers l'immersion $\mathrm{G}''_{\mathrm{réd}} \to \mathrm{G}''$, qui est donc aussi un épimorphisme, donc un isomorphisme (IV 4.4.4).

Montrons (x). Si G'' est séparé sur S, alors ε'' est une immersion fermée, d'après EGA I, 5.4.6. D'autre part, on a vu en (ii) que ε'' est une immersion fermée si et seulement si u en est une. Enfin, si u est une immersion fermée, il en est de même de $\delta \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times u) : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}' \to \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$; donc, d'après le lemme 9.2.1 ci-dessous, G'' est **382**
séparé sur S.

L'assertion (xi) résulte de (vii) et de EGA IV_2, 2.2.13.

L'assertion (xii) résulte de (vii), de EGA IV_4, 17.7.5 et 17.7.7, et de ce que, p étant universellement ouvert, quel que soit $s \in \mathrm{S}$, si l'espace sous-jacent à G_s est discret, il en est de même de l'espace sous-jacent à G''_s.

Enfin, l'assertion (xiii) résulte de (vii), (viii), et de EGA IV_4, 17.7.5.

Lemme 9.2.1. — *Soient* X *un* S*-schéma et* R *une relation d'équivalence définie sur* X *par le monomorphisme* $v : \mathrm{R} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$. *Supposons* R *effective. Alors :*

(i) *v est une immersion, et c'est une immersion fermée si* $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{R}$ *est séparé.*

(ii) *Supposons de plus que* Y *représente le faisceau* (fpqc) *quotient de* X *par* R [(86)] *et que v soit une immersion fermée. Alors* $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{R}$ *est* séparé *sur* S.

Rappelons (IV Déf. 3.3.2) que l'hypothèse « R effective » signifie qu'il existe un morphisme de S-schémas $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ tel que le morphisme naturel $\mathrm{R} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$ soit un *isomorphisme*. On en déduit (EGA I, 5.3.5) le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r, "v"] \arrow[d] & \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \arrow[d, "p \times p"] \\ \mathrm{Y} \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}"] & \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \end{tikzcd} .$$

Alors, puisque $\Delta_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}$ est une immersion (EGA I, 5.3.9), il en est de même de v. De même, si Y est séparé sur S, $\Delta_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}$ est une immersion fermée, donc il en est de même de v.

Réciproquement, supposons que v soit une immersion fermée et que Y représente le faisceau (fpqc) quotient de X par R. Alors p est couvrant pour la topologie (fpqc) (IV 4.4.3), et donc $p \times p$ l'est aussi (par changement de base, $p \times \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{Y}} \times p$ sont **383**
couvrants, donc aussi leur composée $p \times p$). Donc, par descente (fpqc) (cf. EGA IV_2, 2.7.1), $\Delta_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}$ est une immersion fermée, i.e. Y est séparé sur S.

Remarque 9.2.2. — Sous les hypothèses générales de 9.2, si on suppose G' *plat* et *localement de présentation finie* sur S, alors p est couvrant pour la topologie (fppf)

(86) N.D.E. : Comme signalé par O. Gabber, ceci est utilisé dans la démonstration et doit être inséré dans les hypothèses.

[87], d'après 9.2 (vii), donc les assertions (vii) et (viii) de 9.2 peuvent être étendues aux propriétés $\mathscr{P}$ de nature locale pour la topologie (fppf).

Remarque 9.3. — a) La question de savoir si un quotient G/G' est ou non représentable est souvent délicate ; dans ce séminaire nous démontrons la représentabilité de certains quotients particuliers.

En général, pour pouvoir affirmer que le quotient G/G' est représentable, il ne suffit pas de supposer G et G′ de présentation finie sur S et G′ plat sur S. En effet, supposons de plus G lisse à fibres connexes. Dans ce cas, si G/G' est un schéma, il est *séparé*, d'après le corollaire 5.4, et donc $G' \hookrightarrow G$ est une immersion fermée, d'après 9.2 (x) ; par conséquent, si G′ n'est *pas fermé* dans G, alors G/G' n'est *pas représentable.*

Pour obtenir un tel contre-exemple, on peut prendre pour S le spectre d'un anneau de valuation discrète, et poser $G = \mathbb{G}_{m,S}$. Considérons d'autre part un entier $n > 1$, *inversible* sur S ; alors $\boldsymbol{\mu}_n = \mathrm{Ker}(G \xrightarrow{n} G)$ est un sous-groupe fermé de G étale sur S (cf. $\mathrm{VII_A}$ [88]). Soit G′ le sous-groupe ouvert de $\boldsymbol{\mu}_n$ obtenu en ôtant de $\boldsymbol{\mu}_n$ la partie fermée de la fibre fermée de $\boldsymbol{\mu}_n$ complémentaire de l'origine. Alors G′ n'est pas fermé dans G, donc G/G' n'est pas représentable. (On peut aussi fabriquer de tels exemples où G′ est lisse à fibres connexes.)

b) Il n'est pas exclu que G/G' soit représentable en revanche, lorsque G et G′ sont
384 *de présentation finie* sur S, et que G′ est *plat* sur S et *fermé* dans G [(*)] [89]. Sous ces hypothèses, on sait que G/G' est représentable dans les cas particuliers suivants :

1° – S est le spectre d'un anneau artinien (cf. $\mathrm{VI_A}$ 3.2 et 3.3.2).

2° – G′ est propre sur S et G quasi-projectif sur S (cf. V 7.1).

3° – S est localement noethérien de dimension 1 (cf. [**An73**], Th. 4.C).

10. Passage à la limite projective dans les schémas en groupes et les schémas à groupe d'opérateurs

10.0. Rappelons le résultat essentiel de EGA IV_3, § 8.8. Soit donnée la situation suivante : S_0 un schéma *quasi-compact et quasi-séparé*, I un ensemble préordonné filtrant croissant, $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ un système inductif de $\mathscr{O}_{S_0}$-algèbres commutatives quasi-cohérentes, $\mathscr{A} = \varinjlim \mathscr{A}_i$, $S_i = \mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_i$ pour $i \in I$, et $S = \mathrm{Spec}\,\mathscr{A}$ [90], alors la catégorie des S-schémas *de présentation finie* est déterminée à équivalence près par la donnée des catégories des S_i-schémas de présentation finie, des foncteurs entre ces catégories $\rho_{ji} : X_i \mapsto X_i \times_{S_i} S_j$ pour $i \leqslant j$, et isomorphismes de transitivité $\rho_{kj} \circ \rho_{ji} \xrightarrow{\sim} \rho_{ki}$.

(*) C'est trop optimiste, comme le montre M. Raynaud dans sa thèse (*loc. cit.* X 14).

(87) N.D.E. : On a corrigé (fpqc) en (fppf).

(88) N.D.E. : voir $\mathrm{VII_A}$, 8.4 ou VIII, 2.1.

(89) N.D.E. : La remarque (∗) se réfère au contre-exemple X.14 dans [**Ray70a**]. La base y est régulière locale de dimension 2.

(90) N.D.E. : Noter que S, étant affine sur S_0, est donc quasi-compact et quasi-séparé, cf. la N.D.E. (92) plus loin.

Précisons. Étant donné $j \in \mathrm{I}$, et un S_j-schéma de présentation finie X_j, nous poserons, pour tout $i \in \mathrm{I}$ tel que $i \geqslant j$, $\mathrm{X}_i = \mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$, et $\mathrm{X} = \mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$. Alors (EGA IV_3, 8.8.2) :

(i) Étant donné $j \in \mathrm{I}$, et deux S_j-schémas de présentation finie X_j et Y_j, l'application canonique de $\varinjlim_{i \geqslant j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_i}(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est bijective.

(ii) Pour tout S-schéma de présentation finie X, il existe un indice $j \in \mathrm{I}$, un S_j-schéma de présentation finie X_j et un S-isomorphisme $\mathrm{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$.

On en conclut (EGA IV_3, 8.8.3) que, chaque fois qu'on aura un diagramme D **385**
portant sur un nombre fini d'objets et de flèches de la catégorie des S-schémas de présentation finie, on peut trouver un indice $i \in \mathrm{I}$ et un diagramme D_i dans la catégorie des S_i-schémas de présentation finie, tels que le diagramme D provienne à isomorphisme près du diagramme D_i par changement de base $\mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$. On peut même trouver i et D_i tels que tout carré cartésien de D provienne d'un carré cartésien de D_i.

10.1. De plus, un grand nombre de propriétés courantes pour un morphisme, stables par changement de base, possèdent la propriété suivante :

> Soit $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un S-morphisme entre S-schémas de présentation finie, il provient par changement de base d'un S_j-morphisme $u_j : \mathrm{X}_j \to \mathrm{Y}_j$ entre S_j-schémas de présentation finie, d'après 10.0 ; alors, pour que u ait la propriété $\mathscr{P}$, il faut et il suffit qu'il existe $i \geqslant j$ tel que $u_i = u_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$ ait la propriété $\mathscr{P}$.

Il en est ainsi dans le cas où $\mathscr{P}$ est l'une des propriétés suivantes pour un morphisme : être séparé, surjectif, radiciel, affine, quasi-affine, fini, quasi-fini, propre, projectif, quasi-projectif, un isomorphisme, un monomorphisme, une immersion, une immersion ouverte, une immersion fermée (EGA IV_3, 8.10.5), plat (EGA IV_3, 11.2.6), lisse, non ramifié ou étale (EGA IV_4, 17.7.8). [91]

Remarquons qu'il en est encore ainsi dans le cas où $\mathscr{P}$ est la propriété d'être *couvrant pour la topologie* (fppf) ; en effet, étant donnés deux S-schémas de présentation finie X et Y, et un S-morphisme $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, il résulte de IV, 6.3.1 (i) [92] que, pour que u soit couvrant pour la topologie (fppf), il faut et il suffit qu'il existe un S-schéma Z et un S-morphisme $v : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ fidèlement plat et de présentation finie qui se factorise à travers u.

Le but de cette section 10 est de donner des variantes de ce genre de résultats **386**
pour la catégorie des S-groupes de présentation finie, celle des S-schémas à groupe d'opérateurs, et pour certaines propriétés pour des monomorphismes de groupes (être invariant, central à faisceau quotient représentable, etc.).

Les deux résultats préliminaires de ce type sont les suivants. (Dans les n$^{\text{os}}$ 10.2 à 10.9 ci-dessous, on conserve les notations introduites en 10.0.)

(91) N.D.E. : On a rajouté le mot « plat », et corrigé 17.7.6 en 17.7.8.

(92) N.D.E. : et du fait que Y, étant de présentation finie sur S, est quasi-compact

Lemme 10.2. — *Soient* G_j *et* H_j *deux* S_j*-groupes de présentation finie ; posons, pour tout* $i \geqslant j$, $\mathrm{G}_i = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$, $\mathrm{G} = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$, *et définissons de même* H_i *et* H. *Alors l'application canonique ci-dessous est bijective :*

$$\varinjlim_{i \geqslant j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_i\text{-gr.}}(\mathrm{G}_i, \mathrm{H}_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}).$$

Lemme 10.3. — *Soit* G *un* S*-groupe de présentation finie ; alors il existe* $j \in \mathrm{I}$, *un* S_j*-groupe de présentation finie* G_j, *et un isomorphisme de* S*-groupes* $\mathrm{G} \cong \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$.

Les assertions 10.2 et 10.3 sont des conséquences faciles de 10.0 et 10.1, compte tenu de l'interprétation [93] de la structure de S-groupe donnée en EGA 0_{III}, 8.2.5 et 8.2.6.

Lemme 10.4. — *Soit* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de* S*-groupes entre* S*-groupes de présentation finie.* D'après 10.3 et 10.2, u provient par changement de base d'un morphisme $u_j : \mathrm{G}_j \to \mathrm{H}_j$ entre S_j-groupes de présentation finie. *Alors, pour que u soit un* monomorphisme central (*resp. un* monomorphisme invariant), *il faut et il suffit qu'il existe* $i \geqslant j$ *tel que* $u_i = u_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$ *ait la même propriété.*

C'est une conséquence immédiate de 10.0 et 10.1, compte-tenu de la caractérisation donnée en 6.7 des monomorphismes de groupes centraux ou invariants.

387

Corollaire 10.5. — *Soit* G_j *un* S_j*-groupe de présentation finie. Pour que* $\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$ *soit* commutatif, *il faut et il suffit qu'il existe* $i \geqslant j$, *tel que* $\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i$ *le soit.*

En effet, il revient au même de dire qu'un S-groupe est commutatif, ou que, considéré comme sous-schéma en groupes de lui-même, il est central.

Proposition 10.6. — *Soit* G_j *un* S_j*-groupe de présentation finie,* G'_j *un sous-schéma en groupes de* G_j plat *et de présentation finie sur* S_j. *Pour que* $(\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})/(\mathrm{G}'_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})$ *soit* représentable *pour la topologie* (fpqc), *il faut et il suffit qu'il existe* $i \geqslant j$ *tel que* $(\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)/(\mathrm{G}'_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)$ *le soit.*

C'est une conséquence du lemme plus général suivant :

Lemme 10.7. — *Soient* X_j *un* S_j*-schéma de présentation finie, et* R_j *une relation d'équivalence sur* X_j plate et de présentation finie [94]. *Pour que le faisceau quotient* $(\mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})/(\mathrm{R}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S})$ *pour la topologie* $\mathcal{T} =$ (fppf) *ou* (fpqc) *soit* représentable, *il faut et il suffit qu'il existe* $i \geqslant j$, *tel que le faisceau quotient* $(\mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)/(\mathrm{R}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)$ *pour la topologie* $\mathcal{T}$ *le soit.*

Compte tenu des énoncés de EGA IV_2, 8.8.2, 8.8.3, 8.10.5 et 11.2.6 rappelés en 10.0, ce lemme est conséquence du résultat suivant :

Lemme 10.8. — *Soit* $\mathcal{T}$ *la topologie* (fppf) *ou* (fpqc) *; soient* X *un* S*-schéma* de pré-
388 sentation finie (*resp.* localement de présentation finie), R *une relation d'équivalence sur* X *définie par un monomorphisme* $v : \mathrm{R} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ *tel que* $\mathrm{pr}_1 \circ v$ *soit* plat et de

[93] N.D.E. : en termes de diagrammes commutatifs de S-morphismes

[94] N.D.E. : c.-à-d., telle que le composé $\mathrm{R}_j \hookrightarrow \mathrm{X}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{X}_j \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathrm{X}_j$ soit plat et de présentation finie.

présentation finie (*resp.* plat et localement de présentation finie). *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le faisceau quotient* X/R *pour la topologie* $\mathcal{T}$ *est* représentable.

(ii) *Il existe un* S*-schéma* de présentation finie (*resp.* localement de présentation finie) Y *et un morphisme* fidèlement plat $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *tel que le diagramme*

(D)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[r, "\mathrm{pr}_1 \circ v"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2 \circ v"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "p"'] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

soit cartésien.

Notons d'abord que d'après IV, 3.3.2 et 4.4.3, pour que le faisceau X/R pour la topologie $\mathcal{T}$ soit représentable par Y, il faut et il suffit que le diagramme (D) soit cartésien et que p soit couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$.

Montrons que (i) entraîne (ii). L'hypothèse (i) implique que le diagramme (D) est cartésien, donc que $\mathrm{pr}_1 \circ v$ se déduit de p par changement de base par p, et que p est couvrant pour la topologie (fpqc). Donc, par descente (fpqc) (EGA IV_2, 2.7.1), puisque $\mathrm{pr}_1 \circ v$ est fidèlement plat et (localement) de présentation finie, il en est de même de p. Alors, d'après EGA IV_4, 17.7.5, comme X est (localement) de présentation finie sur S, il en est de même de Y.

Montrons que (ii) entraîne (i). Il suffit de montrer que p est couvrant pour la topologie (fppf) ; or p est fidèlement plat par hypothèse, et est localement de présentation **389**
finie car X et Y sont localement de présentation finie sur S (EGA IV_1, 1.4.3 (v)).

Lemme 10.9. — *Soit* G_j *un* S_j*-groupe de présentation finie, et* $\mathrm{G} = \mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}$. *Pour que* G^0 *soit* représentable*, il faut et il suffit qu'il existe* $i \geqslant j$ *tel que* $(\mathrm{G}_i)^0 = (\mathrm{G}_j \times_{\mathrm{S}_j} \mathrm{S}_i)^0$ *le soit.*

La condition est suffisante, puisque le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{G}^0$ commute au changement de base, d'après 3.3.

Réciproquement, supposons G^0 représentable. Alors, d'après 3.9, G^0 est ouvert dans G et quasi-compact sur S, donc de présentation finie sur S, puisque G l'est. Alors, d'après 10.3 et 10.1, il existe $i \geqslant j$ et un sous-schéma en groupes ouvert H_i de G_i tel que $\mathrm{H}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S} = \mathrm{G}^0$. Le morphisme structural $\mathrm{G}^0 \to \mathrm{S}$ est connexe, i.e. à fibres géométriquement connexes (VI_{A} 2.1.1), donc, d'après EGA IV_3, 9.3.3 et 9.7.7, quitte à augmenter i, on peut supposer que le morphisme structural $\mathrm{H}_i \to \mathrm{S}$ est connexe. Alors, d'après 3.10.1, l'espace sous-jacent à H_i n'est autre que $\underline{(\mathrm{G}_i)}^0$, et donc H_i représente $(\mathrm{G}_i)^0$.

10.10. Rappelons deux cas particuliers très utiles de la situation énoncée en 10.0 (cf. EGA IV_3, 8.1.2 a) et c)) :

a) Étant donné un point x d'un schéma X, on pose $S_0 = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ et on considère le système projectif filtrant décroissant $(S_i)_{i \in I}$ des voisinages ouverts affines de x ; alors $S = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_{X,x}$. En particulier, si x est le point générique d'un schéma intègre X, on trouve $S = \operatorname{Spec} \kappa(x)$.

b) On pose $S_0 = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, et on considère la famille $(\mathscr{A}_i)_{i \in I}$ préordonnée par inclu-
390 sion des sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini de l'anneau d'un schéma affine S. Étant donné que les $\mathscr{A}_i$ sont des anneaux noethériens, cela permet dans de nombreux cas de passer du cas noethérien au cas général.

Nous allons maintenant donner deux résultats concernant le cas particulier envisagé en a). [95]

Proposition 10.11. — [96] *Soient* S *un schéma intègre de point générique* η, G (*resp.* Y, Z) *un* S-*groupe* (*resp. des* S-*schémas*) de présentation finie, $u, v, i : Y \to G$ *et* $j : Z \to G$ *des morphismes de* S-*schémas. On suppose que* $i_\eta : Y_\eta \to G_\eta$ *et* $j_\eta : Z_\eta \to G_\eta$ *sont des* immersions fermées.

Alors, il existe un ouvert non vide S′ *de* S *tel que les morphismes* $i' : Y' \to G'$ *et* $j' : Z' \to G'$ *obtenus par changement de base soient des* immersions fermées*, et que les foncteurs :*

$$\underline{\operatorname{Transp}}(u', v'), \quad \underline{\operatorname{Transp}}_{G'}(i'(Y'), j'(Z')) \quad \textit{et} \quad \underline{\operatorname{Transpstr}}_{G'}(i'(Y'), j'(Z'))$$

resp.

$$\underline{\operatorname{Centr}}(u') \qquad \textit{et} \qquad \underline{\operatorname{Norm}}_{G'}\, i'(Y')$$

soient représentables *par des sous*-S′-*schémas* (*resp. sous*-S′-groupes) fermés *de* G′, de présentation finie *sur* S′.

On va appliquer les résultats de 10.1, d'abord dans la situation de 10.10 a), puis dans celle de 10.10 b). Puisque G_η, Y_η, Z_η sont *plats* sur le corps $\kappa(\eta)$, que G_η est *séparé* sur $\kappa(\eta)$ (VI_A 0.3), et que i_η, j_η sont des *immersions fermées*, alors, d'après 10.1, il existe un ouvert affine $S' = \operatorname{Spec}(A')$ de S, un sous-anneau *noethérien* A de A′, des A-schémas G_A, Y_A, Z_A, *plats et de présentation finie* sur A, et des morphismes $u_A, v_A, i_A : Y_A \to G_A$ et $j_A : Z_A \to G_A$, tels que G_A soit un A-*groupe, séparé* sur A, que i_A et j_A soient des *immersions fermées*, et que $G \times_S S' = G_A \otimes A'$, etc. Comme les foncteurs considérés pour S′ se déduisent par changement de base des foncteurs analogues pour Spec(A), il suffit d'établir le résultat pour ces derniers.

D'après EGA IV_2, 6.9.2, quitte à remplacer A par un localisé A_f (et donc S′ par l'ouvert affine S'_f), on peut supposer que G_A, Y_A, Z_A sont essentiellement libres sur A (au sens de 6.2.1). [97] Il résulte alors de 6.2.4 b) et e) que, sous les hypothèses de l'énoncé, les foncteurs considérés sont représentables par des sous-A-schémas fermés de G_A (donc de présentation finie sur A, puisque A est noethérien et G_A de présentation

---

(95) N.D.E. : Noter que la *démonstration* utilise aussi le cas b).

(96) N.D.E. : On a simplifié l'énoncé, et traité à part, dans le corollaire 10.11.1, le cas des sous-groupes.

(97) N.D.E. : En effet, G_A étant plat et de présentation finie sur A, il est recouvert par des ouverts affines $G_1, \dots, G_n$ tels que chaque $\mathscr{O}(G_i)$ soit une A-algèbre plate et de présentation finie ; alors, d'après EGA IV_2, 6.9.2, il existe $f_i \in A$ tel que $\mathscr{O}(G_i)_{f_i}$ soit un module libre sur A_{f_i} ; on peut alors remplacer Spec(A) par l'ouvert affine $D(f)$, où $f = f_1 \cdots f_n$, et l'on fait de même pour Y_A et Z_A.

finie sur A), et ce sont des sous-A-groupes de G_A dans le cas de $\underline{\mathrm{Centr}}(u_A)$ et de $\underline{\mathrm{Norm}}_{G_A}\, i_A(Y_A)$.

Corollaire 10.11.1. — *Soient* S *un schéma* intègre *de point générique* η, G, H, K *des* S-*groupes* de présentation finie, $i : H \to G$ *et* $j : K \to G$ *deux* monomorphismes quasi-compacts *de* S-*groupes. Alors, il existe un ouvert non vide* S' *de* S *tel que les morphismes* $i' : H' \to G'$ *et* $j' : K' \to G'$ *obtenus par changement de base soient des* immersions fermées, *et que les foncteurs :*

$$\underline{\mathrm{Transp}}_{G'}(H', K') \quad \textit{et} \quad \underline{\mathrm{Transpstr}}_{G'}(H', K') \qquad \Big(\textit{resp.} \quad \underline{\mathrm{Centr}}_{G'}\, H' \quad \textit{et} \quad \underline{\mathrm{Norm}}_{G'}\, H'\Big)$$

soient représentables *par des sous*-S'-*schémas* (*resp. sous*-S'-groupes) fermés *de* G', de présentation finie *sur* S'. 391

Ceci découle de la proposition précédente car, d'après 1.4.2, les hypothèses entraînent que i_η et j_η sont des immersions fermées.

Proposition 10.12. — *Soient* S *un schéma* intègre, G *un* S-*groupe* de présentation finie, A *et* B *deux sous-schémas en groupes de* G, de présentation finie sur S et à fibre générique lisse. *Supposons de plus vérifiée l'une des conditions suivantes :*

a) A *est à* fibre générique connexe,

b) A *et* B *sont* invariants *dans* G.

Alors, il existe un ouvert non vide S' *de* S *et un sous-schéma en groupes* fermé D' *de* $G' = G|_{S'}$, de présentation finie sur S', à fibres lisses, *qui représente le faisceau* (fppf) *associé au préfaisceau en groupes des commutateurs de* $A' = A|_{S'}$ *et* $B' = B|_{S'}$ *dans* G', *et* D' *est* à fibres connexes *dans le cas* (a), *et* invariant *dans* G' *dans le cas* (b).

En particulier, pour tout $s \in S'$, *on a* $D'_s = (A_s, B_s)$ *avec les notations de* 7.2.2.

Soit η le point générique de S ; posons $H_\eta = (A_\eta, B_\eta)$. Comme A_η et B_η sont 392
lisses, alors, d'après 7.8 dans le cas (a), et 7.3 (v) dans le cas (b), H_η est connexe (resp. invariant dans G_η).

On est dans la situation de 10.0 correspondant à 10.10 (a) ; donc, d'après 10.3 et 10.1, il existe un ouvert non vide S' de S et un sous-S'-schéma en groupes D' de présentation finie et fermé dans G', tel que $D'_\eta = D' \otimes_{S'} \kappa(\eta)$ égale H_η. De plus, d'après EGA IV_3, 9.7.7 et 9.3.3, on peut supposer que D' est à fibres géométriquement réduites. Dans le cas (a), on peut supposer, d'après EGA IV_3, 9.7.7 et 9.3.3, à nouveau, que D' est à fibres connexes, donc géométriquement connexes (cf. VI_A, 2.1.1). Dans le cas (b), on peut supposer, d'après 10.4, que D' est invariant dans G'.

De plus, nous avons vu, au cours de la démonstration de 7.8, qu'il existe un entier n tel que $\nu_\eta^n((A_\eta \times_{\kappa(\eta)} B_\eta)^n) = D'_\eta$, où ν_η et ν_η^n sont définis comme en 7.2.2 (a) et 7.1 (ii). Nous pouvons définir par les mêmes formules les morphismes

$$\nu' : A' \underset{S'}{\times} B' \longrightarrow G' \qquad \text{et} \qquad \nu'^n : (A' \underset{S'}{\times} B')^n \longrightarrow G',$$

et l'on a $\nu'^n \otimes_{S'} \kappa(\eta) = \nu_\eta^n$.

Par conséquent, d'après 10.1, on peut choisir S' tel que le morphisme ν'^n soit *plat* et se factorise à travers D', et que le morphisme $\nu'^n : (A' \times_{S'} B')^n \to D'$ ainsi obtenu soit *surjectif*. Alors, d'après 7.5, le morphisme [98]

$$\nu'^{2n} = \mu \circ (\nu'^n \times_{S'} \nu'^n) : \quad (A' \underset{S'}{\times} B')^{2n} \longrightarrow D',$$

est couvrant pour la topologie (fppf). Donc, d'après 7.6, D' représente le faisceau (fppf) associé au préfaisceau des commutateurs de A' et B' dans G'.

De plus, ν'^n induit, pour tout $s \in S'$, un morphisme surjectif $\nu_s^n : (A_s \times_{\kappa(s)} B_s)^n \to D'_s$. [99] Alors, D'_s est un sous-groupe fermé de G_s contenant $\nu_s(A_s \times_{\kappa(s)} B_s)$, donc aussi (A_s, B_s). Comme ν_s^n est surjectif, alors D'_s égale (A_s, B_s) et représente, d'après 7.6, le faisceau (fppf) des commutateurs de A_s et B_s dans G_s.

Corollaire 10.12.1. — [100] *Soient* S *un schéma intègre, de point générique* η, *et* G *un* S*-groupe de présentation finie à fibres lisses. Posons* $K_\eta^0 = G_\eta$ *et* $K_\eta^p = (K_\eta^{p-1}, K_\eta^{p-1})$ (*resp.* $K_\eta^p = (G, K_\eta^{p-1})$) *pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$. *Fixons* $n \in \mathbb{N}^*$. *Alors il existe un ouvert non vide* S' *de* S *et un sous-schéma en groupes* D *invariant dans* $G|_{S'}$, *de présentation finie et à fibres lisses, tel que* $D_s = K_s^n$ *pour tout* $s \in S'$.

Ceci résulte de 10.12, par récurrence sur n.

Corollaire 10.13. — *Soit* S *un schéma intègre de point générique* η, *soient* G *un* S-*groupe,* H *un sous-*S-*schéma en groupes* invariant *dans* G, *on suppose* G *et* H de présentation finie sur S et à fibre générique lisse. [101]

393 *Si l'on a* $(H_\eta, H_\eta) = H_\eta$ (*resp.* $(G_\eta, H_\eta) = H_\eta$), *alors il existe un ouvert non vide* S' *de* S *tel que pour tout* $s \in S'$, *on ait* $(H_s, H_s) = H_s$ (*resp.* $(G_s, H_s) = H_s$).

En effet, d'après la démonstration de 10.12, il existe un ouvert non vide S' de S et un sous-S'-schéma en groupes D de $G|_{S'}$, de présentation finie et à fibres lisses, tel que $D_s = (H_s, H_s)$ (resp. $D_s = (G_s, H_s)$) pour tout $s \in S'$. D'autre part, comme $D_\eta = H_\eta$ et comme D et H sont de présentation finie sur S', alors, d'après EGA IV_3, 8.8.2.5, il existe un ouvert non vide S'' de S' tel que $D|_{S''} = H|_{S''}$. Pour tout $s \in S''$, on a donc $H_s = D_s = (H_s, H_s)$ (resp. $H_s = D_s = (G_s, H_s)$).

10.14. Les énoncés 10.2 et 10.3 concernant la catégorie des S-groupes de présentation finie s'étendent à la catégorie des couples formés d'un S-groupe de présentation finie et d'un S-schéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G. De façon précise, dans la situation rappelée au début de 10.0 :

(i) soient $j \in I$ et G_j et G'_j deux S_j-groupes de présentation finie, H_j (resp. H'_j) un S_j-schéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G_j (resp. G'_j). Posons, pour $i \in I$, $i \geqslant j$, $G_i = G_j \times_{S_j} S_i$ et $G = G_j \times_{S_j} S$, et définissons de même G'_i, G', H_i, H, H'_i et H'. Notons $\mathrm{Dihom}_{S\text{-gr.}}((G, H), (G', H'))$ l'ensemble des di-morphismes de S-groupes

[98] N.D.E. : On a corrigé ci-dessous $n+1$ en $2n$.

[99] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[100] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire, utilisé dans la démonstration de 8.4.

[101] N.D.E. : L'original supposait G, H de présentation finie et H à fibres lisses ; on a modifié l'hypothèse afin de pouvoir appliquer 10.12. On a aussi détaillé la démonstration.

et de S-schémas à groupe d'opérateurs du couple (G,H) dans le couple $(\mathrm{G}',\mathrm{H}')$. Alors l'application canonique

$$\varinjlim_{i\geqslant j} \mathrm{Dihom}_{\mathrm{S}_i\text{-gr.}}((\mathrm{G}_i,\mathrm{H}_i),(\mathrm{G}'_i,\mathrm{H}'_i)) \longrightarrow \mathrm{Dihom}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}((\mathrm{G},\mathrm{H}),(\mathrm{G}',\mathrm{H}'))$$

est bijective.

(ii) soient G un S-groupe de présentation finie et H un S-schéma de présentation finie à groupe d'opérateurs G ; il existe alors un indice $j\in\mathrm{I}$, un S_j-groupe de présentation finie G_j, un S_j-schéma de présentation finie H_j à groupe d'opérateurs G_j et un di-isomorphisme de S-groupes et de S-schémas à groupes d'opérateurs de $(\mathrm{G}_j\times_{\mathrm{S}_j}\mathrm{S},\,\mathrm{H}_j\times_{\mathrm{S}_j}\mathrm{S})$ sur (G,X).

Définition 10.15. — [102] Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$, moins fine que la topologie canonique. Étant donné un S-schéma en groupes G et un S-schéma X à groupe d'opérateurs G, on dit que X est un espace *formellement homogène* sous G (relativement à la topologie $\mathcal{T}$) si le morphisme $\Phi:\mathrm{G}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}\to\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{X}$, défini par $(g,x)\mapsto(gx,x)$ **394**
pour tout $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$ et $g\in\mathrm{G}(\mathrm{S}')$, $x\in\mathrm{X}(\mathrm{S}')$, est un *épimorphisme* dans la catégorie des faisceaux pour la topologie $\mathcal{T}$, ce qui équivaut à dire que Φ est couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$ (cf. IV 4.4.3).

On dit que X est un espace *homogène* s'il est formellement homogène et si de plus le morphisme $\mathrm{X}\to\mathrm{S}$ est également couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$.

En particulier, on dit que X est un espace *formellement principal homogène* sous G si Φ est un *isomorphisme*, et que X est un fibré *principal homogène* (ou G-*torseur*) si Φ est un isomorphisme et si de plus le morphisme $\mathrm{X}\to\mathrm{S}$ est couvrant pour la topologie $\mathcal{T}$ (cf. IV 5.1.5 et 5.1.6 (ii)).

Proposition 10.16. — *On se place dans la situation envisagée au début de* 10.0. *Soient* $j\in\mathrm{I}$, G_j *un* S_j*-groupe et* X_j *un* S_j*-schéma à groupe d'opérateurs* G_j. *On suppose* G_j *et* X_j de présentation finie *sur* S_j.

Pour que $\mathrm{X}=\mathrm{X}_j\times_{\mathrm{S}_j}\mathrm{S}$ *soit un espace homogène* (*resp. un fibré principal homogène*) *sous* $\mathrm{G}=\mathrm{G}_j\times_{\mathrm{S}_j}\mathrm{S}$ *pour la topologie* (fppf), *il faut et il suffit qu'il existe un indice* $i\geqslant j$ *tel que* $\mathrm{X}_i=\mathrm{X}_j\times_{\mathrm{S}_j}\mathrm{S}_i$ *soit un espace homogène* (*resp. un fibré principal homogène*) *sous* $\mathrm{G}_i=\mathrm{G}_j\times_{\mathrm{S}_j}\mathrm{S}_i$.

Compte tenu de 10.14 et de EGA IV_3, 8.8.2, 8.8.3 et 8.10.5, l'énoncé résulte de la propriété concernant les morphismes couvrants pour la topologie (fppf) rappelée en 10.1. [103]

11. Schémas en groupes affines

395

[102] N.D.E. : On a corrigé l'original en distinguant les notions d'objet « formellement homogène » ou « homogène », voir IV §§ 5.1 et 6.7.

[103] N.D.E. : Pour les propriétés de passage à la limite pour les torseurs en termes de cohomologie de Čech, voir aussi SGA 4, VII 5.7 et ses corollaires. Ceci a été détaillé dans l'article [**Ma07**].

11.0. Rappels. — [104] Soit $q : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ un morphisme de schémas *quasi-compact et quasi-séparé* (cf. EGA IV_1, 1.1 & 1.2), et soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module quasi-cohérent. Rappelons que $q_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent (EGA I, 9.2.1). De plus, d'après EGA III, 1.4.15 (complété par EGA IV_1, 1.7.21), on a le point (c) ci-dessous, et la démonstration de *loc. cit.* donne aussi les points (a) et (b) :

(a) Si $\mathscr{F}$ est une limite inductive filtrante de sous-modules quasi-cohérents $\mathscr{F}_\alpha$, alors $q_*(\mathscr{F}) = \varinjlim_\alpha q_*(\mathscr{F}_\alpha)$.

(b) Si $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module *plat*, le morphisme canonique $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} q_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \to q_*q^*(\mathscr{E})$ est un isomorphisme.

(c) Soient $p : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme *plat*, $q' : \mathrm{X}' \to \mathrm{S}'$ le morphisme déduit de q par changement de base, et $\mathscr{F}'$ l'image inverse de $\mathscr{F}$ sur X'. Alors le morphisme canonique $p^*q_*(\mathscr{F}) \to q'_*(\mathscr{F}')$ est un isomorphisme.

En effet, soit $\mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ un ouvert affine arbitraire de S. D'après l'hypothèse, $q^{-1}(\mathrm{U})$ est réunion d'ouverts affines $\mathrm{V}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{B}_i)$, pour $i = 1, \dots, n$, et chaque intersection $\mathrm{V}_i \cap \mathrm{V}_j$ est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines $\mathrm{W}_{ijk} = \mathrm{Spec}(\mathrm{C}_{ijk})$. Alors $\Gamma(\mathrm{U}, q_*(\mathscr{F})) = \Gamma(q^{-1}(\mathrm{U}), \mathscr{F})$ est le noyau du morphisme

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \Gamma(\mathrm{V}_i, \mathscr{F}) \longrightarrow \bigoplus_{i,j,k} \Gamma(\mathrm{W}_{ijk}, \mathscr{F}).$$

Le point (a) en résulte, car chacun des termes ci-dessus commute aux limite inductives filtrantes (puisque les V_i et W_{ijk} sont affines, donc quasi-compacts). Prouvons (b) : $\mathrm{E} = \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{E})$ est un A-module plat, et $\Gamma(\mathrm{U}, q_*q^*(\mathscr{E}))$ est le noyau $\mathrm{K}(\mathrm{E})$ du morphisme

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{B}_i \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{E} \longrightarrow \bigoplus_{i,j,k} \mathrm{C}_{ijk} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{E}$$

et comme E est plat sur A, ce noyau s'identifie à $\mathrm{K}(\mathrm{A}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{E} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(q^{-1}(\mathrm{U})) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{E}$. Enfin, si U' est un ouvert affine arbitraire de S' au-dessus de U, alors $\mathrm{A}' = \mathscr{O}(\mathrm{U}')$ est une A-algèbre plate, et l'on obtient comme ci-dessus que $\mathscr{F}(q^{-1}(\mathrm{U})) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}' \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}'(q'^{-1}(\mathrm{U}))$.

Notation. — Soient S un schéma, X un S-schéma, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural ; on posera $\mathscr{A}(\mathrm{X}) = f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$.

Lemme 11.1. — *Soient* X *et* Y *deux* S-*schémas* quasi-compacts et quasi-séparés *sur* S, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *et* $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ *les morphismes structuraux. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\varphi : \mathscr{A}(\mathrm{X}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathscr{A}(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y})$$

est un isomorphisme *dans chacun des cas suivants :* [105]

a) f *et* g *sont* affines,

b) g (*ou* f) *est* plat et affine,

[104] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe de rappels.

[105] N.D.E. : Notons que si k est un corps et si X est une somme infinie de copies de $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}\, k$ (de sorte que X n'est pas quasi-compact), alors $\mathscr{A}(\mathrm{X}) = k^{\mathrm{X}}$ et le morphisme canonique $k^{\mathrm{X}} \otimes k^{\mathrm{X}} \to k^{\mathrm{X} \times \mathrm{X}}$ n'est pas surjectif.

c) g *est* plat *et* $f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module* plat.

On supposera, dans le cas (b), que c'est g qui est plat et affine. Posons alors $\mathrm{S}' = \operatorname{Spec} \mathscr{A}(\mathrm{X})$, $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, $g' = g \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ et notons v le morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y}' \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & \mathrm{Y} \arrow[d, "g"] \\ \operatorname{Spec} \mathscr{A}(\mathrm{X}) = \mathrm{S}' \arrow[r, "v"] & \mathrm{S} \end{tikzcd} .$$

Dans les cas (a) et (b), g est affine et donc, d'après EGA II, 1.5.2, on a :

(1) $$g'_*(\mathscr{O}'_{\mathrm{Y}}) = v^* g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) = \mathscr{A}(\mathrm{Y}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'} \quad .$$

On a la même égalité dans le cas (c), d'après 11.0 (c), puisque S' est plat sur S et que g est quasi-compact et quasi-séparé.

D'autre part (EGA II 1.2.7), $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ se factorise à travers v au moyen d'un morphisme $p : \mathrm{X} \to \mathrm{S}'$, et l'on a $p_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) = \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ et $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{Y}'$. Puisque f est quasi-séparé, p l'est aussi (EGA IV_1, 1.2.2), et puisque f est quasi-compact et que v est quasi-séparé, p est aussi quasi-compact (EGA IV_1, 1.2.4). Considérons alors le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & \mathrm{Y}' \arrow[d, "g'"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "p"] & \mathrm{S}' \end{tikzcd} .$$

Dans les cas (b) et (c), Y est plat sur S, donc Y' est plat sur S' ; appliquant de nouveau 11.0 (c), on obtient :

(2) $$p'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}}) = g'^* p_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) = g'^*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathscr{O}_{\mathrm{Y}'} \quad ,$$

et l'on a la même égalité dans le cas (a), car dans ce cas p et p' sont des isomorphismes. **396**

Enfin, v étant affine on a, d'après EGA II, 1.4.7, $v_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{X})$ pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$. Combiné avec (2) et (1), ceci donne :

$$\mathscr{A}(\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y}) = v_* g'_* p'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}}) \overset{(2)}{=} v_* g'_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}'}) \overset{(1)}{=} v_*(\mathscr{A}(\mathrm{Y}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathscr{A}(\mathrm{Y}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{X}).$$

Corollaire 11.2. — *Le foncteur* $\mathrm{X} \mapsto \operatorname{Spec} \mathscr{A}(\mathrm{X})$*, de la sous-catégorie pleine de* $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ *formée des* S*-schémas* X plats quasi-compacts et quasi-séparés *sur* S*, et tels que* $\mathscr{A}(\mathrm{X})$ *soit un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module* plat*, dans celle des* S*-schémas* plats et affines *sur* S*,* commute aux produits finis*, donc transforme* S-groupes *en* S-groupes.

Définition 11.3. — Étant donné un S-groupe G plat, quasi-compact et quasi-séparé sur S, tel que $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ soit plat sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, [106] nous noterons G_{af}, et nous appellerons *enveloppe affine* de G, le S-groupe $\mathrm{G}_{\mathrm{af}} = \operatorname{Spec} \mathscr{A}(\mathrm{G})$.

[106] N.D.E. : Signalons que si S est un schéma localement noethérien régulier de dimension $\leqslant 2$, et X un S-schéma plat, quasi-compact et quasi-séparé, alors $\mathscr{A}(\mathrm{X})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module plat, cf. [**Ray70a**], VII 3.2.

Proposition 11.3.1. — [107] *Le morphisme canonique* $\tau_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$ *est un morphisme de* S*-groupes. De plus, il vérifie la propriété universelle suivante :*

(i) *Pour tout morphisme de* S*-schémas* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$*, où* H *est* affine *sur* S*, il existe un unique morphisme de* S*-schémas* $\phi' : \mathrm{G}_{\mathrm{af}} \to \mathrm{H}$ *tel que* $\phi = \phi' \circ \tau_{\mathrm{G}}$.

(ii) *Si de plus* H *est un* S*-groupe et si* ϕ *est un morphisme de* S*-groupes, alors il en est de même de* ϕ'.

11.4. [108] Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules quasi-cohérents. Considérons le S-foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}), \mathbf{W}(\mathscr{F}))$ (cf. I, 3.1.4), i.e. pour tout S-schéma $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$,

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}), \mathbf{W}(\mathscr{F}))(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{X}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E})_{\mathrm{X}}, \mathbf{W}(\mathscr{F})_{\mathrm{X}}).$$

De plus, d'après I, 4.6.2, on a $\mathbf{W}(\mathscr{E})_{\mathrm{X}} = \mathbf{W}(f^*(\mathscr{E}))$ (et de même pour $\mathscr{F}$) et

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{X}}}\big(\mathbf{W}(f^*(\mathscr{E})), \mathbf{W}(f^*(\mathscr{F}))\big) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}(f^*(\mathscr{E}), f^*(\mathscr{F})).$$

On obtient donc (en utilisant la formule d'adjonction pour la dernière égalité) :

$$(\dagger) \quad \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}), \mathbf{W}(\mathscr{F}))(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}(f^*(\mathscr{E}), f^*(\mathscr{F})) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{E}, f_*f^*(\mathscr{F})).$$

397 ***Proposition 11.5***. — *Soient* X *un* S*-schéma* quasi-compact et quasi-séparé *sur* S*,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *le morphisme structural,* $\mathscr{E}$ *et* $\mathscr{E}'$ *deux* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules quasi-cohérents. On suppose vérifiée l'une des deux conditions suivantes :*

a) f *est* affine*,*

b) $\mathscr{E}$ *est* plat *sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$.

Alors le morphisme canonique $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{X}) \to f_*f^*(\mathscr{E})$ *est un isomorphisme, et l'on a donc*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}'), \mathbf{W}(\mathscr{E}))(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{E}', \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{X})).$$

En effet, la seconde assertion découle de 11.4 et de la première ; celle-ci résulte de EGA II, 1.4.7 dans le cas (a), et de 11.0 (b) dans le cas (b). [109]

398 **11.6.** [110] Soient G un S-groupe et $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. Se donner sur $\mathscr{E}$ une structure de G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module (i.e. une opération $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-linéaire de G sur $\mathbf{W}(\mathscr{E})$, cf. I 4.7.1) équivaut à se donner un morphisme de S-*foncteurs en monoïdes* $\rho : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}))$ (en effet, un tel ρ envoie nécessairement G dans $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}))$).

---

[107] N.D.E. : On a ajouté cette proposition ; voir aussi le paragraphe additionnel 12 plus loin pour une étude du morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$ et de son noyau.

[108] N.D.E. : Dans 11.4–11.6, on a considéré $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}), \mathbf{W}(\mathscr{F}))$ au lieu de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{F}), \mathbb{V}(\mathscr{E}))$ (cf. I, 4.6.3) et simplifié l'original en tenant compte de l'ajout 11.0 (b).

[109] N.D.E. : On a simplifié l'original, qui utilisait l'isomorphisme $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}'), \mathbf{W}(\mathscr{E})) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{E}), \mathbb{V}(\mathscr{E}'))$ puis l'inclusion du terme de droite dans

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathbb{V}(\mathscr{E}), \mathbb{V}(\mathscr{E}')) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\big(\mathscr{E}', f_*f^*(\mathrm{Sym}(\mathscr{E}))\big)$$

et appliquait EGA III, 4.1.15 à $\mathbb{V}(\mathscr{E}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(\mathscr{E}))$ pour en déduire 11.0 (b).

[110] N.D.E. : On a détaillé 11.6, et mis en évidence les résultats obtenus sous la forme de la Proposition 11.6.1.

Or, d'après 11.4, se donner un morphisme de S-*foncteurs* $\rho : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}))$ équivaut à se donner un élément θ de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathrm{G}}(f^*(\mathscr{E}), f^*(\mathscr{E}))$, qui correspond par adjonction à un élément δ de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\mathscr{E}, f_*f^*(\mathscr{E}))$, où l'on a noté f la projection $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$.

Soient $m : \mathrm{G} \times_\mathrm{S} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ la multiplication, δ_G le morphisme $\mathscr{O}_\mathrm{G} \to m_*(\mathscr{O}_{\mathrm{G}\times_\mathrm{S}\mathrm{G}})$, et ϕ la projection $\mathrm{G} \times_\mathrm{S} \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ (qui égale $f \circ m$). Il est commode de noter $\boxtimes$ le produit tensoriel « externe », on obtient ainsi un morphisme

$$\mathrm{id}_\mathscr{E} \boxtimes \delta_\mathrm{G} : \quad f^*(\mathscr{E}) = \mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_\mathrm{G} \longrightarrow \mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} m_*(\mathscr{O}_{\mathrm{G}\times\mathrm{G}})$$

et par abus de notation, on notera encore $\mathrm{id}_\mathscr{E} \boxtimes \delta_\mathrm{G}$ la composée du morphisme précédent avec le morphisme canonique $\mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} m_*(\mathscr{O}_{\mathrm{G}\times\mathrm{G}}) \to m_*m^*f^*(\mathscr{E}) = m_*\phi^*(\mathscr{E})$.

D'autre part, désignons par $h : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ une seconde copie de $f : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ et considérons le diagramme commutatif suivant, où p, q désignent les deux projections :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times_\mathrm{S} \mathrm{G} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\phi"] & \mathrm{G} \arrow[d, "h"] \\
\mathrm{G} \arrow[r, "f"'] & \mathrm{S}.
\end{tikzcd}$$

Notant encore δ le morphisme $\mathscr{E} \to h_*h^*(\mathscr{E})$, on obtient le morphisme

$$\delta \boxtimes \mathrm{id}_{\mathscr{O}_\mathrm{G}} : \quad f^*(\mathscr{E}) = \mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_\mathrm{G} \longrightarrow h_*h^*(\mathscr{E}) \boxtimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_\mathrm{G} = f^*h_*h^*(\mathscr{E})$$

et par abus nous noterons encore $\delta \boxtimes \mathrm{id}_{\mathscr{O}_\mathrm{G}}$ la composée de ce morphisme avec le morphisme canonique $f^*h_*h^*(\mathscr{E}) \to p_*\phi^*(\mathscr{E})$.

Alors la condition que ρ soit compatible à la multiplication équivaut à dire que, pour tout ouvert U de S, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$(1) \qquad \begin{tikzcd}
\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{E}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & \Gamma(\mathrm{U} \times_\mathrm{S} \mathrm{G}, \mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_\mathrm{G}) \arrow[d, "\mathrm{id}_\mathscr{E} \boxtimes \delta_\mathrm{G}"] \\
\Gamma(\mathrm{U} \times_\mathrm{S} \mathrm{G}, \mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_\mathrm{G}) \arrow[r, "\delta \boxtimes \mathrm{id}_{\mathscr{O}_\mathrm{G}}"] & \Gamma(\mathrm{U} \times_\mathrm{S} \mathrm{G} \times_\mathrm{S} \mathrm{G}, \mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_\mathrm{G} \boxtimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_\mathrm{G}).
\end{tikzcd}$$

Par ailleurs, la section unité $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ induit un morphisme u de $\mathscr{O}_\mathrm{G}$ vers $\varepsilon_*\varepsilon^*(\mathscr{O}_\mathrm{G}) = \varepsilon_*(\mathscr{O}_\mathrm{S})$, et la condition que ρ préserve les éléments unité équivaut à la commutativité du diagramme :

$$(2) \qquad \begin{tikzcd}
\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{E}) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \Gamma(\mathrm{U} \times_\mathrm{S} \mathrm{G}, \mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_\mathrm{G}) \arrow[dl, "\mathrm{id}_\mathscr{E} \boxtimes u"] \\
& \Gamma(\mathrm{U} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}, \mathscr{E} \boxtimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_\mathrm{S}). &
\end{tikzcd}$$

On voit donc que se donner sur $\mathscr{E}$ une structure de G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module équivaut à se donner un morphisme de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules $\delta : \mathscr{E} \to f_*f^*(\mathscr{E})$ vérifiant les conditions (1) et (2) ci-dessus, et dans ce cas le morphisme $\theta : f^*(\mathscr{E}) \to f^*(\mathscr{E})$, déduit de δ par adjonction, est un isomorphisme (car il correspond à l'isomorphisme $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathbf{W}(\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathbf{W}(\mathscr{E})$ défini ensemblistement par $(g, x) \mapsto (g, gx)$, voir aussi I, 6.5.4).

Supposons maintenant que G soit *plat, quasi-compact et quasi-séparé* sur S, et que $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ soit un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module *plat* ; alors, d'après 11.1 (c), le morphisme canonique $\mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) \to \mathscr{A}(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G})$ est un isomorphisme, et le morphisme $\delta_{\mathrm{G}} : \mathscr{A}(\mathrm{G}) \to \mathscr{A}(\mathrm{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G})$ sera noté Δ.

Si de plus $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G}) = f_* f^*(\mathscr{E})$ (ce qui est le cas, d'après 11.5, si $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ est affine, ou si $\mathscr{E}$ est plat sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$), on obtient que les conditions (1) et (2) équivalent aux conditions ci-dessous, qui expriment que $\delta : \mathscr{E} \to \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G})$ fait de $\mathscr{E}$ un $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule à droite (cf. I 4.7.2) :

(CM 1) Posant $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{A} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathscr{E}} \otimes \Delta"] \\
\mathscr{E} \otimes \mathscr{A} \arrow[r, "\delta \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{A}}"] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}.
\end{tikzcd}$$

(CM 2) Notant $\eta : \mathscr{A} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ le morphisme $\mathscr{A}(\varepsilon)$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E} \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \mathscr{E} \otimes \mathscr{A} \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathscr{E}} \otimes \eta"] \\
& \mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}}. &
\end{tikzcd}$$

Remarque 11.6.A. — Rappelons qu'on note $\mathbb{V}(\mathscr{E})$ la fibration vectorielle sur S qui représente le foncteur $\mathbf{V}(\mathscr{E})$, i.e. pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathbb{V}(\mathscr{E})(\mathrm{S}') = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{E}_{\mathrm{S}'}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$. Comme on a, d'après I, 4.6.2, un *anti-isomorphisme* de S-foncteurs en monoïdes $\underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E})) \simeq \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{E}))$, on voit que si $\mathscr{E}$ est un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module à gauche, on a une action à droite $\mu : \mathbb{V}(\mathscr{E}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathbb{V}(\mathscr{E})$ de G sur $\mathbb{V}(\mathscr{E})$, définie ensemblistement par $(\phi g)(x) = \phi(gx)$, pour tout $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$, $x \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{E}_{\mathrm{S}'})$ et $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{E}_{\mathrm{S}'}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$. On
399 obtient donc des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}(\mathscr{E}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[r, "\mu \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{V}(\mathscr{E})} \times m"'] & \mathbb{V}(\mathscr{E}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathbb{V}(\mathscr{E}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[r, "\mu"] & \mathbb{V}(\mathscr{E})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{V}(\mathscr{E}) & \mathbb{V}(\mathscr{E}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[l, "\mu"'] \\
& \mathbb{V}(\mathscr{E}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}. \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathbb{V}(\mathscr{E})} \times \varepsilon"']
\end{tikzcd}$$

Lorsque G est plat, quasi-compact et quasi-séparé sur S, que $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module plat, et que l'une des conditions de 11.5 est vérifiée, on retrouve de même les conditions (CM 1) et (CM2).

Par conséquent, on a obtenu :

Proposition 11.6.1. — *Soit* G *un* S-*groupe* plat, quasi-compact et quasi-séparé *sur* S*, tel que* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ *soit un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module* plat*, et soit* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module quasi-cohérent.*

(i) *Il revient au même de se donner une structure de* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$*-comodule* $\delta : \mathscr{E} \to \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G})$ *ou une structure de* G_{af}*-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module sur* $\mathscr{E}$ *(i.e. une opération* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-linéaire de* G_{af} *sur* $\mathscr{E}$*). Par composition avec le morphisme de* S*-groupes* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$*, ceci définit une structure de* G*-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module sur* $\mathscr{E}$*.*

(ii) *Si de plus* $\mathscr{E}$ *est* plat*, toute opération* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-linéaire de* G *sur* $\mathscr{E}$ *se factorise à travers* G_{af} *et correspond à une unique structure de* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$*-comodule sur* $\mathscr{E}$*.*

Lemme 11.7. — *Soit* G *un* S*-groupe* plat, quasi-compact et quasi-séparé *sur* S, *tel que* $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$ *soit un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module* plat. *Soient* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module quasi-cohérent,* $\delta : \mathscr{E} \to \mathscr{E} \otimes \mathscr{A}$ *une structure de* $\mathscr{A}$*-comodule, et* $\rho : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbf{W}(\mathscr{E}))$ *l'opération de* G *sur* $\mathscr{E}$ *associée.* 400

Soit $\mathscr{E}_0$ *un sous-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module quasi-cohérent de* $\mathscr{E}$ *tel que la restriction* δ_0 *de* μ *à* $\mathscr{E}_0$ *se factorise à travers* $\mathscr{E}_0 \to \mathscr{E}_0 \otimes \mathscr{A}$*, i.e. tel qu'on ait un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\delta_0"'] & \mathscr{E} \arrow[d, "\delta"] \\ \mathscr{E}_0 \otimes \mathscr{A} \arrow[r, hook] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{A} \end{tikzcd} \quad .$$

(N. B. Le morphisme $\mathscr{E}_0 \otimes \mathscr{A} \to \mathscr{E} \otimes \mathscr{A}$ *est injectif, puisque* $\mathscr{A}$ *est plat sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*.)*

Alors δ_0 *fait de* $\mathscr{E}_0$ *un* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$*-comodule, donc définit une opération* ρ_0 *de* G *sur* $\mathscr{E}_0$ (qu'on appellera *opération induite* sur $\mathscr{E}_0$ par ρ, et on dira que $\mathscr{E}_0$ est *stable* sous ρ).

Cela résulte immédiatement des définitions et de 11.6. On remarquera cependant qu'en général l'application canonique $\mathbf{W}(\mathscr{E}_0) \to \mathbf{W}(\mathscr{E})$ n'est pas un monomorphisme.

Remarque 11.7.bis. — (111) Soient G un S-groupe *plat* et $\mathscr{E}$ un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. Notons f le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ et δ le morphisme $\mathscr{E} \to f_* f^*(\mathscr{E})$ défini en 11.6. Soit $\mathscr{E}_0$ un sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent de $\mathscr{E}$; comme f est plat, alors $f_* f^*(\mathscr{E}_0)$ est un sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module de $f_* f^*(\mathscr{E})$, et de même pour $\phi = f \times f$. Par conséquent, si la restriction δ_0 de δ à $\mathscr{E}_0$ se factorise à travers $f_* f^*(\mathscr{E}_0)$, alors elle fait de $\mathscr{E}_0$ un G-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module. Dans ce cas, on dira que $\mathscr{E}_0$ est un sous-module G-*stable* de $\mathscr{E}$.

Définition 11.8.0. — (112) Soit S un schéma. Une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*cogèbre* est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{C}$ muni de deux morphismes de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\Delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C} \otimes \mathscr{C}$ et $\varepsilon : \mathscr{C} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, vérifiant les deux axiomes suivants (cf. I 4.2) :

(111) N.D.E. : On a ajouté cette remarque, qui généralise 11.7 et sera utile en 11.10.bis.

(112) N.D.E. : Les énoncés 11.8 et 11.9 portant uniquement sur la notion de comodule sur une cogèbre, on a introduit la définition 11.8.0 et reformulé 11.8 et 11.9 en conséquence.

(CO 1) Δ *est co-associatif* : le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{C}\otimes\mathscr{C} \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] & \\
\mathscr{C} \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathscr{C}\otimes\mathscr{C}\otimes\mathscr{C} \\
 & \mathscr{C}\otimes\mathscr{C} \arrow[ur, "\Delta\otimes\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

(CO 2) : ε est une *coünité*, i.e. les deux composés suivants sont l'identité

$$\mathscr{C} \xrightarrow{\Delta} \mathscr{C}\otimes\mathscr{C} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varepsilon} \mathscr{C}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C} \quad ,$$
$$\mathscr{C} \xrightarrow{\Delta} \mathscr{C}\otimes\mathscr{C} \xrightarrow{\varepsilon\otimes\mathrm{id}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}}\otimes\mathscr{C} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C} \quad .$$

Un $\mathscr{C}$-*comodule* (à droite) est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{E}$ muni d'un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mu : \mathscr{E} \to \mathscr{E}\otimes\mathscr{C}$ vérifiant les axiomes (CM 1) et (CM 2) de 11.6.

On dira que $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{E}$) est une cogèbre quasi-cohérente (resp. un comodule quasi-cohérent) si c'est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent.

Soient A un anneau commutatif et C une A-cogèbre, alors $\mathrm{C}^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{C}, \mathrm{A})$ est une A-algèbre. On notera ev l'application naturelle d'évaluation $\mathrm{C}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{C}^\vee \to \mathrm{A}$.

Lemme 11.8. — *Soient* C *une* A-*cogèbre,* V *un* C-*comodule,* M *un sous-*A-*module de* V. *On suppose que* C *est un* A-*module* projectif. [113] *Soit* $c(\mathrm{M})$ *l'image du morphisme de* A-*modules*

$$\theta : \quad \mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{C}^\vee \xrightarrow{\mu\otimes\mathrm{id}} \mathrm{V}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{C}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{C}^\vee \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}} \mathrm{V}.$$

Alors, $c(\mathrm{M})$ *est le* plus petit sous-comodule de V contenant M*, et est un* A-*module* de type fini *si* M *l'est. On dira que* $c(\mathrm{M})$ *est le sous-comodule* engendré *par* M.

De plus, pour tout morphisme d'anneaux $\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$*, si on note* M' *l'image de* $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ *dans* $\mathrm{V}' = \mathrm{V}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$*, alors* $c(\mathrm{M}')$ *est l'image de* $c(\mathrm{M})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ *dans* V'*, donc :* « la formation de $c(\mathrm{M})$ commute au changement de base ».

D'abord, $\mathrm{M}\subset c(\mathrm{M})$ d'après (CM 2), et si N est un sous-comodule de V contenant M, on a $\mu(\mathrm{M})\subset \mathrm{N}\otimes\mathrm{C}$ et donc $c(\mathrm{M})\subset\mathrm{N}$.

Par hypothèse, C est facteur direct d'un A-module libre L, de base $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Notons φ_i la restriction à C de la forme linéaire e_i^*, définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Soit $x\in\mathrm{M}$. On peut écrire :

(1) $$\mu(x) = \sum_{i\in\mathrm{J}} x_i\otimes e_i,$$

[113] N.D.E. : Dans l'original, il est supposé que C est un A-module *libre*, la généralisation au cas où C est un A-module projectif, signalée par J.-P. Serre, étant mentionnée dans la remarque 11.10.1. On a inclus cette généralisation ici et dans 11.9, et détaillé les démonstrations en conséquence.

où $x_i \in \mathrm{V}$ et J est un sous-ensemble fini de I. Alors $x_i = \theta(x\otimes\varphi_i)$ appartient à $c(\mathrm{A}x)$, et l'on a donc $c(\mathrm{A}x) = \sum_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{A}x_i$. Comme C est facteur direct de L, disons $\mathrm{L} = \mathrm{C}\oplus\mathrm{R}$, d'où $\mathrm{V}\otimes\mathrm{L} = (\mathrm{V}\otimes\mathrm{C})\oplus(\mathrm{V}\otimes\mathrm{R})$, on obtient que

$$(c(\mathrm{A}x)\otimes\mathrm{L})\bigcap(\mathrm{V}\otimes\mathrm{C}) = c(\mathrm{A}x)\otimes\mathrm{C}.$$

Par conséquent, $\mu(x)$ peut aussi s'écrire sous la forme

$$\mu(x) = \sum_{j\in\mathrm{J}} x_j\otimes b_j, \tag{2}$$

avec $b_j \in \mathrm{C}$. On peut écrire $\Delta(b_j) = \sum_{i\in\mathrm{I}} b_{ij}\otimes e_i$, avec $b_{ij}\in\mathrm{C}$. Alors, en appliquant $\mu\otimes\mathrm{id}$ à (1) (resp. $\mathrm{id}\otimes\Delta$ à (2)) et en utilisant l'axiome (CM 1), on obtient, pour tout $i\in\mathrm{J}$:

$$\mu(x_i) = \sum_{j\in\mathrm{J}} x_j\otimes b_{ij} \in c(\mathrm{A}x)\otimes\mathrm{C}.$$

Ceci montre que $c(\mathrm{M})$ est un sous-comodule de V, et c'est donc le plus petit sous-comodule de V contenant M.

Il est clair que $c(\mathrm{M})$ est un A-module de type fini si M l'est : si $\mathrm{M} = \mathrm{A}x_1+\cdots+\mathrm{A}x_n$, et $\mu(x_k) = \sum_i x_{ik}\otimes e_i$, alors $c(\mathrm{M})$ est engendré par les x_{ik}, pour $k = 1,\dots,n$ et i parcourant un sous-ensemble fini de I.

Enfin, soit $\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$ un morphisme d'anneaux et soit M' l'image de $\mathrm{M}\otimes\mathrm{A}'$ dans $\mathrm{V}' = \mathrm{V}\otimes\mathrm{A}'$. Alors $c(\mathrm{M}')$ (resp. l'image de $c(\mathrm{M})\otimes\mathrm{A}'$ dans V') est l'image du morphisme θ' ci-dessous (resp. du composé $\theta'\circ\tau$) :

$$\mathrm{M}\otimes\mathrm{A}'\otimes\mathrm{C}^\vee \xrightarrow{\ \tau\ } \mathrm{M}\otimes\mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{C},\mathrm{A}') \xrightarrow{\ \theta'\ } \mathrm{V}'.$$

Or, ces deux morphismes ont même image. En effet, soient $\psi\in\mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{C},\mathrm{A}')$ et $x\in\mathrm{M}$. Posons $\mu(x) = \sum_{i\in\mathrm{J}} x_i\otimes e_i$. Alors

$$\theta'(x\otimes\psi) = \sum_{i\in\mathrm{J}} \psi(e_i)x_i$$

est l'image par $\theta'\circ\tau$ de l'élément $\sum_{i\in\mathrm{J}} x\otimes\psi(e_i)\otimes\varphi_i$ de $\mathrm{M}\otimes\mathrm{A}'\otimes\mathrm{C}^\vee$. Ceci prouve le lemme.

Par ailleurs, on a la proposition suivante :

Proposition 11.8.bis. — [114] *Soient* A *un anneau* noethérien*,* C *une* A*-cogèbre* plate *sur* A*,* V *un* C*-comodule, et* M *un sous-*A*-module* de type fini *de* V*. Alors il existe un sous-comodule* W *de* V*, de type fini sur* A*, contenant* M*.*

En effet, comme M est de type fini, il en est de même de $\Delta_\mathrm{V}(\mathrm{M})$, donc il existe un sous-A-module de type fini M' de V tel que $\Delta_\mathrm{V}(\mathrm{M})\subset\mathrm{M}'\otimes_\mathrm{A}\mathrm{C}$. Soient π la projection $\mathrm{V}\to\mathrm{V}/\mathrm{M}'$ et $\overline{\Delta}_\mathrm{V} = (\pi\otimes\mathrm{id}_\mathrm{C})\Delta_\mathrm{V}$, et soit

$$\mathrm{W} = \{x\in\mathrm{V}\mid \Delta_\mathrm{V}(x)\in\mathrm{M}'\otimes_\mathrm{A}\mathrm{C}\} = \mathrm{Ker}\,\overline{\Delta}_\mathrm{V}\,;$$

c'est un sous-A-module de V contenant M et contenu dans M' (puisque $x = (\mathrm{id}_\mathrm{V}\otimes\varepsilon)\Delta_\mathrm{V}(x)$), donc de type fini sur A. De plus, $(\overline{\Delta}_\mathrm{V}\otimes\mathrm{id}_\mathrm{C})\Delta_\mathrm{V} = (\pi\otimes\Delta_\mathrm{C})\Delta_\mathrm{V}$

[114] N.D.E. : On a ajouté cette proposition, tirée de [**Se68**], § 1.5, Prop. 2.

s'annule sur W, i.e. $\Delta_{\mathrm{V}}(\mathrm{W})$ est contenu dans le noyau K de $(\overline{\Delta}_{\mathrm{V}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{C}})$. Mais comme C est plate sur A, on a $\mathrm{K} = \mathrm{W} \otimes \mathrm{C}$, donc W est un sous-comodule de V.

Lemme 11.8.1. — [115] *Soient* C *une* A*-cogèbre,* V *un* C*-comodule,* M *un sous-*A*-module de* V*, et* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ *un morphisme d'anneaux* fidèlement plat*. On suppose que* $\mathrm{C}' = \mathrm{C} \otimes \mathrm{A}'$ *est un* A'*-module* projectif*.*

(i) *Alors il existe un* plus petit sous-comodule $t(\mathrm{M})$ *de* V contenant M*, et* $t(\mathrm{M})$ *est un* A*-module* de type fini *si* M *l'est. De plus, «* la formation de $t(\mathrm{M})$ commute au changement de base *».*

(ii) *Plus précisément,* C *est un* A*-module projectif, et l'on a* $t(\mathrm{M}) = c(\mathrm{M})$*.*

Démonstration. (ii) D'après [**RG71**] (voir la proposition 11.8.2 ci-dessous), C est un A-module projectif. On peut donc appliquer le lemme 11.8 : $c(\mathrm{M})$ est le plus petit sous-comodule de V contenant M, c'est un A-module de type fini si M l'est, et sa formation commute au changement de base.

Pour éviter un anachronisme ([**RG71**] étant postérieur à SGA 3), esquissons une démonstration directe du point (i). Comme $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ est plat, $\mathrm{M}' = \mathrm{M} \otimes \mathrm{A}'$ est un sous-A'-module de $\mathrm{V}' = \mathrm{V} \otimes \mathrm{A}'$, et, puisque C' est un A'-module projectif, $c(\mathrm{M}')$ est le plus petit sous-comodule de V' contenant M'. Notons $\mathrm{V}' \otimes \mathrm{A}'$ et $\mathrm{A}' \otimes \mathrm{V}'$ les deux structures de $\mathrm{A}' \otimes \mathrm{A}'$-comodule sur $\mathrm{V}'' = \mathrm{V}' \otimes_{\mathrm{A}'} (\mathrm{A}' \otimes \mathrm{A}')$ obtenues par les deux changements de base $\mathrm{A}' \rightrightarrows \mathrm{A}' \otimes \mathrm{A}'$, $a' \mapsto a' \otimes 1$ et $a' \mapsto 1 \otimes a'$. Le A'-comodule V' est muni d'un isomorphisme de $\mathrm{A}' \otimes \mathrm{A}'$-comodules $\phi : \mathrm{V}' \otimes \mathrm{A}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{A}' \otimes \mathrm{V}'$, $(x \otimes a') \otimes b' \mapsto b' \otimes (x \otimes a')$, qui est une donnée de descente, i.e. , qui vérifie $\phi_{31} = \phi_{32} \circ \phi_{21}$.

Comme $\mathrm{M}' = \mathrm{M} \otimes \mathrm{A}'$, alors ϕ envoie $\mathrm{M}' \otimes \mathrm{A}'$ sur $\mathrm{A}' \otimes \mathrm{M}'$, et donc $c(\mathrm{M}' \otimes \mathrm{A}')$ sur $c(\mathrm{A}' \otimes \mathrm{M}')$. Comme la formation de $c(\mathrm{M}')$ commute au changement de base, on a $c(\mathrm{M}' \otimes \mathrm{A}') = c(\mathrm{M}') \otimes \mathrm{A}'$ et $c(\mathrm{A}' \otimes \mathrm{M}') = \mathrm{A}' \otimes c(\mathrm{M}')$. On a donc

$$\phi(c(\mathrm{M}') \otimes \mathrm{A}') = \mathrm{A}' \otimes c(\mathrm{M}')$$

et il en résulte que ϕ munit $c(\mathrm{M}')$ d'une donnée de descente. Par descente (fpqc), il existe un unique sous-comodule $t(\mathrm{M})$ de V tel que $c(\mathrm{M}') = t(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{A}'$, et $t(\mathrm{M})$ contient M puisque $t(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{A}'$ contient M'. De plus, si N est un sous-comodule de V contenant M, alors N contient $t(\mathrm{M})$, puisque $\mathrm{N} \otimes \mathrm{A}'$ contient $c(\mathrm{M}') = t(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{A}'$. Donc $t(\mathrm{M})$ est le plus petit sous-comodule de V contenant M.

Enfin, soit $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un morphisme d'anneaux. Soit $\mathrm{B}' = \mathrm{B} \otimes \mathrm{A}'$ et soit M_{B} (resp. $\mathrm{M}'_{\mathrm{B}'}$) l'image de $\mathrm{M} \otimes \mathrm{B}$ dans $\mathrm{V}_{\mathrm{B}} = \mathrm{V} \otimes \mathrm{B}$ (resp. de $\mathrm{M}' \otimes_{\mathrm{A}'} \mathrm{B}'$ dans $\mathrm{V} \otimes \mathrm{B}'$) ; alors $\mathrm{M}_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{B}' = \mathrm{M}'_{\mathrm{B}'}$. D'une part, la construction précédente, appliquée à C_{B} et au morphisme $\mathrm{B} \to \mathrm{B}'$, donne :

$$c(\mathrm{M}_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{B}') = t(\mathrm{M}_{\mathrm{B}}) \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{B}' = t(\mathrm{M}_{\mathrm{B}}) \otimes \mathrm{A}'.$$

D'autre part, comme la formation de $c(\mathrm{M}')$ commute au changement de base, $c(\mathrm{M}'_{\mathrm{B}'})$ est l'image dans $\mathrm{V}' \otimes_{\mathrm{A}'} \mathrm{B}' = \mathrm{V} \otimes \mathrm{B} \otimes \mathrm{A}'$ de

$$c(\mathrm{M}') \otimes_{\mathrm{A}'} \mathrm{B}' = t(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{B} \otimes \mathrm{A}'.$$

Il en résulte que $t(\mathrm{M}_{\mathrm{B}})$ est l'image dans V_{B} de $t(\mathrm{M}) \otimes \mathrm{B}$.

---

[115] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, qui est utilisé dans la démonstration de 11.9.

Proposition 11.8.2 (Gruson–Raynaud). — *Soit* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ *un morphisme* fidèlement plat*, alors* f *«* descend la projectivité *», i.e. si* M *est un* A*-module et si* $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$ *est un* A'*-module projectif, alors* M *est un* A*-module projectif.*

En effet, d'après [**RG71**] II 2.5.1, f « descend la condition de Mittag-Leffler » donc, d'après *loc. cit.* II 3.1.3, f descend la projectivité. [116]

Proposition 11.9. — [117] *Soient* $\mathscr{C}$ *une* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-cogèbre,* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{C}$*-comodule,* $\mathscr{F}$ *un sous-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module de* $\mathscr{E}$*, tous quasi-cohérents. On suppose donné un recouvrement de* S *par des ouverts affines* $\mathrm{U}_\alpha = \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}_\alpha$ *, et pour chaque* α*, un morphisme d'anneaux* $\mathrm{A}_\alpha \to \mathrm{A}'_\alpha$ fidèlement plat *tel que* $\Gamma(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{C}) \otimes_{\mathrm{A}_\alpha} \mathrm{A}'_\alpha$ *soit un* A'_α*-module* projectif. (*) 401

Il existe alors un plus petit sous-comodule quasi-cohérent $t(\mathscr{F})$ *de* $\mathscr{E}$ *contenant* $\mathscr{F}$*, et* $t(\mathscr{F})$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module de type fini si* $\mathscr{F}$ *l'est. De plus, pour tout changement de base* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$*, si on note* $\mathscr{F}'$ *l'image de* $\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ *dans* $\mathscr{E}' = \mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$*, alors* $t(\mathscr{F}')$ *est l'image de* $t(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ *dans* $\mathscr{E}'$*, i.e. «* la formation de $t(\mathscr{F})$ commute au changement de base *».*

Démonstration. [117] Pour chaque α, le $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_\alpha}$-module $\mathcal{T}_\alpha$ associé au A_α-module $\mathrm{T}_\alpha = t(\Gamma(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{F}))$ est, d'après 11.8.1 (i), le plus petit sous-comodule quasi-cohérent de $\mathscr{E}|_{\mathrm{U}_\alpha}$ contenant $\mathscr{F}|_{\mathrm{U}_\alpha}$, et est un $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_\alpha}$-module de type fini si $\mathscr{F}|_{\mathrm{U}_\alpha}$ l'est.

Pour tout α, β, posons $\mathrm{U}_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta$. Comme la construction de $t(\mathrm{M})$ commute au changement de base, on a pour tout α, β des isomorphismes canoniques de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}$-modules

$$\phi_{\alpha\beta} : \quad \mathrm{T}_\beta \otimes_{\mathrm{A}_\beta} \mathscr{O}_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_\alpha \otimes_{\mathrm{A}_\alpha} \mathscr{O}_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}$$

qui vérifient la condition de cocycle $\phi'_{\alpha\gamma} = \phi'_{\alpha\beta} \circ \phi'_{\beta\gamma}$, où $\phi'_{\alpha\gamma}$ (resp. $\cdots$) désigne la restriction de $\phi_{\alpha\gamma}$ (resp. $\cdots$) à $\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta \cap \mathrm{U}_\gamma$.

Par conséquent, les $\mathcal{T}_\alpha$ se recollent en un sous-comodule quasi-cohérent $t(\mathscr{F})$ de $\mathscr{E}$ contenant $\mathscr{F}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $t(\mathscr{F})$ est le plus petit sous-comodule quasi-cohérent de $\mathscr{E}$ contenant $\mathscr{F}$, et que sa formation commute au changement de base.

Définition 11.9.1. — [118] Soient S un schéma et $\mathscr{P}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout ouvert affine U de S, $\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{P})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U})$-module projectif.

(*) C'est le cas par exemple lorsque $\mathscr{C} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$, où G est un S-groupe réductif, comme nous le verrons dans l'Exp. XXII 5.7.8.

(116) N.D.E. : Signalons au passage que l'assertion II 2.5.2 de *loc. cit.*, plus générale que II 2.5.1, est corrigée dans l'article [**Gr73**] (ceci n'affectant pas le cas des morphismes fidèlement plats).

(117) N.D.E. : Comme signalé dans la N.D.E. (112), on a récrit l'énoncé pour une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-cogèbre $\mathscr{C}$ (plutôt que pour un S-groupe G vérifiant les hypothèses indiquées dans le corollaire 11.10). D'autre part, on a détaillé la démonstration (l'original indiquait : « $(\cdots)$ la proposition est conséquence du lemme 11.8. »).

(118) N.D.E. : On a ajouté cette définition, tirée de [**RG71**], bas de la p. 82. Ainsi, dans la proposition 11.9, l'hypothèse est que la cogèbre $\mathscr{C}$ soit un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement projectif, et l'on a utilisé cette terminologie dans le corollaire 11.10.

(ii) Il existe un recouvrement (U_α) de S par des ouverts affines, tel que chaque $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{P})$ soit un $\mathscr{O}_S(U_\alpha)$-module projectif.

(iii) Il existe un recouvrement (U_α) de S par des ouverts affines, et des morphisme d'anneaux $A_\alpha = \mathscr{O}_S(U_\alpha) \to A'_\alpha$ *fidèlement plats*, tels que, pour chaque α, $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{P}) \otimes_{A_\alpha} A'_\alpha$ soit un A'_α-module projectif.

En effet, il est clair que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Réciproquement, si (iii) est vérifié, 11.8.2 entraîne que chaque $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{P})$ est un $\mathscr{O}_S(U_\alpha)$-module projectif, d'où (ii). Enfin, supposons (ii) vérifié et soit $V = \operatorname{Spec} A$ un ouvert affine arbitraire ; il est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines $V_1, \dots, V_n$, où chaque $V_i = \operatorname{Spec} A_i$ est contenu dans au moins un $V \cap U_\alpha$, de sorte que $\Gamma(V_i, \mathscr{P})$ est un A_i-module projectif. Soit $A' = A_1 \times \cdots \times A_n$, alors $A \to A'$ est fidèlement plat et $\Gamma(V, \mathscr{P}) \otimes_A A'$ est un A'-module projectif. Donc, d'après 11.8.2, $\Gamma(V, \mathscr{P})$ est un A-module projectif.

Lorsque ces conditions équivalentes sont vérifiées, on dit que $\mathscr{P}$ est un $\mathscr{O}_S$-module *localement projectif.*

Corollaire 11.10. — *Soient* S *un schéma* quasi-compact et quasi-séparé*,* G *un* S-*groupe, et* ρ *une opération linéaire de* G *sur un* $\mathscr{O}_S$*-module quasi-cohérent* $\mathscr{E}$*. On suppose que :*

(i) G *vérifie l'une des conditions suivantes :*

a) G *est* affine et plat *sur* S*,*

b) G *est* plat, quasi-compact et quasi-séparé *sur* S*, et* $\mathscr{E}$ *est* plat *;*

(ii) $\mathscr{A}(G)$ *est un* $\mathscr{O}_S$*-module* localement projectif.

Alors $\mathscr{E}$ *est limite inductive d'une famille filtrante croissante de sous-*$\mathscr{O}_S$*-modules* quasi-cohérents de type fini *de* $\mathscr{E}$*,* stables *sous* G.

D'après l'hypothèse (i) et 11.6.1, $\mathscr{E}$ est muni d'une structure de $\mathscr{A}(G)$-comodule. D'autre part, comme S est quasi-compact et quasi-séparé, $\mathscr{E}$ est limite inductive de ses sous-modules quasi-cohérents de type fini (EGA I, 9.4.9 et EGA IV_1, 1.7.7). Par conséquent, le corollaire découle de la proposition 11.9, appliquée à la cogèbre $\mathscr{A}(G)$.

Par ailleurs, on a la proposition suivante :

Proposition 11.10.bis. — [119] *Soient* S *un schéma* noethérien*,* G *un* S*-groupe* plat, quasi-compact et quasi-séparé *sur* S*,* $\mathscr{E}$ *un* G-$\mathscr{O}_S$*-module quasi-cohérent,* $\mathscr{M}$ *un sous-*$\mathscr{O}_S$*-module* cohérent *de* $\mathscr{E}$*. Alors* $\mathscr{M}$ *est contenu dans un sous-*$\mathscr{O}_S$*-module* cohérent stable sous G.

Démonstration. Notons f le morphisme $G \to S$ et τ le morphisme d'adjonction $\mathscr{E} \to f_* f^*(\mathscr{E})$. D'après 11.6, la structure de G-$\mathscr{O}_S$-module sur $\mathscr{E}$ est donnée par un automorphisme θ du $\mathscr{O}_G$-module $f^*(\mathscr{E})$, tel que le morphisme $\delta = \theta \circ \tau$ vérifie les conditions (1) et (2) de 11.6. (La situation envisagée dans [**Th87**] est plus générale, en

[119] N.D.E. : On a ajouté cette proposition, qui est un cas particulier de [**Th87**], 1.4–1.5. L'auteur y fait référence à un argument de Deligne (cf. [**Kn71**], III Th. 1.1) ; on peut aussi noter la similarité avec l'argument de Serre ([**Se68**], Prop. 2) rappelé en 11.8.bis.

ce que l'auteur considère un G-schéma X et un $\mathscr{O}_X$-module G-équivariant $\mathscr{E}$ (cf. Exp. I, Section 6) ; ici X = S muni de l'action triviale de G.)

Comme S est noethérien, $\mathscr{E}$ est la limite inductive filtrante de ses sous-modules cohérents $\mathscr{F}_\alpha$ (cf. EGA I, 9.4.9). Alors $f^*(\mathscr{E})$ est la limite inductive filtrante des $f^*(\mathscr{F}_\alpha)$, qui sont des sous-modules de $f^*(\mathscr{E})$ puisque f est plat. Comme, de plus, f est quasi-compact et quasi-séparé alors, d'après 11.0, le $\mathscr{O}_S$-module $f_*f^*(\mathscr{E})$ est quasi-cohérent et est la limite inductive filtrante des sous-modules quasi-cohérents $f_*f^*(\mathscr{F}_\alpha)$. Par conséquent, $\mathscr{E}$ est la limite inductive filtrante des sous-$\mathscr{O}_S$-modules quasi-cohérents $\mathscr{E}_\alpha$, où $\mathscr{E}_\alpha$ désigne l'image réciproque par δ de $f_*f^*(\mathscr{F}_\alpha)$, i.e. le noyau du morphisme composé

$$\overline{\delta}_\alpha : \quad \mathscr{E} \xrightarrow{\delta} f_*f^*(\mathscr{E}) \longrightarrow f_*f^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha) .$$

Comme $\mathscr{M}$ est cohérent et S noethérien, toute suite croissante de sous-modules de $\mathscr{M}$ est stationnaire, donc $\mathscr{M}$ est contenu dans un certain $\mathscr{E}_\alpha$. Montrons que chaque $\mathscr{E}_\alpha$ est cohérent et G-stable.

Soit u le morphisme $f^*(\mathscr{E}) \to \varepsilon_*(\mathscr{E})$ correspondant par adjonction au morphisme identique de $\mathscr{E}$ vers $f_*\varepsilon_*(\mathscr{E}) = \mathscr{E}$, alors le morphisme composé

$$\mathscr{E} \xrightarrow{\tau} f_*f^*(\mathscr{E}) \xrightarrow{f_*(u)} f_*\varepsilon_*(\mathscr{E}) = \mathscr{E}$$

est l'identité (cf. 11.6 (2)). Comme on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}_\alpha \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i_\alpha"'] & f_*f^*(\mathscr{F}_\alpha) \arrow[r, "f_*(u)"] \arrow[d] & \mathscr{F}_\alpha \arrow[d, "j_\alpha"] \\
\mathscr{E} \arrow[r, "\tau"] & f_*f^*(\mathscr{E}) \arrow[r, "f_*(u)"] & \mathscr{E},
\end{tikzcd}$$

où i_α (resp. j_α) désigne l'inclusion de $\mathscr{E}_\alpha$ (resp. $\mathscr{F}_\alpha$) dans $\mathscr{E}$, on en déduit que i_α se factorise à travers j_α, i.e. $\mathscr{E}_\alpha$ est un sous-module de $\mathscr{F}_\alpha$, donc est cohérent.

Montrons enfin que $\mathscr{E}_\alpha$ est G-stable (cf. 11.7.bis). Désignons par $h : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ une seconde copie de $f : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ et considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\phi"] & \mathrm{G} \arrow[d, "h"] \\
\mathrm{G} \arrow[r, "f"'] & \mathrm{S}.
\end{tikzcd}$$

Alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}_\alpha \longrightarrow \mathscr{E} \xrightarrow{\overline{\delta}_\alpha} h_*h^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha)$$

donne, puisque f est plat, la suite exacte

$$(\dagger) \qquad 0 \longrightarrow f_*f^*(\mathscr{E}_\alpha) \longrightarrow f_*f^*(\mathscr{E}) \xrightarrow{f_*f^*(\overline{\delta}_\alpha)} f_*f^*h_*h^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha) .$$

De plus, comme h est quasi-compact et quasi-séparé, et f plat, le morphisme canonique

$$f^*h_*h^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha) \longrightarrow p_*q^*h^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha) = p_*\phi^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha)$$

est un isomorphisme, de sorte que le terme de droite dans (†) est $\phi_*\phi^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha)$. Reprenant les notations de 11.6 et notant π_α la projection $\mathscr{E} \to \mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha$, on obtient donc le diagramme commutatif ci-dessous, dont la ligne du bas est exacte :

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{E}_\alpha \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & f_*f^*(\mathscr{E}) \arrow[d, "f_*(f^*(\pi)\boxtimes\delta_{\mathrm{G}})"] \\
f_*f^*(\mathscr{E}_\alpha) \arrow[r] & f_*f^*(\mathscr{E}) \arrow[r, "f_*f^*(\overline{\delta}_\alpha)"] & \phi_*\phi^*(\mathscr{E}/\mathscr{F}_\alpha)
\end{tikzcd}$$

et comme $f_*(f^*(\pi) \boxtimes \delta_{\mathrm{G}}) \circ \delta$ s'annule sur $\mathscr{E}_\alpha$, il en résulte que δ envoie $\mathscr{E}_\alpha$ dans $f_*f^*(\mathscr{E}_\alpha)$, i.e. que $\mathscr{E}_\alpha$ est G-stable. La proposition est démontrée.

402 ***Remarque 11.10.1***. — [120] Dans 11.8, il n'est pas suffisant de supposer que C soit un A-module *plat*, même si A est un anneau principal. En effet, on a les contre-exemples suivants, qui nous ont été signalés (indépendamment) par O. Gabber et J.-P. Serre.

(a) Soient $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, et G le A-groupe « extension par zéro » du K-groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{K}}$. Alors le groupe constant $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{A}}$, et donc aussi son sous-groupe G, agit sur le A-module libre V de base v_1, v_2 en échangeant v_1 et v_2. Alors $\mathrm{A}v_1$ n'est pas un sous-G-module de V, mais c'est l'intersection des sous-G-modules $\mathrm{A}v_1 + \mathfrak{m}^n v_2$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donc il n'existe pas de plus petit sous-G-module de V contenant v_1.

(b) Soit A un anneau intègre, distinct de son corps des fractions K, et soit G le A-groupe affine et plat correspondant à l'algèbre de Hopf

$$\mathscr{A}(\mathrm{G}) = \{\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{T}] \mid \mathrm{P}(0) \in \mathrm{A}\},$$

la comultiplication, resp. la coünité et l'antipode, étant définies par $\Delta(\mathrm{T}) = \mathrm{T} \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{T}$, resp. $\varepsilon(\mathrm{T}) = 0$ et $\tau(\mathrm{T}) = -\mathrm{T}$. (N. B. On a donc $\mathrm{G} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K} = \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{K}}$.)

Soient V le A-module libre $\mathrm{A}v_1 \oplus \mathrm{A}v_2$ et u l'endomorphisme de V défini par $u(v_1) = v_2$, $u(v_2) = 0$, de sorte que $u^2 = 0$. Alors V est muni d'une structure de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule, définie par

$$\mu(m) = 1 \otimes m + \mathrm{T} \otimes u(m).$$

Les sous-G-modules de V contenant v_1 sont exactement les sous-A-modules de la forme $\mathrm{A}v_1 \oplus \mathrm{I}v_2$, pour I idéal non nul de A ; leur intersection est $\mathrm{A}v_1$, qui n'est pas un sous-G-module. Donc il n'existe pas de plus petit sous-G-module de V contenant v_1. (Remarquons de plus que $\mathrm{C} = \mathrm{A} \oplus \mathrm{K} \cdot \mathrm{T}$ est une sous-cogèbre de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$, plate sur A, et que la coaction $\mu : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G})$ se factorise par $\mathrm{V} \otimes \mathrm{C}$, donc on obtient aussi un contre-exemple pour la cogèbre « très simple » C.)

Enfin, remarquons que les deux exemples précédents sont des cas particuliers de la construction suivante. Soit A un anneau intègre, distinct de son corps des fractions K, soit B une A-algèbre de Hopf, libre sur A. Notons $\varepsilon : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ l'augmentation de

[120] N.D.E. : La première partie de la remarque 11.10.1 originelle a été incorporée dans 11.8 et 11.9 (en remplaçant « libre » par « projectif ») ; les contre-exemples ci-dessous corrigent la seconde partie.

B et $\mathrm{I} = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ l'idéal d'augmentation. Comme $\mathrm{B} = \mathrm{A}\cdot 1 \oplus \mathrm{I}$, on voit facilement que $\mathrm{B}' = \{b \in \mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K} \mid \varepsilon(b) \in \mathrm{A}\}$ est une sous-algèbre de Hopf de B_{K}. Si V est un B-comodule, libre de base $(v_1, \dots, v_n)$ comme A-module, et si $\mu_{\mathrm{V}}(v_1) \neq v_1 \otimes 1$, alors $\mathrm{A}v_1$ n'est pas un sous-comodule de V mais c'est l'intersection des sous-comodules $\mathrm{A}v_1 + \mathrm{I}\cdot\mathrm{V}$, pour I parcourant les idéaux non nuls de A. Donc il n'existe pas de plus petit sous-comodule de V contenant v_1.

Proposition 11.11. — *Soit* G *un groupe algébrique sur le corps k. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est affine.*

(ii) G *est quasi-affine.*

(iii) G *opère fidèlement sur un k-schéma* X *quasi-affine.*

(iv) G *opère linéairement et fidèlement sur un k-espace vectoriel* (*pas nécessairement de dimension finie*).

(v) G *est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un groupe* $\mathrm{GL}(n)_k$.

Démonstration. On a (i) ⇒ (ii) trivialement, et (ii) ⇒ (iii), car G opère fidèlement sur lui-même par translations.

Supposons que G opère fidèlement *à droite* sur un k-schéma X quasi-affine. [121] Comme X est quasi-affine, il est séparé et quasi-compact [122]. De même, G est séparé ($\mathrm{VI_A}$ 0.3) et quasi-compact (car de type fini sur k). Donc, d'après 11.1 (c), on a des isomorphismes canoniques :

$$\mathscr{O}(\mathrm{X}\times\mathrm{G}) = \mathscr{O}(\mathrm{X})\otimes\mathscr{O}(\mathrm{G}) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{O}(\mathrm{X}\times\mathrm{G}\times\mathrm{G}) = \mathscr{O}(\mathrm{X})\otimes\mathscr{O}(\mathrm{G})\otimes\mathscr{O}(\mathrm{G}).$$

On en déduit que le morphisme $\mu : \mathscr{O}(\mathrm{X}) \to \mathscr{O}(\mathrm{X})\otimes\mathscr{O}(\mathrm{G})$ induit par le morphisme $\mathrm{X}\times\mathrm{G}\to\mathrm{X}$ munit $\mathscr{O}(\mathrm{X})$ d'une structure de $\mathscr{O}(\mathrm{G})$-comodule à droite, i.e. G opère linéairement à gauche sur la k-algèbre $\mathscr{O}(\mathrm{X})$. Par conséquent, G opère aussi à droite sur l'enveloppe affine $\mathrm{X_{af}} = \mathrm{Spec}\,\mathscr{O}(\mathrm{X})$ de X, et le morphisme canonique $\mathrm{X}\to\mathrm{X_{af}}$ est **403**
G-équivariant.

De plus, X étant quasi-affine, $\mathrm{X}\to\mathrm{X_{af}}$ est une immersion ouverte (EGA II, 5.1.2), donc a fortiori G opère fidèlement sur $\mathrm{X_{af}}$. On obtient donc que l'opération linéaire (à gauche) de G sur la k-algèbre $\mathscr{O}(\mathrm{X}) = \mathscr{O}(\mathrm{X_{af}})$ est fidèle. Ceci prouve l'implication (iii) ⇒ (iv).

Supposons maintenant que G opère fidèlement sur un k-espace vectoriel V. Alors, en vertu de 11.10, V est limite inductive de sous-espaces vectoriels V_i de dimension finie, stables sous l'action de G. Si K_i est le noyau de l'action induite de G sur V_i, i.e. du morphisme $\mathrm{G}\to\underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{V}_i)$, alors K_i est un sous-schéma fermé de G, et l'hypothèse que G opère fidèlement s'exprime par le fait que l'intersection des K_i est le sous-groupe unité de G. Comme G est noethérien, il s'ensuit que l'un des K_i est déjà réduit au groupe unité, donc que $\mathrm{G}\to\underline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{V}_i)$ est un monomorphisme. C'est

[121] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit ; d'autre part, on a choisi de faire opérer G *à droite* sur X afin d'obtenir une opération linéaire de G à gauche sur $\mathscr{O}(\mathrm{X})$.

[122] N.D.E. : Rappelons qu'un k-schéma X est dit *quasi-affine* s'il est isomorphe à un ouvert *quasi-compact* d'un k-schéma affine (EGA II, 5.1.1).

donc une immersion fermée en vertu de 1.4.2, ce qui prouve que (iv) $\Rightarrow$ (v). Comme (v) $\Rightarrow$ (i) trivialement, cela prouve 11.11.

Remarque 11.11.1. — On peut généraliser 11.11 comme suit. Soient S un schéma localement noethérien régulier de dimension $\leqslant 1$, et G un schéma en groupes plat, quasi-compact et quasi-séparé sur S. (Dans ce cas, $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module sans torsion, donc plat).

(a) On a alors l'équivalence des conditions suivantes : [123]

(i) G est affine sur S.

(ii) G est quasi-affine sur S.

(iii) G opère fidèlement sur un S-schéma quasi-affine et plat.

(iv) G opère linéairement et fidèlement sur un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent plat.

(b) Si de plus G est de type fini sur S et S noethérien, ces conditions entraînent
404 que G est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathscr{E})$, où $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre de type fini. [124]

Lemme 11.12. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe affine. Posons* $\mathrm{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$. *Étant donné $x \in \mathrm{A}$, il existe une sous-k-algèbre* de type fini B *de* A *telle que $x \in \mathrm{B}$, que $\Delta(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B} \otimes_k \mathrm{B}$ et $u(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$, où u désigne l'involution de* A *correspondant au morphisme d'inversion de* G. [125]

On peut supposer $x \neq 0$, alors $\Delta(x) \neq 0$ puisque $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(x) = x$, où ε désigne l'augmentation (coünité) de A. Écrivons

$$\Delta(x) = \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes a_j \qquad \text{avec } n \text{ } minimal \text{ }, \tag{1}$$

dans ce cas les e_j (resp. a_j) sont linéairement indépendants. Complétons $(e_1, \dots, e_n)$ en une base $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de A et posons, pour $j \in \mathrm{J} = \{1, \dots, n\}$,

$$\Delta(e_j) = \sum_{i \in \mathrm{I}} e_i \otimes b_{ij} \, .$$

Appliquant $\Delta \otimes \mathrm{id}$ et $\mathrm{id} \otimes \Delta$ à (1), on tire de l'axiome (CO 1) de 11.8.0 (voir aussi (HA 1) dans I 4.2) les égalités :

$$\sum_{j \in \mathrm{J}} e_j \otimes \Delta(a_j) = \sum_{\ell \in \mathrm{J}} \Delta(e_\ell) \otimes a_\ell = \sum_{i \in \mathrm{I}} e_i \otimes \Big(\sum_{\ell \in \mathrm{J}} b_{i\ell} \otimes a_\ell \Big).$$

Comme les e_i sont linéairement indépendants, il en résulte que

$$\forall\, j \in \mathrm{J}, \qquad \Delta(a_j) = \sum_{\ell \in \mathrm{J}} b_{j\ell} \otimes a_\ell. \tag{2}$$

[123] N.D.E. : L'équivalence de ces conditions est démontrée dans la section additionnelle 12.

[124] N.D.E. : Ceci est démontré, avec diverses généralisations, dans la section additionnelle 13.

[125] N.D.E. : D'une part, ceci est généralisé dans la section 13 au cas où G est affine et plat sur une base régulière de dimension $\leqslant 2$. D'autre part, dans ce qui suit on a détaillé et corrigé l'original.

Soit alors B la sous-k-algèbre de type fini de A engendrée par les b_{ij} et les $u(b_{ij})$, pour $i, j \in \mathrm{J}$. Il est clair que $u(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$.

Appliquant $\Delta \otimes \mathrm{id}$ et $\mathrm{id} \otimes \Delta$ à (2), on tire encore de (CO 1) les égalités :

$$\sum_{\ell \in \mathrm{J}} \Delta(b_{j\ell}) \otimes a_\ell = \sum_{i \in \mathrm{J}} b_{ji} \otimes \Delta(a_i) = \sum_{i,\ell \in \mathrm{J}} b_{ji} \otimes b_{i\ell} \otimes a_\ell,$$

et comme les a_ℓ sont linéairement indépendants, on en déduit que

$$\forall\, j, \ell \in \mathrm{J}, \qquad \Delta(b_{j\ell}) = \sum_{i \in \mathrm{J}} b_{ji} \otimes b_{i\ell}. \tag{3}$$

Comme $\Delta \circ u = (u \times u) \circ v \circ \Delta$, où $v(a \otimes b) = b \otimes a$, on a donc aussi

$$\forall\, j, \ell \in \mathrm{J}, \qquad \Delta\big(u(b_{j\ell})\big) = \sum_{i \in \mathrm{J}} u(b_{i\ell}) \otimes u(b_{ji}). \tag{4}$$

Puisque Δ est un homomorphisme d'algèbres, on déduit de (3) et (4) que $\Delta(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B} \otimes_k \mathrm{B}$. Enfin l'axiome (CO 2) de 11.8.0 (voir aussi (HA 2) dans I, 4.2) montre que $a_j = \sum_{i \in \mathrm{I}} \varepsilon(a_j) b_{ij}$ et que $x = \sum_{j \in \mathrm{J}} \varepsilon(e_j) a_j$, si bien que $x \in \mathrm{B}$.

Proposition 11.13. — *Soient k un corps et* G *un k-groupe* affine *d'algèbre* A. *Alors* G *est limite projective d'un système filtrant croissant de k-groupes affines de type fini, dont les morphismes de transition sont* fidèlement plats.

Si B et B′ sont deux sous-algèbres de A de type fini stables par Δ et u, alors il en est de même de la sous-algèbre engendrée par B et B′. Donc, d'après le lemme 11.12, A est limite inductive d'une famille filtrante croissante $(\mathrm{B}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de sous-algèbres de type fini stables par Δ et u. Alors chaque B_i, munie de la restriction de u et du **405**
morphisme $\mathrm{B}_i \to \mathrm{B}_i \otimes_k \mathrm{B}_i$ déduit de Δ, est une algèbre de Hopf, donc d'après I 4.2 c'est l'algèbre d'un k-groupe affine G_i, de type fini sur k. Enfin, puisque $\mathrm{A} = \varinjlim \mathrm{B}_i$, on a $\mathrm{G} = \varprojlim \mathrm{G}_i$ (cf. EGA IV_3 8.2.3). Les morphismes de transition sont fidèlement plats d'après le lemme suivant :

Lemme 11.14. — *Soient k un corps, $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme entre k-groupes* affines de type fini, *et $u^\natural : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$* [126] *le morphisme de k-algèbres correspondant. Pour que u soit fidèlement plat, il faut et il suffit que $u^\natural$ soit injectif.*

La condition est évidemment nécessaire (cf. EGA 0_{I} 6.6.1). Montrons qu'elle est suffisante. Posons $\mathrm{N} = \operatorname{Ker} u$. Alors, d'après $\mathrm{VI_A}$, 3.3.2 et 5.4.1, G/N est un k-groupe de type fini et u se factorise en $\mathrm{G} \xrightarrow{p} \mathrm{G/N} \xrightarrow{v} \mathrm{H}$, où p est fidèlement plat et où v est une immersion fermée. Donc, puisque H est un schéma affine, G/N est un schéma affine et le morphisme $v^\natural : \mathrm{B} \to \mathscr{O}(\mathrm{G/N})$ est surjectif (cf. EGA I 4.2.3). Or, puisque $u^\natural$ est supposé injectif, et que $u^\natural = p^\natural \circ v^\natural$, alors $v^\natural$ est aussi injectif : c'est donc un isomorphisme, ainsi que v, et puisque p est fidèlement plat, il en est de même de u.

[126] N.D.E. : On a noté $u^\natural$ (au lieu de u°) le morphisme $\mathrm{B} \to \mathrm{A}$ correspondant à $u : \mathrm{Spec(A)} \to \mathrm{Spec(B)}$.

Définition 11.15. — [127] Soient k un corps, G un k-groupe quasi-compact et V un k-espace vectoriel muni d'une action k-linéaire de G, donc d'une structure de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule $\delta : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G})$, d'après 11.6.1. Soit $v \in \mathrm{V}$ non nul. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $\lambda \in \mathscr{A}(\mathrm{G})$ (nécessairement unique) tel que $\delta(v) = v \otimes \lambda$.

(ii) Pour toute k-algèbre R et tout $g \in \mathrm{G}(\mathrm{R})$, on a $g \cdot v \in \mathrm{R}v$ (c.-à-d., il existe $f \in \mathrm{R}$, nécessairement unique, tel qu'on ait dans $\mathrm{V} \otimes \mathrm{R}$ l'égalité $g \cdot v = v \otimes f$).

En effet, il est clair que (i) $\Rightarrow$ (ii). Réciproquement, si (ii) est vérifié et si on l'applique à $\mathrm{R} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$ et $g = \mathrm{id}_{\mathscr{A}(\mathrm{G})}$, on obtient qu'il existe un unique $\lambda \in \mathscr{A}(\mathrm{G})$ tel que $\delta(v) = v \otimes \lambda$.

Si v vérifie ces conditions, on dit que v est vecteur *semi-invariant* sous G, et que λ est le *poids* de v ; on dira aussi que « *v est un semi-invariant de poids λ* ».

406 Notons Δ la comultiplication de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$; alors l'égalité

$$v \otimes \lambda \otimes \lambda = (\delta \otimes \mathrm{id})(\delta(v)) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\delta(v)) = v \otimes \Delta(\lambda)$$

entraîne que $\Delta(\lambda) = \lambda \otimes \lambda$. Par conséquent, λ définit un morphisme d'algèbres de Hopf

$$\mathscr{A}(\mathbb{G}_{m,k}) = k[\mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}] \longrightarrow \mathscr{A}(\mathrm{G}), \qquad \mathrm{T} \mapsto \lambda,$$

et donc un morphisme de k-groupes $\lambda : \mathrm{G} \to \mathbb{G}_{m,k}$, i.e. λ est un *caractère* de G, appelé *caractère associé* au vecteur semi-invariant v.

Lemme 11.16.0. — [128] *Soient k un corps,* H *un k-groupe affine,* V *un* H*-module de dimension n et* U *un sous-espace vectoriel de* V *de dimension d. Considérons la droite* $\mathrm{D} = \bigwedge^d \mathrm{U} \subset \bigwedge^d \mathrm{V}$. *Pour que* U *soit stable par* H*, il faut et il suffit que* D *le soit.*

La nécessité étant claire, prouvons la suffisance. On peut supposer $d < n$. Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de U, complétons-la en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V. Pour toute k-algèbre R, $\mathrm{V}_\mathrm{R} = \mathrm{V} \otimes \mathrm{R}$ est un R-module libre et l'on a

$$\mathrm{U}_\mathrm{R} = \{v \in \mathrm{V}_\mathrm{R} \mid v \wedge (e_1 \wedge \cdots \wedge e_d) = 0\}$$

(car pour $i > d$ les $e_i \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_d$ sont linéairement indépendants dans $\bigwedge_\mathrm{R}^{d+1} \mathrm{V}_\mathrm{R}$). Comme H(R) opère sur $\bigwedge_\mathrm{R}^\bullet(\mathrm{V}_\mathrm{R})$ par

$$h(x_1 \wedge \cdots \wedge x_s) = h(x_1) \wedge \cdots \wedge h(x_s),$$

il en résulte que si H(R) stabilise $\mathrm{D}_\mathrm{R} = \mathrm{R}e_1 \wedge \cdots \wedge e_d$, il stabilise aussi U_R.

Théorème 11.16 **(**Chevalley). — *Soient k un corps,* G *un k-groupe* algébrique affine*,* H *un sous-schéma en groupes fermé de* G. [129] *Alors il existe un* G*-module de dimension*

[127] N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse que G soit *quasi-compact* et détaillé l'équivalence des conditions (i) et (ii).

[128] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, tiré de [**DG70**], § II.2, 3.5.

[129] N.D.E. : D'une part, on rappelle que tout sous-schéma en groupes de G est fermé (1.4.2). D'autre part, on a énoncé le résultat sous la forme usuelle : « H est le stabilisateur d'une droite dans une représentation de G », tout en conservant la formulation originelle en termes d'une suite $a_1, \dots, a_n$ de semi-invariants dans $\mathscr{A}(\mathrm{G})$.

finie V *et une droite* D *de* V *telle que* $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})$, *i.e. telle que pour toute* k*-algèbre* R,

$$\mathrm{H}(\mathrm{R}) = \{g \in \mathrm{G}(\mathrm{R}) \mid g(\mathrm{D}_{\mathrm{R}}) = \mathrm{D}_{\mathrm{R}}\}.$$

En d'autres termes, il existe un nombre fini d'éléments $a_1, \dots, a_n \in \mathscr{A}(\mathrm{G})$, *qui sont semi-invariants, tous de même poids* λ, *pour l'action «* à droite *» de* H (*i.e.* $a_i(gh) = \lambda(h)a_i(g)$, *pour toute* k*-algèbre* R *et* $g \in \mathrm{G}(\mathrm{R})$, $h \in \mathrm{H}(\mathrm{R})$), *tels que* H *soit le plus grand sous-schéma en groupes fermé de* G *sous lequel les* a_i *soient semi-invariants.*

Notons Δ (resp. ε) la comultiplication (resp. l'augmentation) de $\mathrm{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$. Alors $\mathrm{H} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{I})$, pour un certain idéal I de A, contenu dans $\mathrm{Ker}\,\varepsilon$ et tel que $\Delta(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}\otimes\mathrm{A} + \mathrm{A}\otimes\mathrm{I}$. Soient $\mathrm{B} = \mathrm{A}/\mathrm{I}$ et π la projection $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$. Considérons l'action à gauche de H sur A donnée par $(h\phi)(g) = \phi(gh)$; la structure de B-comodule correspondante est donnée par :

$$\overline{\Delta} : \quad \mathrm{A} \xrightarrow{\ \Delta\ } \mathrm{A}\otimes\mathrm{A} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{A}}\otimes\pi} \mathrm{A}\otimes\mathrm{B}.$$

Alors I est un sous-H-module de A, puisque $\overline{\Delta}(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}\otimes\mathrm{B}$.

D'autre part, A est une k-algèbre de type fini, donc noethérienne, donc I admet un système fini de générateurs $(x_1, \dots, x_r)$. D'après 11.8, les x_i sont contenus dans un sous-G-module V de dimension finie sur k. Alors $\mathrm{W} = \mathrm{V}\cap\mathrm{I}$ est un H-module de dimension finie, dont nous noterons d la dimension. Puisque V contient tous les x_i, **407**
W engendre l'idéal I.

Posons $\mathrm{E} = \bigwedge^d \mathrm{V}$, soit $(w_1, \dots, w_d)$ une base de W, et soit $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ une base de E contenant le vecteur $e_0 = w_1 \wedge\cdots\wedge w_d$. L'opération de G sur V détermine canoniquement une opération de G sur E, donc une structure de A-comodule $\rho : \mathrm{E} \to \mathrm{E}\otimes\mathrm{A}$. Pour $j = 0, \dots, n$, posons $\rho(e_j) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes b_{ij}$; on a vu dans la démonstration de 11.12 qu'alors

$$(*) \qquad \Delta(b_{ij}) = \sum_{\ell=0}^{n} b_{i\ell}\otimes b_{\ell j}.$$

Posons $a_i = b_{i0}$, i.e. si $(e_0^*, \dots, e_n^*)$ est la base duale de $\mathscr{B}$, les a_i sont les « coefficients matriciels » $g \mapsto e_i^*(ge_0)$. D'autre part, l'opération de H sur E correspond à :

$$\overline{\rho} : \quad \mathrm{E} \xrightarrow{\ \rho\ } \mathrm{E}\otimes\mathrm{A} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{E}}\otimes\pi} \mathrm{E}\otimes\mathrm{B}.$$

Puisque W est stable sous H, alors e_0 est semi-invariant sous H, donc $\overline{\rho}(e_0) = e_0\otimes\pi(a_0)$ et $a_i = b_{i0}$ appartient à I pour $i = 1, \dots, n$. Reportant ceci dans $(*)$, on obtient $\overline{\Delta}(a_i) = a_i\otimes\pi(a_0)$ pour $i = 0, \dots, n$, i.e. les a_i sont semi-invariants sous H de poids $\pi(a_0)$. (De plus, quitte à remplacer E par le sous-G-module engendré par e_0 (cf. 11.8) on peut supposer que les a_i sont linéairement indépendants.)

Réciproquement, soit $\mathrm{H}' = \mathrm{Spec}\,\mathrm{B}'$, où $\mathrm{B}' = \mathrm{A}/\mathrm{I}'$, un sous-schéma en groupes fermé de G sous lequel chacun des a_i est semi-invariant, de poids $\lambda_i \in \mathrm{B}'$ (c'est le cas, en particulier, si e_0 est invariant sous H′ de poids λ'). Montrons que $\mathrm{H}' = \mathrm{H}$. Notons π' **408** la projection $\mathrm{A} \to \mathrm{B}'$; l'hypothèse entraîne que

$$a_i \otimes \lambda_i = (\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \otimes \pi')\Delta(b_{i0}) = \sum_{\ell=0}^{n} b_{i\ell} \otimes \pi'(a_\ell),$$

d'où $\lambda_i = \pi'(a_0)$ et $a_\ell \in \mathrm{I}'$ pour $\ell = 1, \dots, n$, et donc e_0 est semi-invariant sous H'. D'après le lemme 11.16.0, ceci entraîne que W est stable par H'. Comme l'idéal I est engendré par W, il est donc aussi stable sous H', et donc

$$\Delta(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I} \otimes \mathrm{A} + \mathrm{A} \otimes \mathrm{I}'.$$

Comme $\mathrm{I} \subset \operatorname{Ker} \varepsilon$ et $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}}) \circ \Delta = \mathrm{id}_{\mathrm{A}}$, il en résulte $\mathrm{I} \subset \mathrm{I}'$, d'où $\mathrm{H}' \subset \mathrm{H}$.

Lemme 11.17.0. — (130) *Soient k un corps algébriquement clos,* G *un k-groupe algébrique affine réduit,* V *un* G*-module de dimension finie sur k, et $v \in \mathrm{V}$. Soit* E *le sous-espace vectoriel de* V *engendré par les vecteurs gv, pour $g \in \mathrm{G}(k)$. Alors* E *est le plus petit sous-*G*-module de* V *contenant v, et donc le morphisme* $\mathrm{G} \times \mathrm{E} \to \mathrm{V}$, $(g, x) \mapsto gx$ *se factorise à travers* E.

Démonstration. D'après 11.8, on sait qu'il existe un plus petit sous-G-module U de V contenant v : si $\mu : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G})$ désigne la structure de comodule et si l'on écrit $\mu(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes a_i$ avec les a_i linéairement indépendants, on a $\mathrm{U} = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. Il est clair que U contient E, et que le morphisme $\mathrm{G} \times \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ se factorise à travers U.

Réciproquement, l'image inverse de E par le morphisme $\mu_v : g \mapsto gv$ est un fermé de G qui contient les points rationnels ; or ceux-ci sont denses dans G, puisque G est de type fini sur k (cf. EGA IV_3, 10.4.8), donc $\mu_v^{-1}(\mathrm{E}) = \mathrm{G}$ et donc, puisque G est réduit, μ_v se factorise à travers E, d'où $\mathrm{E} = \mathrm{U}$.

Théorème 11.17 (Chevalley). — *Soient k un corps,* G *un k-groupe* affine (*pas nécessairement de type fini*), *et* N *un sous-schéma en groupes fermé de* G *invariant dans* G *; alors le faisceau* (fpqc) *quotient* G/N *est représentable par un k-groupe* affine. (131)

Supposons d'abord G *de type fini*. D'après $\mathrm{VI_A}$ 3.2 et 5.2, le faisceau (fpqc) quotient G/N est représentable par un k-groupe Q ; il s'agit donc de montrer que Q est affine. La démonstration se fait en plusieurs étapes, supposons d'abord *k algébriquement clos.* (132)

(a) Supposons de plus G réduit et connexe et N réduit. D'après 11.16, il existe un G-module V, de dimension finie sur k, et une droite $\mathrm{D} = ke_0$ telle que $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}) = \mathrm{N}$; en particulier N opère sur D via un caractère $\chi : \mathrm{N} \to \mathbb{G}_{m,\,k}$.

Fixons $h \in \mathrm{N}(k)$. Pour tout $g \in \mathrm{G}(k)$, on a $hge_0 = g(g^{-1}hg)e_0 = \chi(g^{-1}hg)ge_0$, donc $\chi(g^{-1}hg)$ est une valeur propre de h. Donc l'application continue $\phi : \mathrm{G}(k) \to k$,

(130) N.D.E. : On a ajouté ce lemme, tiré de la démonstration du thm. 5.6 de [**DG70**], § III.3 (par abus de notation, on désigne par la même lettre E un k-espace vectoriel et le k-schéma en modules $\mathbf{W}(\mathrm{E}) = \operatorname{Spec} \mathrm{S}(\mathrm{E}^*)$).

(131) N.D.E. : Pour une autre démonstration de ce théorème, n'utilisant pas les résultats de $\mathrm{VI_A}$, voir [**Ta72**], Th. 5.2 (voir aussi la remarque 11.18.5).

(132) N.D.E. : Dans ce qui suit, on a détaillé l'original (et corrigé l'assertion erronée $(\mathrm{G/N})_{\text{réd}} = \mathrm{G}_{\text{réd}}/\mathrm{N}_{\text{réd}}$), en s'appuyant sur [**DG70**], § III.3, 5.6.

$g \mapsto \chi(g^{-1}hg)$, ne prend qu'un nombre fini de valeurs, et comme $\mathrm{G}(k)$ est irréductible (car dense dans G), on a donc $\phi(g) = \phi(e) = \chi(h)$ pour tout $g \in \mathrm{G}(k)$ et donc

$$\chi(g^{-1}hg) = \chi(h), \qquad \forall\, g \in \mathrm{G}(k),\ h \in \mathrm{N}(k).$$

Soit E le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs ge_0, pour $g \in \mathrm{G}(k)$; d'après le lemme 11.17.0, c'est le sous-G-module de V engendré par e_0.

D'après ce qui précède, les deux morphismes $\mathrm{N} \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}$, $(h, x) \mapsto hx$ et $(h, x) \mapsto \chi(h)x$, coïncident sur l'ensemble des points rationnels $(\mathrm{N} \times \mathrm{E})(k) = \mathrm{N}(k) \times \mathrm{E}(k)$, qui est dense dans $\mathrm{N} \times \mathrm{E}$. Comme $\mathrm{N} \times \mathrm{E}$ est réduit (et E séparé), ces deux morphismes sont donc égaux, donc N agit sur E par homothéties. Par conséquent, N est contenu dans le noyau K du morphisme $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{End}_k(\mathrm{E}))$, défini par $\rho(g)(u) = gug^{-1}$, pour tout $g \in \mathrm{G}(\mathrm{R})$ et $u \in \mathrm{End}_{\mathrm{R}}(\mathrm{E} \otimes \mathrm{R})$ (R une k-algèbre). D'autre part, si $g \in \mathrm{K}(\mathrm{R})$ alors $g(\mathrm{R}e_0) = \mathrm{R}e_0$, d'où $g \in \mathrm{N}(\mathrm{R})$. Ceci montre que $\mathrm{N} = \mathrm{K}$. Alors, d'après $\mathrm{VI_A}$ 5.4.1, le morphisme $\mathrm{G}/\mathrm{N} \to \mathrm{GL}(\mathrm{End}_k(\mathrm{E}))$ est une immersion fermée, et donc G/N est affine. 409

(b) Supposons maintenant G et N réduits, G n'étant pas nécessairement connexe. Posons $\mathrm{N}' = \mathrm{N} \cap \mathrm{G}^0$, alors G^0/N' est affine d'après (a). D'autre part, NG^0 est un sous-groupe invariant de G et G/NG^0, étant un quotient du groupe constant fini G/G^0 (cf. $\mathrm{VI_A}$, 5.5.1) est de même un groupe constant fini. Donc G/N est la somme directe des fibres du morphisme $\mathrm{G}/\mathrm{N} \to \mathrm{G}/\mathrm{NG}^0$, toutes isomorphes à NG^0/N, donc à G^0/N', d'après $\mathrm{VI_A}$, 5.3.3. Donc G/N est affine.

(c) Supposons G réduit, et N arbitraire. Le morphisme $\mathrm{G} \times \mathrm{N} \to \mathrm{N}$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$, induit un morphisme $(\mathrm{G} \times \mathrm{N})_{\mathrm{réd}} \to \mathrm{N}_{\mathrm{réd}}$; or, comme G est réduit et k algébriquement clos, on a $(\mathrm{G} \times \mathrm{N})_{\mathrm{réd}} = \mathrm{G} \times \mathrm{N}_{\mathrm{réd}}$, donc $\mathrm{N}_{\mathrm{réd}}$ est un sous-groupe *invariant* de G. (N. B. ceci est en défaut lorsque G n'est pas réduit, cf. $\mathrm{VI_A}$, 0.2).

Donc, d'après (a), $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{N}_{\mathrm{réd}}$ est affine. D'autre part, d'après $\mathrm{VI_A}$ 5.6.1, $\mathrm{N}' = \mathrm{N}/\mathrm{N}_{\mathrm{réd}}$ est un k-groupe fini, donc d'après le théorème 4.1 de l'Exp. V, le quotient $\mathrm{G}/\mathrm{N} = \mathrm{G}'/\mathrm{N}'$ est affine.

(d) Pour G et N quelconques, la relation d'équivalence déduite de $\mathrm{G} \times \mathrm{N} \rightrightarrows \mathrm{G}$ par le changement de base $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}} \to \mathrm{G}$ est :

$$\mathrm{G}_{\mathrm{réd}} \times \mathrm{N}' \rightrightarrows \mathrm{G}_{\mathrm{réd}}, \qquad \text{où} \qquad \mathrm{N}' = \mathrm{N} \cap \mathrm{G}_{\mathrm{réd}}.$$

Comme les espaces sous-jacents sont les mêmes (et comme le quotient est l'espace annelé quotient), le morphisme $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}/\mathrm{N}' \to \mathrm{G}/\mathrm{N}$ est un homéomorphisme. Comme $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}/\mathrm{N}'$ est réduit (puisque $p : \mathrm{G}_{\mathrm{réd}} \to \mathrm{G}_{\mathrm{réd}}/\mathrm{N}'$ est fidèlement plat), il en résulte que $(\mathrm{G}/\mathrm{N})_{\mathrm{réd}}$ s'identifie à $\mathrm{G}_{\mathrm{réd}}/\mathrm{N}'$, lequel est est affine, d'après (c). Comme G/N est de type fini sur k (cf. $\mathrm{VI_A}$, 3.3.2), ceci entraîne, d'après EGA I, 5.1.10, que G/N est affine.

Enfin, pour k arbitraire, soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Alors, d'après 9.2 (v), $(\mathrm{G} \otimes_k \overline{k})/(\mathrm{N} \otimes_k \overline{k})$ est isomorphe à $(\mathrm{G}/\mathrm{N}) \otimes_k \overline{k}$, donc puisque le premier est affine, il en est de même du second, donc G/N est également affine, par descente (fpqc) (cf. EGA

IV_2, 2.7.1). Ceci prouve 11.17 lorsque G est de type fini. Pour étendre ceci au cas général, on aura besoin du lemme suivant. [133]

Lemme 11.17.1. — *Soit* $(\mathrm{C}_i \to \mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *un système inductif filtrant de morphismes d'anneaux, tous fidèlement plats. Alors* $\mathrm{A} = \varinjlim \mathrm{A}_i$ *est fidèlement plat sur* $\mathrm{C} = \varinjlim \mathrm{C}_i$.

Démonstration. D'après [**BAC**] § I.3, Prop. 9, pour qu'un morphisme d'anneaux $\mathrm{B} \to \mathrm{B}'$ soit fidèlement plat, il faut et il suffit qu'il soit injectif et que B'/B soit un B-module plat. Comme chaque $\mathrm{C}_i \to \mathrm{A}_i$ est fidèlement plat, on a donc des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{C}_i \longrightarrow \mathrm{A}_i \longrightarrow \mathrm{A}_i/\mathrm{C}_i \longrightarrow 0$$

et $\mathrm{A}_i/\mathrm{C}_i$ est un C_i-module plat, donc $(\mathrm{A}_i/\mathrm{C}_i)\otimes_{\mathrm{C}_i}\mathrm{C}$ est un C-module plat. Comme les limites inductives sont exactes et commutent au produit tensoriel, on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}/\mathrm{C} \longrightarrow 0$$

ainsi qu'un isomorphisme

$$\varinjlim \big((\mathrm{A}_i/\mathrm{C}_i)\otimes_{\mathrm{C}_i}\mathrm{C}\big) = (\mathrm{A}/\mathrm{C})\otimes_{\mathrm{C}}\mathrm{C} = \mathrm{A}/\mathrm{C}\,,$$

duquel on déduit que A/C est un C-module plat. Donc A est fidèlement plat sur C.

Revenons maintenant à la démonstration de 11.17 dans le cas général, i.e. lorsque G n'est pas supposé de type fini. Posons $\mathscr{A}(\mathrm{G}) = \mathrm{A}$ et $\mathscr{A}(\mathrm{N}) = \mathrm{B} = \mathrm{A}/\mathrm{J}$. D'après 11.13, A est limite inductive d'une famille filtrante croissante $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de sous-algèbres de Hopf de type fini, donc G est la limite projective des k-groupes algébriques affines $\mathrm{G}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_i)$. Notons Δ (resp. τ) la comultiplication (resp. l'antipode) de A, et $\Delta^2 = (\Delta\otimes\mathrm{id}_{\mathrm{A}})\circ\Delta$.

Pour tout i, $\mathrm{B}_i = \mathrm{A}_i/(\mathrm{J}\cap\mathrm{A}_i)$ est une algèbre de Hopf quotient de A_i, donc $\mathrm{N}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{B}_i)$ est un sous-groupe fermé de G_i. De plus, comme N est invariant dans G, le morphisme $\mathrm{G}\times\mathrm{N}\to\mathrm{G}$ défini par $(g,n)\mapsto gng^{-1}$ se factorise à travers N, et ceci équivaut à dire que le couple (A,J) vérifie la propriété suivante :

$$\big(m_{13}\circ(\Delta\otimes\tau)\circ\Delta\big)(\mathrm{J}) \subset \mathrm{A}\otimes_k \mathrm{J}$$

où m_{13} désigne l'application $a_1\otimes a_2\otimes a_3 \mapsto a_1a_3\otimes a_2$. Il en résulte que $(\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_i\cap\mathrm{J})$ vérifie la propriété analogue, donc que N_i est *invariant* dans G_i. D'autre part, on a $\varinjlim \mathrm{B}_i = \mathrm{B}$ et donc $\varprojlim \mathrm{N}_i = \mathrm{N}$.

410 D'après ce qu'on a vu précédemment, chaque faisceau (fpqc) quotient $\mathrm{G}_i/\mathrm{N}_i$ est représentable par un k-groupe affine $\mathrm{Q}_i = \mathrm{Spec}(\mathrm{C}_i)$. Posons $\mathrm{C} = \varinjlim \mathrm{C}_i$. On a donc un système projectif filtrant de k-groupes affines Q_i ; sa limite projective $\mathrm{Q} = \varprojlim \mathrm{Q}_i$ est le k-groupe Spec(C) (cf. EGA IV_3, 8.2.3). On a alors une suite exacte de k-groupes :

$$1 \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Q}\ .$$

Montrons que Q représente le faisceau (fpqc) quotient de G par N ; pour cela, il suffit de vérifier que le morphisme $\mathrm{G}\to\mathrm{Q}$ est couvrant pour la topologie (fpqc) (cf. IV, 3.3.2.1 et 5.1.7.1). Or, chacun des morphismes $\mathrm{G}_i \to \mathrm{Q}_i$ est fidèlement plat

[133] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, tiré de [**DG70**], § III.3, 7.1.

(cf. 9.2 (xi)), autrement dit A_i est fidèlement plat sur C_i ; puisque $A = \varinjlim A_i$ et $C = \varinjlim C_i$, il résulte du lemme 11.17.1 que A est fidèlement plat sur C, si bien que $G \to Q$ est un morphisme fidèlement plat. Puisque ce morphisme est affine, il est quasi-compact, donc couvrant pour la topologie (fpqc). Ceci achève la démonstration du théorème 11.17.

11.18. Compléments. — [134] De plus, on déduit de 11.17 (et de sa démonstration) les résultats suivants, tirés de [**DG70**], III § 3.7. Soit k un corps. Commençons par le lemme suivant (cf. [**An73**], 2.3.3.2), qui sera utile plus loin (cf. 12.10).

Lemme 11.18.1. — *Soient* $u : G \to G'$ *un morphisme de* k*-groupes,* $N = \mathrm{Ker}(u)$. *On suppose* G' *affine et* G *de type fini.*

(i) *Le morphisme* $\tau : G/N \to G'$ *est une immersion fermée. En particulier,* G/N *est affine.*

(ii) *Si de plus le morphisme* $u^\natural : \mathscr{O}(G') \to \mathscr{O}(G)$ *est injectif, alors* τ *est un isomorphisme.* (*Et donc* G' *est de type fini et* u *est fidèlement plat*).

En effet, on sait (11.13) que G' est limite projective d'un système filtrant de k-groupes algébriques affines G'_i. Notons u_i le morphisme composé $G \to G' \to G'_i$ et N_i son noyau. Alors les N_i forment un système filtrant décroissant de sous-groupes fermés de G, dont l'intersection est N. Comme G est noethérien, il existe un indice i tel que $N = N_i$. Comme G et G_i sont de type fini alors, d'après $\mathrm{VI_A}$, 3.2 et 5.4.1, le quotient G/N est un k-groupe de type fini et u_i est la composée de la projection $p : G \to G/N$, qui est fidèlement plate, et d'une immersion fermée $\tau_i : G/N \hookrightarrow G_i$. Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & G' \arrow[d, "q_i"] \\ G/N \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[ur, "\tau"] & G_i. \end{tikzcd}$$

Puisque $q_i \circ \tau = \tau_i$ est une immersion fermée et que q_i est séparé (G' étant séparé, cf. $\mathrm{VI_A}$, 0.3), alors τ est une immersion fermée (cf. EGA I, 5.4.4). Il en résulte que G/N est affine, et que le morphisme $\tau^\natural : \mathscr{O}(G') \to \mathscr{O}(G/N)$ est surjectif, d'où (i).

Si de plus $u^\natural : \mathscr{O}(G') \to \mathscr{O}(G)$ est injectif, il en est de même de $\tau^\natural$, donc $\tau^\natural$ est un isomorphisme, donc aussi τ (puisque G' et G/N sont affines). Ceci prouve (ii).

Théorème 11.18.2. — *Soient* G *et* G' *deux* k*-groupes affines, d'algèbres* A *et* A', *et soient* $u : G \to G'$ *un morphisme de* k*-groupes,* $N = \mathrm{Ker}(u)$, *et* $\phi : A' \to A$ *le morphisme induit par* u.

(i) *Si* ϕ *est injectif, alors* u *est fidèlement plat et identifie* G' *à* G/N.

[134] N.D.E. : On a ajouté cette sous-section.

(ii) *On a* $G/N = \mathrm{Spec}(B)$*, où* $B = \phi(A')$*, et donc* u *est la composée du morphisme fidèlement plat* $G \to G/N$*, correspondant à l'inclusion* $B \hookrightarrow A$*, et de l'immersion fermée* $G/N \hookrightarrow G'$*, qui correspond à la surjection* $A' \to B$*. De plus,* N *est défini dans* G *par l'idéal* AB_+*, où* B_+ *désigne l'idéal d'augmentation de* B*.*

(iii) *En particulier, si* u *est un monomorphisme, c'est une immersion fermée.*

Démonstration. (i) Supposons ϕ injectif et identifions A' à une sous-algèbre de Hopf de A. D'après 11.13, A est réunion filtrante de sous-algèbres de Hopf $A_i = \mathscr{O}(G_i)$ de type fini sur k ; notons $G'_i = \mathrm{Spec}(A'_i)$, où $A'_i = A' \cap A_i$, et N_i le noyau du morphisme $G_i \to G'_i$ induit par l'inclusion $A'_i \hookrightarrow A_i$. D'après le lemme précédent, on a $G_i/N_i \simeq G'_i$ et l'on obtient donc, pour tout i, une suite exacte

$$1 \longrightarrow N_i \longrightarrow G_i \xrightarrow{p_i} G'_i \longrightarrow 1$$

où p_i est fidèlement plat. Comme $G = \varprojlim_i G_i$ et $G' = \varprojlim_i G'_i$, on obtient donc une suite exacte

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \xrightarrow{p} G/N$$

où l'on a posé $N = \varprojlim_i N_i$. De plus, d'après le lemme 11.17.1, p est fidèlement plat (et affine), donc G' représente le faisceau (fpqc) quotient de G par N. Ceci prouve (i).

Dans le cas général, $B = \phi(A')$ est une sous-algèbre de Hopf de A ; notons H le k-groupe Spec(B) et N' le noyau du morphisme $G \to H$ induit par l'inclusion $B \hookrightarrow A$. D'après (i), H s'identifie à G/N', et u est donc la composée de la projection $G \to G/N'$ et de l'immersion fermée $G/N' \hookrightarrow G'$ induite par la surjection $A' \to B$. Il en résulte que $N' = N$. De plus, d'après 9.2 (ii), on a un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r, "\varepsilon"] & G' \end{tikzcd}$$

où ε est la section unité de G', qui correspond au morphisme d'augmentation $B \to k$. Il en résulte que N est défini dans G par l'idéal AB_+. Ceci prouve (ii), et (iii) en découle.

Remarque 11.18.3. — Soient G un k-groupe affine et N un k-sous-groupe invariant. Comme le morphisme $p : G \to G/N$ est fidèlement plat et quasi-compact alors, d'après IV 3.3.3.2, $\mathscr{O}(G/N)$ est la sous-algèbre de $\mathscr{O}(G)$ formée des fonctions ϕ qui sont N-invariantes à droite, i.e. qui vérifient $\phi(gh) = \phi(g)$, pour tout k-schéma S et $g \in G(S)$, $h \in N(S)$. Notant J l'idéal de $A = \mathscr{O}(G)$ qui définit N, ceci équivaut à dire que $\Delta(\phi) - \phi \otimes 1 \in \mathscr{O}(G) \otimes J$, où Δ est la comultiplication de A.

Le théorème précédent peut alors se reformuler en termes d'algèbres de Hopf comme suit.

Corollaire 11.18.4. — *Soient* k *un corps,* A *une* k*-algèbre de Hopf commutative,* $G = \mathrm{Spec}(A)$.

(i) *Si* B *est une sous-algèbre de Hopf de* A*, alors* A *est fidèlement plate sur* B.

(ii) *L'application* $N \mapsto \mathscr{O}(G/N)$ *est une bijection entre l'ensemble des sous-groupes invariants de* G *et celui des sous-algèbres de Hopf de* A *; l'application inverse est donnée par* $B \mapsto \mathrm{Spec}(A/AB_+)$*. De plus, si* J *est l'idéal de* A *définissant* N*, on a*

$$\mathscr{O}(G/N) = \{x \in A \mid \Delta(x) - x \otimes 1 \in A \otimes J\}.$$

Remarques 11.18.5. — (a) Une conséquence du théorème précédent est que la catégorie des k-groupes affines commutatifs est *abélienne*. Pour ceci, ainsi que pour d'autres résultats sur les k-groupes affines, on renvoie à [**DG70**], § III.3, 7.4 à 7.8.

(b) Signalons enfin que M. Takeuchi a donné une autre démonstration des résultats 11.17 à 11.18.4, cf. [**Ta72**], § 5 ; il a de plus renforcé 11.18.4 (i) ci-dessus en montrant que A est même un B-module projectif, cf. [**Ta79**], Th. 5 (voir aussi [**MW94**], Th. 3.6).

12. Compléments sur G_{af} et les groupes « anti-affines »

(135) Commençons par le lemme suivant, qui étend 11.18.1 au cas où G n'est pas supposé de type fini. (136)

Lemme 12.1. — *Soient k un corps, $u : G \to H$ un monomorphisme de k-groupes, avec* H affine*. On suppose u* quasi-compact*. Alors u est une* immersion fermée*.*

Démonstration. Par descente (fpqc), on peut supposer k algébriquement clos. D'après VI_A, 6.4, l'image fermée I de u est un sous-schéma en groupes fermé de H, donc encore affine. Donc, remplaçant H par I, on peut supposer u schématiquement dominant. Comme k est algébriquement clos, $H' = H_{réd}$ est un sous-schéma en groupes de H ; notons $G' = G \times_H H'$, alors le morphisme $u' : G' \to H'$ déduit de u par changement de base est un monomorphisme quasi-compact, et est dominant (l'application continue sous-jacente étant la même pour u et u'). Donc, d'après VI_A, 6.2, u' est fidèlement plat ; c'est donc un monomorphisme fidèlement plat quasi-compact, donc un isomorphisme (cf. IV 1.14).

Donc $u : G \to H$ est un homéomorphisme, donc est affine d'après 2.9.1. Donc G est affine, et donc u est une immersion fermée d'après 11.18.2 (iii).

Théorème 12.2. — *Soit* G *un k-groupe* algébrique*. On note ρ le morphisme canonique* $G \to G_{af}$ *et* N *son noyau.*

(i) *Le morphisme canonique* $G/N \to G_{af}$ *est un* isomorphisme*, et donc* G_{af} *est un groupe affine* algébrique*, et ρ est fidèlement plat.*

(ii) *On a un isomorphisme canonique* $(G/N)_{af} = G_{af}$.

(iii) N *est un sous-groupe* caractéristique *de* G.

(iv) $\mathscr{O}(N) = k$.

(v) N *est lisse, connexe et commutatif.*

(135) N.D.E. : On a ajouté cette section.

(136) N.D.E. : Ce lemme nous a été communiqué par M. Raynaud, il sera utilisé dans la démonstration de la proposition 12.9.

Démonstration. Le point (i) est un cas particulier de 11.18.1, et le point (ii) découle des propriétés universelles de $\mathrm{G_{af}}$ et $(\mathrm{G/N})_{\mathrm{af}}$.

Prouvons (iii). Pour un k-schéma $\pi : \mathrm{S} \to \operatorname{Spec} k$ arbitraire, considérons le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G_S} \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{G} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{S} \arrow[r, "\pi"] & \operatorname{Spec} k, \end{tikzcd}$$

comme p est quasi-compact et séparé et π plat alors, d'après EGA III 1.4.15 et EGA $\mathrm{IV_1}$ 1.7.21, on a $q_*(\mathscr{O}_{\mathrm{G_S}}) = \pi^*(\mathscr{O}(\mathrm{G})) = \pi^*(\mathscr{O}(\mathrm{G_{af}}))$, et donc, d'après EGA II, 1.5.2, on a $(\mathrm{G_S})_{\mathrm{af}} = (\mathrm{G_{af}})_{\mathrm{S}}$ donc $\mathrm{N_S}$, étant le noyau du morphisme canonique $\mathrm{G_S} \to (\mathrm{G_S})_{\mathrm{af}}$, est invariant par tout automorphisme de $\mathrm{G_S}$, i.e. N est un sous-groupe caractéristique de G.

Pour prouver (iv), posons $\mathrm{N'} = \mathrm{Ker}(\mathrm{N} \to \mathrm{N_{af}})$; d'après (ii), c'est un sous-groupe invariant de G. Comme N est algébrique (étant un sous-groupe fermé de G) alors, d'après (i), $\mathrm{N/N'} \cong \mathrm{N_{af}}$; de plus, d'après $\mathrm{VI_A}$, 3.2 et 5.3.2, on a un isomorphisme de k-groupes

$$(\mathrm{G/N'})/\mathrm{N_{af}} \cong (\mathrm{G/N'})/(\mathrm{N/N'}) \cong \mathrm{G/N}.$$

Comme $\mathrm{N_{af}}$ est affine, la projection $\mathrm{G/N'} \to \mathrm{G/N}$ l'est aussi, d'après 9.2 (vii), et comme $\mathrm{G/N} = \mathrm{G_{af}}$ est affine, alors $\mathrm{G/N'}$ l'est aussi. Donc, d'après la propriété universelle de $\mathrm{G_{af}}$, la projection $p' : \mathrm{G} \to \mathrm{G/N'}$ se factorise à travers $\mathrm{G_{af}} = \mathrm{G/N}$, d'où $\mathrm{N} \subset \mathrm{N'}$ et donc $\mathrm{N} = \mathrm{N'}$. Donc $\mathrm{N_{af}}$ est le groupe trivial, d'où $\mathscr{O}(\mathrm{N}) = k$.

Enfin, l'assertion (v) est conséquence du lemme suivant.

Lemme 12.3. — *Soient k un corps et* N *un k-groupe algébrique tel que $\mathscr{O}(\mathrm{N}) = k$. Alors* N *est lisse, connexe, et commutatif.*

En effet, on peut supposer k algébriquement clos. Alors $\mathrm{H} = \mathrm{N}^0_{\mathrm{réd}}$ est un sous-k-groupe de N, et le k-schéma quotient $\mathrm{X} = \mathrm{N/H}$ est fini (donc affine) sur k, d'après $\mathrm{VI_A}$, 5.5.1 et 5.6.1. D'autre part, comme $p : \mathrm{N} \to \mathrm{X}$ est fidèlement plat, on a $\mathscr{O}(\mathrm{X}) \subset \mathscr{O}(\mathrm{N}) = k$. Il en résulte que $\mathrm{N} = \mathrm{N}^0_{\mathrm{réd}}$, donc N est lisse ($\mathrm{VI_A}$ 1.3.1) et connexe.

Soit alors Z le centre de N. D'après 6.2.6, N/Z est affine, et l'on obtient comme plus haut que $\mathscr{O}(\mathrm{N/Z}) = k$, d'où $\mathrm{N} = \mathrm{Z}$. Ceci prouve 12.3 et termine la démonstration de 12.2.

Signalons aussi, sans démonstration, le théorème suivant. (On rappelle qu'une variété abélienne sur un corps k est un k-schéma en groupes *propre, lisse et connexe.*)

Théorème 12.4 (Chevalley). — *Soient k un corps* parfait *et* G *un k-groupe* algébrique, lisse et connexe. *Alors il existe un k-sous-groupe affine, lisse et connexe* L, *invariant dans* G, *tel que le quotient* G/L *soit une variété abélienne. De plus,* L *est unique et sa formation commute à l'extension du corps de base.*

Remarques 12.5. — (1) Ce théorème a été annoncé en 1953 par C. Chevalley, qui a publié sa démonstration en 1960 ([**Ch60**]). Entre-temps, d'autres démonstrations ont été obtenues, indépendamment, par I. Barsotti et M. Rosenlicht ([**Ba55, Ro56**]) ; voir [**Se99**] pour des commentaires historiques.

(2) Une version moderne (i.e. dans le langage des schémas) de la démonstration de Chevalley a été donnée par B. Conrad ([**Co02**]). (Noter que dans *loc. cit.*, « algebraic group » signifie k-schéma en groupes lisse et connexe.)

(3) D'autre part, une version moderne de la démonstration de Rosenlicht a été donnée par Ngô B.-C. dans un cours à Orsay en 2005-2006.

(4) Si l'on omet l'hypothèse que k soit parfait, il existe encore un plus petit sous-groupe affine connexe invariant L (pas nécessairement lisse) tel que G/L soit une variété abélienne ([**BLR**], § 9.2, Thm. 1).

(5) On peut aussi omettre l'hypothèse que G soit lisse sur k : en effet, d'après $\mathrm{VII_A}$, 8.3, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que le quotient $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/({}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G})$ soit lisse, alors G' contient un sous-groupe L' comme en (4) ci-dessus, et l'image inverse de L' dans G a encore les mêmes propriétés. Donc, pour tout groupe algébrique connexe G sur un corps k, il existe une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{A} \longrightarrow 1$$

où H est un k-groupe affine et A une k-variété abélienne. De plus, d'après [**Per76**], Cor. 4.2.9, on a une telle suite exacte pour tout k-groupe connexe G (pas nécessairement algébrique).

(6) Soient k un corps algébriquement clos et G le produit semi-direct d'une courbe elliptique E par le k-groupe constant $\{\pm 1\}_k$, pour l'action définie par $(-1)\cdot x = -x$; dans ce cas, si L est un sous-groupe fermé invariant de G tel que G/L soit connexe, alors $\mathrm{L} = \mathrm{G}$.

Remarque 12.6. — On dira, suivant [**Br09**], qu'un k-groupe N est *anti-affine* si $\mathscr{O}(\mathrm{N}) = k$. D'après 12.3 et 12.4, si k est parfait tout k-groupe algébrique anti-affine est extension d'une variété abélienne par un k-groupe algébrique affine, lisse, connexe, et commutatif. Pour la structure précise des groupes algébriques anti-affines sur un corps parfait, et diverses conséquences, voir les articles récents de M. Brion et C. & F. Sancho de Salas ([**Br09, SS09**]).

Pour terminer cette section, on va démontrer deux résultats dus à M. Raynaud, le premier étant la remarque 11.11.1, le second la proposition 2.1 de l'Exp. XVII, Appendice III. On aura besoin du lemme suivant [137], qui améliore (pour un anneau de valuation discrète complet R) les critères de platitude donnés dans [**BAC**], § III.5.

Lemme 12.7. — *Soient* R *un anneau de valuation discrète,* K *son corps des fractions,* π *une uniformisante. Soient* A *une* R*-algèbre plate et* M *un* A*-module plat sur* R*. On suppose que :*

(i) $\mathrm{M}/\pi\mathrm{M}$ *est un module plat sur* $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}/\pi\mathrm{A}$*,*

(ii) $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{K}$ *est un module plat sur* $\mathrm{A}\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{K}$.

Alors M *est un* A*-module plat.*

[137] N.D.E. : C'est une version améliorée par O. Gabber d'un énoncé communiqué par M. Raynaud.

Démonstration. D'après le critère de platitude dans le cas nilpotent (cf. [**BAC**], III § 5.2, Th. 1), $M/\pi^n M$ est un module plat sur $A/\pi^n A$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il résulte alors de [**RG71**], II Lemme 1.4.2.1, que M est un A-module plat. Pour la commodité du lecteur, indiquons rapidement la démonstration. Posons $s = \pi^n$ et $P = M/sM$. Comme P est plat sur A/sA et que ce dernier est de dimension projective 1 sur A, il résulte de la suite spectrale des foncteurs composés que P est de Tor-dimension $\leqslant 1$ sur A. Or, comme M est R-plat donc sans π-torsion, M_K/M est la limite inductive des A-modules $\pi^{-n}M/M \simeq M/\pi^n M$, et donc M_K/M est également de Tor-dimension $\leqslant 1$. Comme on a la suite exacte $0 \to M \to M_K \to M_K/M \to 0$ et que par hypothèse M_K est plat sur A_K donc sur A, il en résulte que M est plat.

Pour être complet, indiquons aussi la démonstration plus simple suivante, signalée par O. Gabber. Soit I un idéal de type fini de A, on doit montrer que le morphisme $u : M \otimes_A I \to M$ est injectif. D'après l'hypothèse (ii), $u \otimes_R K$ est injectif, donc $\mathrm{Ker}(u)$ est un R-module de π-torsion. Il suffit donc de montrer que la partie de π-torsion de $M \otimes_A I$ est nulle ; or celle-ci est un quotient de $\mathrm{Tor}_1^A(M, I/\pi I)$, comme on le voit en tensorisant par M la suite exacte :

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\ \pi\ } I \longrightarrow I/\pi I \longrightarrow 0\ .$$

D'autre part, M étant sans π-torsion (car plat sur R), on obtient que $\mathrm{Tor}_i^A(M, \overline{A}) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$. Par conséquent, si $(P_\bullet)$ est une résolution projective du A-module M, alors $(P_\bullet \otimes_A \overline{A})$ est une résolution projective du $\overline{A}$-module $\overline{M} = M/\pi M$, et donc pour tout $\overline{A}$-module N, on a $\mathrm{Tor}_i^A(\overline{M}, N) = \mathrm{Tor}_i^{\overline{A}}(\overline{M}, N)$, et ceci est nul pour $i \geqslant 1$ puisque $\overline{M}$ est plat sur $\overline{A}$. On a donc $\mathrm{Tor}_1^A(M, I/\pi I) = 0$, ce qui prouve le lemme.

Remarque 12.8. — Soient S un schéma localement noethérien régulier de dimension 1, et X un S-schéma plat, quasi-séparé et quasi-compact sur S. Alors $\mathscr{A}(X)$ est un $\mathscr{O}_S$-module plat. En effet, on peut supposer que S est local, notons s son point fermé, i l'inclusion $X_s \hookrightarrow X$, et π une uniformisante de $R = \mathscr{O}(S)$; comme X est plat sur S, on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{\ \pi\ } \mathscr{O}_X \longrightarrow i_*(\mathscr{O}_{X_s}) \to 0$$

et donc, en prenant les sections globales, on obtient que $\mathscr{A}(X)$ est un R-module sans π-torsion, donc plat. [138] On obtient de plus que le morphisme de $\mathscr{A}((X_{af})_s) = \mathscr{A}(X)/\pi\mathscr{A}(X)$ vers $\mathscr{A}(X_s)$, induit par le morphisme $X \to X_{af}$, est *injectif.*

On peut maintenant démontrer la proposition suivante (cf. la remarque 11.11.1).

Proposition 12.9. — *Soient* S *un schéma localement noethérien régulier de dimension* $\leqslant 1$, G *un* S*-schéma en groupes plat, quasi-séparé et quasi-compact sur* S*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est affine sur* S.

(ii) G *est quasi-affine sur* S.

[138] N.D.E. : Ceci est vrai, plus généralement, si S est localement noethérien régulier de dimension $\leqslant 2$, cf. [**Ray70a**], VII 3.2.

(iii) G *opère fidèlement sur un* S*-schéma quasi-affine et plat* X.

(iv) G *opère linéairement et fidèlement sur un module quasi-cohérent* $\mathscr{E}$ *plat sur* S.

(v) *Le morphisme* $\rho : G \to G_{af}$ *est un monomorphisme.*

Démonstration. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente, ainsi que (ii) $\Rightarrow$ (iii) (prendre $X = G$).

Supposons (iii) vérifié. Comme $\mathscr{A}(G)$ et $\mathscr{A}(X)$ sont des $\mathscr{O}_S$-modules plats on obtient, en procédant comme en 11.11, que G opère (à droite) fidèlement sur X_{af} et opère donc (à gauche) linéairement et fidèlement sur le $\mathscr{O}_S$-module quasi-cohérent plat $\mathscr{A}(X)$.

D'autre part, si (iv) est vérifié alors, d'après 11.6.1 (ii), le monomorphisme $G \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_S}(\mathscr{E})$ se factorise à travers G_{af}, donc $G \to G_{af}$ est un monomorphisme.

Enfin, supposons (v) vérifié et montrons que $\rho : G \to G_{af}$ est un isomorphisme. Remplaçant S par une de ses composantes connexes, on peut supposer S irréductible, de point générique η. Comme la formation de G_{af} commute aux changements de base plats, on a $(G_{af})_\eta = (G_\eta)_{af}$, et donc le morphisme $G_\eta \to (G_\eta)_{af}$ est un monomorphisme, donc une immersion fermée, d'après 12.1, donc un isomorphisme puisque $\mathscr{O}((G_\eta)_{af}) = \mathscr{O}(G_\eta)$. Si $S = \mathrm{Spec}(\kappa(\eta))$ on a fini ; on peut donc supposer $\dim S = 1$.

Soit alors s un point fermé de S, montrons que $G_s \to (G_{af})_s$ est un isomorphisme et que ρ est plat en tous les points de G_s. Pour cela, on peut supposer que S est local, de point fermé s. Le morphisme $\rho_s : G_s \to (G_{af})_s$ obtenu par changement de base est un monomorphisme, donc une immersion fermée d'après 12.1, donc le morphisme $\mathscr{O}((G_{af})_s) \to \mathscr{O}(G_s)$, induit par ρ_s, est surjectif. Or, d'après la remarque précédente, il est aussi injectif, donc c'est un isomorphisme. (En particulier, ρ est donc surjectif).

Il résulte alors du lemme 12.7 que $\rho : G \to G_{af}$ est fidèlement plat. Comme G est quasi-compact sur S et G_{af} séparé sur S, alors ρ est aussi quasi-compact (cf. EGA I, 6.6.4). Par conséquent, ρ est un monomorphisme fidèlement plat et quasi-compact, donc un isomorphisme. Ceci prouve la proposition.

Enfin, démontrons la Prop. 2.1 de l'Exp. XVII, Appendice III ; en tenant compte de [**Per76**], Cor. 4.2.5, on a substitué dans les hypothèses « quasi-compact et quasi-séparé » à « de type fini » (si l'on suppose G de type fini, on peut utiliser 12.1 au lieu de *loc. cit.*).

Proposition 12.10. — *Soient* S *un schéma localement noethérien régulier de dimension* $\leqslant 1$*,* G *un* S*-schéma en groupes plat, quasi-compact et quasi-séparé.*

(i) *Le morphisme canonique* $\rho : G \to G_{af}$ *est fidèlement plat et quasi-compact. Par conséquent,* G_{af} *représente le faisceau* (fpqc) *quotient de* G *par* $N = \mathrm{Ker}(\rho)$.

(ii) *Si de plus* G *est de type fini sur* S*, alors* ρ *est de présentation finie et* G_{af} *représente le faisceau* (fppf) *quotient de* G *par* N *et est de type fini sur* S.

(iii) *Supposons de plus* G_η affine *pour tout point maximal* η *de* S*. Alors* N *est un* S*-groupe étale, et est le groupe unité si* G *est séparé sur* S.

Démonstration. D'abord, comme G_{af} est affine donc séparé sur S, alors ρ est quasi-compact (cf. EGA I, 6.6.4) et le noyau $N = \mathrm{Ker}(\rho)$ est un sous-groupe fermé de G.

De plus, remplaçant S par une de ses composantes connexes, on peut supposer S irréductible, de point générique η.

Remarquons que, pour prouver (i) et (ii), il suffit de montrer que ρ est fidèlement plat car alors, d'après l'Exp. IV, 5.1.7.1, G_{af} représente le faisceau (fpqc) quotient de G par N, et si de plus G est de type fini sur S, donc de présentation finie (S étant localement noethérien), alors, d'après 9.2 (xiii), ρ est de présentation finie (ainsi que $\mathrm{G}_{\mathrm{af}} \to \mathrm{S}$) et donc ρ est couvrant pour la toplogie (fppf).

On peut donc supposer $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$, où R est un anneau de valuation discrète (si $\dim \mathrm{S} = 1$) ou bien le corps $\kappa(\eta)$ (si $\dim \mathrm{S} = 0$). Notons s le point fermé de S. Comme la formation de G_{af} commute aux changements de base plats, le morphisme canonique $\mathrm{G}_\eta \to (\mathrm{G}_\eta)_{\mathrm{af}}$ s'identifie au morphisme $\rho_\eta : \mathrm{G}_\eta \to (\mathrm{G}_{\mathrm{af}})_\eta$, et comme $\mathscr{O}((\mathrm{G}_{\mathrm{af}})_\eta) = \mathscr{O}((\mathrm{G}_\eta)_{\mathrm{af}}) = \mathscr{O}(\mathrm{G}_\eta)$, alors ρ_η est fidèlement plat d'après [**Per76**], 4.2.5 (voir aussi l'ajout VI_{A}, 6.6). Si $\dim \mathrm{S} = 1$, on obtient de même que ρ_s est fidèlement plat, puisque le morphisme $\mathscr{O}((\mathrm{G}_{\mathrm{af}})_s) \to \mathscr{O}(\mathrm{G}_s)$ est injectif, d'après la remarque 12.8. Donc, d'après le lemme 12.7, ρ est fidèlement plat. Ceci prouve (i) et (ii). En particulier, N est plat sur S.

Supposons maintenant G_η affine. Comme ρ_η coïncide avec le morphisme canonique $\mathrm{G}_\eta \to (\mathrm{G}_\eta)_{\mathrm{af}}$, son noyau N_η est le groupe unité. Montrons que N est étale sur S. Comme N est plat sur S, il reste à voir que N_s est étale sur $\kappa(s)$, pour tout point $s \neq \eta$ de S. Il n'y a rien à montrer si $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\kappa(\eta))$, donc on peut supposer que $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$, où R est un anneau de valuation discrète. Soient s le point fermé de S, K le corps des fractions de R, et π une uniformisante. Soient $x \in \mathrm{N}_s$ et U_x un voisinage ouvert affine de x dans N ; comme N est plat sur S, alors $\mathrm{U}_x \cap \mathrm{N}_\eta$ est non vide, donc égal à $\{\varepsilon(\eta)\}$, où ε désigne la section unité. Donc $\mathrm{A} = \mathscr{O}(\mathrm{U}_x)$ est une R-algèbre plate, telle que $\mathrm{A}_{\mathrm{K}} = \mathrm{K}$ et $\pi^{-1} \notin \mathrm{A}$ (puisque π appartient à l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\mathrm{U},x}$). Il en résulte que $\mathrm{A} = \mathrm{R}$, et donc la projection $\mathrm{U}_x \to \mathrm{S}$ est un isomorphisme. Ceci prouve que N est étale sur S ; si de plus G est séparé sur S, alors l'isomorphisme inverse $\mathrm{S} \to \mathrm{U}_x$ égale la section unité (puisqu'ils coïncident sur l'ouvert dense $\{\eta\}$ de $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$), donc N est le groupe unité. La proposition est démontrée.

On obtient en particulier le corollaire suivant, dont deux autres démonstrations se trouvent dans [**An73**], Prop. 2.3.1 et [**PY06**], Prop. 3.1

Corollaire 12.10.1. — *Soient* R *un anneau de valuation discrète,* K *son corps des fractions,* G *un* R*-schéma en groupes séparé, plat et de type fini sur* R*. Si* G_{K} *est affine, alors* G *est affine.*

Remarques 12.10.2. — (a) D'une part, O. Gabber nous a indiqué des exemples où G est un groupe plat et de type fini sur un anneau de valuation discrète, dont la fibre générique est une variéte abélienne, et où le noyau N de $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathrm{af}}$ n'est pas lisse.

(b) D'autre part, signalons que M. Raynaud a donné un exemple, pour S étant l'espace affine de dimension 2 sur un corps k, d'un S-schéma en groupes lisse et quasi-affine, à fibres affines et connexes, qui n'est pas affine sur S, cf. [**Ray70a**], § VII.3, p. 116.

13. Groupes affines plats sur une base régulière de dimension $\leqslant 2$

[139] Commençons par remarquer que l'argument bien connu qui montre que tout groupe algébrique affine sur un corps k est linéaire, ainsi que le lemme 11.12, s'étendent au cas d'un schéma en groupes G, affine, plat et de type fini sur un schéma de base S, noethérien régulier de dimension $\leqslant 2$. Pour S de dimension $\leqslant 1$, ceci prouve le point (b) de la remarque 11.11.1. L'extension au cas où $\dim \mathrm{S} = 2$ repose sur le lemme suivant, qui nous a été communiqué par O. Gabber.

Lemme 13.1. — *Soient* S *un schéma noethérien normal, $\mathscr{A}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent plat, $\mathscr{F}$ un sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module de type fini de $\mathscr{A}$, $\mathscr{F}^{**}$ son bidual, et* U *le lieu de platitude de $\mathscr{F}$, i.e. l'ensemble des points $s \in \mathrm{S}$ tels que $\mathscr{F}_s$ soit un $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$-module plat.*

(i) U *est un ouvert de* S *et $\mathscr{F}^{**} = j_*j^*(\mathscr{F})$, où j désigne l'inclusion* $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{X}$.

(ii) *Le morphisme canonique $j_*(\mathscr{E}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A} \to j_*(\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{U}}} j^*(\mathscr{A}))$ est un isomorphisme, pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{E}$.*

(iii) *En particulier, $\mathscr{V} = j_*j^*(\mathscr{F})$ est un sous-module de $\mathscr{A} = j_*j^*(\mathscr{A})$, et le morphisme canonique $\mathscr{V} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A} \to j_*j^*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A})$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Remplaçant S par une de ses composantes connexes, on peut supposer S intègre. D'après EGA IV_2, 2.1.12, le lieu de platitude de $\mathscr{F}$, i.e. l'ensemble des points $s \in \mathrm{S}$ tels que $\mathscr{F}_s$ soit un $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$-module plat, est un ouvert U de S ; notons j l'inclusion $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{S}$. Comme $\mathscr{A}_s$ est plat, donc sans torsion, il en est de même de $\mathscr{F}_s$, donc U contient tous les points de codimension $\leqslant 1$. Par conséquent, d'après [**BAC**], VII, § 4.2, cor. du th. 1, on a $\mathscr{F}^{**} = j_*j^*(\mathscr{F})$, et l'on obtient donc un monomorphisme $\mathscr{F}^{**} \to j_*j^*(\mathscr{A})$.

La démonstration de (ii) est analogue à celle de EGA III, 1.4.15, rappelée en 11.0. D'autre part, comme S est normal, le morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \to j_*j^*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$ est un isomorphisme (cf. EGA IV_2, 5.8.6 et 5.10.5). D'après (ii) appliqué à $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathrm{U}}$, on a donc $\mathscr{A} = j_*j^*(\mathscr{A})$. Enfin, comme $j^*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}) = j^*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{U}}} j^*(\mathscr{A})$, la dernière assertion de (iii) découle de (ii) appliqué à $\mathscr{E} = j^*(\mathscr{F})$. Le lemme est démontré.

Par ailleurs, rappelons qu'un R-module de type fini M est dit réflexif si le morphisme canonique de M vers son bidual M^{**} est un isomorphisme. Lorsque R est un anneau noethérien régulier de dimension $\leqslant 2$, ceci entraîne que M est *projectif*. En effet, pour tout R-module de type fini N, considérons une résolution $\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_0 \to \mathrm{N} \to 0$, où L_0 et L_1 sont des R-modules finis libres, alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{N}^* \longrightarrow \mathrm{L}_0^* \longrightarrow \mathrm{L}_1^* \longrightarrow \mathrm{Q} \longrightarrow 0,$$

où Q désigne le conoyau de $\mathrm{L}_0^* \to \mathrm{L}_1^*$, et comme R est de dimension homologique $\leqslant 2$ (cf. [**BAC**], X § 4.2, cor. 1 du th. 1), il en résulte que N^* est projectif.

Proposition 13.2. — *Soient* S *un schéma noethérien régulier de dimension $\leqslant 2$,* G *un* S*-groupe affine et plat, $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ son algèbre affine.*

---

[139] N.D.E. : On a ajouté cette section.

(i) *Si* G *est de type fini sur* S, *il est isomorphe à un sous-groupe fermé de* $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{V})$, *pour un certain* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module* $\mathscr{V}$ *localement libre de rang fini. Si de plus* S *est affine, on peut prendre* $\mathscr{V} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}^{\oplus d}$ *pour un certain* d*, d'où* $\mathrm{H} = \mathrm{GL}_{d,\,\mathrm{S}}$.

(ii) $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ *est limite inductive filtrante de sous-*$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-algèbres de Hopf plates de type fini.*

Démonstration. Soit $\mathscr{B}$ une sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre de type fini de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$. Comme tout module cohérent sur un ouvert de S s'étend en un module cohérent sur S (cf. EGA I, 9.4.5), il existe un sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module cohérent $\mathscr{M}$ de $\mathscr{B}$ qui engendre $\mathscr{B}$ comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre (*loc. cit.*, 9.6.5). D'après 11.10.bis, $\mathscr{M}$ est contenu dans un sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module cohérent G-stable $\mathscr{F}$. (N. B. Comme G est ici affine sur S, la démonstration de *loc. cit.* s'écrit plus simplement : on peut y remplacer $f_*f^*(\mathscr{E})$ par $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A}(\mathrm{G})$, etc.)

Soit j l'inclusion $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{S}$, où U désigne le lieu de platitude de $\mathscr{F}$. D'après le lemme 13.1 et le rappel qui le suit, $\mathscr{V} = j_*j^*(\mathscr{F})$ est un sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$, et comme le morphisme canonique

$$\mathscr{V} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G}) \longrightarrow j_*j^*(\mathscr{F} \otimes \mathscr{A}(\mathrm{G}))$$

est un isomorphisme, alors $\mathscr{V}$ est un sous-G-module de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$. L'action de G sur $\mathscr{V}$ induit alors un morphisme de S-groupes affines $\rho_{\mathscr{V}} : \mathrm{G} \to \mathrm{H} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{V})$ et donc un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres de Hopf $\phi_{\mathscr{V}} : \mathscr{A}(\mathrm{H}) \to \mathscr{A}(\mathrm{G})$. Notons $\mathscr{A}_{\mathscr{V}}$ l'image de $\phi_{\mathscr{V}}$; c'est l'algèbre affine d'un sous-groupe fermé $\mathrm{G}_{\mathscr{V}}$ de H, qui est l'image fermée de $\rho_{\mathscr{V}}$. Montrons que $\mathscr{A}_{\mathscr{V}}$ contient $\mathscr{B}$.

La question étant locale sur S, on peut supposer que $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ et que $\mathrm{V} = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{V})$ est un R-module libre de base $v_1, \dots, v_n$; dans ce cas $\mathrm{H} \simeq \mathrm{GL}_{n,\mathrm{R}}$ et $\mathscr{A}(\mathrm{H})$ est engendrée comme R-algèbre par les « coefficients matriciels » c_{ij} et l'élément d^{-1}, où d désigne le déterminant. Soit Δ (resp. ε) la comultiplication (resp. l'augmentation) de A. Pour $j = 1, \dots, n$, écrivons $\Delta(v_j) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes a_{ij}$; alors $a_{ij} = \phi(c_{ij})$ appartient à $\mathrm{Im}(\phi)$. D'autre part, comme V est un sous-R-module de A, on peut utiliser l'égalité $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}}) \circ \Delta = \mathrm{id}_{\mathrm{A}}$, qui entraîne que $v_j = \sum_i \varepsilon(v_i)a_{ij}$ appartient à $\mathrm{Im}(\phi)$. Comme V contient un système de générateurs de $\mathrm{B} = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{B})$, il en résulte que $\mathrm{B} \subset \mathrm{Im}(\phi)$.

Si G est de type fini sur S, on peut prendre $\mathscr{B} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$ et ϕ est alors surjectif, donc le morphisme de S-groupes $\mathrm{G} \to \mathrm{H} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{V})$ est une immersion fermée.

Si de plus S est affine, il existe un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre $\mathscr{V}'$ de rang fini tel que $\mathscr{V} \oplus \mathscr{V}' = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}^d$ comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules. Considérant $\mathscr{V}'$ comme G-module trivial, on peut remplacer $\mathscr{V}$ par $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}^d$, et l'on obtient ainsi que G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{d,\,\mathrm{S}}$.

Enfin, revenons au cas d'un S-groupe affine et plat G arbitraire. D'après EGA I, 9.4.9, $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est la réunion de ses sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules cohérents $\mathscr{M}$, donc aussi des sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres de Hopf $\mathscr{A}_{\mathscr{V}}$ comme plus haut, d'où (ii).

Exemple 13.3. — Soit R un anneau de valuation discrète, d'uniformisante π et de corps des fractions K. Considérons le système projectif filtrant de R-groupes :

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{R}} \xrightarrow{\times\pi} \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{R}} \xrightarrow{\times\pi} \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{R}}$$

(qui correspond au système inductif $\mathrm{R}[\mathrm{X}_0] \to \mathrm{R}[\mathrm{X}_1] \to \mathrm{R}[\mathrm{X}_2] \to \cdots$, où les morphismes de transition sont donnés par $\mathrm{X}_n = \pi \mathrm{X}_{n+1}$). Sa limite projective G est un R-schéma en groupes affine plat, non de type fini, dont la fibre spéciale est triviale et dont la fibre générique est $\mathbb{G}_{a,\mathrm{K}}$; la R-algèbre affine $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est le sous-anneau de K[X] formé des polynômes dont le coefficient constant appartient à R. (N. B. On a déjà rencontré cet exemple dans la remarque 11.10.1.) Notons que G représente le foncteur qui à toute R-algèbre B associe l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B, où $x_n = \pi x_{n+1}$ pour tout n. (En particulier, chaque x_n est indéfiniment π-divisible.)

Soit maintenant S un schéma noethérien tel que tout $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module cohérent soit le quotient d'un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module localement libre de type fini ; c'est le cas, par exemple, si S est un schéma séparé noethérien régulier, cf. SGA 6, Exp. II, 2.1.1 et 2.2.7. (On peut montrer que tout schéma noethérien régulier de dimension $\leqslant 1$ a aussi cette propriété ; par contre elle n'est pas vérifiée lorsque S est le plan affine sur un corps k, dont l'origine a été dédoublée, cf. *loc. cit.*, 2.2.7.2.)

Définition 13.4. — Soit G un S-groupe affine et plat. Suivant R. W. Thomason ([**Th87**], 2.1), disons que le couple (G, S) possède la propriété de résolution équivariante, ou vérifie (RE), si pour tout G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module cohérent $\mathscr{F}$, il existe un G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module $\mathscr{E}$ localement libre de rang fini, et un épimorphisme G-équivariant $\mathscr{E} \to \mathscr{F}$.

Dans *loc. cit.*, Th. 3.1, Thomason démontre le résultat ci-dessous, sous l'hypothèse que G soit essentiellement libre sur S (cf. la remarque plus bas). Gabber nous a indiqué la démonstration plus simple ci-dessous, qui n'utilise pas cette hypothèse.

Proposition 13.5. — *Soient* S *un schéma noethérien et* G *un* S*-groupe affine, plat et de type fini, d'algèbre affine* $\mathscr{A}(\mathrm{G})$. *On suppose que* (G, S) *vérifie* (RE). *Alors :*

(i) G *est isomorphe à un sous-groupe fermé de* $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\mathscr{V})$, *pour un certain* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-module* $\mathscr{V}$ *localement libre de rang fini.*

(ii) *Si de plus* S *est affine, on peut prendre* $\mathscr{V} = \mathscr{O}_\mathrm{S}^{\oplus d}$ *pour un certain* n, *d'où* $\mathrm{H} = \mathrm{GL}_{d,\mathrm{S}}$.

La démonstration est analogue à celle de 13.2. Comme dans *loc. cit.*, il existe un sous-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module cohérent G-stable $\mathscr{F}$ qui engendre $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$ comme $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-algèbre. Remplaçant S par une de ses composantes connexes, on peut supposer S connexe. D'après l'hypothèse (RE), il existe un G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module $\mathscr{E}$ localement libre de rang n, et un épimorphisme de $\mathscr{A}$-comodules $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$. Posons $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\mathscr{E})$, c'est un S-schéma en groupes, localement isomorphe à $\mathrm{GL}_{n,\mathrm{S}}$. L'action de G sur $\mathscr{E}$ induit un morphisme de S-groupes affines $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$, correspondant à un morphisme de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-algèbres de Hopf $\phi : \mathscr{A}(\mathrm{H}) \to \mathscr{A}(\mathrm{G})$. Montrons que ρ est une immersion fermée.

La question étant locale sur S, on peut supposer que $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ et que $\mathrm{V} = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})$ est un R-module libre de base $v_1, \dots, v_n$; dans ce cas $\mathrm{H} \simeq \mathrm{GL}_{n,\mathrm{R}}$ et $\mathrm{B} = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{A}(\mathrm{H}))$ est engendrée comme R-algèbre par les « coefficients matriciels » c_{ij} et l'élément d^{-1}, où d désigne le déterminant. Soit Δ (resp. ε) la comultiplication (resp. l'augmentation) de $\mathrm{A} = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{A}(\mathrm{G}))$, soit $\mu : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{A}$ la structure de A-comodule sur V, et soit $\mathrm{F} = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{F})$. Pour $j = 1, \ldots, n$, écrivons

$$\mu(v_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes a_{ij}$$

alors $\phi(c_{ij}) = a_{ij}$. D'autre part, comme $\pi : \mathrm{V} \to \mathrm{F}$ est un morphisme de A-comodules, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(v_i) \otimes a_{ij} = (\pi \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{id}_{\mathrm{A}})(\mu(v_j)) = \Delta(\pi(v_j))$$

et donc

$$\pi(v_j) = (\varepsilon \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{id}_{\mathrm{A}})\Delta(\pi(v_j)) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\pi(v_i)\, a_{ij} = \phi\Big(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon\pi(v_i)\, c_{ij}\Big).$$

Donc $\phi(\mathrm{B})$ contient $\pi(\mathrm{V}) = \mathrm{F}$, qui engendre A comme R-algèbre, et donc ϕ est surjectif. Ceci montre que ρ est une immersion fermée, d'où l'assertion (i).

Si de plus S est affine, il existe un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre $\mathscr{V}'$ de rang fini tel que $\mathscr{V} \oplus \mathscr{V}' = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}^{d}$ comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules. Considérant $\mathscr{V}'$ comme G-module trivial, on peut remplacer $\mathscr{V}$ par $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}^{d}$, et l'on obtient ainsi que G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{d,\mathrm{S}}$. La proposition est démontrée.

Remarques 13.6. — (a) Pour être complet, esquissons rapidement l'argument de Thomason ([**Th87**], Th. 3.1), en conservant les notations précédentes. L'épimorphisme G-équivariant $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ induit une immersion fermée $\tau : \mathrm{G} \to \mathbb{V}(\mathscr{E})$ telle que $\tau(g'g) = \tau(g') \cdot g$ (N. B. : G opère à droite sur $\mathbb{V}(\mathscr{E})$) et l'on a un isomorphisme $\mathrm{H} \simeq \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathbb{V}(\mathscr{E}))^{\mathrm{op}}$, qui est compatible avec les opérations de G à gauche sur $\mathscr{E}$ et à droite sur $\mathbb{V}(\mathscr{E})$. Soit alors N le transporteur strict $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{H}}(\tau(\mathrm{G}), \tau(\mathrm{G}))$; lorsque G est essentiellement libre sur S, il résulte de 6.2.4 e) que N est un sous-schéma en groupes fermé de H, donc affine sur S. De plus, ρ se factorise en un morphisme de S-groupes $\rho' : \mathrm{G} \to \mathrm{N}$. D'autre part, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $h \in \mathrm{N}(\mathrm{S}')$, posons $\pi(h) = \tau(1) \cdot h$ (où 1 est l'élément neutre de $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$) ; ceci définit un morphisme de S-schémas $\pi : \mathrm{N} \to \tau(\mathrm{G})$, qui est une rétraction de ρ' (lorsqu'on identifie G à $\tau(\mathrm{G})$). Comme N est séparé sur S, il en résulte que ρ' est une immersion fermée.

(b) Il semble que la démonstration de [**Th87**], Th. 3.1 nécessite l'hypothèse que G soit essentiellement libre sur S, qui ne figure pas dans *loc. cit.* (l'auteur invoquant à la place le fait que H est essentiellement libre). Toutefois cette hypothèse est vérifiée lorsque G est *réductif* (cf. Exp. XXII 5.7.8), donc est vérifiée dans tous les cas considérés dans *loc. cit.*, Cor. 3.2. En particulier, Thomason démontre dans *loc. cit.*, 2.5, que si S est séparé noethérien régulier de dimension $\leqslant 2$, et si G est affine, de présentation finie, et tel que $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ soit un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement projectif, alors (G, S) vérifie (RE) ; d'après 13.5, ceci donne 13.2 sous une hypothèse légèrement plus restrictive.

Pour terminer, signalons que la démonstration de [**Th87**], 2.5, peut être légèrement simplifiée, comme suit. (Pour abréger, on se place dans la situation où $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ est affine.)

Proposition 13.7. — *Soient* R *un anneau noethérien régulier de dimension* $\leqslant 2$, C *une* R*-cogèbre, projective comme* R*-module, et* F *un* C*-comodule, de type fini sur* R*. Alors* F *est le quotient d'un* C*-comodule* V*, projectif de type fini sur* R.

Démonstration. Remplaçant Spec(R) par une de ses composantes connexes, on peut supposer R intègre, de corps des fractions K. Notons Δ (resp. ε) la comultiplication (resp. l'augmentation) de C et $\rho : \mathrm{F} \to \mathrm{F} \otimes \mathrm{C}$ la structure de comodule sur F. Soit $\pi : \mathrm{W} \to \mathrm{F}$ un morphisme surjectif, où W est un R-module libre de rang fini. On munit $\mathrm{W} \otimes \mathrm{C}$ de la structure de comodule définie par $\mathrm{id}_{\mathrm{W}} \otimes \Delta$, et de même pour $\mathrm{F} \otimes \mathrm{C}$. Alors $\rho : \mathrm{F} \to \mathrm{F} \otimes \mathrm{C}$ est un morphisme de C-comodules, qui admet $\mathrm{id}_{\mathrm{F}} \otimes \varepsilon$ pour section.

Soit W' le C-comodule défini par le carré cartésien ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{W}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{F} \arrow[d, "\rho"] \\ \mathrm{W} \otimes \mathrm{C} \arrow[r, "\pi \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{C}}"] & \mathrm{F} \otimes \mathrm{C} \end{tikzcd}$$

i.e. W' s'identifie au noyau du morphisme $\mathrm{W} \otimes \mathrm{C} \to (\mathrm{F} \otimes \mathrm{C})/\rho(\mathrm{F})$, et la projection $\pi' : \mathrm{W}' \to \mathrm{F}$, donnée par $x \mapsto (\pi \otimes \varepsilon)(x)$, est surjective. Comme F est un R-module de type fini, il existe un sous-comodule V' de W', de type fini sur R, tel que $\pi'(\mathrm{V}') = \mathrm{F}$. Comme $\mathrm{W} \otimes \mathrm{C}$ est sans R-torsion, il en est de même de V', donc remplaçant F par V', on peut supposer au départ que F est *sans torsion*.

Appliquant la construction précédente à ce nouvel F, on obtient V' comme ci-dessus. Considérons alors le sous-comodule V, noyau du morphisme

$$\mathrm{W} \otimes \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{E} = \frac{\mathrm{W} \otimes \mathrm{C} \otimes \mathrm{K}}{\mathrm{V}' \otimes \mathrm{K}}.$$

Alors V contient V' et $\mathrm{Q} = (\mathrm{W} \otimes \mathrm{C})/\mathrm{V}$ est un sous-R-module du K-espace vectoriel E ; posons $\mathrm{Q}' = \mathrm{E}/\mathrm{Q}$. Comme $\mathrm{W} \otimes \mathrm{C}$ et E sont des R-modules plats, on obtient que, pour tout R-module N,

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{R}}(\mathrm{V}, \mathrm{N}) \simeq \mathrm{Tor}_2^{\mathrm{R}}(\mathrm{Q}, \mathrm{N}) \simeq \mathrm{Tor}_3^{\mathrm{R}}(\mathrm{Q}', \mathrm{N})$$

et comme R est régulier de dimension $\leqslant 2$, le terme de droite est nul. Ceci montre que V est un R-module plat. Montrons enfin que V est un R-module de type fini. Posons $\mathrm{M} = \mathrm{W} \otimes \mathrm{C}$; il résulte de la définition que V/V' est isomorphe au sous-module de R-torsion $(\mathrm{M}/\mathrm{V}')_{\mathrm{tors}}$ de M/V'.

Comme M est un R-module projectif, il existe un R-module projectif P tel que $\mathrm{M} \oplus \mathrm{P}$ soit un R-module libre L. Alors $(\mathrm{M}/\mathrm{V}')_{\mathrm{tors}} \simeq (\mathrm{L}/\mathrm{V}')_{\mathrm{tors}}$. D'autre part, comme V' est de type fini, il existe un facteur direct $\mathrm{L}' \simeq \mathrm{R}^n$ de L tel que $\mathrm{V}' \subset \mathrm{L}'$, et l'on a donc aussi $(\mathrm{L}/\mathrm{V}')_{\mathrm{tors}} \simeq (\mathrm{L}'/\mathrm{V}')_{\mathrm{tors}}$, et ce dernier est de type fini puisque $(\mathrm{L}'/\mathrm{V}')$ l'est. Par conséquent, V est un R-module plat de type fini, donc projectif de type fini (R étant noethérien). La proposition 13.7 est démontrée.

Bibliographie

(140)

[An73] S. Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension* 1, Mém. Soc. Math. France **33** (1973), 5-79.

[Ba55] I. Barsotti, *Un teorema di struttura per le varietà gruppali*, Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **18** (1955), 43-50.

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron Models*, Springer-Verlag, 1990.

[BAC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap. I-IV, V-VII et X, Masson, 1985 et 1998.

[BTop] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. I-IV, Hermann, 1971.

[Br09] M. Brion, *Anti-affine algebraic groups*, J. Algebra **321** (2009), n°3, 934-952.

[Ch60] C. Chevalley, *Une démonstration d'un théorème sur les groupes algébriques*, J. Maths. Pure Appl. **39** (1960), 307-317.

[Co02] B. Conrad, *A modern proof of Chevalley's theorem on algebraic groups*, J. Ramanujan Math. Soc. **17** (2002), 1-18.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[Gr73] L. Gruson, *Dimension homologique des modules plats sur un anneau noethérien*, Symposia Mathematica **XI** (1973), 243-254.

[Kn71] D. Knutson, *Algebraic spaces*, Lect. Notes Maths. **203**, Springer-Verlag, 1971.

[Ma07] B. Margaux, *Passage to the Limit in Non-Abelian Čech Cohomology*, J. Lie Theory **17** (2007), 591-596.

[MW94] A. Masuoka, D. Wigner, *Faithful flatness of Hopf algebras*, J. Algebra **170** (1994), 156-184.

[Per76] D. Perrin, *Approximation des schémas en groupes, quasi-compacts sur un corps*, Bull. Soc. Math. France **104** (1976), 323-335.

[Pes66] C. Peskine, *Une généralisation du « Main Theorem » de Zariski*, Bull. Sci. Math. **90** (1966), 119-127.

[PY06] G. Prasad, J.-K. Yu, *On quasi-reductive group schemes*, J. Alg. Geom. **15** (2006), 507-549.

[Ray70a] M. Raynaud, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lect. Notes Maths. **119**, Springer-Verlag, 1970.

[Ray70b] M. Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*, Lect. Notes Maths. **169**, Springer-Verlag, 1970.

[RG71] M. Raynaud, L. Gruson, *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. math. **13** (1971), 1-89.

[Ro56] M. Rosenlicht, *Some basic theorems on algebraic groups*, Amer. J. Math. **78** (1956), 401-443.

(140) N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé

[SS09] C. Sancho de Salas, F. Sancho de Salas, *Principal bundles, quasi-abelian varieties and structure of algebraic groups*, J. Algebra **322** (2009), n°8, 2751-2772.

[Se68] J.-P. Serre, *Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés*, Publ. math. I.H.É.S. **34** (1968), 37-52.

[Se99] C. S. Seshadri, *Chevalley : some reminiscences*, Transform. Groups **4** (1999), n^{os} 2-3, 119-125.

[Ta72] M. Takeuchi, *A correspondence between Hopf ideals and sub-Hopf algebras*, Manuscripta Math. **7** (1972), 251-270.

[Ta79] M. Takeuchi, *Relative Hopf modules – Equivalences and freeness criteria*, J. Algebra **60** (1979), 452-471.

[Th87] R. W. Thomason, *Equivariant resolution, linearization, and Hilbert's fourteenth problem over arbitrary base schemes*, Adv. Math. **65** (1987), 16-34.

EXPOSÉ $\mathrm{VII_A}$

ÉTUDE INFINITÉSIMALE DES SCHÉMAS EN GROUPES

par P. Gabriel

Dans l'exposé II nous nous étions limités à l'étude des invariants différentiels du 411
premier ordre et nous n'avions pas abordé certains phénomènes spéciaux à la caractéristique $p > 0$ ou à la caractéristique 0. Notre objet dans la partie A de cet exposé est de combler cette lacune.

D'ailleurs, l'étude infinitésimale d'ordre quelconque d'un schéma en groupes est reliée à celle du groupe formel associé ; l'objet de la deuxième partie de cet exposé est de présenter les premières définitions et propriétés concernant les groupes formels.

A) **Opérateurs différentiels et p-algèbres de Lie** [(*)]

1. Opérateurs différentiels

Dans cette section, ainsi que dans les sections 2 et 3, S désigne un schéma fixé et les produits considérés sont des produits cartésiens dans la catégorie des S-schémas. [(1)] Si X est un S-schéma, nous notons $p_{\mathrm{X/S}}$, p_{X} ou simplement p le morphisme structural de X dans S.

1.1. Soit $u : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme de S-schémas et munissons l'image directe $u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ du faisceau structural de Y de la structure de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module induite par u. Le faisceau $\mathscr{H} = \mathscr{H}om_{p_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}, u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}))$ des homomorphismes de $p_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-modules de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ 412
dans $u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ est donc muni naturellement d'une structure de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-bimodule : si U est un ouvert de X, f et d des sections de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ et $\mathscr{H}$ sur U, fd et df sont respectivement les morphismes $g \mapsto fd(g)$ et $g \mapsto d(fg)$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ dans $u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$. Nous écrirons désormais $(\mathrm{ad}\, f)(d)$ au lieu de $fd - df$.

(*) La partie A du présent exposé n'avait pas été traitée sérieusement dans les exposés oraux.

(1) N.D.E. : En particulier, si X et Y sont deux S-schémas, $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ est noté simplement $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$. D'autre part, signalons que pour le contenu des sections 1 et 2, on peut se reporter à [**DG70**], § II.4, n$^{\mathrm{os}}$ 5–6, voir aussi [**Ja03**], § I.7.

Définition 1.1.1. — Une S-*déviation d'ordre* $\leqslant n$ est par définition un couple $\mathrm{D} = (u, d)$ formé d'un morphisme de S-schémas $u : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ et d'un morphisme de $p_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-modules $d : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ tel que, pour tout ouvert U de X et toutes les suites de $n+1$ sections $f_0, \ldots, f_n \in \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$, on ait dans $\mathrm{Hom}_{p_{\mathrm{U}}^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}}, u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})|_{\mathrm{U}})$ l'égalité :

$$(*_n) \qquad (\mathrm{ad}\, f_0)(\mathrm{ad}\, f_1) \cdots (\mathrm{ad}\, f_n)(d) = 0. \quad ^{(2)}$$

Dans ce cas, nous dirons aussi que d est une S-*déviation de* u *d'ordre* $\leqslant n$. En particulier, une S-déviation de u d'ordre $\leqslant 0$ est un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ dans $u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$, c.-à-d., un élément de $\Gamma(\mathrm{Y}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$.

Définition 1.1.2. — Un morphisme de $p^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-modules $d : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ est une S-*déviation de* u si, pour tout point y de Y, il existe un voisinage ouvert U de $u(y)$ dans X et un voisinage ouvert V de y dans Y vérifiant les conditions suivantes :

a) $u(\mathrm{V}) \subset \mathrm{U}$;

b) si $v : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ est le morphisme induit par u, il y a un entier n tel que le morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{U}} \to v_*(\mathscr{O}_{\mathrm{V}})$ induit par d soit une S-déviation de v d'ordre $\leqslant n$. [3]

Si d est une S-déviation de u, nous disons aussi que le couple $\mathrm{D} = (u, d)$ est une S-déviation et il nous arrivera d'écrire $\mathrm{Y} \xrightarrow{\mathrm{D}} \mathrm{X}$ ou $\mathrm{Y} \xrightarrow[u]{d} \mathrm{X}$.

Lorsque d est l'homomorphisme d'algèbres $u^\natural : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ qui correspond au morphisme $u : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$, nous écrirons aussi u au lieu de D.

Remarques 1.1.3. — [4] Soit $\mathrm{Dév}(u)$ (resp. $\mathrm{Dév}^{\leqslant n}(u)$) l'ensemble des S-déviations de u (resp. S-déviations de u d'ordre $\leqslant n$). Il est muni d'une structure naturelle de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{Y})$-module : si $\lambda \in \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{Y})$, λd est la déviation qui envoie f sur $\lambda d(f)$, pour toute section f de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ sur un ouvert U.

Pour tout ouvert V de Y, posons $\mathscr{D}\acute{e}v(u)(\mathrm{V}) = \mathrm{Dév}(u|_{\mathrm{V}})$, c.-à-d., $\mathscr{D}\acute{e}v(u)(\mathrm{V})$ est l'ensemble des

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{V}} \in \mathrm{Hom}_{p^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}, (u|_{\mathrm{V}})_*(\mathscr{O}_{\mathrm{V}})) &\cong \mathrm{Hom}_{p^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})}((u|_{\mathrm{V}})^{-1}\mathscr{O}_{\mathrm{X}}, \mathscr{O}_{\mathrm{V}}) \\ &\cong \mathscr{H}om_{p^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})}(u^{-1}\mathscr{O}_{\mathrm{X}}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})(\mathrm{V}) \end{aligned}$$

---

(2) N.D.E. : On voit facilement que ceci équivaut à dire que, pour tout $x \in \mathrm{X}$ et $f_0, \ldots, f_n, g \in \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$, on a $(\mathrm{ad}\, f_0)(\mathrm{ad}\, f_1) \cdots (\mathrm{ad}\, f_n)(d_x)(g) = 0$. D'autre part, rappelons que l'isomorphisme d'adjonction :

$$\theta : \mathrm{Hom}_{p_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}, u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{p_{\mathrm{Y}}^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})}(u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}), \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$$

associe à tout morphisme de $p_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-modules $d : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ le morphisme $d' = \varepsilon \circ u^{-1}(d)$, où ε est le morphisme canonique $u^{-1}u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$. Réciproquement, pour tout $p_{\mathrm{Y}}^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-morphisme $d' : u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$, on a $\theta^{-1}(d') = u_*(d') \circ \eta$, où η est le morphisme canonique $\mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to u_*u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$. Il en résulte que d vérifie $(*_n)$ si et seulement si d' vérifie :

$$(*'_n) \qquad (\mathrm{ad}\, f_0) \cdots (\mathrm{ad}\, f_n)(d')(g) = 0$$

pour tout ouvert V de Y et $f_0, \ldots, f_n, g \in u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})(\mathrm{V})$.

(3) N.D.E. : Si X et u sont *quasi-compacts*, toute S-déviation de u est donc d'ordre $\leqslant n$, pour un certain entier n.

(4) N.D.E. : On a ajouté ces remarques, qui seront utiles dans 1.3, 1.4 et 2.1.

tels que, pour tout ouvert U de X, l'application $d_{\mathrm{V}}(\mathrm{U}) : \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U}) \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}(u^{-1}(\mathrm{U}) \cap \mathrm{V})$ vérifie $(*_n)$. Ceci définit un préfaisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-modules sur Y, et l'on voit facilement que c'est un *faisceau* (plus précisément, un sous-faisceau de $\mathscr{H}om_{p^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})}(u^{-1}\mathscr{O}_{\mathrm{X}}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$).

1.2. Considérons maintenant deux S-déviations $\mathrm{D} = (u, d)$ et $\mathrm{E} = (v, e)$:

$$\mathrm{Z} \xrightarrow[e]{v} \mathrm{Y} \xrightarrow[d]{u} \mathrm{X} \quad .$$

Lorsque U parcourt les ouverts de X, les applications composées

$$\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \xrightarrow{d(\mathrm{U})} \Gamma(u^{-1}\mathrm{U}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \xrightarrow{e(u^{-1}\mathrm{U})} \Gamma(v^{-1}u^{-1}\mathrm{U}, \mathscr{O}_{\mathrm{Z}})$$

définissent une S-déviation de uv que nous noterons de ; lorsque d est d'ordre $\leqslant m$ et **413**
e d'ordre $\leqslant n$, de est d'ordre $\leqslant m + n$. Nous écrirons aussi

$$(\dagger) \qquad \mathrm{D} \circ \mathrm{E} = (uv, de) \qquad {}^{(5)}$$

et nous dirons que $\mathrm{D} \circ \mathrm{E}$ ou DE est la S-*déviation composée*. Lorsque $d = u^\natural$ (c.-à-d., $\mathrm{D} = u$ avec la convention de 1.1), on dit aussi que DE est *l'image de* E *par* u.

L'application $(\mathrm{D}, \mathrm{E}) \mapsto \mathrm{D} \circ \mathrm{E}$ que nous venons de définir nous permettra désormais de parler de la *catégorie des* S-*déviations*, qui a pour objets les S-schémas, pour morphismes les S-déviations. [(6)]

Définition 1.2.0. — [(7)] Soit $w : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ un S-morphisme. Une S-*dérivation de* w, ou S-*dérivation de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ *dans* $w_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Z}})$, est un morphisme de $p^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-modules $d : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to w_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Z}})$ tel que, pour tout ouvert U de X et $f, g \in \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$,

$$d(fg) = w^\natural(f)d(g) + w^\natural(g)d(f).$$

Alors, d est une déviation de w d'ordre $\leqslant 1$, qui s'annule sur la section unité de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$. On notera $\mathrm{Dér}_{\mathrm{S}}(w)$ l'ensemble des S-dérivations de w ; c'est un $\mathscr{O}(\mathrm{Z})$-module.

Avec les notations de 1.2, prenons Y égal à $\mathrm{I}_{\mathrm{Z}} = \mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_{\mathrm{Z}}[t]$, où $t^2 = 0$, et v égal à la section zéro $\tau : \mathrm{Z} \to \mathrm{I}_{\mathrm{Z}}$, définie par le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$-algèbres $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}[t] \to \mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$ qui envoie t sur 0, et prenons e égal au morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$-modules $\sigma : \mathscr{O}_{\mathrm{Z}}[t]$ défini par $\sigma(1) = 0$ et $\sigma(t) = 1$, [(8)] qu'il est commode de noter ∂_t.

Si $u : \mathrm{I}_{\mathrm{Z}} \to \mathrm{X}$ est un morphisme vérifiant $w = u \circ s$, alors $\sigma \circ u^\natural$ est une S-dérivation de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ dans $w_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Z}})$. Réciproquement, à toute S-dérivation d on associe le morphisme $u : \mathrm{I}_{\mathrm{Z}} \to \mathrm{X}$ tel que $u = w$ sur les espaces sous-jacents, et

$$u^\natural(f) = w^\natural(f) + d(f)\, t,$$

---

(5) N.D.E. : On prendra garde qu'avec cette notation, de désigne la composée « d suivie de e ».

(6) N.D.E. : Souvent, on ne considère que les S-déviations du morphisme id_{X}, qui forment l'algèbre des S-opérateurs différentiels de X, cf. 1.4 plus bas. Toutefois, le cadre plus général des S-déviations fournit un langage « fonctoriel » commode pour démontrer des énoncés tels que : « si G est un S-groupe, l'algèbre des S-opérateurs différentiels sur G, invariants à gauche, est isomorphe à l'algèbre des S-déviations de la section unité $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$, cf. 2.1 et 2.4 plus loin.

(7) N.D.E. : On a détaillé ce paragraphe, en attribuant à cette définition (resp. au lemme qui suit) le numéro 1.2.0 (resp. 1.2.1).

(8) N.D.E. : On a ajouté ce qui suit, i.e. on a introduit la notation ∂_t.

pour toute section f de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ sur un ouvert U. On obtient ainsi :

Lemme 1.2.1. — *Soit* $\mathrm{E} = (\tau, \partial_t)$ *la déviation de* $\tau : \mathrm{Z} \to \mathrm{I}_{\mathrm{Z}}$ *définie plus haut. Pour tout* S-*morphisme* $w : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$, *l'application* $u \mapsto u \circ \mathrm{E}$ *est une bijection entre les* S-*morphismes* $u : \mathrm{I}_{\mathrm{Z}} \to \mathrm{X}$ *tels que* $u \circ s = w$, *et les* S-*dérivations de* w.

1.2.2. — Soit d une S-déviation de $u : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$. D'une part, d est évidemment une S′-déviation de u pour tout morphisme $s : \mathrm{S} \to \mathrm{S}'$.

D'autre part, soit $t : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ un morphisme de but S, et soient $u_{\mathrm{T}} : \mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{X}_{\mathrm{T}}$ le morphisme déduit de u par changement de base, et $t_{\mathrm{Y}} : \mathrm{Y}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{Y}$ et $t_{\mathrm{X}} : \mathrm{X}_{\mathrm{T}} \to \mathrm{X}$ les projections canoniques. Il existe alors une T-déviation de u_{T} et une seule, que nous noterons d_{T} ou $d \times \mathrm{T}$, qui vérifie l'égalité $t_{\mathrm{X}} d_{\mathrm{T}} = d t_{\mathrm{Y}}$, au sens de (†) plus haut, c.-à-d., pour tout ouvert U de X, on a un diagramme commutatif : [(9)]

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}(\mathrm{U}) \arrow[r, "t_{\mathrm{X}}^{\natural}"] \arrow[d, "d(\mathrm{U})"'] & \mathscr{O}(\mathrm{U} \times \mathrm{T}) \arrow[d, "d_{\mathrm{T}}(\mathrm{U}\times\mathrm{T})"] \\ \mathscr{O}(u^{-1}\mathrm{U}) \arrow[r, "t_{\mathrm{Y}}^{\natural}"] & \mathscr{O}(u^{-1}\mathrm{U} \times \mathrm{T}). \end{tikzcd}$$

Si l'on pose $\mathrm{D} = (u, d)$, on écrira aussi $\mathrm{D}_{\mathrm{T}} = (u_{\mathrm{T}}, d_{\mathrm{T}})$ et nous dirons que d_{T} *et* D_{T} *sont déduits de* d *et* D *par changement de base.*

414 ***1.2.3***. — Soient par exemple $u : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ et $v : \mathrm{Z} \to \mathrm{T}$ deux S-morphismes, d et e des S-déviations de u et v. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \times \mathrm{T} & \mathrm{Y} \times \mathrm{T} \arrow[l, "u_{\mathrm{T}}"'] \\ \mathrm{X} \times \mathrm{Z} \arrow[u, "v_{\mathrm{X}}"] & \mathrm{Y} \times \mathrm{Z} \arrow[l, "u_{\mathrm{Z}}"] \arrow[u, "v_{\mathrm{Y}}"'] \arrow[ul, "u\times v"'] \end{tikzcd}$$

et nous noterons $d \times e$ (*produit de* d *et* e) la S-déviation de $u \times v$ égale à $d_{\mathrm{T}} e_{\mathrm{Y}} = e_{\mathrm{X}} d_{\mathrm{Z}}$ (avec la convention (†) plus haut), c.-à-d., pour tout ouvert U de $\mathrm{X} \times \mathrm{T}$, si l'on désigne

(9) N.D.E. : Explicitement, si V est un ouvert affine de S et U (resp. U′) un ouvert affine de X (resp. T) au-dessus de V, de sorte que $\mathscr{O}_{\mathrm{X}\times\mathrm{T}}(\mathrm{U} \times \mathrm{U}') = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{V})} \mathscr{O}_{\mathrm{T}}(\mathrm{U}')$, alors $d_{\mathrm{T}}(\mathrm{U} \times \mathrm{U}')$ est la composée :

$$\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{V})} \mathscr{O}_{\mathrm{T}}(\mathrm{U}') \xrightarrow{d(\mathrm{U})\otimes\mathrm{id}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}(u^{-1}\mathrm{U}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{V})} \mathscr{O}_{\mathrm{T}}(\mathrm{U}') \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{Y}\times\mathrm{T}}(u^{-1}\mathrm{U} \times \mathrm{U}').$$

L'auteur a laissé au lecteur le soin de vérifier que d_{T} est bien définie, et les éditeurs font de même.

par W l'ouvert $v_{\mathrm{Y}}^{-1}u_{\mathrm{T}}^{-1}\mathrm{U} = u_{\mathrm{Z}}^{-1}v_{\mathrm{X}}^{-1}\mathrm{U}$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}(\mathrm{U}) \arrow[r, "d_{\mathrm{T}}(\mathrm{U})"] \arrow[d, "e_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})"'] \arrow[dr, dashed, "(d\times e)(\mathrm{U})"] & \mathscr{O}(u_{\mathrm{T}}^{-1}\mathrm{U}) \arrow[d, "e_{\mathrm{Y}}(u_{\mathrm{T}}^{-1}\mathrm{U})"] \\ \mathscr{O}(v_{\mathrm{X}}^{-1}\mathrm{U}) \arrow[r, "d_{\mathrm{Z}}(v_{\mathrm{X}}^{-1}\mathrm{U})"] & \mathscr{O}(\mathrm{W}). \end{tikzcd}$$

Si l'on pose $\mathrm{D} = (u, d)$ et $\mathrm{E} = (v, d)$, nous écrirons aussi $\mathrm{D} \times \mathrm{E} = (u \times v, d \times e)$.

1.3. [10] Soit $u : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un morphisme de S-schémas. Rappelons que l'isomorphisme d'adjonction :

$$\mathrm{Hom}_{p_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}, u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{p_{\mathrm{Y}}^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})}(u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}), \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$$

associe à tout morphisme de $p^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-modules $d : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ le morphisme $d' = \varepsilon \circ u^{-1}(d)$, où ε est le morphisme canonique $u^{-1}u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$.

Notons $\mathscr{J}_u$ (resp. $\mathscr{I}_u$) le noyau de l'homomorphisme d'algèbres $u^\natural : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ (resp. $u^{\natural\prime} : u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$) et soit $d : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$ un morphisme de $p^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-modules. Si U est un ouvert de X et $f_0, \ldots, f_n, g \in \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$, on voit facilement par récurrence sur n que la condition $(*_n)$ équivaut à l'égalité suivante (cf. EGA IV_4, 16.8.8.2) :

$$(**_n) \qquad 0 = \sum_{\mathrm{I}\subset[\![0,n]\!]} (-1)^{|\mathrm{I}|}\, u^\natural(f_{[\![0,n]\!]-\mathrm{I}})\, d(f_{\mathrm{I}}g),$$

où f_{I} désigne le produit des f_i, pour $i \in \mathrm{I}$. Il en résulte que si d vérifie $(*_n)$, alors d s'annule sur l'idéal $\mathscr{J}_u^{n+1}$.

Supposons maintenant Y égal à S ; alors $u : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$ est une section de $p : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$, donc est une immersion (cf. EGA I, 5.3.13). Alors, d'une part, $\varepsilon : u^{-1}u_*\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ est un isomorphisme, de sorte que $u^{-1}(\mathscr{J}_u) = \mathscr{I}_u$. D'autre part, on a un isomorphisme :

$$(\star) \qquad u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \cong \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \oplus \mathscr{I}_u.$$

Supposons que d s'annule sur $\mathscr{J}_u^{n+1}$. Alors $d' = \varepsilon \circ u^{-1}(d)$ s'annule sur $\mathscr{I}_u^{n+1}$ et donc d' vérifie les analogues $(**'_n)$ et $(*'_n)$ de $(**_n)$ et $(*_n)$, lorsque $f_0, \ldots, f_n \in \mathscr{I}_u(u^{-1}(\mathrm{U}))$. De plus, comme $(\mathrm{ad}\, a)(\phi) = 0$, pour tout $a \in \mathscr{O}_{\mathrm{S}}(u^{-1}(\mathrm{U}))$ et tout morphisme de $\mathscr{O}_{u^{-1}(\mathrm{U})}$-modules $\phi : u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}}) \to \mathscr{O}_{u^{-1}(\mathrm{U})}$, on déduit de $(\star)$ que d' vérifie l'analogue $(*'_n)$ de $(*_n)$. Il en résulte que d vérifie $(*_n)$. Par conséquent, on a obtenu :

Lemme. — *Si $u : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$ est une section de $p : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$, alors d est une* S*-déviation de u d'ordre $\leqslant n$ si et seulement si d' s'annule sur $\mathscr{I}_u^{n+1}$.*

Cette interprétation peut être généralisée comme suit. Soient $u : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ un S-morphisme quelconque et Γu le graphe de u, c'est-à-dire le morphisme $\mathrm{Y} \to \mathrm{Y} \times \mathrm{X}$

[10] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce paragraphe ; voir aussi la N.D.E. (2) dans 1.1.1.

de composantes id_{Y} et u. Pour toute S-déviation d de u d'ordre $\leqslant n$, on obtient par composition :

$$\mathrm{Y} \xrightarrow{\text{diag.}} \mathrm{Y}\times\mathrm{Y} \xrightarrow[u_{\mathrm{Y}}]{d_{\mathrm{Y}}} \mathrm{Y}\times\mathrm{X}$$

une Y-déviation de Γu d'ordre $\leqslant n$ que nous noterons Γd (*le graphe de* d).

Réciproquement, à toute Y-déviation e de Γu on associe la S-déviation composée $e_{\mathrm{X}} = \mathrm{pr}_2 \circ e$:

$$\mathrm{Y} \xrightarrow[\Gamma u]{e} \mathrm{Y}\times\mathrm{X} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathrm{X}.$$

On voit aussitôt que $(\Gamma d)_{\mathrm{X}} = d$, et l'égalité $\Gamma e_{\mathrm{X}} = e$ résulte du fait que e est $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-linéaire [11]. *On obtient ainsi un isomorphisme de* $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{Y})$*-modules* :

$$\begin{aligned}\big\{\text{S-déviations de } u \text{ d'ordre} \leqslant n\big\} &\xrightarrow{\ \sim\ } \big\{\text{Y-déviations de } \Gamma u \text{ d'ordre} \leqslant n\big\}\\ d &\mapsto \Gamma d.\end{aligned}$$

De plus, on voit facilement que d est une S-dérivation de u si et seulement Γd est une Y-dérivation de Γu.

415 Appelons $\mathscr{I}_{\Gamma u}$ le noyau de l'homomorphisme d'algèbres $(\Gamma u)^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}\times\mathrm{X}}) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ qui correspond à Γu. Tenant compte du lemme qui précède, on a obtenu :

Proposition. — *Soient* $u : \mathrm{Y}\to\mathrm{X}$ *un* S*-morphisme et* $\Gamma u : \mathrm{Y}\to\mathrm{Y}\times\mathrm{X}$ *son graphe. Les* S*-déviations de* u *d'ordre* $\leqslant n$ *s'identifient aux* Y*-déviations de* Γu *d'ordre* $\leqslant n$*, lesquelles sont en bijection avec*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}}\big((\Gamma u)^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}\times\mathrm{X}})/\mathscr{I}_{\Gamma u}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}\big).$$

1.3.1. — [12] Revenons au cas où $u : \mathrm{S}\to\mathrm{X}$ est une section de $p : \mathrm{X}\to\mathrm{S}$. Alors, l'homomorphisme $\phi : u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ admet une section, que nous noterons simplement $g \mapsto g\cdot 1$, de sorte que, avec les notations de 1.3, on a un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules :

$$(\star)\qquad u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \cong \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \oplus \mathscr{I}_u,$$

et pour toute section f de $u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$, $f - \phi(f)\cdot 1$ est une section de $\mathscr{I}_u$.

Soient d une S-déviation de u d'ordre $\leqslant 1$, et d' le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-morphisme $u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ correspondant à d. Si a, b sont des sections de $u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$, on a :

$$0 = d'\big((a-\phi(a)\cdot 1)(b-\phi(b)\cdot 1)\big) = d'(ab) - \phi(a)d'(b) - \phi(b)d'(a) + \phi(ab)d'(1).$$

Par conséquent, on voit que d est une S-dérivation de u (cf. 1.2.1 et N.D.E. (2)) si et seulement si $d'(1) = 0$. On obtient donc :

(11) N.D.E. : Si λ, f sont des sections locales de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$ et $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$, on a $(\Gamma e_{\mathrm{X}})(\lambda\otimes f) = \lambda\cdot e(1\otimes g)$, et ceci égale $e(\lambda\otimes g)$ puisque e est $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-linéaire.

(12) N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe.

Lemme. — *Les* S*-dérivations de* u *sont exactement les* S*-déviations de* u *d'ordre* 1 *qui s'annulent sur la section unité de* $\mathscr{O}_X$ *; elles correspondent au* $\mathscr{O}_S(S)$*-module*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{I}_u/\mathscr{I}_u^2, \mathscr{O}_S),$$

et l'on a un isomorphisme de $\mathscr{O}_S(S)$*-modules* $\mathrm{Dév}^{\leqslant 1}(u) \cong \mathscr{O}_S(S) \oplus \mathrm{Dér}_S(u)$.

Revenant au cas général, on en déduit, avec les notations de 1.3,

Corollaire. — *Soient* $u : Y \to X$ *un* S*-morphisme et* $\Gamma u : Y \to Y \times X$ *son graphe. On a un isomorphisme canonique de* $\mathscr{O}_Y(Y)$*-modules*

$$\mathrm{Dér}_S(u) \cong \mathrm{Dér}_Y(\Gamma u) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}_{\Gamma u}/\mathscr{I}_{\Gamma u}^2, \mathscr{O}_Y).$$

Définition 1.4. — Soit X un S-schéma. On appelle S-*opérateur différentiel* (resp. S-*opérateur différentiel d'ordre* $\leqslant n$) sur X toute S-déviation (resp. toute S-déviation d'ordre $\leqslant n$) du morphisme identique de X.

D'après 1.1, un S-opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$ est donc un endomorphisme de $p^{-1}(\mathscr{O}_S)$-module de $\mathscr{O}_X$ qui vérifie les égalités $(*_n)$ de 1.1. Nous désignerons par $\mathrm{Dif}^n_{X/S}$ le $\Gamma(\mathscr{O}_S)$-module [(13)] formé des S-opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant n$, par $\mathrm{Dif}_{X/S}$ celui formé de tous les S-opérateurs différentiels.

Comme nous l'avons vu en 1.2, on peut composer les S-déviations de id_X, ce qui munit $\mathrm{Dif}_{X/S}$ d'une structure de $\Gamma(\mathscr{O}_S)$-algèbre ; nous dirons que c'est l'*algèbre des opérateurs différentiels de* X/S.

De même, pour tout ouvert V de X, posons $\mathscr{D}\!if_{X/S}(V) = \mathrm{Dif}_{V/S} = \mathrm{Dév}(\mathrm{id}_V)$; d'après 1.1.3, ceci définit un *faisceau* de $\mathscr{O}_X$-modules, appelé le *faisceau des* S-*opérateurs différentiels sur* X. [(14)]

1.4.1. — Comme nous l'avons vu en 1.3, on peut interpréter les opérateurs différentiels de X/S au moyen du graphe du morphisme identique de X, c'est-à-dire du morphisme diagonal $\Delta = \Delta_{X/S}$ de X dans $X \times X$. Traduisons dans le contexte actuel les énoncés de 1.3.

Munissons $\mathscr{O}_{X\times X}$ de la structure de $\mathrm{pr}_1^{-1}(\mathscr{O}_X)$-algèbre définie par pr_1, de sorte que $\Delta^{-1}(\mathscr{O}_{X\times X})$ est muni d'une structure d'algèbre sur $\mathscr{O}_X = \Delta^{-1}\mathrm{pr}_1^{-1}(\mathscr{O}_X)$. Soit $\mathscr{I}_{X/S}$ le noyau de l'homomorphisme

$$\Delta^{-1}(\mathscr{O}_{X\times X}) \longrightarrow \mathscr{O}_X$$

adjoint de l'homomorphisme $\mathscr{O}_{X\times X} \to \Delta_*(\mathscr{O}_X)$, et soit $\mathscr{P}^m_{X/S}$ la $\mathscr{O}_X$-algèbre

$$\Delta^{-1}(\mathscr{O}_{X\times X})/\mathscr{I}^{m+1}_{X/S}.$$

Si V est un ouvert affine de S et U un ouvert affine de X au-dessus de V, et si l'on 416
pose $k = \Gamma(V, \mathscr{O}_S)$ et $A = \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$, on a donc :

$$\Gamma(U, \mathscr{P}^m_{X/S}) = (A \otimes_k A)/I^{m+1},$$

(13) N.D.E. : Dans cet exposé, l'anneau $\Gamma(S, \mathscr{O}_S) = \mathscr{O}_S(S)$ est noté $\Gamma(\mathscr{O}_S)$.

(14) N.D.E. : On a modifié ici l'original, qui mentionnait le faisceau $U \mapsto \mathrm{Dif}_{X_U/U}$, où U parcourt les ouverts de S ; celui-ci est l'image directe de $\mathscr{D}\!if_{X/S}$ par le morphisme $p_X : X \to S$.

où I est l'idéal engendré par les éléments $a \otimes 1 - 1 \otimes a$, pour $a \in \mathrm{A}$. Ceci étant, *on a* d'après 1.3 *un isomorphisme de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})$*-modules* :

$$j_{\mathrm{X}} : \mathrm{Dif}^m_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}(\mathscr{P}^m_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$$

qu'on peut définir comme suit : si d appartient à $\mathrm{Dif}^m_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ et si c est une section de $\mathscr{P}^m_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ sur U de la forme $a \otimes b + \mathrm{I}^{m+1}$, on a $j_{\mathrm{X}}(d)(c) = a \cdot d(b)$. [15]

1.4.2. — Soient d un opérateur différentiel et u une section de X sur S. Nous appelons *valeur de* d *en* u *la* S*-déviation composée*

$$\mathrm{S} \xrightarrow{u} \mathrm{X} \xrightarrow[\mathrm{id}_{\mathrm{X}}]{d} \mathrm{X}.$$

D'après 1.3 et 1.4.1, si d est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant m$, alors du (resp. d) est associé canoniquement à un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $d' : u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})/\mathscr{I}_u^{m+1} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ (resp. un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules $d'' : \mathscr{P}^m_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X}}$).

Il est clair qu'on peut construire d' à partir de d'' de la manière suivante : le carré

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \simeq \mathrm{S} \times \mathrm{X} \arrow[r, "u \times \mathrm{X}"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{X} \times \mathrm{X} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ \mathrm{S} \arrow[r, "u"] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

est cartésien, ce qui permet d'identifier X à $\mathrm{S} \times_{\mathrm{X}} (\mathrm{X} \times \mathrm{X})$, u à $\mathrm{S} \times_{\mathrm{X}} \Delta$, donc $u^*(\mathscr{P}^m_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})$ à $u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})/\mathscr{I}_u^{m+1}$. On identifie ainsi $u^*(d'')$ à un morphisme $u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})/\mathscr{I}_u^{m+1} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, qui n'est autre que d'.

417 **1.5.** Posons comme d'habitude $\mathrm{I}_{\mathrm{S}} = \mathrm{Spec}\,\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^2)$. Soient $\tau : \mathrm{S} \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}}$ la section zéro et σ la déviation canonique de τ que nous avons définie en 1.2.0, i.e. l'homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules qui s'annule sur la section unité de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^2)$ et qui envoie la classe t de T modulo T^2 sur la section unité de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$.

Soit X un S-schéma. À tout I_{S}-automorphisme u de $\mathrm{I}_{\mathrm{S}} \times \mathrm{X}$ induisant l'identité sur X est associé par composition un opérateur différentiel D_u de X :

$$\mathrm{X} \simeq \mathrm{S} \times \mathrm{X} \xrightarrow{\sigma \times \mathrm{X}} \mathrm{I}_{\mathrm{S}} \times \mathrm{X} \xrightarrow{u} \mathrm{I}_{\mathrm{S}} \times \mathrm{X} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathrm{X}.$$

D'après II, 3.14, *l'application* $u \mapsto \mathrm{D}_u$ *est un isomorphisme de la* $\Gamma(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$*-algèbre de Lie*

$$\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}\,\mathrm{X}) := \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}\,\mathrm{X})(\mathrm{S})$$

sur la $\Gamma(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$*-algèbre de Lie des* $p^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$*-dérivations de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$. L'isomorphisme réciproque associe à toute dérivation D l'automorphisme de $\mathrm{I}_{\mathrm{S}} \times \mathrm{X}$ correspondant à l'automorphisme $a + bt \mapsto a + (\mathrm{D}a + b)t$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^2)$.

[15] N.D.E. : Via cet isomorphisme, les X-dérivations de $\Delta_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ correspondent, d'après 1.3.1, aux S-dérivations de id_{X}, c.-à-d., aux $p^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-dérivations de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$.

2. Opérateurs différentiels invariants sur les schémas en groupes

418

2.1. *Soit* G *un* S-*schéma en groupes* ; nous désignons par ε ou $\varepsilon_{\mathrm{G}} : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ la section unité de G.

Définition. — Soit U(G) le $\Gamma(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-module des S-déviations de ε_{G} (ou S-*déviations de l'origine*) (cf. 1.1).

Si d et e sont deux éléments de U(G), $d \times e$ est une S-déviation de $\varepsilon \times \varepsilon : \mathrm{S} \simeq \mathrm{S} \times \mathrm{S} \to \mathrm{G} \times \mathrm{G}$. L'image de $d \times e$ par le morphisme multiplication $m : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ (cf. 1.2) sera appelé le produit de d et e et sera noté $d \cdot e$.

Le $\Gamma(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-module U(G) se trouve ainsi muni d'une structure de $\Gamma(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-algèbre associative qui a ε_{G} pour élément unité (1.1). Nous dirons que U(G) est *l'algèbre infinitésimale* de G. (16)

Lorsque T parcourt les schémas au-dessus de S, l'algèbre infinitésimale $\mathrm{U}(\mathrm{G}_{\mathrm{T}})$ du T-groupe $\mathrm{G} \times \mathrm{T}$ varie évidemment de façon contravariante en T, de sorte que nous pourrons parler du foncteur algèbre infinitésimale.

Lorsque T parcourt les ouverts de S, on obtient donc un préfaisceau $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{U}(\mathrm{G}_{\mathrm{T}})$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres ; de plus, d'après 1.1.3, ceci est un *faisceau.* Nous le noterons $\mathscr{U}(\mathrm{G})$ et nous l'appellerons *le faisceau d'algèbres infinitésimales* de G.

L'algèbre U(G) est aussi un foncteur covariant en G. En effet, si $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est un homomorphisme de S-groupes et d une S-déviation de ε_{G}, l'image de d par u est un élément $\mathrm{U}(u)(d) = ud$ de U(H). L'application $\mathrm{U}(u) : \mathrm{U}(\mathrm{G}) \to \mathrm{U}(\mathrm{H})$ ainsi définie est évidemment un homomorphisme de $\Gamma(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-algèbres. On définit de même un homomorphisme $\mathscr{U}(u)$ de $\mathscr{U}(\mathrm{G})$ dans $\mathscr{U}(\mathrm{H})$.

2.2. Soit d un élément de U(G), c.-à-d., une S-déviation de l'origine de G. Considérons la S-déviation $d \times \mathrm{G}$ de $\varepsilon \times \mathrm{G} : \mathrm{G} \simeq \mathrm{S} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G} \times \mathrm{G}$ obtenue à partir de d par changement de base (1.2.2) ; l'image de $d \times \mathrm{G}$ par le morphisme multiplication $m : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est une S-déviation de $m \circ (\varepsilon \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$, i.e. un élément de $\mathrm{Dif}_{\mathrm{G/S}}$, qu'on notera d^{G}.

L'application $d \mapsto d^{\mathrm{G}}$ est évidemment $\Gamma(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-linéaire et le diagramme « commutatif » ci-dessous montre qu'on a $(e \cdot d)^{\mathrm{G}} = d^{\mathrm{G}} \cdot e^{\mathrm{G}}$: (17) 419

(16) N.D.E. : On dit maintenant « l'algèbre des distributions » (à l'origine) de G, cf. [**DG70**], § II.4, 6.1 et [**Ja03**], I 7.7.

(17) N.D.E. : On a corrigé l'original, en remplaçant dans le diagramme $d \times \mathrm{G} \times \mathrm{G}$ par $\mathrm{G} \times d \times \mathrm{G}$, de sorte que la composée sur le côté gauche du triangle est $(e \times d) \times \mathrm{G}$, et que l'application $d \mapsto d^{\mathrm{G}}$ est un *anti-isomorphisme* de U(G) sur les opérateurs diférentiels *invariants à droite* (cf. 2.3, 2.4 ci-dessous) ; d'autre part, en définissant ${}^{\mathrm{G}}d$ comme l'image par m de $\mathrm{G} \times d$, on obtiendrait de même un *isomorphisme* de U(G) sur les opérateurs diférentiels *invariants à gauche* (cf. [**DG70**], § II.4, Th. 6.5). On a corrigé en conséquence 2.4 et 2.5.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{G}\times\mathrm{G}\times\mathrm{G} \arrow[rr, "m\times\mathrm{G}"] \arrow[dr, "\mathrm{G}\times m"] & & \mathrm{G}\times\mathrm{G} \arrow[dd, "m"] \\
 & \mathrm{G}\times\mathrm{G} \arrow[ur, "\mathrm{G}\times d\times\mathrm{G}", "\varepsilon\times\mathrm{G}\times\mathrm{G}"'] \arrow[dr, "m"] & & \mathrm{G}\times\mathrm{G} \arrow[dr, "m"] & \\
\mathrm{G} \arrow[ur, "e\times\mathrm{G}", "\varepsilon\times\mathrm{G}"'] \arrow[rr, "e^{\mathrm{G}}", "\mathrm{id}_{\mathrm{G}}"'] & & \mathrm{G} \arrow[ur, "d\times\mathrm{G}", "\varepsilon\times\mathrm{G}"'] \arrow[rr, "d^{\mathrm{G}}", "\mathrm{id}_{\mathrm{G}}"'] & & \mathrm{G}
\end{tikzcd}\quad .$$

La commutativité des deux triangles du bas résulte en effet de la définition de d^{G} et e^{G} ; d'autre part, la S-déviation composée de $e \times \mathrm{G}$ et $\mathrm{G} \times d \times \mathrm{G}$ est $(e \times d) \times \mathrm{G}$ (cf. 1.2.2), son image par $m \times \mathrm{G}$ est $(e \cdot d) \times \mathrm{G}$, et l'image de celle-ci par m est donc égale à $(e \cdot d)^{\mathrm{G}}$.

On obtient ainsi un anti-homomorphisme $\mathrm{U(G)} \to \mathrm{Dif}_{\mathrm{G/S}}$ de $\Gamma(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-algèbres, appelé *translation à droite.* [18]

Si $\mathscr{D}if_{\mathrm{G/S}}$ désigne le faisceau des S-opérateurs différentiels sur G (cf. 1.4) et p le morphisme structural $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$, on définit de même une « translation à droite » : $\mathscr{U}(\mathrm{G}) \to p_*(\mathscr{D}if_{\mathrm{G/S}})$.

2.3. Nous allons maintenant caractériser les opérateurs différentiels de G sur S de la forme d^{G}. Soient $g : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ une section du morphisme structural de G et g_{G} la translation à droite de G par g, c'est-à-dire le morphisme composé :

$$g_{\mathrm{G}} :\ \mathrm{G} \simeq \mathrm{G} \times \mathrm{S} \xrightarrow{\mathrm{G}\times g} \mathrm{G} \times \mathrm{G} \xrightarrow{m} \mathrm{G}.$$

Pour tout opérateur différentiel D de G sur S, la composée $g_{\mathrm{G}}^{-1}\mathrm{D}g_{\mathrm{G}}$ (cf. 1.2) est encore une S-déviation de id_{G}, c.-à-d., un élément de $\mathrm{Dif}_{\mathrm{X/S}}$; nous noterons :

$$\mathrm{D}^g = g_{\mathrm{G}}^{-1}\mathrm{D}\, g_{\mathrm{G}}.$$

Nous dirons que D est *invariant à droite* si, pour tout changement de base $t : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ et toute section $g : \mathrm{T} \to \mathrm{G} \times \mathrm{T}$, on a $(\mathrm{D_T})^g = \mathrm{D_T}$.

420 ***Lemme***. — *Pour tout opérateur différentiel* D *de* G *sur* S, *les assertions suivantes sont équivalentes* (où m est le morphisme multiplication de G) *:*

(i) D *est invariant à droite.*

(ii) *Les deux déviations de m suivantes sont égales :* $\mathrm{D}\, m = m(\mathrm{D} \times \mathrm{G})$.

---

[18] N.D.E. : Il serait préférable de l'appeler *opération à gauche.* En effet, soit par exemple d une S-dérivation de l'origine ; d'après 1.2.1, d est la composée de la S-dérivation $(\tau, \partial_t) : \mathrm{S} \to \mathrm{I_S}$ et d'un morphisme $x : \mathrm{I_S} \to \mathrm{G}$ tel que $x \circ \tau = \varepsilon$ (i.e. $x \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$), et alors d^{G} est la dérivation de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$ qui envoie une section locale ϕ sur la section $g \mapsto \partial_t\phi(xg)$. De plus, avec cette terminologie, on pourrait dire que : « l'opération à gauche commute aux translations à droite ».

(ii) $\Rightarrow$ (i) : comme la condition (ii) est stable par changement de base, il suffit de montrer que (ii) entraîne l'égalité $\mathrm{D}^g = \mathrm{D}$ pour toute section $g : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$. Soit h le morphisme $\mathrm{G} \times g : \ \mathrm{G} \simeq \mathrm{G} \times \mathrm{S} \to \mathrm{G} \times \mathrm{G}$, de sorte que $m \circ h$ est la translation à droite g_{G}. L'égalité $\mathrm{D}^g = \mathrm{D}$ équivaut à l'égalité $g_{\mathrm{G}} \circ \mathrm{D} = \mathrm{D} \circ g_{\mathrm{G}}$, et celle-ci résulte du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \arrow[d, "\mathrm{D}"', "\mathrm{id}_{\mathrm{G}}"] & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[l, "m"'] \arrow[d, "\mathrm{D} \times \mathrm{G}"', "\mathrm{id}_{(\mathrm{G} \times \mathrm{G})}"] & \mathrm{G} \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "\mathrm{D}"', "\mathrm{id}_{\mathrm{G}}"] \\
\mathrm{G} & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[l, "m"'] & \mathrm{G} \arrow[l, "h"']
\end{tikzcd}.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) : prenons en effet pour $t : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural $p : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$, pour section $g : \mathrm{T} \to \mathrm{G} \times \mathrm{T}$ le morphisme diagonal $\Delta : \mathrm{G} \to \mathrm{G} \times \mathrm{G}$. La translation à droite

$$\Delta_{\mathrm{G} \times \mathrm{G}} : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G} \times \mathrm{G}$$

est alors le morphisme de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ dans $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ qui a pour composantes m et pr_2. L'égalité $(\mathrm{D}_{\mathrm{G}})^{\Delta} = \mathrm{D}_{\mathrm{G}}$ équivaut alors à la commutativité du premier carré du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{G} \times \mathrm{G}}"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{\mathrm{G}}"', "\mathrm{id}_{\mathrm{G} \times \mathrm{G}}"] & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{D}_{\mathrm{G}}"', "\mathrm{id}_{\mathrm{G} \times \mathrm{G}}"] & \mathrm{G} \arrow[d, "\mathrm{D}"', "\mathrm{id}_{\mathrm{G}}"] \\
\mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{G} \times \mathrm{G}}"] & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] & \mathrm{G}
\end{tikzcd}.$$

L'égalité (ii) résulte donc de ce que $m = \mathrm{pr}_1 \circ \Delta_{\mathrm{G} \times \mathrm{G}}$.

Considérons par exemple un élément d de l'algèbre infinitésimale $\mathrm{U}(\mathrm{G})$. Les carrés 421
du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[r, equal] \arrow[d, "m"'] & \mathrm{S} \times \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[r, "d \times \mathrm{G} \times \mathrm{G}", "\varepsilon \times \mathrm{G} \times \mathrm{G}"'] \arrow[d, "\mathrm{S} \times m"'] & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[r, "m \times \mathrm{G}"] \arrow[d, "\mathrm{G} \times m"] & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[d, "m"] \\
\mathrm{G} \arrow[r, equal] & \mathrm{S} \times \mathrm{G} \arrow[r, "d \times \mathrm{G}", "\varepsilon \times \mathrm{G}"'] & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[r, "m"] & \mathrm{G}
\end{tikzcd}$$

sont alors commutatifs. Comme on a

$$m \circ (d \times \mathrm{G}) = d^{\mathrm{G}} \qquad \text{et} \qquad (m \times \mathrm{G}) \circ (d \times \mathrm{G} \times \mathrm{G}) = d^{\mathrm{G}} \times \mathrm{G},$$

on a aussi $d^{\mathrm{G}} \circ m = m \circ (d^{\mathrm{G}} \times \mathrm{G})$. Donc : *pour toute* S*-déviation* d *de l'origine,* d^{G} *est un opérateur différentiel invariant à droite.*

2.4. Théorème. — (i) *L'application* $d \mapsto d^{\mathrm{G}}$ *est un* anti-isomorphisme [19] *de l'algèbre infinitésimale* $\mathrm{U(G)}$ *sur la sous-algèbre* $\mathrm{Dif}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G/S}}$ *de* $\mathrm{Dif}_{\mathrm{G/S}}$ *formée des opérateurs différentiels invariants à* droite*.*

(*ii*) *De même, l'application* $d \mapsto {}^{\mathrm{G}}d$ *est un* isomorphisme *de* $\mathrm{U(G)}$ *sur la sous-algèbre de* $\mathrm{Dif}_{\mathrm{G/S}}$ *formée des opérateurs différentiels invariants à* gauche*.*

Soit en effet D un opérateur différentiel quelconque de G sur S et désignons par D_0 sa *valeur à l'origine*, c'est-à-dire la déviation composée $\mathrm{S} \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{G} \xrightarrow[\mathrm{id}_{\mathrm{G}}]{\mathrm{D}} \mathrm{G}$. L'opérateur différentiel invariant à droite $(\mathrm{D}_0)^{\mathrm{G}}$ est alors obtenu par composition :

$$\mathrm{G} \simeq \mathrm{S} \times \mathrm{G} \xrightarrow{\varepsilon \times \mathrm{G}} \mathrm{G} \times \mathrm{G} \xrightarrow[\mathrm{id}_{\mathrm{G}\times\mathrm{G}}]{\mathrm{D}\times\mathrm{G}} \mathrm{G} \times \mathrm{G} \xrightarrow{\ m\ } \mathrm{G}.$$

Si D est invariant à droite, on a $\mathrm{D}\, m = m(\mathrm{D} \times \mathrm{G})$, d'où

$$\mathrm{D} = \mathrm{D}\, m(\varepsilon \times \mathrm{G}) = m(\mathrm{D} \times \mathrm{G})(\varepsilon \times \mathrm{G}) = (\mathrm{D}_0)^{\mathrm{G}}.$$

En particulier, l'application $d \mapsto d^{\mathrm{G}}$ est surjective.

Réciproquement, soit d une S-déviation de l'origine. On a alors un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \times \mathrm{G} & \mathrm{G} \arrow[l, "d\times\mathrm{G}"'] \\
\mathrm{G} \times \mathrm{S} \simeq \mathrm{G} \arrow[u, "\mathrm{G}\times\varepsilon"] & \mathrm{S} \arrow[l, "d"'] \arrow[u, "\varepsilon"']
\end{tikzcd}$$

422 d'où il résulte que $d = m(\mathrm{G} \times \varepsilon)d = m(d \times \mathrm{G})\varepsilon = (d^{\mathrm{G}})_0$. *A fortiori*, l'application $d \mapsto d^{\mathrm{G}}$ est injective. Ceci prouve le théorème.

Lorsque S varie, le théorème 2.4 implique évidemment que la translation à droite $\mathscr{U}(\mathrm{G}) \to p_*(\mathscr{D}\!\mathit{if}_{\mathrm{G/S}})$ est un anti-isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres de $\mathscr{U}(\mathrm{G})$ sur le faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres $p_*(\mathscr{D}\!\mathit{if}_{\mathrm{G/S}})^{\mathrm{G}}$, qui à tout ouvert U de S associe $\mathrm{Dif}^{\mathrm{G_U}}_{\mathrm{G_U/U}}$.

2.4.1. Remarque. — Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \arrow[d, shift right, "p"'] & \mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[l, "\eta"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{pr}_1"'] \\
\mathrm{S} \arrow[u, shift right, "\varepsilon"'] & \mathrm{G} \arrow[l, "p"'] \arrow[u, shift right, "\Delta"']
\end{tikzcd} ,$$

où η désigne le morphisme « $(x, y) \mapsto yx^{-1}$ » [20]. Celui-ci induit des morphismes

$$\eta' : \eta^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{G}\times\mathrm{G}} \qquad \text{et} \qquad \Delta^{-1}(\eta') : p^{-1}\varepsilon^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \longrightarrow \Delta^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{G}\times\mathrm{G}}).$$

(19) N.D.E. : On a corrigé « isomorphisme » en « anti-isomorphisme », et l'on a ajouté l'assertion (ii), cf. la N.D.E. (17).

(20) N.D.E. : c.-à-d., G agit à gauche sur lui-même par translations à droite.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, posons $\mathfrak{p}^n_{G/S} = \varepsilon^{-1}(\mathscr{O}_G)/\mathscr{I}_\varepsilon^{n+1}$ (confer 1.3 et 1.4 pour les notations). (21) Comme le carré formé par les morphismes ε, η, Δ et p est cartésien, $\Delta^{-1}(\eta')$ induit un *isomorphisme de $\mathscr{O}_G$-modules* :

$$p^*(\mathfrak{p}^n_{G/S}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{P}^n_{G/S}.$$

Les opérateurs différentiels de G sur S d'ordre $\leqslant n$ correspondent donc biunivoquement aux morphismes de $\mathscr{O}_G$-modules $p^*(\mathfrak{p}^n_{G/S}) \longrightarrow \mathscr{O}_G$, c'est-à-dire aux morphismes 423
de $\mathscr{O}_S$-modules

$$\mathfrak{p}^n_{G/S} \longrightarrow p_*(\mathscr{O}_G).$$

Dans cette bijection, les opérateurs différentiels invariants à droite sont associés aux flèches composées

$$\mathfrak{p}^n_{G/S} \longrightarrow \mathscr{O}_S \xrightarrow{\text{can.}} p_*(\mathscr{O}_G).$$

On retrouve ainsi l'isomorphisme du théorème 2.4.

2.5. (22) Soit Lie(G) l'algèbre de Lie de G (23) ; on va définir un morphisme de $\Gamma(\mathscr{O}_S)$-algèbres de Lie $\alpha : \mathrm{Lie}(G) \to U(G)$.

Soient $s : S \to I_S$ la section nulle de $I_S \to S$ et σ la déviation de s définie en 1.2.0. Rappelons (cf. II, 4.1) que Lie(G) est l'ensemble des morphismes $x : I_S \to G$ tels que $x \circ s = \varepsilon_G$. Alors la composée

$$S \xrightarrow[s]{\sigma} I_S \xrightarrow{x} G$$

est une S-déviation de ε_G, i.e. un élément de U(G) ; avec les notations de 1.2 (†), elle est notée σx. De plus, d'après 1.2.1, l'application $\alpha : x \mapsto \sigma x$ est un isomorphisme de $\mathscr{O}_S(S)$-modules de Lie(G) sur le sous-module $\mathrm{Dér}(\varepsilon_G)$ de U(G) formé des S-dérivations de ε_G. Nous allons voir que α est un morphisme d'algèbres de Lie. (24) Soit

$$\rho' : \quad U(G) \longrightarrow \mathrm{Dif}_{G/S}$$

le morphisme d'algèbres qui à une S-déviation d de ε_G associe l'opérateur différentiel invariant à *gauche* ${}^G d \in \mathrm{Dif}_{G/S}$, cf. 2.2, N.D.E. (17).

Soit $\rho : G \to \underline{\mathrm{Aut}}_S(G)$ l'homomorphisme de foncteurs en groupes qui associe à un S-morphisme $g : T \to G$ la translation *à droite* de G_T par g, i.e. le morphisme :

$$G_T \simeq T \times_T G_T \xrightarrow{G_T \times g} G_T \times_T G_T \xrightarrow{m_T} G_T.$$

Rappelons aussi (cf. 1.5 et II, 3.14) que $\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}\, G) = \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_S(G)/S)(S)$ s'identifie aux automorphismes infinitésimaux de G, c.-à-d., aux automorphismes de $I_S \times G$

(21) N.D.E. : Dans ce qui suit, on a corrigé l'original, qui référait au carré formé par les morphismes p, p, η, et pr_1, au lieu de ε, η, Δ et p.

(22) N.D.E. : Dans ce paragraphe, on a modifié l'ordre, en commençant par définir l'application $\alpha : \mathrm{Lie}(G) \to U(G)$, et l'on a corrigé l'original, comme indiqué dans la N.D.E. (17).

(23) N.D.E. : Dans cet exposé, si G (resp. X) est un S-schéma en groupes (resp. un S-schéma), l'« algèbre de Lie » Lie(G) (resp. $\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}\, X)$) désigne, avec les notations de l'exposé II, $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)(S)$ (resp. $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_S(X)/S)(S)$) ; c'est une $\Gamma(\mathscr{O}_S)$-algèbre de Lie, d'après II, 4.11 et 3.14.

(24) N.D.E. : Voir aussi II, 4.11.

induisant l'identité sur G. Comme ρ est un monomorphisme, il en est de même du morphisme $\underline{\mathrm{Lie}}(\rho) : \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}) \to \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G})/\mathrm{S})$ (voir, par exemple, Exp. II, N.D.E. (50)), donc $\mathrm{Lie}(\rho) : \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) \to \mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}\,\mathrm{G})$ est injectif.

D'autre part, d'après 1.5, l'application β qui à tout automorphisme infinitésimal u de G associe l'opérateur différentiel D_u de G :

$$\mathrm{G} \simeq \mathrm{S} \times \mathrm{G} \xrightarrow{\sigma\times \mathrm{G}} \mathrm{I}_{\mathrm{S}} \times \mathrm{G} \xrightarrow{u} \mathrm{I}_{\mathrm{S}} \times \mathrm{G} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathrm{G}$$

est un isomorphisme de $\mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}\,\mathrm{G})$ sur la sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Dif}_{\mathrm{G/S}}$ formée des $p^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-dérivations de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$.

Pour tout $x \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, on a le carré commutatif suivant qui détermine l'image de x par $\mathrm{Lie}(\rho)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}_{\mathrm{S}} \times \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{Lie}(\rho)(x)"] \arrow[d, "x\times \mathrm{G}"] & \mathrm{I}_{\mathrm{S}} \times \mathrm{G} \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \\
\mathrm{G} \times \mathrm{G} \arrow[r, "m"] & \mathrm{G}
\end{tikzcd} .$$

424 Compte-tenu de ce diagramme, l'image de $\mathrm{Lie}(\rho)(x)$ par β est la déviation composée

$$\mathrm{G} \simeq \mathrm{S} \times \mathrm{G} \xrightarrow[s\times \mathrm{G}]{\sigma\times \mathrm{G}} \mathrm{I}_{\mathrm{S}} \times \mathrm{G} \xrightarrow{\mathrm{G}\times x} \mathrm{G} \times \mathrm{G} \xrightarrow{m} \mathrm{G}$$

qui, d'après 2.2 N.D.E. (17), n'est autre que ${}^{\mathrm{G}}(\sigma x) = \rho'(\alpha(x))$. On obtient donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Lie}(\mathrm{G}) \arrow[r, hook, "\mathrm{Lie}(\rho)"] \arrow[d, hook, "\alpha"'] & \mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}\,\mathrm{G}) \arrow[d, hook, "\beta"] \\
\mathrm{U}(\mathrm{G}) \arrow[r, hook, "\rho'"] & \mathrm{Dif}_{\mathrm{G/S}}
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Lie}(\rho)$, β et ρ' sont des morphismes d'algèbres de Lie. Comme ρ' est injectif, il en résulte que α est aussi un morphisme d'algèbres de Lie. Par conséquent, on a obtenu :

Proposition. — *α est un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S})$-algèbres de Lie, de* Lie(G) *dans l'algèbre de Lie des* S*-dérivations de ε_{G}, elle-même isomorphe via* $\mathrm{Lie}(\rho)$ *à l'algèbre de Lie des* S*-dérivations de* G *invariantes à gauche.* [25]

3. Coalgèbres et dualité de Cartier

425

[25] N.D.E. : Il y a des exemples d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ sur un anneau A, telles que l'application $\mathfrak{g} \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ ne soit *pas* injective, cf. [**BLie**], § I.2, Ex. 9. Le résultat ci-dessus montre (puisque α se factorise en $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}) \to \mathrm{U}(\mathrm{Lie}(\mathrm{G})) \to \mathrm{U}(\mathrm{G})$) que ceci ne peut se produire pour des algèbres de Lie « algébriques », c.-à-d., de la forme Lie(G), où G est un A-schéma en groupes.

3.1. Soit S un schéma (ou, plus généralement, un espace annelé). Une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*coalgèbre* [26] est un couple $(\mathscr{U}, \Delta_{\mathscr{U}})$ formé d'un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{U}$ et d'un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\Delta_{\mathscr{U}} : \mathscr{U} \to \mathscr{U} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{U}$ (dit *morphisme diagonal* ou *comultiplication*) tels que :

(i) $\sigma \circ \Delta_{\mathscr{U}} = \Delta_{\mathscr{U}}$, où $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$.

(ii) Le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{U} \arrow[r, "\Delta_{\mathscr{U}}"] \arrow[d, "\Delta_{\mathscr{U}}"'] & \mathscr{U} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{U} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathscr{U}} \otimes \Delta_{\mathscr{U}}"] \\
\mathscr{U} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{U} \arrow[r, "\Delta_{\mathscr{U}} \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{U}}"] & \mathscr{U} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{U} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{U}
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

(iii) Il existe un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\varepsilon_{\mathscr{U}} : \mathscr{U} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, dit *augmentation*, tel que les morphismes composés

$$\mathscr{U} \xrightarrow{\Delta_{\mathscr{U}}} \mathscr{U} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{U} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathscr{U}} \otimes \varepsilon_{\mathscr{U}}} \mathscr{U} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \simeq \mathscr{U}$$

$$\mathscr{U} \xrightarrow{\Delta_{\mathscr{U}}} \mathscr{U} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{U} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathrm{U}} \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{U}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{U} \simeq \mathscr{U}$$

soient le morphisme identique de $\mathscr{U}$.

Si $\varepsilon_{\mathscr{U}}$ et $\varepsilon'_{\mathscr{U}}$ sont deux augmentations, on a $\varepsilon_{\mathscr{U}} = (\varepsilon_{\mathscr{U}} \otimes \varepsilon'_{\mathscr{U}}) \circ \Delta_{\mathscr{U}} = \varepsilon'_{\mathscr{U}}$; l'augmentation est donc déterminée de façon unique par (iii).

Si $(\mathscr{U}, \Delta_{\mathscr{U}})$ et $(\mathscr{V}, \Delta_{\mathscr{V}})$ sont deux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-coalgèbres, un *morphisme* de la première dans la seconde est un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $f : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_{\mathscr{U}}"] & \mathscr{V} \arrow[d, "\Delta_{\mathscr{V}}"] \\
\mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \arrow[r, "f \otimes f"] & \mathscr{V} \otimes \mathscr{V}
\end{tikzcd}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{U} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_{\mathscr{U}}"'] & & \mathscr{V} \arrow[dl, "\varepsilon_{\mathscr{V}}"] \\
& \mathscr{O}_{\mathrm{S}} &
\end{tikzcd}$$

soient commutatifs. Les morphismes de coalgèbres se composent comme les morphismes de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules de sorte que nous pourrons parler de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-coalgèbres. **426**

3.1.0. — [27] Cette catégorie possède des produits finis : l'objet final est le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, la comultiplication étant l'identité; le produit de deux coalgèbres $(\mathscr{U}, \Delta_{\mathscr{U}})$ et $(\mathscr{V}, \Delta_{\mathscr{V}})$ est le produit tensoriel $\mathscr{U} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{V}$, la comultiplication étant le morphisme composé

$$\mathscr{U} \otimes \mathscr{V} \xrightarrow{\Delta_{\mathscr{U}} \otimes \Delta_{\mathscr{V}}} \mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \otimes \mathscr{V} \otimes \mathscr{V} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathscr{U}} \otimes \sigma \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{V}}} \mathscr{U} \otimes \mathscr{V} \otimes \mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$$

[26] N.D.E. : On dit aussi « *cogèbre* », cf. [**BAlg**], III § 11.1. D'autre part, on notera que dans cet exposé (ainsi que dans $\mathrm{VII_B}$), on se place dans la catégorie des coalgèbres *cocommutatives* (c.-à-d., vérifiant la condition (i)), ce qui est crucial pour définir le produit et la notion de coalgèbre en groupes (cf. 3.1.0 et 3.2).

[27] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 3.1.0, pour références ultérieures.

où $\sigma(a\otimes b) = b\otimes a$; les projections canoniques de $\mathscr{U}\otimes\mathscr{V}$ sur les facteurs $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ sont les morphismes $\mathrm{id}_{\mathscr{U}}\otimes\varepsilon_{\mathscr{V}}$ et $\varepsilon_{\mathscr{U}}\otimes\mathrm{id}_{\mathscr{V}}$, [28] et le « morphisme diagonal » $\mathscr{U}\to\mathscr{U}\otimes\mathscr{U}$ (correspondant au couple de morphismes $(\mathrm{id}_{\mathscr{U}},\mathrm{id}_{\mathscr{U}})$) n'est autre que la comultiplication $\Delta_{\mathscr{U}}$.

3.1.1. — Soit $\mathscr{A}$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre commutative, *localement libre et de type fini* en tant que $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module. Si nous posons

$$\mathscr{A}^* = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.}}(\mathscr{A},\mathscr{O}_{\mathrm{S}}),$$

le morphisme canonique φ de $\mathscr{A}^*\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{A}^*$ dans $(\mathscr{A}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{A})^*$ est inversible. Si m : $\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ est le morphisme définissant la multiplication de $\mathscr{A}$, on obtient par composition un morphisme diagonal

$$\Delta_{\mathscr{A}^*} :\quad \mathscr{A}^* \xrightarrow{\ m^*\ } (\mathscr{A}\otimes\mathscr{A})^* \xrightarrow{\ \varphi^{-1}\ } \mathscr{A}^*\otimes\mathscr{A}^*.$$

Ce morphisme diagonal fait évidemment de $\mathscr{A}^*$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-coalgèbre qui a pour aug-
427 mentation le morphisme transposé du morphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\to\mathscr{A}$ défini par la section unité de $\mathscr{A}$. De plus, il est clair que :

Le foncteur $\mathscr{A}\mapsto\mathscr{A}^*$ est une anti-équivalence de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres, qui sont localement libres et de type fini en tant que $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules, sur la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-coalgèbres localement libres et de type fini en tant que $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules.

3.1.2. — À toute $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-coalgèbre $\mathscr{U}$ est associée canoniquement un S-foncteur

$$\mathrm{Spec}^*\,\mathscr{U} : (\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})^\circ \longrightarrow (\mathbf{Ens}).$$

Remarquons en effet que, pour tout S-schéma $q:\mathrm{T}\to\mathrm{S}$, $q^*(\mathscr{U}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{U})$ s'identifie à $q^*(\mathscr{U})\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}} q^*(\mathscr{U})$, de sorte que $q^*(\Delta_{\mathscr{U}})$ fait de $\mathscr{U}_{\mathrm{T}} = q^*(\mathscr{U})$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{T}}$-coalgèbre ; nous pouvons donc poser par définition et avec un abus de notation évident : [29]

$$(\mathrm{Spec}^*\,\mathscr{U})(\mathrm{T}) = \{x\in\Gamma(\mathrm{T},\mathscr{U}_{\mathrm{T}}) \mid \varepsilon_{\mathscr{U}_{\mathrm{T}}}(x) = 1 \quad\text{et}\quad \Delta_{\mathscr{U}_{\mathrm{T}}}(x) = x\otimes x\}.$$

Les sections x de $\mathscr{U}_{\mathrm{T}}$ correspondent évidemment aux morphismes de $\mathscr{O}_{\mathrm{T}}$-modules $\xi:\mathscr{O}_{\mathrm{T}}\to\mathscr{U}_{\mathrm{T}}$; les conditions $\varepsilon(x)=1$ et $\Delta(x) = x\otimes x$ expriment simplement que ξ est un morphisme de coalgèbres. On a donc également :

$$(\mathrm{Spec}^*\,\mathscr{U})(\mathrm{T}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}\text{-coalg.}}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}},\mathscr{U}_{\mathrm{T}}).$$

En particulier, on a la proposition suivante : [30]

---

[28] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit. Rappelons aussi que, pour montrer que $\mathscr{U}\otimes\mathscr{V}$ est bien le produit de $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ dans la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-cogèbres cocommutatives, on vérifie que si l'on a une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-cogèbre arbitraire $\mathscr{E}$ et des morphismes de cogèbres $f:\mathscr{E}\to\mathscr{U}$ et $g:\mathscr{E}\to\mathscr{V}$, alors tout morphisme de cogèbres $\phi:\mathscr{E}\to\mathscr{U}\otimes\mathscr{V}$ tel que $\mathrm{pr}_{\mathscr{U}}\circ\phi = f$ et $\mathrm{pr}_{\mathscr{V}}\circ\phi = g$ est nécessairement égal à $(f\otimes g)\circ\Delta_{\mathscr{E}}$, et que celui-ci est un morphisme de cogèbres si et seulement si il égale $(g\otimes f)\circ\Delta_{\mathscr{E}}$.

[29] N.D.E. : Pour tout $x\otimes y\in\Gamma(\mathrm{T},\mathscr{U}_{\mathrm{T}})\otimes_{\mathscr{O}(\mathrm{T})}\Gamma(\mathrm{T},\mathscr{U}_{\mathrm{T}})$, son image dans $\Gamma(\mathrm{T},\mathscr{U}_{\mathrm{T}}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}}\mathscr{U}_{\mathrm{T}})$ est encore notée $x\otimes y$.

[30] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 3.1.2.1, pour références ultérieures. Remarquons d'autre part que le S-foncteur $\mathrm{Spec}^*\,\mathscr{U}$ est un faisceau pour la topologie de Zariski (et même pour la topologie (fpqc) si $\mathscr{U}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent).

Proposition 3.1.2.1. — *Soit $\mathscr{A}$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre commutative qui est localement libre de type fini en tant que $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module. Alors le* S*-foncteur* $\mathrm{Spec}^* \mathscr{A}^*$ *est représenté par* $\mathrm{Spec}\, \mathscr{A}$.

En effet, pour tout S-schéma T, on a des isomorphismes canoniques :

$$(\mathrm{Spec}^* \mathscr{A}^*)(\mathrm{T}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}\text{-coalg.}}(\mathscr{O}_{\mathrm{T}}, \mathscr{A}^*_{\mathrm{T}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}}\text{-alg.}}(\mathscr{A}_{\mathrm{T}}, \mathscr{O}_{\mathrm{T}}) \simeq (\mathrm{Spec}\,\mathrm{A})(\mathrm{T}).$$

3.2. Une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*coalgèbre en groupes*, c'est-à-dire un groupe de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-coalgèbres, consiste en la donnée d'une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-coalgèbre $(\mathscr{U}, \Delta_{\mathscr{U}})$ et de trois morphismes de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-coalgèbres $m_{\mathscr{U}} : \mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \to \mathscr{U}$, $\eta_{\mathscr{U}} : \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \to \mathscr{U}$ et $c_{\mathscr{U}} : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ vérifiant les conditions (ii)*, (iii)* et (vi) ci-dessous ; d'autre part, le fait que $m_{\mathscr{U}}$ soit un morphisme de cogèbres se traduit par la commutativité des diagrammes (iv) et (v) **428**
ci-dessous :

(iv)
$$\begin{tikzcd}
\mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \arrow[rr, "m_{\mathscr{U}}"] \arrow[d, "\Delta_{\mathscr{U}} \otimes \Delta_{\mathscr{U}}"'] & & \mathscr{U} \arrow[dd, "\Delta_{\mathscr{U}}"] \\
\mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathscr{U}} \otimes \sigma \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{U}}"'] & & \\
\mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \arrow[rr, "m_{\mathscr{U}} \otimes m_{\mathscr{U}}"] & & \mathscr{U} \otimes \mathscr{U}
\end{tikzcd}$$

(v)
$$\begin{tikzcd}
\mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \arrow[rr, "m_{\mathscr{U}}"] \arrow[dr, "\varepsilon_{\mathscr{U}} \otimes \varepsilon_{\mathscr{U}}"'] & & \mathscr{U} \arrow[dl, "\varepsilon_{\mathscr{U}}"] \\
& \mathscr{O}_{\mathrm{S}} &
\end{tikzcd}$$

(ii)* Le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathscr{U}} \otimes m_{\mathscr{U}}"] \arrow[d, "m_{\mathscr{U}} \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{U}}"'] & \mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \arrow[d, "m_{\mathscr{U}}"] \\
\mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \arrow[r, "m_{\mathscr{U}}"] & \mathscr{U}
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

(iii)* Les deux composées ci-dessous égalent le morphisme identique de $\mathscr{U}$:

$$\mathscr{U} \simeq \mathscr{U} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathscr{U}} \otimes \eta_{\mathscr{U}}} \mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \xrightarrow{m_{\mathscr{U}}} \mathscr{U}$$

$$\mathscr{U} \simeq \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \otimes \mathscr{U} \xrightarrow{\eta_{\mathscr{U}} \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{U}}} \mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \xrightarrow{m_{\mathscr{U}}} \mathscr{U}.$$

(vi) Le morphisme composé ci-dessous est égal à $\eta_{\mathscr{U}} \circ \varepsilon_{\mathscr{U}}$: **429**

$$\mathscr{U} \xrightarrow{\Delta_{\mathscr{U}}} \mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \xrightarrow{c_{\mathscr{U}} \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{U}}} \mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \xrightarrow{m_{\mathscr{U}}} \mathscr{U}.$$

3.2.1. — Les morphismes $\eta_{\mathscr{U}}$ et $c_{\mathscr{U}}$ sont uniquement déterminés par $m_{\mathscr{U}}$. D'autre part, les conditions (ii)* et (iii)* expriment simplement que $m_{\mathscr{U}}$ fait de $\mathscr{U}$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre qui a pour section unité l'image par $\eta_{\mathscr{U}}$ de la section unité de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$. La condition (iv) exprime aussi que le morphisme diagonal $\Delta_{\mathscr{U}}$ est compatible avec la multiplication ; et en effet, $\Delta_{\mathscr{U}} : \mathscr{U} \to \mathscr{U} \otimes \mathscr{U}$ doit être un homomorphisme de coalgèbres en groupes, ce qui implique également la commutativité du triangle

(v)*
$$\begin{tikzcd} & \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \arrow[dl, "\eta_{\mathscr{U}}"'] \arrow[dr, "\eta_{\mathscr{U}}\otimes\eta_{\mathscr{U}}"] & \\ \mathscr{U} \arrow[rr, "\Delta_{\mathscr{U}}"'] & & \mathscr{U}\otimes\mathscr{U} \end{tikzcd} .$$

D'autre part, comme dans toute catégorie, l'antipodisme $c_{\mathscr{U}}$ est un isomorphisme de $\mathscr{U}$ sur l'objet en groupe « opposé » [31] ; en particulier, $c_{\mathscr{U}}$ induit un isomorphisme d'algèbres de $\mathscr{U}$ sur l'algèbre opposée $\mathscr{U}^{\circ}$.

3.2.2. — Comme le foncteur $\mathscr{U} \mapsto \operatorname{Spec}^* \mathscr{U}$ commute aux produits finis, il transforme une coalgèbre en groupes en un S-foncteur en groupes ; et en effet, pour tout S-schéma T, les éléments $x \in \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{U}_{\mathrm{T}})$ appartenant à $(\operatorname{Spec}^* \mathscr{U})(\mathrm{T})$ forment un groupe pour la multiplication de l'algèbre $\Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{U}_{\mathrm{T}})$; l'inverse de x n'est autre que $c_{\mathscr{U}}(x)$. D'après 3.1.2.1, on a :

Scholie 3.2.2.1. — [32] Soit $\mathscr{U}$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-coalgèbre en groupes, finie et localement libre en tant que $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module. Alors le S-foncteur en groupes $\operatorname{Spec}^* \mathscr{U}$ est représenté par le S-groupe, fini et localement libre, $\operatorname{Spec} \mathscr{U}^*$.

Remarque 3.2.2.2. — Soient $\mathscr{L}$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre de Lie et $\mathscr{U}(\mathscr{L})$ l'algèbre enveloppante de $\mathscr{L}$, c'est-à-dire le faisceau sur S associé au préfaisceau qui attribue à tout ouvert V l'algèbre enveloppante $\mathrm{U}(\Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{L}))$ de l'algèbre de Lie $\Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{L})$.

Tout homomorphisme de $\mathscr{L}$ dans l'algèbre de Lie sous-jacente à une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre associative se factorise d'une façon et d'une seule à travers le morphisme canonique
430 de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{U}(\mathscr{L})$; en outre, cette propriété universelle entraîne, outre la fonctorialité de $\mathscr{U}(\mathscr{L})$ en $\mathscr{L}$, que l'algèbre enveloppante d'un produit d'algèbres de Lie s'identifie au produit tensoriel des algèbres enveloppantes.

En particulier, le morphisme diagonal $\delta : \mathscr{L} \to \mathscr{L} \times \mathscr{L}$ induit un homomorphisme d'algèbres $\Delta : \mathscr{U}(\mathscr{L}) \to \mathscr{U}(\mathscr{L} \times \mathscr{L}) \simeq \mathscr{U}(\mathscr{L}) \otimes \mathscr{U}(\mathscr{L})$. Le morphisme nul $\mathscr{L} \to 0$ induit un homomorphisme $\varepsilon : \mathscr{U}(\mathscr{L}) \to \mathscr{U}(0) \simeq \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$. L'isomorphisme $x \mapsto -x$ de $\mathscr{L}$ sur l'algèbre de Lie opposée $\mathscr{L}^{\circ}$ induit un anti-isomorphisme c de l'algèbre $\mathscr{U}(\mathscr{L})$. On vérifie alors facilement que la multiplication m de l'algèbre $\mathscr{U}(\mathscr{L})$ fait de $(\mathscr{U}(\mathscr{L}), \Delta)$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-coalgèbre en groupes qui a ε pour augmentation et c pour antipodisme. [33]

---

[31] N.D.E. : i.e. muni de la multiplication $m'_{\mathscr{U}} = m_{\mathscr{U}} \circ \sigma$

[32] N.D.E. : On a ajouté ce scholie, implicite dans l'original.

[33] N.D.E. : Le S-foncteur en groupes $\operatorname{Spec}^* \mathscr{U}(\mathscr{L})$ n'est pas représentable en général, mais on verra plus loin (5.5) que si S est un schéma de caractéristique p, si $\mathscr{L}$ est finie localement libre sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ et si $\mathscr{U}_p(\mathscr{L})$ est son *algèbre enveloppante restreinte* (cf. 5.3), alors $\operatorname{Spec}^* \mathscr{U}_p(\mathscr{L})$ est représenté par un S-groupe fini et localement libre.

3.2.3. — [34] Soit $\mathscr{U}$ une $\mathscr{O}_S$-coalgèbre en groupes. On va voir que le S-foncteur en groupes $G = \operatorname{Spec}^* \mathscr{U}$ est *très bon*, au sens de II, 4.6 et 4.10.

Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_S$-module libre de rang r, et soit $T \to S$ un S-schéma. Comme $I_T(\mathscr{M}) = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_T \oplus \mathscr{M}_T)$, de sorte que $\pi : I_T(\mathscr{M}) \to T$ est affine, on a

$$\pi_*(\mathscr{U}_{I_T(\mathscr{M})}) = \mathscr{U}_T \otimes_{\mathscr{O}_T} \pi_*(\mathscr{O}_{I_T(\mathscr{M})}) = \mathscr{U}_T \otimes_{\mathscr{O}_T} (\mathscr{O}_T \oplus \mathscr{M}_T),$$

et donc

$$\Gamma(I_T(\mathscr{M}), \mathscr{U}_{I_T(\mathscr{M})}) \simeq \Gamma(T, \mathscr{U}_T) \otimes_{\mathscr{O}(T)} \big(\mathscr{O}(T) \oplus \Gamma(T, \mathscr{M}_T)\big). \tag{1}$$

Soit $(d_1, \dots, d_r)$ une base de $\mathscr{M}$. Alors, un élément $u_0 + \sum_i u_i d_i$ de $\Gamma(I_T(\mathscr{M}), \mathscr{U}_{I_T(\mathscr{M})})$ appartient à $G(I_T(\mathscr{M}))$ si et seulement si l'on a :

$$1 = \varepsilon(u_0 + \sum_i u_i d_i) = \varepsilon(u_0) + \sum_i \varepsilon(u_i) d_i \ ,$$

et

$$(u_0 + \sum_i u_i d_i) \otimes (u_0 + \sum_i u_i d_i) = \Delta(u_0 + \sum_i u_i d_i) = \Delta(u_0) + \sum_i \Delta(u_i) d_i \ ,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \varepsilon(u_0) = 1, \quad \Delta u_0 = u_0 \otimes u_0, \qquad \text{(i.e. } u_0 \in G(T)) \\ \varepsilon(u_i) = 0, \quad \Delta(u_i) = u_i \otimes u_0 + u_0 \otimes u_i, \quad \text{pour } i = 1, \dots, r. \end{cases} \tag{2}$$

De plus, le morphisme $G(I_T(\mathscr{M})) \to G(T)$ correspondant à la section nulle de $I_T(\mathscr{M}) \to T$ est donné par : $u_0 + \sum_i u_i d_i \mapsto u_0$. De ceci, combiné avec (1) et (2), on déduit que, si $\mathscr{N}$ est un second $\mathscr{O}_S$-module libre de rang fini, le diagramme d'ensembles

$$\begin{tikzcd} G(I_T(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N})) \arrow[r] \arrow[d] & G(I_T(\mathscr{N})) \arrow[d] \\ G(I_T(\mathscr{M})) \arrow[r] & G(T) \end{tikzcd}$$

est cartésien, i.e. G vérifie la condition (E) de II, 3.5.

Notons $\operatorname{Prim} \Gamma(T, \mathscr{U}_T)$ le sous-$\mathscr{O}(T)$-module de $\Gamma(T, \mathscr{U}_T)$ formé des *éléments primitifs*, c.-à-d., des éléments u qui vérifient (avec l'abus de notation signalé en 3.1.2) :

$$\Delta u = u \otimes 1 + 1 \otimes u, \qquad \varepsilon(u) = 0. \qquad ^{(35)}$$

Comme $(\underline{\operatorname{Lie}} G)(T)$ est l'ensemble des éléments de $u_0 + ud \in G(I_T)$ au-dessus de l'élément unité $u_0 = 1$ de $G(T)$, on obtient un isomorphisme de $\mathscr{O}(T)$-modules, fonctoriel en T : [36]

$$(\underline{\operatorname{Lie}} G)(T) \simeq \operatorname{Prim} \Gamma(T, \mathscr{U}_T).$$

D'autre part, on déduit de (1) que

$$\operatorname{Prim} \Gamma(I_T(\mathscr{M}), \mathscr{U}_{I_T(\mathscr{M})}) \simeq \operatorname{Prim} \Gamma(T, \mathscr{U}_T) \otimes_{\mathscr{O}(T)} \mathscr{O}(I_T(\mathscr{M})),$$

---

[34] N.D.E. : On a détaillé ce paragraphe.

[35] N.D.E. : Notons que la seconde condition est conséquence de la première, car celle-ci entraîne que $u = (\operatorname{id} \otimes \varepsilon)\Delta(u) = u + \varepsilon(u)$, d'où $\varepsilon(u) = 0$.

[36] N.D.E. : La structure de $\mathbf{O}_S$-module sur $\underline{\operatorname{Lie}}\, G$ est définie dans II, Prop. 3.6.

et il en résulte que le morphisme naturel de $\mathscr{O}(\mathrm{I_T}(\mathscr{M}))$-modules :

$$(\underline{\mathrm{Lie}}\,\mathrm{G})(\mathrm{T}) \otimes_{\mathscr{O}(\mathrm{T})} \mathscr{O}(\mathrm{I_T}(\mathscr{M})) \longrightarrow (\underline{\mathrm{Lie}}\,\mathrm{G})(\mathrm{I_T}(\mathscr{M}))$$

est un isomorphisme, i.e. $\underline{\mathrm{Lie}}\,\mathrm{G}$ est un bon $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module (cf. II, Déf. 4.4).

Donc G est un bon S-foncteur en groupes (cf. II, Déf. 4.6), et d'après II, 4.7.2, $\underline{\mathrm{Lie}}\,\mathrm{G}$ est muni d'un « crochet de Lie » $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-bilinéaire et vérifiant l'identité de Jacobi. Reste à montrer que G est très bon, i.e. que le « crochet » sur $(\underline{\mathrm{Lie}}\,\mathrm{G})(\mathrm{T})$ vérifie bien $[u,u]=0$ pour tout $u \in (\underline{\mathrm{Lie}}\,\mathrm{G})(\mathrm{T})$ (cf. II, 4.10).

Soient u, v deux éléments de $(\underline{\mathrm{Lie}}\,\mathrm{G})(\mathrm{T})$, c.-à-d., deux éléments primitifs de $\Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{U}_\mathrm{T})$. Posons $\mathrm{I} = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_\mathrm{S}[d]/(d^2)$ et $\mathrm{I}' = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_\mathrm{S}[d']/(d'^2)$. Comme la loi de composition de $\mathrm{G}(\mathrm{I}\times\mathrm{I}')$ est induite par la multiplication de l'algèbre $\mathscr{U}_{\mathrm{I}\times\mathrm{I}'}$, on a dans $\mathrm{G}(\mathrm{I}\times\mathrm{I}')$ l'égalité :

$$\begin{aligned}(1+ud)(1+vd')(1+ud)^{-1}(1+vd')^{-1} &= (1+ud)(1+vd')(1-ud)(1-vd)\\ &= 1 + (uv-vu)dd'\end{aligned}$$

431 D'après la description du crochet $[u,v]$ donnée avant la Prop. 4.8 de l'Exp. II, on obtient que

$$[u,v] = uv - vu,$$

où le terme de droite est le commutateur de u et v dans l'algèbre $\Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{U}_\mathrm{T})$, d'où $[u,u]=0$. On a donc obtenu la proposition suivante : [37]

Proposition. — *Soit $\mathscr{U}$ une $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-coalgèbre en groupes. Le* S*-foncteur en groupes* $\mathrm{G} = \operatorname{Spec}^* \mathscr{U}$ *est très bon, et l'on a un isomorphisme* $\underline{\mathrm{Lie}}\,\mathrm{G} \simeq \operatorname{Prim} \mathbf{W}(\mathscr{U})$ *de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-algèbres de Lie, où* $\operatorname{Prim}\mathbf{W}(\mathscr{U})$ *désigne le foncteur qui à tout* $\mathrm{T}\to\mathrm{S}$ *associe la $\mathscr{O}(\mathrm{T})$-algèbre de Lie formée des éléments primitifs de* $\mathbf{W}(\mathscr{U})(\mathrm{T}) = \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{U}_\mathrm{T})$.

3.3. Supposons enfin que $\mathscr{U}$ soit une *$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-coalgèbre en groupes commutatifs*, c'est-à-dire que le triangle

$$\text{(i)}^* \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{U}\otimes\mathscr{U} \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "m_{\mathscr{U}}"'] & & \mathscr{U}\otimes\mathscr{U} \arrow[dl, "m_{\mathscr{U}}"] \\ & \mathscr{U} & \end{tikzcd}$$

soit commutatif, ou encore que $m_{\mathscr{U}}$ fasse de $\mathscr{U}$ une $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-algèbre commutative. Les conditions (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), $(\mathrm{i})^*$, $(\mathrm{ii})^*$, $(\mathrm{iii})^*$ et $(\mathrm{v})^*$ signifient alors aussi que $\mathscr{U}$ est un cogroupe dans la catégorie des $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-algèbres commutatives. Donc, si de plus $\mathscr{U}$ est un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module *quasi-cohérent*, alors le S-schéma affine $\operatorname{Spec}\mathscr{U}$ est un S-schéma en groupes commutatifs.

Dans ce cas, puisque le morphisme diagonal Δ' de $\mathscr{O}_\mathrm{S}[\mathrm{T},\mathrm{T}^{-1}]$ envoie T sur $\mathrm{T}\otimes\mathrm{T}$, les morphismes de S-groupes de $\operatorname{Spec}\mathscr{U}$ dans $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ (I 4.3.2) correspondent bijectivement aux morphismes de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-algèbres unitaires

$$\varphi : \mathscr{O}_\mathrm{S}[\mathrm{T},\mathrm{T}^{-1}] \longrightarrow \mathscr{U}$$

[37] N.D.E. : On a ajouté cette proposition, qui résume la discussion précédente.

tels que $(\varphi\otimes\varphi)\circ\Delta' = \Delta_{\mathscr{U}}\circ\varphi$ (dans ce cas, $\varepsilon_{\mathscr{U}}\circ\varphi$ est l'élément neutre de $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}(\mathrm{S})$, i.e. l'augmentation ε'). Un tel morphisme φ est déterminé par l'image $\varphi(\mathrm{T})$, qui doit être un élément inversible x de $\mathscr{U}$ vérifiant $\Delta_{\mathscr{U}}x = x\otimes x$ et $\varepsilon_{\mathscr{U}}(x) = \varepsilon'(\mathrm{T}) = 1$. On a donc :

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\operatorname{Spec}\mathscr{U}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}) \simeq (\operatorname{Spec}^*\mathscr{U})(\mathrm{S})$$

et comme cette formule reste valable après tout changement de base, ceci donne : 432

$$\operatorname{Spec}^*\mathscr{U} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\operatorname{Spec}\mathscr{U}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}).$$

On a donc obtenu la

Proposition 3.3.0. — *Si $\mathscr{U}$ est une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-coalgèbre en groupes* commutatifs*, quasi-*cohérente *comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module, alors le* S*-schéma affine* $\mathrm{G} = \operatorname{Spec}\mathscr{U}$ *est un* S*-schéma en groupes commutatifs, et l'on a un isomorphisme de* S*-foncteurs en groupes* $\operatorname{Spec}^*\mathscr{U} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$.

Si l'on suppose de plus que $\mathscr{U}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre de type fini alors, d'après 3.1.2.1, le S-foncteur en groupes $\operatorname{Spec}^*\mathscr{U}$ est représenté par $\operatorname{Spec}\mathscr{U}^*$. On obtient donc la

Proposition 3.3.1 (Dualité de Cartier). — *Le foncteur*

$$\mathscr{A}(\mathrm{G}) \mapsto \mathscr{A}(\mathrm{G})^* = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}\text{-Mod.}}(\mathscr{A}(\mathrm{G}), \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$$

induit une dualité [(*)] *de la catégorie des* S*-schémas en groupes commutatifs, finis et localement libres ; elle associe à* G *le* S*-groupe* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}, \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}})$.

4. « Frobeniuseries »

433

Soient p un nombre premier fixé et $(\mathbf{Sch}_{/\mathbb{F}_p})$ la catégorie des schémas de caractéristique p, c'est-à-dire des schémas au-dessus du corps premier $\mathbb{F}_p$. Suivant les conventions générales de ce séminaire, nous identifions $(\mathbf{Sch}_{/\mathbb{F}_p})$ à une sous-catégorie de $(\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathbb{F}_p}})$ au moyen du foncteur $\mathbf{h}$ de I 1.1. Nous profitons de même de l'isomorphisme de $\mathrm{Hom}(\mathbf{h}_{\mathrm{X}}, \mathrm{F})$ sur $\mathrm{F}(\mathrm{X})$ défini en I 1.1 pour identifier ces deux ensembles chaque fois que X est un $\mathbb{F}_p$-schéma et F un objet de $(\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathbb{F}_p}})$.

Notations 4.0. — [(39)] Si T est un $\mathbb{F}_p$-schéma, un T-foncteur est un morphisme $q : \mathrm{F} \to \mathrm{T}$ de $(\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathbb{F}_p}})$ qui a T pour but ; pour tout T-schéma $r : \mathrm{X} \to \mathrm{T}$, l'ensemble des T-morphismes $\mathrm{X} \to \mathrm{F}$, i.e. des $\mathbb{F}_p$-morphismes $s : \mathrm{X} \to \mathrm{F}$ tels que $q\circ s = r$, sera alors noté $q(r)$, $q(\mathrm{X}/\mathrm{T})$, $\mathrm{F}(r)$ ou $\mathrm{F}(\mathrm{X}/\mathrm{T})$ (ou même $\mathrm{F}(\mathrm{X})$ lorsqu'aucune confusion ne sera possible avec $\mathrm{Hom}(\mathbf{h}_{\mathrm{X}}, \mathrm{F})$).

[(*)] Une dualité d'une catégorie $\mathscr{C}$ est un couple (D, φ) formé d'un foncteur contravariant D de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ et d'un isomorphisme fonctoriel $\varphi : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \to \mathrm{DD}$ tel que les isomorphismes $\varphi\mathrm{D} : \mathrm{D} \to \mathrm{DDD}$ et $\mathrm{D}\varphi^{-1} : \mathrm{DDD} \to \mathrm{D}$ soient réciproques l'un de l'autre. [(38)]

[(38)] N.D.E. : On a corrigé $\mathrm{D}\varphi$ en $\mathrm{D}\varphi^{-1}$.

[(39)] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.0, pour références ultérieures.

4.1. Pour tout schéma S de caractéristique p, nous notons fr(S), ou simplement fr, l'endomorphisme de S qui induit l'identité sur l'espace topologique sous-jacent à S et qui associe x^p à une section x de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ sur un ouvert U.

Alors l'application $\mathrm{fr} : \mathrm{S} \mapsto \mathrm{fr(S)}$ est un *endomorphisme du foncteur identique* de $(\mathbf{Sch}_{/\mathbb{F}_p})$, [40] ce qui implique les résultats suivants. Soit E un $\mathbb{F}_p$-foncteur, c'est-à-dire un objet de $(\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathbb{F}_p}})$; l'application qui associe à tout $\mathbb{F}_p$-schéma S l'endomorphisme E(fr(S)) de E(S), est un endomorphisme fonctoriel de E que nous noterons fr(E) ou fr ; cette notation est compatible avec l'identification de $(\mathbf{Sch}_{/\mathbb{F}_p})$ à une sous-catégorie de $(\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathbb{F}_p}})$. De plus, l'application $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{fr(E)}$ est un *endomorphisme du foncteur identique* de $(\widehat{\mathbf{Sch}_{/\mathbb{F}_p}})$ (que nous noterons encore fr). [41]

Pour tout $\mathbb{F}_p$-schéma S et tout S-foncteur $q : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$, nous notons $\mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})}$ ou $\mathrm{X}^{(p)}$ l'image réciproque de X par le changement de base fr(S) :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{X}}"] \arrow[d] & \mathrm{X} \arrow[d, "q"] \\ \mathrm{S} \arrow[r, "\mathrm{fr(S)}"] & \mathrm{S} \end{tikzcd} .$$

Le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{fr(X)}"] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "q"] \\ \mathrm{S} \arrow[r, "\mathrm{fr(S)}"] & \mathrm{S} \end{tikzcd}$$

434 induit alors un S-morphisme noté Fr(X/S) (ou simplement Fr) de X dans $\mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})}$ tel que $\mathrm{fr(X)} = \mathrm{pr}_{\mathrm{X}} \circ \mathrm{Fr(X/S)}$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[dr, "\mathrm{Fr(X/S)}"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{fr(X)}"] \arrow[ddr, "q"'] & & \\ & \mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})} \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{X}}"] \arrow[d] & \mathrm{X} \arrow[d, "q"] \\ & \mathrm{S} \arrow[r, "\mathrm{fr(S)}"] & \mathrm{S} \end{tikzcd} .$$

---

[40] N.D.E. : i.e. pour tout morphisme de $\mathbb{F}_p$-schémas $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{fr(Y)}"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "\mathrm{fr(X)}"] \\ \mathrm{Y} \arrow[r, "f"] & \mathrm{X}. \end{tikzcd}$$

[41] N.D.E. : On dit que fr(X) est le morphisme de Frobenius « absolu » de X, pour le distinguer du morphisme de Frobenius « relatif » Fr(X/S) introduit plus bas.

Nous dirons que $\mathrm{Fr(X/S)}$ est *le morphisme de Frobenius de* X *relativement à* S ; il est clair que l'application $\mathrm{Fr} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{Fr(X/S)}$ est un homomorphisme fonctoriel.

[42] Soit $r : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ un S-schéma. Pour tout $\phi \in \mathrm{X}(r) = \mathrm{Hom_S(T, X)}$ (cf. 4.0), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{Fr(X/S)}"] \arrow[dr, "q"] & \mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})} \arrow[r, "\mathrm{pr_X}"] \arrow[d, "q^{(p/\mathrm{S})}"] & \mathrm{X} \arrow[d, "q"] \\
\mathrm{T} \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "r"] & \mathrm{S} \arrow[r, "\mathrm{fr(S)}"] & \mathrm{S}
\end{tikzcd} .$$

D'après la définition de $\mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})}$ comme produit fibré, $\mathrm{pr_X}$ induit une bijection :

$$\mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})}(r) = \mathrm{Hom_S}(\mathrm{T}, \mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom_S(T, X)} = \mathrm{X}(\mathrm{fr(S)} \circ r).$$

D'autre part, $r \circ \mathrm{fr(T)} = \mathrm{fr(S)} \circ r$, puisque fr est un endomorphisme du foncteur identique. Il en résulte que l'application $\mathrm{Fr(X/S)}(r) : \mathrm{X}(r) \to \mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})}(r)$ peut être caractérisée par la commutativité du carré suivant :

$$(\dagger) \qquad \begin{tikzcd}
\mathrm{X}(r) \arrow[r, "\mathrm{Fr(X/S)}(r)"] \arrow[d, "\mathrm{X(fr(T))}"'] & \mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})}(r) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{X}(r \circ \mathrm{fr(T)}) \arrow[r, equal] & \mathrm{X}(\mathrm{fr(S)} \circ r).
\end{tikzcd}$$

Par exemple, si X est le sous-schéma de S défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{I}$, alors $\mathrm{X}^{(p)}$ est le sous-schéma de S défini par l'idéal $\mathscr{I}^{\{p\}}$ engendré par les puissances p-ièmes des sections de $\mathscr{I}$; en outre, $\mathrm{Fr(X/S)}$ est alors l'immersion canonique de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathrm{X}/\mathscr{I})$ dans $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}/\mathscr{I}^{\{p\}})$.

4.1.1. — [43] Soient $t : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ un changement de base et $\mathrm{X_T} = \mathrm{X} \underset{q,t}{\times} \mathrm{T}$. Considérons l'image réciproque de $\mathrm{X_T}$ par $\mathrm{fr(T)}$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{X_T})^{(p/\mathrm{T})} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{X_T} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{X} \arrow[d, "q"] \\
\mathrm{T} \arrow[r, "\mathrm{fr(T)}"] & \mathrm{T} \arrow[r, "t"] & \mathrm{S}
\end{tikzcd} .$$

Comme $t \circ \mathrm{fr(T)} = \mathrm{fr(S)} \circ t$, alors $(\mathrm{X_T})^{(p/\mathrm{T})}$ s'identifie à l'image réciproque de $\mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})}$ 435
par t ; autrement dit, on a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{X}_\mathrm{T}^{(p/\mathrm{T})} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})})_\mathrm{T} .$$

Il est clair que, dans cette identification, $\mathrm{Fr(X_T/T)}$ s'identifie à l'image réciproque $\mathrm{Fr(X/S)_T}$ de $\mathrm{Fr(X/S)}$.

[42] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[43] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

4.1.1.1. — En particulier, si S est le spectre du corps premier $\mathbb{F}_p$, $\mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})}$ est égal à X et Fr(X/S) à fr(X). Par conséquent, $\mathrm{X}_{\mathrm{T}}^{(p/\mathrm{T})}$ s'identifie à X_{T} et $\mathrm{Fr}(\mathrm{X}_{\mathrm{T}}/\mathrm{T})$ à $\mathrm{fr}(\mathrm{X})_{\mathrm{T}}$.

Par exemple, si E est un ensemble et E_{T} le T-schéma constant de type E, on a $\mathrm{E}_{\mathrm{T}}^{(p/\mathrm{T})} \simeq \mathrm{E}_{\mathrm{T}}$ et $\mathrm{Fr}(\mathrm{E}_{\mathrm{T}}/\mathrm{T}) \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{E}_{\mathrm{T}}}$.

4.1.2. — Le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})}$ commute évidemment aux produits ; il transforme donc un S-groupe G en un S-groupe $\mathrm{G}^{(p/\mathrm{S})}$; de plus, comme Fr est un homomorphisme fonctoriel, alors

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) : \quad \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}^{(p/\mathrm{S})}$$

est un homomorphisme de S-groupes. Nous noterons ${}_{\mathrm{Fr}}\mathrm{G}$ son noyau.

Si $r : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un schéma au-dessus de S, il résulte du diagramme (†) de 4.1 que la valeur de ${}_{\mathrm{Fr}}\mathrm{G}$ en r est le noyau de l'homomorphisme

$$\mathrm{G}(\mathrm{fr}(\mathrm{T})) : \ \mathrm{G}(r) \longrightarrow \mathrm{G}(r \circ \mathrm{fr}(\mathrm{T})).$$

Or, lorsque T est le schéma I_{R} des nombres duaux sur un S-schéma R, $\mathrm{fr}(\mathrm{I}_{\mathrm{R}})$ se factorise comme suit :

$$\mathrm{I}_{\mathrm{R}} \xrightarrow{\text{can.}} \mathrm{R} \xrightarrow{\mathrm{fr}(\mathrm{R})} \mathrm{R} \xrightarrow{s} \mathrm{I}_{\mathrm{R}},$$

où s est la section nulle. Il en résulte que $({}_{\mathrm{Fr}}\mathrm{G})(\mathrm{I}_{\mathrm{R}})$ contient le noyau $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{R})$ du morphisme $\mathrm{G}(s) : \mathrm{G}(\mathrm{I}_{\mathrm{R}}) \to \mathrm{G}(\mathrm{R})$, et qu'on a donc : $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{Lie}}({}_{\mathrm{Fr}}\mathrm{G}/\mathrm{S})$.

4.1.3. — Plus généralement, pour tout S-foncteur X, nous définissons le S-foncteur $\mathrm{X}^{(p^n)}$ par récurrence sur n à l'aide des formules :

$$\mathrm{X}^{(p)} = \mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{X}^{(p^n)} = (\mathrm{X}^{(p^{n-1})})^{(p)}.$$

436 De même, $\mathrm{Fr}^n(\mathrm{X}/\mathrm{S})$ ou Fr^n désignent l'homomorphisme fonctoriel composé

$$\mathrm{X} \xrightarrow{\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/\mathrm{S})} \mathrm{X}^{(p)} \xrightarrow{\mathrm{Fr}(\mathrm{X}^{(p)}/\mathrm{S})} \mathrm{X}^{(p^2)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{X}^{(p^{n-1})} \xrightarrow{\mathrm{Fr}(\mathrm{X}^{(p^{n-1})}/\mathrm{S})} \mathrm{X}^{(p^n)}.$$

On notera que, d'après 4.1.1, $\mathrm{Fr}(\mathrm{X}^{(p)}/\mathrm{S})$ coïncide avec $\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/\mathrm{S})^{(p)}$, i.e. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}^{(p)} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Fr}(\mathrm{X}^{(p)}/\mathrm{S})"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/\mathrm{S})"] \\
\mathrm{X}^{(p^2)} \arrow[r] & \mathrm{X}^{(p)}
\end{tikzcd}.$$

Si G est un S-foncteur en groupes, $\mathrm{G}^{(p^n)}$ en est un également et $\mathrm{Fr}^n(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est un homomorphisme de S-foncteurs en groupes.

Définition. — Nous noterons ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}$ le noyau de $\mathrm{Fr}^n(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ et nous dirons que G *est de hauteur* $\leqslant n$ si $\mathrm{Fr}^n(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est nul, c'est-à-dire si ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G} = \mathrm{G}$.

Lemme. — *Le sous-foncteur en groupes* ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}$ *de* G *est* caractéristique*, c.-à-d., pour tout* S*-schéma* T*, tout endomorphisme* ϕ *du* T*-foncteur en groupes* G_{T} *induit un endomorphisme de* $({}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G})_{\mathrm{T}}$.

En effet, comme la construction de $\mathrm{G}^{(p^n)}$ et de $\mathrm{Fr}^n(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ commute aux changements de base d'après 4.1.1, on peut supposer $\mathrm{T} = \mathrm{S}$; dans ce cas, l'assertion résulte de ce que $\mathrm{Fr}^n(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est un homomorphisme fonctoriel.

4.1.4. — Voici quelques exemples.

a) Considérons d'abord un groupe abélien « abstrait » M et le groupe diagonalisable $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ de type M (I 4.4) : pour tout S-schéma T, G(T) est donc le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Ab})}(\mathrm{M}, \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{O}_{\mathrm{T}})^{\times})$. Comme G est l'image réciproque du groupe diagonalisable D(M) sur $\mathbb{F}_p$, $\mathrm{G}^{(p)}$ s'identifie à G et $\mathrm{Fr}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{T})$ s'identifie à l'endomorphisme $x \mapsto x^p$ de G(T) (4.1.1). En particulier, lorsque M est égal à $\mathbb{Z}$, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}) = \mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$, de sorte que :

> ${}_{\mathrm{Fr}}\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ *est le* S-*groupe* $\boldsymbol{\mu}_{p,\mathrm{S}}$ *qui associe à tout* S-*schéma* T *le groupe des racines p-ièmes de l'unité dans* $\Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{O}_{\mathrm{T}})^*$.

b) Considérons maintenant un schéma S de caractéristique p et un faisceau de modules $\mathscr{E}$ sur S. D'après I 4.6.2, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{W}(\mathscr{E})^{(p)} \simeq \mathbf{W}(\mathscr{E}^{(p)}),$$

où $\mathscr{E}^{(p)}$ est l'image réciproque de $\mathscr{E}$ par fr(S). Pour tout S-schéma $\pi : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ l'appli- 437
cation $\mathrm{Fr}(\mathbf{W}(\mathscr{E}))(\pi)$ est déterminée, d'après 4.1 (†), par le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathrm{T}, \pi^* \,\mathrm{fr}(\mathrm{S})^* \,\mathscr{E}) \arrow[rr, "\sim", "\text{can.}"'] & & \Gamma(\mathrm{T}, \mathrm{fr}(\mathrm{T})^* \,\pi^* \,\mathscr{E}) \\
& \Gamma(\mathrm{T}, \pi^* \,\mathscr{E}) \arrow[ul, "\mathrm{Fr}(\mathbf{W}(\mathscr{E})/\mathrm{S})(\pi)"] \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd},$$

où f' est l'application induite par fr(T).

En particulier, si $\mathscr{E}$ est égal à $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, $\mathbf{W}(\mathscr{E})$ s'identifie au groupe additif $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$. Dans ce cas, on a $\mathscr{E}^{(p)} = \mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ et le morphisme de Frobenius $\mathrm{Fr}(\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}/\mathrm{S})$ applique $x \in \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{O}_{\mathrm{T}})$ sur x^p. Donc :

> ${}_{\mathrm{Fr}}\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$ *est le* S-*groupe* $\boldsymbol{\alpha}_{p,\mathrm{S}}$ *qui associe à tout* S-*schéma* T *le groupe :* $\{x \in \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{O}_{\mathrm{T}}) \mid x^p = 0\}$.

c) On verrait de même que, pour toute $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre quasi-cohérente $\mathscr{A}$, $(\mathrm{Spec}\,\mathscr{A})^{(p)}$ s'identifie au spectre $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}^{(p)}$ de l'image réciproque de $\mathscr{A}$ par fr(S). Si π désigne l'endomorphisme $x \mapsto x^p$ du faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, on a donc

$$\mathscr{A}^{(p)} = \mathscr{A} \otimes_{\pi} \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \qquad {}^{(44)}$$

et $\mathrm{Fr}((\mathrm{Spec}\,\mathscr{A})/\mathrm{S})$ est induit par le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres $\mathscr{A} \otimes_{\pi} \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \to \mathscr{A}$ défini par $a \otimes_{\pi} x \mapsto a^p x$.

---

(44) N.D.E. : $\mathscr{A} \otimes_{\pi} \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ désigne la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre obtenue par l'extension des scalaires $\pi : \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, i.e. on a : $ax \otimes_{\pi} 1 = a \otimes_{\pi} x^p$, et $x \cdot (a \otimes_{\pi} 1) = a \otimes_{\pi} x$.

Pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{E}$ enfin, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathbb{V}(\mathscr{E})^{(p)} \simeq \mathbb{V}(\mathscr{E}^{(p)}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}(\mathscr{E})^{(p)} \simeq \mathcal{S}(\mathscr{E}^{(p)}),$$

où $\mathcal{S}(\mathscr{E})$ désigne l'algèbre symétrique du $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{E}$.

438 **d)** Soient $\mathscr{U}$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-coalgèbre (3.1) et T un schéma de caractéristique p. Si $\mathscr{U}^{(p/\mathrm{S})}$ ou $\mathscr{U}^{(p)}$ désignent l'image réciproque de la coalgèbre $\mathscr{U}$ par fr(S), on a comme en b) un isomorphisme canonique :

$$(\operatorname{Spec}^* \mathscr{U})^{(p)} \simeq \operatorname{Spec}^* \mathscr{U}^{(p)}.$$

Si $\mathscr{U}$ est une coalgèbre en groupes, la valeur de ${}_{\mathrm{Fr}}(\operatorname{Spec}^* \mathscr{U})$, i.e. du noyau du morphisme de Frobenius $\operatorname{Spec}^* \mathscr{U} \to (\operatorname{Spec}^* \mathscr{U})^{(p)}$, pour un S-schéma T est donc l'ensemble des éléments γ de

$$(\operatorname{Spec}^* \mathscr{U})(\mathrm{T}) = \{x \in \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{U}_{\mathrm{T}}) \mid \varepsilon_{\mathscr{U}_{\mathrm{T}}}(x) = 1, \quad \Delta_{\mathscr{U}_{\mathrm{T}}} x = x \otimes x\}$$

tels que l'image dans $\Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{U}_{\mathrm{T}} \otimes_{\mathrm{fr}(\mathrm{T})} \mathscr{O}_{\mathrm{T}})$ de l'élément $\gamma \otimes_{\mathrm{fr}(\mathrm{T})} 1$ de $\Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{U}_{\mathrm{T}}) \otimes_{\mathrm{fr}(\mathrm{T})} \mathscr{O}(\mathrm{T})$ soit égale à 1.

4.2. [(45)] Nous allons maintenant nous occuper d'une construction voisine de la précédente : soient S un schéma de caractéristique p, X un S-schéma et $\mathrm{X}^p_{\mathrm{S}}$ le produit dans la catégorie $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ de p exemplaires de X.

Nous désignons alors par $\mathrm{U}^p(\mathrm{X})$ le sous-schéma ouvert de $\mathrm{X}^p_{\mathrm{S}}$ qui est la réunion des produits $\mathrm{U}^p_{\mathrm{S}}$, lorsque U parcourt les ouverts affines de X. Un point x de $\mathrm{X}^p_{\mathrm{S}}$ appartient donc à $\mathrm{U}^p(\mathrm{X})$ si et seulement si les projections $\mathrm{pr}_i\, x$ de x sur les facteurs de $\mathrm{X}^p_{\mathrm{S}}$ appartiennent à un même ouvert affine de X. Par exemple, si toute partie finie de X est contenue dans un ouvert affine, on a $\mathrm{U}^p(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^p_{\mathrm{S}}$.

Le groupe symétrique $\mathscr{S}_p$ d'ordre p opère sur $\mathrm{X}^p_{\mathrm{S}}$ par permutation des facteurs et laisse stable l'ouvert $\mathrm{U}^p(\mathrm{X})$. Nous appellerons *produit symétrique p-uple de* X et nous noterons $\Sigma^p\mathrm{X}$ le quotient de $\mathrm{X}^p_{\mathrm{S}}$ par $\mathscr{S}_p$ dans la catégorie des espaces annelés. Soit $q(\mathrm{X})$, ou simplement q, la projection canonique $\mathrm{X}^p_{\mathrm{S}} \to \Sigma^p\mathrm{X}$

Alors, q applique $\mathrm{U}^p(\mathrm{X})$ sur un ouvert $\mathrm{V}^p(\mathrm{X})$ du produit symétrique, qu'on peut décrire comme suit (cf. V 4.1). Le faisceau structural de $\Sigma^p\mathrm{X}$ induit sur $\mathrm{V}^p(\mathrm{X})$ une structure de schéma ; le morphisme $q'(\mathrm{X}) : \mathrm{U}^p(\mathrm{X}) \to \mathrm{V}^p(\mathrm{X})$ induit par $q(\mathrm{X})$ est affine et même entier ; lorsque U parcourt les ouverts affines de X qui se projettent dans un
439 ouvert affine variable V de S, les $\Sigma^p\mathrm{U}$ forment un recouvrement affine de $\mathrm{V}^p(\mathrm{X})$; si R désigne l'algèbre affine de V et A celle de U, $\Sigma^p\mathrm{U}$ a pour algèbre affine la sous-algèbre $\Sigma^p\mathrm{A}$ de $\bigotimes^p_{\mathrm{R}} \mathrm{A}$ formée des tenseurs symétriques.

Considérons maintenant le morphisme diagonal δ de X dans $\mathrm{U}^p(\mathrm{X})$. Si $\mathrm{V} = \operatorname{Spec} \mathrm{R}$ est un ouvert affine de S et $\mathrm{U} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$ un ouvert affine de X au-dessus de V, la restriction de δ à U est définie par le morphisme d'algèbres

$$\eta : \bigotimes\nolimits^p_{\mathrm{R}} \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}, \qquad a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \mapsto a_1 a_2 \cdots a_p.$$

(45) N.D.E. : Pour le contenu des n$^{\mathrm{os}}$ 4.2 et 4.3, on peut aussi se reporter à [**DG70**], § IV.3, n$^{\mathrm{os}}$ 4–6.

On a donc, si N est l'opérateur de symétrisation :

$$\eta\big(\mathrm{N}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p)\big) = \eta\Big(\sum_{\sigma \in \mathscr{S}_p} a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(p)}\Big) = p!\, a_1 \cdots a_p = 0.$$

Autrement dit, η s'annule sur le sous-espace $\mathrm{N}(\bigotimes_{\mathrm{R}}^p \mathrm{A})$ de $\Sigma^p\mathrm{A}$ formé des tenseurs symétrisés. De plus, si f est un tenseur symétrique, on a évidemment $\mathrm{N}(fa) = f\mathrm{N}(a)$, ce qui montre que $\mathrm{N}(\bigotimes_{\mathrm{R}}^p \mathrm{A})$ est un idéal de $\Sigma^p\mathrm{A}$. Nous noterons désormais

$$\mathrm{U}^{[p/\mathrm{S}]} = \mathrm{Spec}\left(\Sigma^p\mathrm{A}/\mathrm{N}(\textstyle\bigotimes_{\mathrm{R}}^p \mathrm{A})\right);$$

c'est un sous-schéma fermé de $\Sigma^p(\mathrm{U}) = \mathrm{V}^p(\mathrm{U})$. La réunion des $\mathrm{U}^{[p/\mathrm{S}]}$, lorsque U parcourt les ouverts affines de X qui se projettent dans un ouvert affine variable V de S, est un sous-schéma fermé de $\mathrm{V}^p(\mathrm{X})$, noté $\mathrm{X}^{[p/\mathrm{S}]}$.

De plus, si $i(\mathrm{X})$ désigne l'inclusion de $\mathrm{X}^{[p/\mathrm{S}]}$ dans $\mathrm{V}^p(\mathrm{X})$, nous venons de voir que $q'(\mathrm{X}) \circ \delta$ se factorise à travers $\mathrm{X}^{[p/\mathrm{S}]}$, d'où un morphisme $\mathrm{F}^{[p]}(\mathrm{X}/\mathrm{S}) : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^{[p/\mathrm{S}]}$: [46]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}^p_{\mathrm{S}} \arrow[d, "q(\mathrm{X})"'] & \supset & \mathrm{U}^p(\mathrm{X}) \arrow[d, "q'(\mathrm{X})"'] & \mathrm{X} \arrow[l, "\delta(\mathrm{X})"'] \arrow[d, "\mathrm{F}^{[p]}(\mathrm{X}/\mathrm{S})"] \\
\Sigma^p(\mathrm{X}) & \supset & \mathrm{V}^p(\mathrm{X}) & \mathrm{X}^{[p/\mathrm{S}]} \arrow[l, "i(\mathrm{X})"']
\end{tikzcd}\ .$$

Il est clair que $\mathrm{X}^{[p/\mathrm{S}]}$ est fonctoriel en X et que l'application $\mathrm{F}^{[p]} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{F}^{[p]}(\mathrm{X}/\mathrm{S})$ est un homomorphisme fonctoriel.

4.2.1. — Les schémas $\mathrm{X}^{[p/\mathrm{S}]}$ et $\mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})}$ sont évidemment reliés : soient V un ouvert affine de S d'anneau affine R et U un ouvert affine de X au-dessus de V ; soit A 440
l'algèbre affine de U. Si π désigne l'endomorphisme $x \mapsto x^p$ de R, alors $\mathrm{U}^{(p/\mathrm{S})}$ a $\mathrm{A} \otimes_\pi \mathrm{R}$ pour algèbre affine. On vérifie en outre que l'application

$$a \otimes_\pi \lambda \mapsto \left(\lambda a \otimes \cdots \otimes a \qquad \mathrm{mod}\ \mathrm{N}(\textstyle\bigotimes_{\mathrm{R}}^p \mathrm{A})\right)$$

définit un morphisme de R-algèbres de $\mathrm{A} \otimes_\pi \mathrm{R}$ dans $\Sigma^p\mathrm{A}/\mathrm{N}(\bigotimes_{\mathrm{R}}^p \mathrm{A})$, et celui-ci induit un morphisme $\varphi(\mathrm{U}) : \mathrm{U}^{[p/\mathrm{S}]} \to \mathrm{U}^{(p/\mathrm{S})}$ tel que $\varphi(\mathrm{U}) \circ \mathrm{F}^{[p]}(\mathrm{U}/\mathrm{S}) = \mathrm{Fr}(\mathrm{U}/\mathrm{S})$.

« Recollant les morceaux », on obtient alors un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{X} \arrow[dl, "\mathrm{F}^{[p]}(\mathrm{X}/\mathrm{S})"'] \arrow[dr, "\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/\mathrm{S})"] & \\
\mathrm{X}^{[p/\mathrm{S}]} \arrow[rr, "\varphi(\mathrm{X})"] & & \mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})}
\end{tikzcd}\ .$$

Par exemple, si X est le sous-schéma de S défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{I}$, $\mathrm{F}^{[p]}(\mathrm{X}/\mathrm{S})$ s'identifie au morphisme identique de X, de sorte que $\varphi(\mathrm{X})$ est l'immersion

[46] N.D.E. : Dans l'original, ce morphisme (resp. le morphisme de Frobenius relatif) était noté $\underline{\mathrm{F}}'$ (resp. $\underline{\mathrm{F}}$).

canonique de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathrm{S}/\mathscr{I})$ dans $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathrm{S}/\mathscr{I}^{\{p\}})$. On voit ainsi que $\varphi(\mathrm{X})$ n'est pas un isomorphisme en général.

Toutefois, lorsque M est un R-module libre, il est clair que l'application

$$\mathrm{M}\otimes_\pi \mathrm{R} \longrightarrow \Sigma^p\mathrm{M}/\mathrm{N}(\textstyle\bigotimes_\mathrm{R}^p \mathrm{M}), \qquad m\otimes_\pi \lambda \mapsto \Big(\lambda m\otimes\cdots\otimes m \qquad \bmod \mathrm{N}(\textstyle\bigotimes_\mathrm{R}^p \mathrm{M})\Big)$$

est bijective ; cette application reste donc bijective lorsque M est R-plat, parce que tout module plat est une limite inductive filtrante de modules libres (Lazard [(∗)] [(47)]). Il s'ensuit que

$$\varphi(\mathrm{X}) : \mathrm{X}^{[p/\mathrm{S}]} \to \mathrm{X}^{(p/\mathrm{S})} \textit{ est un isomorphisme si } \mathrm{X} \textit{ est un } \mathrm{S}\textit{-schéma plat.}$$

4.3. Considérons enfin un S-*schéma en groupes abéliens* G. Alors, le morphisme composé $\mu(\mathrm{G}) : \mathrm{U}^p(\mathrm{G}) \hookrightarrow \mathrm{G}^p_\mathrm{S} \to \mathrm{G}$, qui est défini par la multiplication, se factorise à travers $\mathrm{V}^p(\mathrm{G})$, i.e. il existe un morphisme $\nu(\mathrm{G}) : \mathrm{V}^p(\mathrm{G}) \to \mathrm{G}$ tel que $\nu(\mathrm{G})\circ q'(\mathrm{G}) = \mu(\mathrm{G})$, de sorte qu'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} & & \mathrm{U}^p(\mathrm{G}) \arrow[ll, "\mu(\mathrm{G})"'] \arrow[dl, "q'(\mathrm{G})"] & & \mathrm{G} \arrow[ll, "\delta(\mathrm{G})"'] \arrow[dl, "\mathrm{F}^{[p]}(\mathrm{G}/\mathrm{S})"'] \arrow[ddll, bend left, "\mathrm{Fr}(\mathrm{G}/\mathrm{S})"] \\
& \mathrm{V}^p(\mathrm{G}) \arrow[ul, "\nu(\mathrm{G})"] & & \mathrm{G}^{[p/\mathrm{S}]} \arrow[ll, "i(\mathrm{G})"] \arrow[dl, "\varphi(\mathrm{G})"] & \\
& & \mathrm{G}^{(p/\mathrm{S})} \arrow[uull, dotted, bend left, "\mathrm{Ver}(\mathrm{G}/\mathrm{S})"] & &
\end{tikzcd}$$

441 *Lorsque* G *est* S-*plat*, $\varphi(\mathrm{G})$ est un isomorphisme et l'on peut définir un morphisme (dit *Verschiebung*)

$$\mathrm{Ver}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) : \quad \mathrm{G}^{(p/\mathrm{S})} \longrightarrow \mathrm{G}$$

à l'aide de la formule $\mathrm{Ver}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) = \nu(\mathrm{G})\circ i(\mathrm{G})\circ\varphi(\mathrm{G})^{-1}$. Lorsque G parcourt les S-schémas plats en groupes abéliens, l'application $\mathrm{Ver} : \mathrm{G}\mapsto \mathrm{Ver}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est évidemment un homomorphisme fonctoriel ; par conséquent, Ver(G/S) est un *homomorphisme de groupes.* Pour tout S-schéma T enfin, l'application composée

$$\mathrm{G}(\mathrm{T}) \xrightarrow{\delta(\mathrm{G})(\mathrm{T})} \mathrm{U}^p(\mathrm{G})(\mathrm{T}) \xrightarrow{\mu(\mathrm{G})(\mathrm{T})} \mathrm{G}(\mathrm{T})$$

applique $x \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$ sur $p\cdot x$. Nous pouvons écrire $p\cdot \mathrm{id}_\mathrm{G}$ au lieu de $\mu(\mathrm{G})\circ\delta(\mathrm{G})$, obtenant ainsi la formule classique :

$$(\ast) \qquad \mathrm{Ver}(\mathrm{G}/\mathrm{S})\circ\mathrm{Fr}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) = p\cdot\mathrm{id}_\mathrm{G}\,.$$

(∗) D. Lazard, C. R. Acad. Sc. Paris **258**, 1964, p. 6313-6316.

(47) N.D.E. : Voir aussi : D. Lazard, Bull. Soc. Math. France **97** (1969), 81-128, ou : [**BAlg**], X § 1.6, Th. 1.

Exemples 4.3.1. — (a) Lorsque G est un S-schéma constant en groupes abéliens, nous savons que Fr(G/S) s'identifie au morphisme identique de G (cf. 4.1.1.1). On a donc $\mathrm{Ver}(G/S) = p\,\mathrm{id}_G$.

(b) Lorsque G est le S-groupe diagonalisable de type M, Fr(G/S) est égal à $p\,\mathrm{id}_G$ d'après 4.1.4 (a) ; on voit alors facilement que Ver(G/S) est le morphisme identique de G.

(c) Lorsque $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_S$-module plat et que G est le S-groupe $\mathbb{V}(\mathscr{E})$, le morphisme Ver(G/S) est nul ainsi que $p{\cdot}\mathrm{id}_G$. On verra dans l'exposé $\mathrm{VII_B}$ qu'un groupe algébrique commutatif G sur un corps k est « unipotent » si et seulement si l'homomorphisme composé 442

$$G^{(p^n)} \xrightarrow{\mathrm{Ver}(G^{(p^{n-1})}/S)} G^{(p^{n-1})} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G^{(p)} \xrightarrow{\mathrm{Ver}(G/S)} G$$

est nul pour un certain n (on a posé $G^{(p^n)} = (G^{(p^{n-1})})^{(p)}$, cf. 4.1.3). [48]

4.3.2. — Comme l'application Ver : $G \mapsto \mathrm{Ver}(G/S)$ est un homomorphisme fonctoriel lorsque G parcourt les S-*schémas plats en groupes commutatifs*, le carré

$$\begin{tikzcd} G^{(p)} \arrow[r, "\mathrm{Ver}(G/S)"] \arrow[d, "\mathrm{Fr}(G/S)^{(p)}"'] & G \arrow[d, "\mathrm{Fr}(G/S)"] \\ G^{(p^2)} \arrow[r, "\mathrm{Ver}(G^{(p)}/S)"] & G^{(p)} \end{tikzcd}$$

est commutatif, où $\mathrm{Fr}(G/S)^{(p)}$ désigne l'image réciproque de Fr(G/S) par le changement de base fr(S). D'après 4.1.1, on a $\mathrm{Fr}(G/S)^{(p)} = \mathrm{Fr}(G^{(p)}/S)$ donc, d'après 4.3 $(*)$ appliqué à $G^{(p)}$, on obtient :

$$(**) \qquad \mathrm{Fr}(G/S) \circ \mathrm{Ver}(G/S) = \mathrm{Ver}(G^{(p)}/S) \circ \mathrm{Fr}(G^{(p)}/S) = p \cdot \mathrm{id}_{G^{(p)}}\,.$$

4.3.3. — Supposons enfin que G soit un S-*groupe commutatif, fini et localement libre* ; soient $\mathscr{A}$ la $\mathscr{O}_S$-algèbre affine de G et π l'endomorphisme du faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_S$ qui envoie une section x de $\mathscr{O}_S$ sur x^p.

[49] On désigne par $\Sigma^p\mathscr{A}$ la sous-algèbre de $\bigotimes^p_{\mathscr{O}_S}\mathscr{A}$ formée des sections invariantes sous l'action du groupe symétrique, par $i(\mathscr{A})$ l'inclusion de $\Sigma^p\mathscr{A}$ dans le produit tensoriel. Soit $\Delta^p(\mathscr{A}) : \mathscr{A} \to \bigotimes^p_{\mathscr{O}_S}\mathscr{A}$ le morphisme obtenu en itérant le morphisme diagonal de la coalgèbre $\mathscr{A}$ (il correspond au morphisme de multiplication de $U^p(G) = G^p_S$ vers G) ; d'après le début du paragraphe 4.3, $\Delta^p(\mathscr{A})$ se factorise à travers $\Sigma^p\mathscr{A}$, c.-à-d., induit un morphisme 443

$$a(\mathscr{A}) : \mathscr{A} \longrightarrow \Sigma^p\mathscr{A}$$

tel que $i(\mathscr{A}) \circ a(\mathscr{A}) = \Delta^p(\mathscr{A})$.

---

[48] N.D.E. : Ceci ne figurant pas explicitement dans $\mathrm{VII_B}$, on renvoie à [**DG70**], § IV.3, Prop. 4.11.

[49] N.D.E. : On a modifié l'ordre, en introduisant d'abord les objets intervenant dans le diagramme qui va suivre.

D'autre part, soient $\mathcal{S}^p(\mathscr{A})$ la composante de degré p de l'algèbre symétrique de $\mathscr{A}$ et $q(\mathscr{A}) : \bigotimes^p_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A} \to \mathcal{S}^p(\mathscr{A})$ la projection canonique. La multiplication $m^p(\mathscr{A}) : \bigotimes^p_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ se factorise à travers $\mathcal{S}^p(\mathscr{A})$, c.-à-d., induit une application

$$b(\mathscr{A}) : \mathcal{S}^p(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$$

telle que $b(\mathscr{A}) \circ q(\mathscr{A}) = m^p(\mathscr{A})$.

Comme $\Sigma^p \mathscr{A}$ est l'algèbre affine de $\mathrm{V}^p(\mathscr{A})$ alors, d'après le début de 4.3 à nouveau, le morphisme composé $i(\mathrm{G}) \circ \varphi(\mathrm{G})^{-1}$ induit un homomorphisme d'algèbres

$$r(\mathscr{A}) :\ \Sigma^p \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A} \otimes_\pi \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \quad ;$$

cet homomorphisme s'annule sur les sections de la forme

$$\sum_{\sigma \in \mathscr{S}_p} a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(p)}$$

et envoie $a \otimes \cdots \otimes a$ sur $a \otimes_\pi 1$. De même, $j(\mathscr{A})$ est le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $a \otimes_\pi 1 \mapsto q(a \otimes \cdots \otimes a)$. On obtient donc le diagramme commutatif :

$$(\mathscr{A}) \qquad \begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[rr, "\Delta^p(\mathscr{A})"] \arrow[dr, "a(\mathscr{A})"'] & & \bigotimes^p_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{A} \arrow[rr, "m^p(\mathscr{A})"] \arrow[dr, "q(\mathscr{A})"] & & \mathscr{A} \\
& \Sigma^p \mathscr{A} \arrow[ur, "i(\mathscr{A})"] \arrow[dr, "r(\mathscr{A})"'] & & \mathcal{S}^p(\mathscr{A}) \arrow[ur, "b(\mathscr{A})"'] & \\
& & \mathscr{A} \otimes_\pi \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \arrow[ur, "j(\mathscr{A})"'] & &
\end{tikzcd} .$$

Le composé $r(\mathscr{A}) \circ a(\mathscr{A})$ est associé au morphisme Verschiebung $\mathrm{Ver}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$, tandis que $b(\mathscr{A}) \circ j(\mathscr{A})$ est associé au morphisme de Frobenius $\mathrm{Fr}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$.

Le diagramme commutatif $(\mathscr{A})$ ci-dessus est autodual ; soit en effet D le foncteur qui associe à tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{M}$ le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module dual $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$; il est clair que l'image du diagramme $(\mathscr{A})$ par le foncteur D n'est autre que le diagramme $(\mathrm{D}\mathscr{A})$, les morphismes $\mathrm{D}r(\mathscr{A})$, $\mathrm{D}a(\mathscr{A})$, $\mathrm{D}j(\mathscr{A})$ et $\mathrm{D}b(\mathscr{A})$ s'identifiant respectivement à $j(\mathrm{D}\mathscr{A})$, $b(\mathrm{D}\mathscr{A})$, $r(\mathrm{D}\mathscr{A})$ et $a(\mathrm{D}\mathscr{A})$. D'après 3.3.1, on voit donc que :

Dans la catégorie des S*-groupes commutatifs, finis et localement libres, la dualité de Cartier échange morphisme de Frobenius et Verschiebung.* (50)

5. p-algèbres de Lie

444

Rappelons d'abord quelques résultats du Séminaire Sophus Lie. (51)

(50) N.D.E. : Voir aussi [**DG70**], § IV.3, 4.9.

(51) N.D.E. : cf. P. Cartier, *Exemples d'hyperalgèbres*, Sém. Sophus Lie 1955/56, Exp. 3 (accessible sur le site Numdam : http://www.numdam.org).

5.1. Soient p un nombre premier, R un anneau commutatif de caractéristique p et A une R-algèbre associative, mais non nécessairement commutative. Si a et b sont deux éléments de A, nous posons $[a,b] = ab - ba$ et $ab = \mathrm{L}_a(b) = \mathrm{R}_b(a)$. On a alors :

$$(\operatorname{ad} x^p)(y) = [x^p, y] = (\mathrm{L}_x^p - \mathrm{R}_x^p)(y) = (\mathrm{L}_x - \mathrm{R}_x)^p(y) = (\operatorname{ad} x)^p(y)$$

d'où la *première formule de Jacobson* :

$$\text{(i)} \qquad \operatorname{ad}(x^p) = (\operatorname{ad} x)^p.$$

Si $a_1, \ldots, a_p$ sont p éléments arbitraires de A alors, notant N l'opérateur de symétrisation (cf. 4.2), on a les égalités :

$$(*) \qquad \mathrm{N}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p) = \sum_\sigma a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(p)} = \sum_\tau [a_{\tau(1)}[a_{\tau(2)}[\cdots[a_{\tau(p-1)}, a_p]\cdots]]]$$

où σ parcourt les permutations de p lettres et τ celles de $(p-1)$ lettres. En effet, le dernier terme vaut

$$\sum_\tau \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_r} (-1)^s\, a_{\tau(i_1)}\, a_{\tau(i_2)} \cdots a_{\tau(i_r)}\, a_p\, a_{\tau(j_s)} \cdots a_{\tau(j_1)}$$

où τ parcourt les permutations de $p-1$ lettres, $i_1, \ldots, i_r$ les suites strictement croissantes d'entiers de l'intervalle $[1, p-1]$ et où $j_1, \ldots, j_s$ désigne la suite strictement croissante dont les valeurs sont les entiers de $[1, p-1]$ différents de $i_1, \ldots, i_r$. Pour une valeur fixée de r, la somme des termes $(-1)^s\, a_{\tau(i_1)} \cdots a_{\tau(i_r)}\, a_p\, a_{\tau(j_s)} \cdots a_{\tau(j_1)}$ vaut évidemment

$$(-1)^s \binom{p-1}{s} \sum_\rho a_{\rho(1)} \cdots a_{\rho(r)}\, a_p\, a_{\rho(r+1)} \cdots a_{\rho(p-1)}$$

où ρ parcourt les permutations de $p-1$ lettres. Or $(-1)^s\binom{p-1}{s} = 1$ dans $\mathbb{F}_p$, puisque **445**
dans $\mathbb{F}_p[x]$ (x une indéterminée) on a : $(x-1)^p = x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1} + \cdots + 1)$ et donc $(x-1)^{p-1} = x^{p-1} + \cdots + 1$. Ceci prouve $(*)$.

D'autre part, si x_0 et x_1 sont deux éléments de A, on a

$$(x_0 + x_1)^p = x_0^p + x_1^p + \sum x_{z(1)} x_{z(2)} \cdots x_{z(p)},$$

où z parcourt les applications non constantes de $[1, p]$ dans $\{0, 1\}$. On en tire

$$(x_0 + x_1)^p = x_0^p + x_1^p + \sum_{0<r<p} \frac{1}{r!(p-r)!} \mathrm{N}(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{r}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{p-r}).$$

[52] Or, d'après $(*)$, on a :

$$\mathrm{N}(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{r}, \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{p-r}) = r!(p-1-r)! \sum_t \big[x_{t(1)}\big[x_{t(2)}\big[\cdots\big[x_{t(p-1)}, x_1\big]\cdots\big]\big]\big]$$

[52] N.D.E. : On a inséré l'explication qui suit, tirée de [**DG70**], § II.7, 3.2.

où t parcourt les applications $[1, p-1] \to \{0, 1\}$ prenant r fois la valeur 0. On en déduit la *deuxième formule de Jacobson* :

$$\text{(ii)} \qquad (x_0 + x_1)^p = x_0^p + x_1^p - \sum_{0<r<p} \sum_t \frac{1}{r} \big[x_{t(1)} \big[x_{t(2)} \big[\cdots \big[x_{t(p-1)}, x_1\big] \cdots \big]\big]\big]$$

où t parcourt les applications $[1, p-1] \to \{0, 1\}$ prenant r fois la valeur 0.

5.2. Soit maintenant $\mathfrak{g}$ une R-algèbre de Lie. On dit qu'une application $x \mapsto x^{(p)}$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ fait de $\mathfrak{g}$ une *p-algèbre de Lie* sur R si les conditions suivantes sont vérifiées :

(0) $(\lambda x)^{(p)} = \lambda^p \cdot x^{(p)}$, pour $\lambda \in \mathrm{R}$, $x \in \mathfrak{g}$

(i) $\operatorname{ad} x^{(p)} = (\operatorname{ad} x)^p$, pour $x \in \mathfrak{g}$

(ii) $(x_0 + x_1)^{(p)} = x_0^{(p)} + x_1^{(p)} - \displaystyle\sum_{0<r<p} \sum_t \frac{1}{r} \big[x_{t(1)} \big[x_{t(2)} \big[\cdots \big[x_{t(p-1)}, x_1\big] \cdots \big]\big]\big]$

446 où t parcourt les applications $[1, p-1] \to \{0, 1\}$ prenant r fois la valeur 0 ($x_0, x_1 \in \mathfrak{g}$). L'application $x \mapsto x^{(p)}$ sera alors appelée « puissance p-ième symbolique ».

Par exemple, si A est une R-algèbre associative, nous avons vu en 5.1 qu'on obtenait une p-algèbre de Lie, qu'on notera $\mathrm{A}_{\mathrm{Lie}}$, en prenant le R-module sous-jacent à A et en posant, pour $x, y \in \mathrm{A}$,

$$[x, y] = xy - yx \qquad \text{et} \qquad x^{(p)} = x^p.$$

Nous dirons que $\mathrm{A}_{\mathrm{Lie}}$ est la *p-algèbre de Lie sous-jacente à* A.

Dans la suite nous considèrerons surtout des sous-p-algèbres de Lie de p-algèbres de la forme $\mathrm{A}_{\mathrm{Lie}}$; en voici un exemple : soient S un schéma de caractéristique $p > 0$ et X un S-schéma. On rappelle qu'une dérivation de X sur S est un endomorphisme D du faisceau en groupes abéliens $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ tel que

$$\mathrm{D}(\lambda \cdot s) = \lambda \cdot \mathrm{D}(s) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}(st) = (\mathrm{D}s)t + s(\mathrm{D}t)$$

lorsque λ et s, t parcourent les sections de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ et de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ sur des ouverts tels que les formules aient un sens. La formule de Leibniz

$$\mathrm{D}^n(st) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\mathrm{D}^i s)(\mathrm{D}^{n-i} t)$$

montre que D^p est encore une dérivation de X sur S, compte-tenu de l'égalité $\binom{p}{i} \equiv 0 \pmod p$ pour $i \neq 0, p$. Il s'ensuit que :

> *L'algèbre* $\mathrm{Dér}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ *des dérivations de* X *sur* S *est une p-sous-algèbre de Lie de la* $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$*-algèbre des opérateurs différentiels de* X *sur* S.

5.2.1. — Si $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont deux p-algèbres de Lie, un homomorphisme $h : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est une application R-linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$ telle que $h([x, y]) = [h(x), h(y)]$ et $h(x^{(p)}) = h(x)^{(p)}$ si x, $y \in \mathfrak{g}$. L'application composée de deux homomorphismes est encore un homomorphisme, de sorte que nous pourrons parler de la catégorie des p-algèbres de Lie sur R.

Si $(\mathrm{X}, \mathscr{R})$ est un espace annelé, nous dirons qu'un $\mathscr{R}$-module $\mathfrak{g}$ est muni d'une structure de *p-algèbre de Lie sur* $\mathscr{R}$ si, pour tout ouvert U, $\Gamma(\mathrm{U}, \mathfrak{g})$ est muni d'une structure 447 de p-algèbre de Lie sur $\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{R})$ et si les restrictions sont des homomorphismes.

5.3. Nous nous intéressons maintenant au foncteur adjoint à gauche du foncteur $\mathrm{A}\mapsto\mathrm{A}_{\mathrm{Lie}}$ de 5.2. Soient $\mathfrak{g}$ une p-algèbre de Lie sur l'anneau R de caractéristique p, $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie sous-jacente à $\mathfrak{g}$ (cf. [**BLie**], I § 2.1) et $i_{\mathfrak{g}}$ (ou simplement i) l'application canonique $\mathfrak{g}\to\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Soit A une R-algèbre associative unitaire. On sait que, pour tout homomorphisme d'algèbres de Lie $\phi:\mathfrak{g}\to\mathrm{A}_{\mathrm{Lie}}$ il existe un unique homomorphisme de R-algèbres unitaires $\psi:\mathrm{U}(\mathfrak{g})\to\mathrm{A}$ tel que $\psi\circ i=\phi$. En outre, ϕ est un homomorphisme de p-algèbres de Lie si et seulement si ψ s'annule sur les éléments $i(x)^p-i(x^{(p)})$, lorsque x parcourt $\mathfrak{g}$.

Définition. — On note $\mathrm{U}_p^{\mathrm{R}}(\mathfrak{g})$ ou simplement $\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$ le quotient de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $i(x)^p-i(x^{(p)})$, et $j_{\mathfrak{g}}$ (ou simplement j) l'application $\mathfrak{g}\to\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$ composée de $i:\mathfrak{g}\to\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ et de l'application canonique $\mathrm{U}(\mathfrak{g})\to\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$. On dit que $\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$ est *l'algèbre enveloppante restreinte de* $\mathfrak{g}$.

D'après ce qui précède, on a la

Proposition. — *Pour toute* R*-algèbre associative unitaire et tout morphisme de* p*-algèbres de Lie* $\phi:\mathfrak{g}\to\mathrm{A}_{\mathrm{Lie}}$*, il existe un unique homomorphisme d'algèbres unitaires* $\psi:\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})\to\mathrm{A}$ *tel que* $\psi\circ j=\phi$*. En d'autres termes, le foncteur* $\mathfrak{g}\mapsto\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$ *est adjoint à gauche du foncteur d'oubli* $\mathrm{A}\mapsto\mathrm{A}_{\mathrm{Lie}}$.

5.3.1. — Avec les notations de 5.3, posons maintenant $\beta(x)=i(x)^p-i(x^{(p)})$. Pour tout élément y de $\mathfrak{g}$, on a, d'après 5.1 (i) et 5.2 (i) :

$$\begin{aligned}\beta(x)i(y)&=i(y)\beta(x)+[\beta(x),i(y)]\\&=i(y)\beta(x)+(\operatorname{ad}i(x))^p\,i(y)-i((\operatorname{ad}x)^p\,y)\\&=i(y)\beta(x),\end{aligned}$$

de sorte que $\beta(x)$ appartient au centre de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$; en particulier, l'idéal à gauche engendré par les éléments $\beta(x)$ est déjà bilatère. 448

D'autre part, il est clair que $\beta(\lambda x)=\lambda^p\beta(x)$, pour $\lambda\in\mathrm{R}$, et il résulte de 5.1 (ii) et 5.2 (ii) que, pour $x,y\in\mathfrak{g}$,

$$\beta(x+y)=\beta(x)+\beta(y).$$

En particulier, si (x_α) est une famille de générateurs du R-module $\mathfrak{g}$, l'idéal à gauche engendré par les éléments $\beta(x)$ est déjà engendré par les $\beta(x_\alpha)$.

5.3.2. Proposition. — [53] *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* R*-algèbre de Lie dont le* R*-module sous-jacent est libre de base* (x_α)*. Alors les structures de* p*-algèbre de Lie sur* $\mathfrak{g}$ *correspondent biunivoquement aux familles* (y_α) *de* $\mathfrak{g}$ *telles que* $\operatorname{ad}y_\alpha=(\operatorname{ad}x_\alpha)^p$.

[53] N.D.E. : Dans ce paragraphe, on a modifié l'ordre, énonçant d'abord le résultat, puis détaillant la démonstration.

En effet, si $\mathfrak{g}$ est munie d'une structure de p-algèbre de Lie $x \mapsto x^{(p)}$, alors d'après 5.2 (i) et (0), (ii), les $y_\alpha = x_\alpha^{(p)}$ vérifient $\operatorname{ad} y_\alpha = (\operatorname{ad} x_\alpha)^p$, et déterminent la structure de p-algèbre de Lie.

Prouvons la réciproque. Comme $\mathfrak{g}$ est un R-module libre, l'application canonique $i : \mathfrak{g} \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ est injective, d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (cf. [**BLie**], I § 2.7), donc on peut identifier $\mathfrak{g}$ à un sous-R-module de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Supposons que (y_α) soit une famille d'éléments de $\mathfrak{g}$ tels que $\operatorname{ad} y_\alpha = (\operatorname{ad} x_\alpha)^p$. Soit π l'application $r \mapsto r^p$ de R dans R, et soit $\mathfrak{g} \otimes_\pi \mathrm{R}$ la R-algèbre de Lie obtenue par l'extension des scalaires $\pi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$. [54]

Il existe alors une application R-linéaire γ de $\mathfrak{g} \otimes_\pi \mathrm{R}$ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ qui envoie $x_\alpha \otimes_\pi 1$ sur $x_\alpha^p - y_\alpha$; de plus, comme on a, pour tout $x \in \mathfrak{g}$,

$$(\operatorname{ad} x_\alpha^p)(x) = (\operatorname{ad} x_\alpha)^p(x) = (\operatorname{ad} y_\alpha)(x),$$

γ applique $\mathfrak{g} \otimes_\pi \mathrm{R}$ dans le centre de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Posons, pour tout $x \in \mathfrak{g}$:

$$x^{(p)} = x^p - \gamma(x \otimes_\pi 1).$$

Alors, pour tout α, on a $x_\alpha^{(p)} = y_\alpha$. Si $x = \sum \lambda_\alpha x_\alpha$, on déduit de 5.1 (ii) (en procédant par récurrence sur le nombre d'indices α tels que $\lambda_\alpha \neq 0$), que

$$x^p - \sum_\alpha \lambda_\alpha^p \, x_\alpha^p \in \mathfrak{g};$$

désignant par z cet élément, on a alors $x^{(p)} = \sum \lambda_\alpha^p \, y_\alpha + z$ et donc $x^{(p)} \in \mathfrak{g}$.

Il est clair que l'application $x \mapsto x^{(p)}$ vérifie $(\lambda x)^{(p)} = \lambda^p \, x^{(p)}$. De plus, comme $\gamma(x \otimes_\pi 1)$ est central, alors $\operatorname{ad} x^{(p)} = \operatorname{ad} x^p$ et donc, d'après la première formule de Jacobson (5.1 (i)), on a

$$\operatorname{ad} x^{(p)} = (\operatorname{ad} x)^p.$$

Enfin, d'après la deuxième formule de Jacobson (5.1 (ii)), l'application $x \mapsto x^{(p)}$ vérifie la condition (ii) de 5.2. Elle fait donc de $\mathfrak{g}$ une p-algèbre de Lie. Ceci prouve la proposition.

5.3.3. Proposition. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une p-algèbre de Lie sur* R *dont le module sous-jacent est libre de base* (x_α)*. Alors l'application* $j : \mathfrak{g} \to \mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$ *est injective et, si l'on pose* $z_\alpha = j(x_\alpha)$*, alors* $\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$ *a pour base les monômes*

$$\prod_\alpha z^{n_\alpha} \qquad \text{où} \quad 0 \leqslant n_\alpha < p,$$

(*les* n_α *sont supposés nuls hormis un nombre fini d'entre eux ; on suppose la base totalement ordonnée et les produits effectués dans l'ordre croissant*).

449 En effet, identifions $\mathfrak{g}$ à un sous-module de l'algèbre enveloppante $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ au moyen de l'application canonique i. Pour toute famille $n = (n_\alpha)$ d'entiers naturels, nuls hormis un nombre fini d'entre eux, posons

$$|n| = \sum_\alpha n_\alpha \qquad \text{et} \qquad x^n = \prod_\alpha x_\alpha^{n_\alpha}.$$

[54] N.D.E. : c.-à-d., $xr \otimes_\pi 1 = x \otimes_\pi r^p$ et $r \cdot (x \otimes_\pi 1) = x \otimes_\pi r$, pour $x \in \mathfrak{g}$, $r \in \mathrm{R}$.

Écrivant $n_\alpha = m_\alpha + p\ell_\alpha$, avec $0 \leqslant m_\alpha < p$, posons aussi

$$\mathrm{T}_n = \prod_\alpha x^{m_\alpha}\,\beta(x_\alpha)^{\ell_\alpha}$$

où $\beta(x) = x^p - x^{(p)}$ est l'application $\mathfrak{g} \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ définie en 5.3.1.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, notons U^r le sous-R-module de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ engendré par les x^n tels que $|n| \leqslant r$. Comme l'anneau gradué $\bigoplus_r \mathrm{U}^r/\mathrm{U}^{r-1}$ est commutatif (cf. [**BLie**], I § 2.6), on voit que, pour tout n :

$$\mathrm{T}_n - \prod_\alpha x^{n_\alpha} \in \mathrm{U}^{|n|-1}.$$

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, les x^n tels que $|n| = s$ forment, d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (*loc. cit.*, § 2.7), une base de $\mathrm{U}^s/\mathrm{U}^{s-1}$, et donc il en est de même pour les T_n tels que $|n| = s$.

Donc, lorsque $s = |n|$ varie, les T_n forment une base de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Or le noyau J de l'application canonique $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$ est l'idéal à gauche de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments centraux $\beta(x_\alpha)$ (5.3.1). Par conséquent, les T_n tels que $\ell = (\ell_\alpha) \neq 0$ forment une base de J, et les T_n tels que $n_\alpha < p$ pour tout α, forment une base de $\mathrm{U}_p(\mathfrak{g}) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})/\mathrm{J}$.

5.3.3 bis. — Soient $\mathfrak{g}$ une p-algèbre de Lie sur R et $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ une extension de l'anneau de base. Je dis qu'*il existe sur le* R'*-module* $\mathrm{R}' \otimes_\mathrm{R} \mathfrak{g}$ *une structure de p-algèbre de Lie et une seule telle que*

$$(*) \qquad [\lambda \otimes x, \mu \otimes y] = \lambda\mu \otimes [x, y] \qquad \text{et} \qquad (\lambda \otimes x)^{(p)} = \lambda^p \otimes x^{(p)}.$$

Il en résultera, en particulier, que le foncteur $\mathfrak{g} \mapsto \mathrm{R}' \otimes_\mathrm{R} \mathfrak{g}$ est adjoint à gauche au foncteur « restriction des scalaires de R′ à R ».

L'unicité de la structure de p-algèbre de Lie définie par $(*)$ étant claire, prouvons l'existence. Lorsque $\mathfrak{g}$ est libre de base (x_α) il existe d'après 5.3.2 une et une seule structure de p-algèbre de Lie sur l'algèbre de Lie $\mathrm{R}' \otimes_\mathrm{R} \mathfrak{g}$ telle que

$$(1 \otimes x_\alpha)^{(p)} = 1 \otimes x_\alpha^{(p)};$$

cette structure est celle que nous cherchons.

Lorsque $\mathfrak{g}$ est une p-algèbre de Lie arbitraire, il existe une p-algèbre de Lie libre (en tant que R-module) L_0 et un homomorphisme surjectif $q_0 : \mathrm{L}_0 \to \mathfrak{g}$; il suffit par exemple de prendre pour L_0 la p-algèbre de Lie $\mathrm{R}\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathfrak{g}$, où $\mathbb{F}_p$ désigne le corps premier de caractéristique p, pour q_0 l'homomorphisme $\lambda \otimes x \mapsto \lambda x$ ($\mathfrak{g}$ est libre sur $\mathbb{F}_p$!). Le **450**
noyau de q_0 est alors un p-idéal de L_0, c'est-à-dire un idéal de l'algèbre de Lie L_0 qui est stable par l'endomorphisme $x \mapsto x^{(p)}$; il y a donc également une p-algèbre de Lie libre (en tant que R-module) L_1 et un homomorphisme $q_1 : \mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_0$ dont l'image est $\operatorname{Ker} q_0$, d'où la suite exacte :

$$\mathrm{L}_1 \xrightarrow{q_1} \mathrm{L}_0 \xrightarrow{q_0} \mathfrak{g} \longrightarrow 0.$$

On en déduit une suite exacte de R′-algèbres de Lie

$$\mathrm{R}' \otimes_\mathrm{R} \mathrm{L}_1 \xrightarrow{\mathrm{R}'\otimes_\mathrm{R} q_1} \mathrm{R}' \otimes_\mathrm{R} \mathrm{L}_0 \xrightarrow{\mathrm{R}'\otimes_\mathrm{R} q_0} \mathrm{R}' \otimes_\mathrm{R} \mathfrak{g} \longrightarrow 0.$$

Comme $\mathrm{R}'\otimes_{\mathrm{R}} q_1$ est manifestement un homomorphisme de p-algèbres de Lie, le noyau de $\mathrm{R}'\otimes_{\mathrm{R}} q_0$ est un p-idéal, de sorte que l'opération puissance p-ième symbolique de $\mathrm{R}'\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{L}_0$ induit par passage au quotient une application de $\mathrm{R}'\otimes_{\mathrm{R}}\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{R}'\otimes_{\mathrm{R}}\mathfrak{g}$ (utiliser la formule (ii) de 5.2.) ; cette dernière munit $\mathrm{R}'\otimes_{\mathrm{R}}\mathfrak{g}$ de la structure de p-algèbre de Lie cherchée.

5.3.4. — L'application canonique $j_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$ induit, pour toute extension $\mathrm{R} \to \mathrm{R}'$ de l'anneau de base, un homomorphisme

$$\mathrm{R}'\otimes_{\mathrm{R}} j_{\mathfrak{g}} : \quad \mathrm{R}'\otimes_{\mathrm{R}}\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{R}'\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{U}_p(\mathfrak{g}),$$

d'où un homomorphisme

$$h : \mathrm{U}_p(\mathrm{R}'\otimes_{\mathrm{R}}\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{R}'\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$$

tel que $h\circ j_{\mathrm{R}'\otimes\mathfrak{g}} = \mathrm{R}'\otimes_{\mathrm{R}} j_{\mathfrak{g}}$. Il résulte évidemment des propriétés universelles de $\mathrm{R}'\otimes_{\mathrm{R}}\mathfrak{g}$ et de l'algèbre enveloppante restreinte que h est un *isomorphisme*, ce qui nous permettra *d'identifier* $\mathrm{U}_p(\mathrm{R}'\otimes_{\mathrm{R}}\mathfrak{g})$ à $\mathrm{R}'\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$.

En particulier, si r est un élément de R et si R′ est l'anneau localisé R_r, on voit que
451 $\mathfrak{g}_r = \mathrm{R}_r\otimes_{\mathrm{R}}\mathfrak{g}$ est muni canoniquement d'une structure de p-algèbre de Lie sur R_r, de sorte que le faisceau $\widetilde{\mathfrak{g}}$ sur Spec R est une p-algèbre de Lie quasi-cohérente sur Spec R. De plus, l'algèbre enveloppante restreinte $\mathrm{U}_p^{\mathrm{R}_r}(\mathfrak{g}_r)$ s'identifie à $\mathrm{U}_p^{\mathrm{R}}(\mathfrak{g})_r$ de sorte que le faisceau associé au préfaisceau $\mathrm{V}\mapsto \mathrm{U}_p(\Gamma(\mathrm{V},\mathfrak{g}))$ est quasi-cohérent.

Définition. — Plus généralement, si S est un schéma de caractéristique p et $\mathscr{G}$ une p-algèbre de Lie quasi-cohérente sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, le faisceau associé au préfaisceau $\mathrm{V}\mapsto \mathrm{U}_p(\Gamma(\mathrm{V},\mathscr{G}))$ est quasi-cohérent ; il sera noté $\mathscr{U}_p(\mathscr{G})$ et appelé *l'algèbre enveloppante restreinte de* $\mathscr{G}$. Si V est affine, $\mathrm{U}_p(\Gamma(\mathrm{V},\mathscr{G}))$ s'identifie à $\Gamma(\mathrm{V},\mathscr{U}_p(\mathscr{G}))$.

5.4. Le caractère universel de $\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$ entraîne que $\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$ est fonctoriel en $\mathfrak{g}$: tout homomorphisme de p-algèbres de Lie $\phi : \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ induit un homomorphisme d'algèbres unitaires $\mathrm{U}_p(\phi)$ et un seul tel que $j_{\mathfrak{h}}\circ\phi = \mathrm{U}_p(\phi)\circ j_{\mathfrak{g}}$. Voici quelques exemples :

a) Si $\mathfrak{h}=0$, $\mathrm{U}_p(\mathfrak{h})$ s'identifie à l'anneau de base et $\mathrm{U}_p(\phi)$ est un homomorphisme d'algèbres $\varepsilon_{\mathfrak{g}} : \mathrm{U}_p(\mathfrak{g})\to\mathrm{R}$ appelé *augmentation*.

b) Prenons maintenant pour $\mathfrak{h}$ l'algèbre $\mathfrak{g}^{\circ}$ opposée à $\mathfrak{g}$, i.e. $\mathfrak{g}^{\circ}$ a même module sous-jacent que $\mathfrak{g}$, même puissance p-ième symbolique, le crochet de deux éléments dans $\mathfrak{g}^{\circ}$ étant l'opposé du crochet dans $\mathfrak{g}$. Il est clair que nous pouvons identifier $\mathrm{U}_p(\mathfrak{g}^{\circ})$ à l'algèbre opposée à $\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$. De plus, l'isomorphisme $x\mapsto -x$ de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^{\circ}$ induit un isomorphisme $c_{\mathfrak{g}}$ de $\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$ sur $\mathrm{U}_p(\mathfrak{g}^{\circ})\simeq\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})^{\circ}$. On dit que $c_{\mathfrak{g}}$ est l'*antipodisme* de $\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$.

c) Soient enfin $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{g}$ deux p-algèbres de Lie et $\mathfrak{h}$ la *p-algèbre de Lie produit* $\mathfrak{f}\times\mathfrak{g}$ qui a pour R-module sous-jacent le produit direct $\mathfrak{f}\times\mathfrak{g}$, le crochet et la puissance p-ième symbolique étant définis par les formules

$$\big[(x,y),(x',y')\big] = ([x,x'],[y,y']) \qquad \text{et} \qquad (x,y)^{(p)} = (x^{(p)},y^{(p)}).$$

452 Si $h_1 : \mathfrak{f} \to \mathfrak{k}$ et $h_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$ sont deux homomorphismes de p-algèbres de Lie tels que $[h_1(x), h_2(y)] = 0$ pour tout x de $\mathfrak{f}$ et tout y de $\mathfrak{g}$, l'application $h_1 + h_2 : (x, y) \to h_1(x) + h_2(y)$ est un homomorphisme de p-algèbres de Lie ; réciproquement, tout homomorphisme de $\mathfrak{f} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{k}$ est de ce type, ce qui permet de caractériser $\mathfrak{f} \times \mathfrak{g}$ comme solution d'un problème universel. Par exemple, les applications

$$h_1 : x \mapsto i_{\mathfrak{f}}(x) \otimes 1 \qquad \text{et} \qquad h_2 : y \mapsto 1 \otimes i_{\mathfrak{g}}(y)$$

induisent un homomorphisme $h_1 + h_2$ de $\mathfrak{f} \times \mathfrak{g}$ dans la p-algèbre de Lie sous-jacente à $\mathrm{U}_p(\mathfrak{f}) \otimes \mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$. Il résulte des caractères universels de $\mathfrak{f} \times \mathfrak{g}$ et des algèbres enveloppantes restreintes que $h_1 + h_2$ se prolonge en un isomorphisme :

$$\varphi : \mathrm{U}_p(\mathfrak{f} \times \mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_p(\mathfrak{f}) \otimes \mathrm{U}_p(\mathfrak{g}).$$

Définition. — Si $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$, l'application diagonale $\delta : x \mapsto (x, x)$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ induit un homomorphisme de $\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$ dans $\mathrm{U}_p(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$. Nous noterons $\Delta_{\mathfrak{g}}$ le composé de cet homomorphisme avec l'isomorphisme $\varphi : \mathrm{U}_p(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_p(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$. [(55)]

On voit alors facilement que $\Delta_{\mathfrak{g}}$ et la multiplication de l'algèbre $\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$ font de $\mathrm{U}_p(\mathfrak{g})$ *une* R-*coalgèbre en groupes* (cf. 3.2) qui a $\varepsilon_{\mathfrak{g}}$ pour augmentation et $c_{\mathfrak{g}}$ pour antipodisme.

5.5. [(56)] Soit maintenant S un schéma de caractéristique p. D'abord, si $\mathscr{U}$ est une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-coalgèbre en groupes et G le S-foncteur en groupes $\mathrm{Spec}^* \mathscr{U}$, on a vu (3.2.3) que, pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, $(\underline{\mathrm{Lie}}\,\mathrm{G})(\mathrm{T})$ est la sous-algèbre de Lie de $\Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{U}_{\mathrm{T}})$ formée des éléments primitifs. Or, si x est un tel élément, on a $\Delta(x^p) = x^p \otimes 1 + 1 \otimes x^p$ (puisque $\binom{p}{i} = 0$ mod p pour $0 < i < p$), i.e. x^p est encore un élément primitif. Il en résulte, d'après 5.1 et 5.2, que l'application $x \mapsto x^p$ munit $(\underline{\mathrm{Lie}}\,\mathrm{G})(\mathrm{T})$ d'une structure de $\mathscr{O}(\mathrm{T})$-p-algèbre de Lie.

Soit maintenant $\mathscr{L}$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-p-algèbre de Lie, quasi-cohérente sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$. Lorsque V parcourt les ouverts de S, les structures de coalgèbres en groupes définies précédemment sur les ensembles $\mathrm{U}_p(\Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{L}))$ induisent sur le faisceau associé, i.e. sur l'algèbre enveloppante restreinte $\mathscr{U}_p(\mathscr{L})$, une structure de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-coalgèbre en groupes. De plus, pour tout S-schéma T, on a un isomorphisme $\mathscr{U}_p(\mathscr{L}_{\mathrm{T}}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{U}_p(\mathscr{L})_{\mathrm{T}}$.

Notons $\mathrm{Prim}\,\mathscr{U}_p(\mathscr{L})$ le sous-préfaisceau de $\mathscr{U}_p(\mathscr{L})$ associant à tout ouvert V l'ensemble des éléments primitifs de $\mathscr{U}_p(\mathscr{L})(\mathrm{V})$; on voit facilement que c'est un *faisceau*. Lorsque V parcourt les ouverts de S, les applications composées

$$\Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{L}) \xrightarrow{j} \mathrm{Prim}\,\mathrm{U}_p(\Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{L})) \longrightarrow \mathrm{Prim}\,\mathscr{U}_p(\mathscr{L})(\mathrm{V})$$

(55) N.D.E. : i.e. $\Delta_{\mathfrak{g}}(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$; en particulier, la comultiplication $\Delta_{\mathfrak{g}}$ est bien cocommutative ...

(56) N.D.E. : On a transformé le § 5.4.1 de l'original en ce § 5.5 : d'une part, la proposition 5.5.1 réunit les résultats de la Section 5 et la proposition 3.2.3 et contient le lemme 7.3 de l'original ; d'autre part, la démonstration de 5.5.3 (ii) reprend, en la détaillant, celle de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) dans le théorème 7.4 plus bas.

définissent un morphisme $\mathscr{L} \to \operatorname{Prim} \mathscr{U}_p(\mathscr{L})$, que nous noterons encore j ou $j_{\mathscr{L}}$, et celui définit encore un morphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-p-algèbres de Lie $\mathbf{W}(\mathscr{L}) \to \operatorname{Prim} \mathbf{W}(\mathscr{U}_p(\mathscr{L}))$ (cf. 3.2.3).

Proposition 5.5.1. — *Soit $\mathscr{L}$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-p-algèbre de Lie, localement libre comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module. Alors $j_{\mathscr{L}}$ induit un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-p-algèbres de Lie :*

$$\mathbf{W}(\mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Prim} \mathbf{W}(\mathscr{U}_p(\mathscr{L})).$$

Démonstration. Soit T un S-schéma ; compte-tenu de l'identification $\mathscr{U}_p(\mathscr{L}_{\mathrm{T}}) = \mathscr{U}_p(\mathscr{L})_{\mathrm{T}}$, il s'agit de montrer que l'application $\Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{L}_{\mathrm{T}}) \to \operatorname{Prim} \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{U}_p(\mathscr{L}_{\mathrm{T}}))$ est bijective. Remplaçant S par T, on est ramené au cas où T = S, et il suffit alors de montrer que le morphisme de faisceaux $j_{\mathscr{L}} : \mathscr{L} \to \operatorname{Prim} \mathscr{U}_p(\mathscr{L})$ est un isomorphisme. Cette question étant locale sur S, nous pouvons supposer que S est affine d'anneau R et que $\mathscr{L}$ est le faisceau associé à une R-p-algèbre de Lie L de base (x_α). Comme en 5.3.3, notons z_α l'image de x_α dans $\mathrm{U} = \mathrm{U}_p(\mathrm{L})$ et, pour toute famille $n = (n_\alpha)$ d'entiers compris entre 0 et $p-1$, nuls hormis un nombre fini d'entre eux, notons $z^{(n)}$ le produit

$$\prod_\alpha \frac{z_\alpha^{n_\alpha}}{n_\alpha !}$$

(on suppose la base (x_α) totalement ordonnée et les produits effectués dans l'ordre croissant).

Comme $\Delta(z_\alpha) = z_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes z_\alpha$, on voit facilement que

$$\Delta(z^{(n)}) = \sum_r z^{(n-r)} \otimes z^{(r)}$$

la somme étant prise sur l'ensemble (fini !) des r tels que $0 \leqslant r_\alpha \leqslant n_\alpha$ pour tout α. Comme les $z^{(n)}$ (resp. les $z^{(n)} \otimes z^{(m)}$) forment une base de U (resp. de $\mathrm{U} \otimes \mathrm{U}$), on en déduit qu'un élément u de U vérifie $\Delta(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u$ si et seulement si u est combinaison linéaire des z_α. Ceci prouve 5.5.1.

Remarque 5.5.2. — Rappelons (cf. 3.2.2 et 3.2.3), que le S-foncteur en groupes $\mathrm{G} = \operatorname{Spec}^* \mathscr{U}_p(\mathscr{L})$ est très bon et que $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}) = \operatorname{Prim} \mathbf{W}(\mathscr{U}_p(\mathscr{L}))$. La proposition précédente signifie donc que $j_{\mathscr{L}}$ induit un isomorphisme $\mathbf{W}(\mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G})$.

Si l'on suppose de plus que $\mathscr{L}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre de rang fini, alors $\mathscr{U}_p(\mathscr{L})$ est finie localement libre sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, d'après 5.3.3, donc $\operatorname{Spec}^* \mathscr{U}_p(\mathscr{L})$ est représenté par le S-groupe $\mathrm{G}_p(\mathscr{L}) = \operatorname{Spec} \mathscr{U}_p(\mathscr{L})^*$ (cf. 3.2.2.1), et l'on obtient la proposition plus précise suivante :

Proposition 5.5.3. — *Soit $\mathscr{L}$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-p-algèbre de Lie, localement libre de rang fini comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module, soit $\mathscr{A} = \mathscr{U}_p(\mathscr{L})^*$ et soit* $\mathrm{G} = \mathrm{G}_p(\mathscr{L})$ *le* S-*groupe affine* $\operatorname{Spec} \mathscr{A}$.

(i) *$j_{\mathscr{L}}$ induit un isomorphisme $\mathbf{W}(\mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G})$ de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-p-algèbres de Lie.*

(ii) *Soient $\mathscr{I}$ l'idéal d'augmentation de $\mathscr{A}$ et $\omega_{\mathrm{G}} = \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$* (cf. II, 4.11.4). *Alors ω_{G} s'identifie à $\mathscr{L}^* = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{L}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$, donc est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre de rang fini* (*et l'on a $\omega^*_{\mathrm{G}/\mathrm{S}} = \mathscr{L}$*).

Démonstration. (i) découlant de 5.5.2, prouvons (ii). Notons $\eta_{\mathscr{U}}$ et $\varepsilon_{\mathscr{U}}$ la section unité et l'augmentation de $\mathscr{U} = \mathscr{U}_p(\mathscr{L})$, $\eta_{\mathscr{A}}$ et $\varepsilon_{\mathscr{A}}$ celles de $\mathscr{A}$, et $\mathscr{J} = \operatorname{Ker} \varepsilon_{\mathscr{U}}$. Alors on a :

$$\mathscr{U} = \eta_{\mathscr{U}}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}) \oplus \mathscr{J}. \tag{1}$$

Soit δ le morphisme défini par le diagramme ci-dessous, où τ et π désignent l'inclusion et la projection déduites de la décomposition (1) :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{J} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathscr{J} \otimes \mathscr{J} \\ \mathscr{U} \arrow[r, "\Delta"] & \mathscr{U} \otimes \mathscr{U} \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

alors on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}^* \xrightarrow{j_{\mathscr{L}}} \mathscr{J} \xrightarrow{\delta} \mathscr{J} \otimes \mathscr{J}. \tag{$*$}$$

De plus, d'après 5.3.3, le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{J}/\mathscr{L}$ est localement libre et, d'après 5.5.1, la suite $(*)$ reste exacte après tout changement de base. Donc, d'après [**BAC**], II § 3, prop. 6, δ induit un isomorphisme de $\mathscr{J}/\mathscr{L}$ sur un sous-module $\mathscr{Q}$ localement facteur direct de $\mathscr{J} \otimes \mathscr{J}$. Il en résulte que $(*)$ donne par dualité la suite exacte :

$$0 \longleftarrow \mathscr{L} \xleftarrow{{}^t j_{\mathscr{L}}} \mathscr{I} \xleftarrow{{}^t\delta} \mathscr{I} \otimes \mathscr{I}. \tag{$**$}$$

Or la décomposition (1) correspond par dualité à la décomposition :

$$\mathscr{A} = \eta_{\mathscr{A}}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}) \oplus \mathscr{I} \tag{2}$$

et la transposée de Δ est la multiplication $m_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \to \mathscr{A}$. Comme $\mathscr{I}$ est un idéal de $\mathscr{A}$, $m_{\mathscr{A}}$ envoie $\mathscr{I} \otimes \mathscr{I}$ dans $\mathscr{I}$; plus précisément, compte-tenu de la décomposition (2), on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{I} & \mathscr{I} \otimes \mathscr{I} \arrow[l, "m'"'] \arrow[d, "{}^t\pi"] \\ \mathscr{A} \arrow[u, "{}^t\tau"] & \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \arrow[l, "m_{\mathscr{A}}"'] \end{tikzcd}$$

qui montre que la restriction m' de $m_{\mathscr{A}}$ à $\mathscr{I} \otimes \mathscr{I}$ est la transposée de δ. La suite exacte $(**)$ donne alors $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \simeq \mathscr{L}^*$, et la proposition en découle.

6. p-algèbre de Lie d'un S-schéma en groupes 453

Soit S un schéma de caractéristique $p > 0$. Au paragraphe 5.5 nous avons associé à toute $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-p-algèbre de Lie quasi-cohérente $\mathscr{L}$ un S-foncteur en groupes $\mathrm{G}_p(\mathscr{L}) = \operatorname{Spec}^* \mathscr{U}_p(\mathscr{L})$. Nous allons voir maintenant que, pour tout S-schéma en groupes G, la $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre de Lie $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ définie en II 4.11 est munie naturellement d'une structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-p-algèbre de Lie.

6.1. Identifions tout d'abord $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$ et $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}\,\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$ respectivement à des sous-algèbres de Lie de $\mathrm{U(G)}$ et $\mathrm{Dif}_{\mathrm{G/S}}$ au moyen des injections α et β de 2.5 ; $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}\,\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$ est donc identifiée à la $\Gamma(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-algèbre de Lie des S-dérivations de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$. D'après 5.2, cette dernière est une sous-p-algèbre de Lie de $\mathrm{Dif}_{\mathrm{G/S}}$.

D'autre part, l'image de $\mathrm{L} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$ par le morphisme injectif d'algèbres $\ell : \mathrm{U(G)} \to \mathrm{Dif}_{\mathrm{G/S}}$, $d \mapsto {}^{\mathrm{G}}d$ est formée des dérivations invariantes à gauche (cf. 2.2, N.D.E. (17), 2.4 et 2.5). Si x appartient à L, $\ell(x)^p$ n'est autre que $\ell(x^p)$, d'après *loc. cit.* Comme $\ell(x)^p$ est encore une dérivation, on voit que x^p appartient à $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$. Donc : [57]

$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$ *est une sous-p-algèbre de Lie de l'algèbre infinitésimale* $\mathrm{U(G)}$.

6.1.1. — Soit $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un homomorphisme de S-schémas en groupes. Il est clair que les homomorphismes $\underline{\mathrm{Lie}}(\phi/\mathrm{S})(\mathrm{S})$ et $\mathrm{U}(\phi)$ sont compatibles avec les identifications de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$ et $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{H/S})(\mathrm{S})$ à des sous-p-algèbres de Lie de $\mathrm{U(G)}$ et $\mathrm{U(H)}$. Comme $\mathrm{U}(\phi)$ est un homomorphisme d'algèbres, on voit donc que $\underline{\mathrm{Lie}}(\phi/\mathrm{S})(\mathrm{S})$ est un homomorphisme de p-algèbres de Lie.

De même, si $s : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est un changement de base, l'application de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$ dans $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{T})$, qui est induite par s, est un homomorphisme de p-algèbres de Lie. On peut traduire cela en disant que le foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$ est muni d'une structure de
454 $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-p-algèbre de Lie. En particulier, lorsque T parcourt les ouverts de S, on voit que le faisceau $\mathscr{L}ie(\mathrm{G/S})$ est muni d'une structure de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-p-algèbre de Lie.

6.2. Suivant une idée de Demazure, nous allons maintenant généraliser ce qui précède à certains S-foncteurs en groupes non nécessairement représentables. Pour cela, nous allons d'abord donner une autre définition de la puissance p-ième symbolique dans l'algèbre de Lie d'un S-schéma en groupes G.

Soit D une dérivation de G à l'origine ; [58] d'après 1.2.1, D est la composée de la S-dérivation $\delta = (\tau, \partial_t)$ de la section zéro $\tau : \mathrm{S} \to \mathrm{I_S}$, et d'un morphisme $x : \mathrm{I_S} \to \mathrm{G}$ tel que $x \circ \tau = \varepsilon$ (i.e. $x \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$). D'après la définition que nous avons donnée en 2.1, D^p est la déviation composée suivante :

$$\mathrm{S} \simeq \underbrace{\mathrm{S} \times \mathrm{S} \times \cdots \times \mathrm{S}}_{p} \xrightarrow{\delta \times \cdots \times \delta} \mathrm{I_S} \times \cdots \times \mathrm{I_S} \xrightarrow{x \times \cdots \times x} \mathrm{G} \times \cdots \times \mathrm{G} \xrightarrow{m^{(p)}} \mathrm{G}$$

où $m^{(p)}$ est le morphisme induit par la multiplication $m : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$. Comme $\mathrm{I_S} \times \cdots \times \mathrm{I_S}$ est affine sur S et a pour algèbre affine $\mathscr{B} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[d_1, \ldots, d_p]/(d_1^2, \ldots, d_p^2)$, la déviation $\delta \times \cdots \times \delta$ est définie par le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules

$$\phi : \quad \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$$

qui envoie sur 1 le monôme $d_1 d_2 \cdots d_p$, et sur 0 les autres monômes $d_{i_1} \cdots d_{i_r}$, pour $0 \leqslant r < p$. D'autre part, si pr_i désigne la projection de $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^p$ sur le i-ième facteur et si x_i est

[57] N.D.E. : On peut aussi montrer directement (sans l'intermédiaire de $\mathrm{Dif}_{\mathrm{G/S}}$) que l'algèbre de Lie des dérivations de G à l'origine (isomorphe à $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$ d'après 2.5) est stable par l'élévation à la puissance p dans $\mathrm{U(G)}$: ceci est fait en 6.2 ci-dessous.

[58] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

l'image dans $\mathrm{G}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^{p})$ de x par $\mathrm{G}(\mathrm{pr}_i)$, alors le morphisme composé $m^{(p)}\circ(x\times\cdots\times x)$ n'est autre que le produit $x_1x_2\cdots x_p$. Par conséquent, D^p est aussi la déviation composée suivante :

$$\mathrm{S} \xrightarrow{\delta\times\cdots\times\delta} \mathrm{I}_{\mathrm{S}}\times\cdots\times\mathrm{I}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{x_1x_2\cdots x_p} \mathrm{G}.$$

Cette description nous permet de redémontrer que D^p est une dérivation de G à l'origine. En effet, comme G est un très bon groupe (II 4.11), les images $\mathrm{G}(\mathrm{pr}_1)(x)$ et $\mathrm{G}(\mathrm{pr}_2)(x)$ de x dans $\mathrm{G}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}\times\mathrm{I}_{\mathrm{S}})$ commutent entre elles. Il s'ensuit que les éléments x_i de $\mathrm{G}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^{p})$ commutent deux à deux et donc, pour toute permutation γ des facteurs de $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^{p}$, on a $(x_1\cdots x_p)\circ\gamma = x_1\cdots x_p$; il s'ensuit que $x_1\cdots x_p$ se factorise à travers la projection canonique de $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^{p}$ dans le produit symétrique $\Sigma^p\mathrm{I}_{\mathrm{S}}$ (cf. 4.2). 455

Le produit symétrique $\Sigma^p\mathrm{I}_{\mathrm{S}}$ a pour algèbre affine la sous-algèbre $\mathscr{A}$ de $\mathscr{B}$ qui a pour base sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ les fonctions symétriques élémentaires $1=\sigma_0, \sigma_1,\ldots,\sigma_p$ de $d_1,\ldots,d_p$. Notons κ l'inclusion $\mathscr{A}\hookrightarrow\mathscr{B}$ et π le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres $\mathscr{A}\to\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t]/(t^2)$ qui annule $\sigma_1,\ldots,\sigma_{p-1}$ et envoie σ_p sur t ; alors on a $\phi\circ\kappa=\partial_t\circ\pi$ (on rappelle que $\partial_t : \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t]/(t^2)\to\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ est le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules qui annule 1 et envoie t sur 1). Par conséquent, notant i l'immersion fermée $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}\hookrightarrow\Sigma^p\mathrm{I}_{\mathrm{S}}$ définie par π, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S} \arrow[r, "\delta\times\cdots\times\delta"'] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{D}^p"] & \mathrm{I}_{\mathrm{S}}^{p} \arrow[r, "x_1\cdots x_p"'] \arrow[d, "\mathrm{can.}"] & \mathrm{G} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{I}_{\mathrm{S}} \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "y"'] & \Sigma^p\mathrm{I}_{\mathrm{S}} \arrow[r] & \mathrm{G}
\end{tikzcd}$$

qui montre que D^p est de la forme $y\circ\delta$, donc est bien une dérivation de G à l'origine.

6.3. Soient $\mathscr{S}_p$ le groupe symétrique d'ordre p et $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^{p}\times\mathscr{S}_p$ la somme directe d'une famille d'exemplaires de $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^{p}$ indexés par $\mathscr{S}_p$. Nous notons $\pi : \mathrm{I}_{\mathrm{S}}^{p}\times\mathscr{S}_p\to\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^{p}$ la projection canonique et

$$\mu : \mathrm{I}_{\mathrm{S}}^{p}\times\mathscr{S}_p \longrightarrow \mathrm{I}_{\mathrm{S}}^{p}$$

le morphisme définissant l'opération de $\mathscr{S}_p$ sur $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^{p}$ (c.-à-d., si τ est un élément de $\mathscr{S}_p$, la restriction de μ à $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^{p}\times\tau$ a $\mathrm{pr}_{\tau(j)}$ pour j-ième composante). Ceci étant, nous posons la définition suivante :

Définition. — Un foncteur $\mathrm{X} : (\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})^{\circ}\to(\mathbf{Ens})$ vérifie la condition (F) si : 456

a) X transforme les sommes directes finies en produits directs,

b) pour tout S-schéma T, la suite ci-dessous est exacte :

$$\mathrm{X}(\mathrm{T}\times\Sigma^p\mathrm{I}_{\mathrm{S}}) \longrightarrow \mathrm{X}(\mathrm{T}\times\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^{p}) \overset{\mathrm{X}(\mathrm{id}_{\mathrm{T}}\times\pi)}{\underset{\mathrm{X}(\mathrm{id}_{\mathrm{T}}\times\mu)}{\rightrightarrows}} \mathrm{X}(\mathrm{T}\times\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^{p}\times\mathscr{S}_p).$$

Tout S-schéma vérifie (F) ; si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module, $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ vérifie (F) ; toute limite projective de foncteurs vérifiant (F), vérifie aussi (F) ; si Y vérifie (F) et si X est un S-foncteur quelconque, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ vérifie (F).

Soit X *un très bon groupe* (II 4.10) *vérifiant la condition* (F). Désignant par x : $\mathrm{I_S} \to \mathrm{X}$ un morphisme qui prolonge la section unité de X et reprenant les notations de 6.2, on voit comme ci-dessus que $x_1 \cdots x_p : \mathrm{I_S^p} \to \mathrm{X}$ se factorise à travers $\Sigma^p\mathrm{I_S}$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I_S^p} \arrow[rr, "x_1\cdots x_p"] \arrow[dr, "\mathrm{can.}"'] & & \mathrm{X} \\ & \Sigma^p\mathrm{I_S} \arrow[ur, "\Sigma^p(x)"'] & \end{tikzcd}$$

et définit par composition un morphisme

$$x^{(p)} : \mathrm{I_S} \xrightarrow{\ i\ } \Sigma^p\mathrm{I_S} \xrightarrow{\Sigma^p(x)} \mathrm{X}$$

que nous appellerons la *puissance p-ième symbolique de x.*

L'endomorphisme $x \mapsto x^{(p)}$ de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$ est évidemment compatible avec les changements de base et est fonctoriel en G. Il serait intéressant de savoir pour quels G cet endomorphisme fait de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$ une p-algèbre de Lie.

457 **6.4.** La dernière définition de la puissance p-ième symbolique, que nous venons de donner, est particulièrement bien adaptée au calcul. Voici quelques exemples :

6.4.1. — Soient M un groupe abélien « abstrait » et $\mathrm{D_S(M)}$ le S-groupe diagonalisable de type M (I 4.4.2). Pour tout S-schéma T, on a donc

$$\mathrm{D_S(M)(T)} = \mathrm{Hom_{(Ab)}}(\mathrm{M}, \mathscr{O}(\mathrm{T})^\times).$$

Soit x un élément de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{D_S(M)/S})(\mathrm{S})$, c'est-à-dire un homomorphisme de groupes abéliens

$$\mathrm{M} \xrightarrow{\ x\ } \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S} + d\mathscr{O}_\mathrm{S})^\times$$

de la forme $m \mapsto 1 + d\,\xi(m)$, où $\xi \in \mathrm{Hom_{(Ab)}}(\mathrm{M}, \mathscr{O}(\mathrm{S}))$. Avec les notations de 6.2 et 6.3, le produit $x_1 \cdots x_p$ associe à un élément m de M l'expression

$$(1 + d_1\,\xi(m)) \cdots (1 + d_p\,\xi(m))$$

c'est-à-dire $1 + \sigma_1\,\xi(m) + \sigma_2\,\xi(m)^2 + \cdots + \sigma_p\,\xi(m)^p$.

Cette expression appartient bien à $\mathscr{O}(\Sigma^p\mathrm{I_S})$. Projetant ceci dans $\mathscr{O}(\mathrm{S})[d]/(d^2)$ en annulant $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ et en envoyant σ_p sur d, on voit que $x^{(p)}$ est l'homomorphisme de M dans $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S} + d\mathscr{O}_\mathrm{S})^\times$ suivant :

$$m \mapsto 1 + d\,\xi(m)^p.$$

En résumé, si l'on identifie $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{D_S(M)/S})(\mathrm{S})$ à $\mathrm{Hom_{(Ab)}}(\mathrm{M}, \mathscr{O}(\mathrm{S}))$ comme en II 5.1, la puissance p-ième symbolique associe à ξ l'homomorphisme $\xi^{(p)} : m \mapsto \xi(m)^p$.

458 ***6.4.2***. — Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module et G le S-foncteur en groupes abéliens $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ (cf. I, 4.6). Soient y un élément de $\mathbf{W}(\mathscr{F})(\mathrm{S}) = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{F})$ et y' son image dans $\mathbf{W}(\mathscr{F})(\mathrm{I_S})$ par $\mathbf{W}(\mathscr{F})(\mathrm{I_S} \to \mathrm{S})$.

On sait (cf. II, 4.4.2 et 4.5.1) que l'application $y \mapsto d\,y'$ est un isomorphisme de $\mathscr{O}(\mathrm{S})$-modules de $\mathbf{W}(\mathscr{F})(\mathrm{S})$ sur $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{W}(\mathscr{F})/\mathrm{S})(\mathrm{S})$. Si l'on pose $x = d\,y'$, la quantité x_i

de 6.2 n'est autre que $d_i\, y''$, où y'' désigne l'image canonique de y' [(59)] dans $\mathbf{W}(\mathscr{F})(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^p)$. Par conséquent le produit $x_1 \cdots x_p$ est égal ici à

$$x_1 + \cdots + x_p = (d_1 + \cdots + d_p)y'' = \sigma_1 y''$$

et appartient à $\mathbf{W}(\mathscr{F})(\Sigma^p \mathrm{I}_{\mathrm{S}})$. Comme l'homomorphisme $\mathscr{O}(\Sigma^p \mathrm{I}_{\mathrm{S}}) \to \mathscr{O}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}})$, qui définit le morphisme i de 6.1, annule σ_1, on voit que $x^{(p)}$ est nul. Donc :

Pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{F}$, l'opération $x \mapsto x^{(p)}$ dans $\underline{\mathrm{Lie}}\, \mathbf{W}(\mathscr{F})$ est nulle.

6.4.3. — Soient X un S-schéma, G le S-foncteur en groupes $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}\, \mathrm{X}$ et D une S-dérivation du faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$. D'après 1.5, D peut être identifié à un I_{S}-automorphisme x de $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}}$, induisant l'identité sur X, qu'on peut décrire comme suit. Si f est une section de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[d]/(d^2)$ de la forme $a + bd$, posons $\mathrm{D}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}} f = \mathrm{D}a + (\mathrm{D}b)d$; autrement dit, $\mathrm{D}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}}$ est déduit de D par le changement de base $\mathrm{I}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$; alors l'automorphisme en question de $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}}$ est associé à l'endomorphisme $f \mapsto f + (\mathrm{D}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}} f)d = a + (\mathrm{D}(a) + b)d$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[d]/(d^2)$.

De même, soit $\mathrm{D}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^p}$ l'opérateur différentiel de $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^p}$ déduit de D par le changement de base $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^p \to \mathrm{S}$. Avec les notations de 6.2, l'automorphisme x_i de $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^p}$ est alors associé à l'endomorphisme $f \mapsto f + (\mathrm{D}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^p} f)d_i$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}[d_1, \ldots, d_p]/(d_1^2, \ldots, d_p^2)$. Le produit $x_1 \cdots x_p$ est donc associé à l'endomorphisme

$$(1 + d_1 \mathrm{D}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^p})(1 + d_2 \mathrm{D}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^p}) \cdots (1 + d_p \mathrm{D}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^p})$$

c'est-à-dire, à $1 + \sigma_1\, \mathrm{D}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^p} + \sigma_2\, \mathrm{D}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^p}^2 + \cdots + \sigma_p\, \mathrm{D}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^p}^p$. 459

Le coefficient de σ_p est $\mathrm{D}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}^p}^p$, ce qui signifie que l'isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathrm{Dér}_{\mathrm{S}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}\, \mathrm{X})$, $\mathrm{D} \mapsto x$ (cf. 1.5), est aussi un isomorphisme de p-algèbres de Lie.

6.4.4. — En utilisant la même méthode, on voit que, pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{F}$, l'isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}\, \mathbf{W}(\mathscr{F})/\mathrm{S})(\mathrm{S}) \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}\, \mathbf{W}(\mathscr{F}))(\mathrm{S}).$$

d'algèbres de Lie (cf. II 4.8) est aussi un isomorphisme de p-algèbres de Lie.

6.4.5. — [(60)] Soient $\mathscr{U}$ une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-coalgèbre en groupes et G le S-foncteur en groupes $\mathrm{Spec}^* \mathscr{U}$, supposons que G soit *représentable.* Dans ce cas, pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, on a défini en 5.5 et 6.1.1 deux structures de p-algèbre de Lie sur $\mathrm{L}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G})(\mathrm{T})$. Comme on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L}(\mathrm{T}) \arrow[r, hook, "\tau"] \arrow[d, hook, "\alpha"'] \arrow[dr, "i"] & \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{U}_{\mathrm{T}}) \\
\mathrm{U}(\mathrm{G}_{\mathrm{T}}) & \mathrm{U}(\mathrm{L}(\mathrm{T})) \arrow[l, "\phi"'] \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

---

(59) N.D.E. : on a corrigé x en y'.

(60) N.D.E. : On a ajouté la numérotation 6.4.5, et détaillé l'original.

où U(L(T)) est l'algèbre enveloppante de L(T) et ϕ, ψ les morphismes d'algèbres induits par α, τ, on voit que les deux structures de p-algèbres de Lie coïncident : si on identifie $x \in \mathrm{L(T)}$ à son image dans $\mathrm{U(G_T)}$ (resp. $\Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{U}_\mathrm{T})$), alors $x^{(p)}$ est l'image de l'élément x^p de U(L(T)) par ϕ (resp. ψ).

7. Groupes radiciels de hauteur 1

460 [61] Soit S un schéma de caractéristique $p > 0$. Nous dirons qu'une $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-algèbre $\mathscr{A}$ (resp. une $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-p-algèbre de Lie $\mathscr{L}$) est *finie localement libre* si le $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module sous-jacent à $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{L}$) est localement libre et de type fini. Si $\mathscr{L}$ est une $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-p-algèbre de Lie finie localement libre, nous savons (cf. 5.5.2) que le S-foncteur en groupes $\mathrm{Spec}^* \mathscr{U}_p(\mathscr{L})$ est représenté par un S-schéma en groupes $\mathrm{G}_p(\mathscr{L})$, fini et localement libre . Nous allons voir que ce S-schéma en groupes est solution d'un problème universel (7.2) et nous allons caractériser les S-schémas en groupes de la forme $\mathrm{G}_p(\mathscr{L})$ (7.4).

Définition 7.0. — [62] Soit $\mathrm{H} = \mathrm{Spec}\,\mathscr{A}$ un S-schéma en groupes fini localement libre. On dit que H est *infinitésimal* si la section unité $\varepsilon_\mathrm{H} : \mathrm{S} \to \mathrm{H}$ est un homéomorphisme, ce qui équivaut à dire que l'idéal d'augmentation de $\mathscr{A}$ est localement nilpotent.

7.1. [63] Soit $\mathscr{L}$ une $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-p-algèbre de Lie finie localement libre et soit $\mathrm{G}_p(\mathscr{L})$ le S-groupe affine $\mathrm{Spec}\,\mathscr{U}_p(\mathscr{L})$. D'après 5.5, on sait que $\mathscr{L}$ s'identifie à $\mathscr{L}ie\,\mathrm{G}_p(\mathscr{L})$.

Considérons maintenant un très bon S-foncteur en groupes G vérifiant la condition (F) de 6.3 et soit $\phi : \mathrm{G}_p(\mathscr{L}) \to \mathrm{G}$ un morphisme de S-foncteurs en groupes. D'après 6.3, le morphisme de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-algèbres de Lie $\mathscr{L}ie\,\phi : \mathscr{L}ie\,\mathrm{G}_p(\mathscr{L}) \to \mathscr{L}ie\,\mathrm{G}$ est compatible
461 avec la puissance p-ième symbolique. Si nous notons $\mathrm{Hom}_p(\mathscr{L}, \mathscr{L}ie\,\mathrm{G})$ l'ensemble des morphismes de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-algèbres de Lie, qui sont compatibles avec la puissance p-ième symbolique, on a donc une application

$$\mathscr{L}ie:\ \mathrm{Hom}_{\text{S-Gr.}}(\mathrm{G}_p(\mathscr{L}), \mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_p(\mathscr{L}, \mathscr{L}ie\,\mathrm{G}), \qquad \phi \mapsto \mathscr{L}ie\,\phi.$$

7.2. Théorème. — *Si $\mathscr{L}$ est une $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-p-algèbre de Lie finie localement libre, l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{G}_p(\mathscr{L}), \mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_p(\mathscr{L}, \mathscr{L}ie\,\mathrm{G})$$

est bijective dans chacun des cas suivants :

(i) G *est un* S*-schéma en groupes ;*

(ii) G *est de la forme* $\underline{\mathrm{Aut}}_\mathrm{S}\,\mathrm{X}$*, où* X *est un* S*-schéma ;*

(iii) G *est de l'une des formes* $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ *ou* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod}}\,\mathbf{W}(\mathscr{F})$*, où* $\mathscr{F}$ *désigne un* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-module quasi-cohérent.*

La démonstration du théorème s'appuie sur le lemme suivant :

---

(61) N.D.E. : Pour les résultats de cette section, on peut aussi se reporter à [**DG70**], § II.7, n$^\text{os}$ 3-4.
(62) N.D.E. : On a ajouté cette définition (cf. [**DG70**], § II.4, 7.1), qui sera utilisée en 7.2.1.
(63) N.D.E. : On a simplifié l'original, en tenant compte des ajouts faits en 5.5.

Lemme. — *Si* $\mathscr{L}$ *est une* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-p-algèbre de Lie finie localement libre, le* S*-groupe* $\mathrm{G} = \mathrm{G}_p(\mathscr{L})$ *est annulé par le morphisme de Frobenius* $\mathrm{Fr} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}^{(p)}$*. En particulier,* G *est infinitésimal.*

[64] Soient en effet $\mathscr{U}$ l'algèbre enveloppante restreinte de $\mathscr{L}$, $\mathscr{A} = \mathscr{U}^*$ l'algèbre affine de G, et $\mathscr{I} = \operatorname{Ker} \varepsilon_{\mathscr{A}}$ l'idéal d'augmentation de $\mathscr{A}$. On a

$$\mathscr{A} = \mathscr{I} \oplus \eta_{\mathscr{A}}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})\,, \tag{1}$$

où $\eta_{\mathscr{A}}$ désigne la section unité de $\mathscr{A}$, et comme $\varepsilon_{\mathscr{A}}$ (resp. $\eta_{\mathscr{A}}$) est la transposée de $\eta_{\mathscr{U}}$ (resp. $\varepsilon_{\mathscr{U}}$), cette décomposition correspond par dualité à la décomposition

$$\mathscr{U} = \mathscr{J} \oplus \eta_{\mathscr{U}}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})\,, \tag{2}$$

où $\mathscr{J}$ est l'idéal d'augmentation de $\mathscr{U}$; on a donc $\mathscr{J} = \mathscr{I}^*$.

Notons π l'endomorphisme $x \mapsto x^p$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$. Nous devons montrer que le morphisme $\mathrm{Fr} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}^{(p)}$ se factorise à travers la section unité de $\mathrm{G}^{(p)}$, ce qui équivaut à dire (cf. 4.1.4 (c)) que le morphisme $\Phi : a \otimes_\pi x \mapsto a^p\, x$ de $\mathscr{I} \otimes_\pi \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ dans $\mathscr{A}$ est nul. Comme $\mathscr{A}$ est fini localement libre sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, il suffit de voir que le morphisme transposé ${}^t\Phi$ est nul.

Or Φ n'est autre que le composé suivant

$$\mathscr{I} \otimes_\pi \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\ \tau\ } \mathscr{A} \otimes_\pi \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{j(\mathscr{A})} \mathcal{S}^p\mathscr{A} \xrightarrow{b(\mathscr{A})} \mathscr{A}\ ,$$

où τ est déduit de l'inclusion $\mathscr{I} \hookrightarrow \mathscr{A}$, et $b(\mathscr{A})$ et $j(\mathscr{A})$ sont définis comme en 4.3.3 (i.e. $b(\mathscr{A})$ est induit par la multiplication de $\mathscr{A}$ et $j(\mathscr{A})$ envoie $a \otimes_\pi 1$ sur l'image de $a \otimes \cdots \otimes a$ dans $\mathcal{S}^p\mathscr{A}$). Comme le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module dual de $\mathcal{S}^p\mathscr{A}$ n'est autre que le **462**
sous-module $\Sigma^p\mathscr{U}$ de $\bigotimes^p \mathscr{U}$ formé des sections invariantes sous l'action du groupe symétrique d'ordre p, on voit que ${}^t\Phi$ est le morphisme composé suivant :

$$\mathscr{U} \xrightarrow{a(\mathscr{U})} \Sigma^p\mathscr{U} \xrightarrow{r(\mathscr{U})} \mathscr{U} \otimes_\pi \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\ q\ } \mathscr{J} \otimes_\pi \mathscr{O}_{\mathrm{S}}\ ,$$

où q est déduit de la projection $\mathscr{U} \to \mathscr{J}$ de noyau $\eta_{\mathscr{U}}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$, $a(\mathscr{U})$ est induit par la comultiplication de $\mathscr{U}$ et $r(\mathscr{U})$ s'annule sur les tenseurs symétrisés et applique une section $x \otimes \cdots \otimes x$ sur $x \otimes_\pi 1$ (confer 4.3.3).

Il est clair que ${}^t\Phi \circ \eta_{\mathscr{U}} = 0$ et donc, d'après (2), il reste à voir que ${}^t\Phi$ annule l'idéal d'augmentation $\mathscr{J}$. Comme ${}^t\Phi$ est un morphisme d'algèbres et comme l'idéal $\mathscr{J}$ est engendré par $\mathscr{L}$ (identifiée à son image dans $\mathscr{U}$), il suffit de voir que ${}^t\Phi(x) = 0$ pour toute section x de $\mathscr{L}$. Or $-a(\mathscr{U})(x) = (p-1)!\ a(\mathscr{U})(x)$ est le symétrisé de $x \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$, donc son image par $r(\mathscr{U})$ est nulle. Ceci prouve la première assertion du lemme.

La seconde en découle. En effet, comme toute section locale de $\mathscr{I}$ est de puissance p-ième nulle et comme $\mathscr{I}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module de type fini, $\mathscr{I}$ est localement nilpotent (explicitement, si V est un ouvert affine de S tel que $\mathrm{I} = \Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{I})$ soit engendré par r éléments, alors $\mathrm{I}^{r(p-1)+1} = 0$), d'où $\mathrm{G}_{\text{réd}} = \mathrm{S}_{\text{réd}}$ et donc la section unité $\varepsilon_{\mathrm{G}} : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ est un homéomorphisme.

---

[64] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit. Pour une autre démonstration, voir [**DG70**], § II.7, 3.9.

7.2.1. — [65] Nous allons d'abord prouver l'assertion (ii) du théorème 7.2. Soit π : $X \to S$ un S-schéma. Considérons d'abord un S-groupe infinitésimal H arbitraire. Les morphismes ϕ de H dans $\underline{\mathrm{Aut}}\,X$ correspondent bijectivement aux opérations à gauche $\mu : H \times X \to X$ de H sur X. Pour une telle opération, si ε est la section unité de H, le morphisme composé

$$X \simeq S \times X \xrightarrow{\varepsilon \times X} H \times X \xrightarrow{\mu} X$$

doit être l'identité. Comme $(H \times X)_{\text{réd}}$ s'identifie à $X_{\text{réd}}$, on voit que μ doit induire l'identité sur les schémas réduits associés. En particulier, μ induit une opération de H sur chaque ouvert de X, et l'on obtient donc, pour tout ouvert U de X, affine sur S, un morphisme d'algèbres associatives unitaires :

$$\mathscr{A}(U) \longrightarrow \mathscr{A}(H) \otimes \mathscr{A}(U)$$

faisant de $\mathscr{A}(U)$ un $\mathscr{A}(H)$-comodule à gauche, ceci de façon que les applications de restrictions $\mathscr{A}(U) \to \mathscr{A}(U')$, pour $U' \subset U$, soient des morphismes de comodules. Réciproquement, toute donnée de ce type provient d'une unique action à gauche $\mu : H \times X \to X$. D'autre part, on a le lemme suivant :

463 ***Lemme***. — *Soient* $X = \mathrm{Spec}\,\mathscr{C}$ *un* S-*schéma affine,* $H = \mathrm{Spec}\,\mathscr{A}$ *un* S-*groupe infinitésimal, et* $\mathscr{U} = \mathscr{A}^* = \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{A}, \mathscr{O}_S)$. *Les opérations à gauche de* H *sur* X *correspondent bijectivement aux représentations de l'algèbre* $\mathscr{U}$ *dans le* $\mathscr{O}_S$-*module* $\mathscr{C}$ *telles qu'on ait :*

$$\text{(a)} \qquad u(1_{\mathscr{C}}) = \varepsilon(u) \cdot 1_{\mathscr{C}}$$

$$\text{(b)} \qquad u(xy) = \sum_i v_i(x) w_i(y) \quad \textit{si} \quad \Delta u = \sum_i v_i \otimes w_i.$$

(Dans les formules ci-dessus, u désigne une section quelconque de $\mathscr{U}$ sur un ouvert affine V de S, x et y des sections de $\mathscr{C}$ sur V ; on désigne par $1_{\mathscr{C}}$ la section unité de $\mathscr{C}$, par ε et Δ l'augmentation et le morphisme diagonal de $\mathscr{U}$.) En effet, une opération à gauche μ de H sur X est définie par un morphisme d'algèbres associatives unitaires :

$$\lambda : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{A} \otimes \mathscr{C}$$

faisant de $\mathscr{C}$ un $\mathscr{A}$-comodule à gauche. Nous noterons α le morphisme composé

$$\mathscr{U} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{C} \xrightarrow{\mathscr{U} \otimes \lambda} \mathscr{U} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{C} \xrightarrow{\gamma \otimes \mathscr{C}} \mathscr{O}_S \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{C} \simeq \mathscr{C}$$

où γ est la « contraction » de $\mathscr{A}^* \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}$ dans $\mathscr{O}_S$. Comme $\mathscr{A}$ est finie localement libre sur $\mathscr{O}_S$, on sait que l'application $\lambda \mapsto (\gamma \otimes \mathscr{C})(\mathscr{U} \otimes \lambda)$ est une bijection de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{C}, \mathscr{A} \otimes \mathscr{C})$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{U} \otimes \mathscr{C}, \mathscr{C})$. De plus, on voit facilement que la condition que λ définisse une structure de $\mathscr{A}$-comodule à gauche (resp. soit un morphisme d'algèbres associatives unitaires) équivaut, par dualité, à la condition que α soit une représentation de $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{C}$ (resp. que α vérifie les conditions (a) et (b)). Ceci prouve le lemme.

[65] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

De plus, il est clair que, pour toute représentation de $\mathscr{U}$ dans le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathscr{C}$, les sections u de $\mathscr{U}$ qui vérifient les conditions (a) et (b) du lemme forment une sous-algèbre de $\mathscr{U}$.

Dans le cas particulier $\mathrm{H} = \mathrm{G}_p(\mathscr{L})$ qui nous intéresse, ces conditions seront donc satisfaites pour toutes les sections u de $\mathscr{U} = \mathscr{U}_p(\mathscr{L})$, si elles sont vraies pour les sections u de $\mathscr{L}$ (en identifiant $\mathscr{L}$ à son image dans $\mathscr{U}_p(\mathscr{L})$). Or, si u est une section de $\mathscr{L}$, les conditions (a) et (b) signifient simplement que $u(1_{\mathscr{C}}) = 0$ et que $u(xy) = u(x)y + xu(y)$, i.e. que $\alpha(u)$ est une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-dérivation de $\mathscr{C} = \mathscr{A}(\mathrm{X})$. L'assertion (ii) de 7.2 en découle. En effet, tout morphisme ϕ de $\mathrm{G}_p = \mathrm{G}_p(\mathscr{L})$ dans $\underline{\mathrm{Aut}}\,\mathrm{X}$ définit **464**
un morphisme de p-algèbres de Lie $\mathscr{L}ie\,\phi$ de $\mathscr{L} = \mathscr{L}ie\,\mathrm{G}_p$ dans $\pi_*(\mathscr{D}\acute{e}r_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$, et réciproquement toute donnée de ce type provient, d'après ce qui précède, d'une unique action $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$.

7.2.2. — Montrons maintenant comment l'assertion (i) du théorème 7.2 résulte de (ii). Soit G un S-schéma en groupes. Si T est un S-schéma et x un élément de G(T), nous notons ℓ_x^{T} (resp. r_x^{T}) la translation à gauche (resp. à droite) de G_{T} qui est définie par x. Les applications $\ell^{\mathrm{T}} : x \mapsto \ell_x^{\mathrm{T}}$ déterminent donc un homomorphisme ℓ de G dans $\underline{\mathrm{Aut}}\,\mathrm{G}$. Soit d'autre part f un T-automorphisme de G_{T} ; on définit alors xf comme étant égal à $(r_x^{\mathrm{T}})^{-1} f r_x^{\mathrm{T}}$, i.e. pour tout $\mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ et $g \in \mathrm{G}(\mathrm{T}')$, $(xf)(g) = f(gx)x^{-1}$. De cette façon G opère à gauche sur le S-foncteur en groupes $\underline{\mathrm{Aut}}\,\mathrm{G}$, donc aussi sur les foncteurs $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{Hom}_{\text{T-Gr.}}(\mathrm{G}_p(\mathscr{L}_{\mathrm{T}}), \underline{\mathrm{Aut}}\,\mathrm{G}_{\mathrm{T}})$ et $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{Hom}_p(\mathscr{L}_{\mathrm{T}}, \mathscr{L}ie(\underline{\mathrm{Aut}}\,\mathrm{G}_{\mathrm{T}}/\mathrm{T}))$. D'autre part, le morphisme $\ell_{\mathrm{T}} : \mathrm{G}_{\mathrm{T}} \to \underline{\mathrm{Aut}}\,\mathrm{G}_{\mathrm{T}}$ identifie G_{T} au groupe des automorphismes du T-schéma G_{T} commutant aux translations à droite, et le morphisme dérivé $\mathscr{L}ie(\ell_{\mathrm{T}})$ identifie $\mathscr{L}ie\,\mathrm{G}_{\mathrm{T}}$ à la p-algèbre de Lie des $\mathscr{O}_{\mathrm{T}}$-dérivations de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}_{\mathrm{T}}}$ commutant aux translations à droite (cf. II, 4.11.1) ; ils induisent donc des carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\text{T-Gr.}}(\mathrm{G}_p(\mathscr{L}_{\mathrm{T}}), \mathrm{G}_{\mathrm{T}}) \arrow[r, "\mathscr{L}ie"] \arrow[d, "\ell_{\mathrm{T}}"'] & \mathrm{Hom}_p(\mathscr{L}_{\mathrm{T}}, \mathscr{L}ie(\mathrm{G}_{\mathrm{T}}/\mathrm{T})) \arrow[d, "\mathscr{L}ie\,\ell_{\mathrm{T}}"] \\
\mathrm{Hom}_{\text{T-Gr.}}(\mathrm{G}_p(\mathscr{L}_{\mathrm{T}}), \underline{\mathrm{Aut}}\,\mathrm{G}_{\mathrm{T}}) \arrow[r, "\mathscr{L}ie"] & \mathrm{Hom}_p(\mathscr{L}_{\mathrm{T}}, \mathscr{L}ie(\underline{\mathrm{Aut}}\,\mathrm{G}_{\mathrm{T}}/\mathrm{T})).
\end{tikzcd}$$

Les images des deux flèches verticales sont les sous-foncteurs formés des invariants sous l'action du S-groupe G. Comme la flèche horizontale du bas est inversible d'après 7.2.1 et qu'elle est compatible avec l'action de G, la flèche horizontale du haut est aussi inversible. Ceci prouve 7.2 (i).

7.2.3. — Considérons maintenant le cas où $\mathrm{G} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}\,\mathbf{W}(\mathscr{F})$. [66] Posons $\mathscr{U} =$ **465**
$\mathscr{U}_p(\mathscr{L})$, $\mathscr{A} = \mathscr{U}^*$ et $\mathrm{H} = \mathrm{G}_p(\mathscr{L}) = \mathrm{Spec}\,\mathscr{A}$. Comme H est affine sur S alors, d'après $\mathrm{VI_B}$ 11.6.1, un morphisme de S-groupes de H dans $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}\,\mathbf{W}(\mathscr{F})$ est la même chose qu'une structure de $\mathscr{A}$-comodule à droite

$$\mu : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F} \otimes \mathscr{A}.$$

[66] N.D.E. : Dans ce qui suit, on a détaillé (et simplifié) l'original, en tenant compte de $\mathrm{VI_B}$, 11.6.1.

De plus, comme $\mathscr{A}$ est finie localement libre sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, ceci équivaut à la donnée d'une représentation

$$\alpha : \mathscr{U} \longrightarrow \mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F})$$

de $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{F}$. Enfin, d'après la propriété universelle de $\mathscr{U} = \mathscr{U}_p(\mathscr{L})$, se donner un tel morphisme α équivaut à se donner sa restriction ρ à $\mathscr{L}$ (identifiée à son image dans $\mathscr{U}$), qui est un morphisme de p-algèbres de Lie de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{E}nd_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{F})$.

(67) Enfin, considérons le cas où $\mathrm{G} = \mathbf{W}(\mathscr{F})$, en gardant les notations précédentes. D'abord, se donner un morphisme de S-foncteurs $\phi : \mathrm{H} \to \mathbf{W}(\mathscr{F})$ équivaut à se donner un élément θ de $\Gamma(\mathrm{H}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{H}})$, et comme H est fini localement libre sur S, on a :

$$\Gamma(\mathrm{H}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{H}}) = \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{A}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{U}, \mathscr{F}).$$

La condition que ϕ soit un morphisme de groupes se traduit alors par le fait que θ, considéré comme morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mathscr{U} \to \mathscr{F}$, s'annule sur $1_{\mathscr{U}}$ et sur $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$, où $\mathscr{J}$ est l'idéal d'augmentation de $\mathscr{U}$, d'où

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{H}, \mathbf{W}(\mathscr{F})) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2, \mathscr{F}). \tag{1}$$

D'autre part, considérons le faisceau quasi-cohérent $[\mathscr{L}, \mathscr{L}]$, image du morphisme $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L} \to \mathscr{L}$, $x \otimes y \mapsto [x, y]$; pour tout ouvert affine V de S, on a $[\mathscr{L}, \mathscr{L}](\mathrm{V}) = [\mathscr{L}(\mathrm{V}), \mathscr{L}(\mathrm{V})]$. Alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow [\mathscr{L}, \mathscr{L}] \longrightarrow \mathscr{L} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathscr{J}/\mathscr{J}^2 \longrightarrow 0\,, \tag{†}$$

où π est la composée de l'inclusion $\mathscr{L} \hookrightarrow \mathscr{J}$ et de la projection $\mathscr{J} \to \mathscr{J}/\mathscr{J}^2$. En effet, la question étant locale sur S, on peut supposer que S est affine d'anneau R et que $\mathrm{L} = \mathscr{L}(\mathrm{S})$ est libre de base $(x_1, \dots, x_r)$. Identifiant L à son image dans $\mathrm{U} = \mathrm{U}_p(\mathrm{L})$, soit K le sous-R-module de U somme directe de $[\mathrm{L}, \mathrm{L}]$ et du sous-module de base les monômes $x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}$ tels que $n_1 + \cdots + n_r \geqslant 2$; on vérifie alors que K est un idéal bilatère de U. Comme K est contenu dans J^2 (où J est l'idéal d'augmentation de U) et contient tous les produits $x_i x_j$ (qui engendrent J^2), on en déduit que $\mathrm{K} = \mathrm{J}^2$, d'où $\mathrm{J}^2 \cap \mathrm{L} = [\mathrm{L}, \mathrm{L}]$ et l'on a la suite exacte (†).

D'autre part, on sait d'après 6.4.2 que $\underline{\mathrm{Lie}}\, \mathbf{W}(\mathscr{F})$ n'est autre que $\mathbf{W}(\mathscr{F})$, le crochet de Lie et la puissance p-ième symbolique étant nuls. De ceci et de ce qui précède on déduit que

$$\mathrm{Hom}_p(\mathscr{L}, \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{L}/[\mathscr{L}, \mathscr{L}], \mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2, \mathscr{F}) \tag{2}$$

et ceci, combiné avec (1), achève la démonstration du théorème 7.2.

7.3. Lemme. — *Si $\mathscr{L}$ est une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-p-algèbre de Lie finie localement libre, le morphisme*
466 *$j_{\mathscr{L}} : \mathscr{L} \to \mathscr{L}ie\, \mathrm{G}_p(\mathscr{L})$ de 5.5 est inversible.*

(68) Pour la démonstration, voir 5.5.1.

---

(67) N.D.E. : On a ajouté ce qui suit. (L'original indiquait « le cas de $\mathbf{W}(\mathscr{F})$ est analogue »).

(68) N.D.E. : Pour ne pas modifier la numérotation, on a conservé l'énoncé 7.3, bien qu'on l'ait inclus, avec sa démonstration, dans 5.5.1.

7.4. Pour terminer cette section, nous allons donner une caractérisation des S-schémas en groupes de la forme $\mathrm{G}_p(\mathscr{L})$, où $\mathscr{L}$ est une $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-p-algèbre de Lie finie localement libre.

Soient G un S-schéma en groupes, ε_G la section unité et $\mathscr{I}'$ le noyau du morphisme $\varepsilon_\mathrm{G}^{-1}(\mathscr{O}_\mathrm{G}) \to \mathscr{O}_\mathrm{S}$ correspondant à ε_G. L'image de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{S})$ dans U(G) s'identifie, d'après 2.5 et 1.3.1, aux morphismes de $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules de $\varepsilon_\mathrm{G}^{-1}(\mathscr{O}_\mathrm{G})$ dans $\mathscr{O}_\mathrm{S}$ qui s'annulent sur la section unité de $\varepsilon_\mathrm{G}^{-1}(\mathscr{O}_\mathrm{G})$ et sur $\mathscr{I}'^2$. On retrouve ainsi l'isomorphisme canonique de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{S})$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\mathscr{I}'/\mathscr{I}'^2, \mathscr{O}_\mathrm{S})$ de II, 3.3 et 4.11.4. [69] Nous poserons $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S}} = \mathscr{I}'/\mathscr{I}'^2$ comme dans *loc. cit.*, de sorte que le faisceau $\mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ s'identifie à $\omega^*_{\mathrm{G}/\mathrm{S}} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}, \mathscr{O}_\mathrm{S})$. [70] De plus, si $\mathrm{G} = \mathrm{G}_p(\mathscr{L})$, où $\mathscr{L}$ est une $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-p-algèbre de Lie finie localement libre, on a vu en 5.5.3 que $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S}} = \mathscr{L}^*$.

Théorème. — *Si* G *est un schéma en groupes sur un schéma* S *de caractéristique* $p > 0$*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-*p*-algèbre de Lie finie localement libre* $\mathscr{L}$ *telle que* $\mathrm{G} \simeq \mathrm{G}_p(\mathscr{L})$.

(i′) *La* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-*p*-algèbre de Lie* $\mathscr{L}ie(\mathrm{G})$ *est finie localement libre et* $\mathrm{G} \simeq \mathrm{G}_p(\mathscr{L}ie(\mathrm{G}))$.

(ii) G *est affine sur* S*,* $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}$ *est un* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-module localement libre de type fini et l'algèbre affine de* G *est localement isomorphe au quotient de l'algèbre symétrique* $\mathcal{S}_{\mathscr{O}_\mathrm{S}}(\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S}})$ *par l'idéal engendré par les puissances* p*-ièmes des sections de* $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}$.

(iii) G *est localement de présentation finie sur* S*, de hauteur* $\leqslant 1$*, et* $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}$ *est localement libre.*

(iii′) G *est localement de type fini sur* S*, de hauteur* $\leqslant 1$*, et* $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}$ *est localement libre.*

(iv) G *est localement de présentation finie et* plat *sur* S*, de hauteur* $\leqslant 1$. [71]

7.4.1. — L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (i′) résulte de 5.5.3 (i), les implications (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ **467**
(iii′) sont claires, et l'on a (i) $\Rightarrow$ (iv) puisque $\mathrm{G}_p(\mathscr{L})$ est fini localement libre et de hauteur $\leqslant 1$, d'après 5.5.2 et le lemme 7.2. Montrons que (i) entraîne (ii). Notons $\mathscr{I}$ l'idéal d'augmentation de $\mathscr{A} = \mathscr{U}_p(\mathscr{L})^*$. On a déjà vu en 5.5.3 (ii) que $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S}} = \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ s'identifie à $\mathscr{L}^*$, donc est fini localement libre.

---

[69] N.D.E. : Si G est affine sur S et si $\mathscr{I}$ désigne l'idéal d'augmentation de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$, alors $\mathscr{I}'/\mathscr{I}'^2$ s'identifie à $\varepsilon_\mathrm{G}^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)$, cf. *loc. cit.*

[70] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[71] N.D.E. : On ajouté, d'une part, l'assertion (i′), implicite dans l'original, et d'autre part, les assertions (iii′) et (iv), signalées par O. Gabber ; l'assertion (iv) reprend une note de bas de page de l'original, qui indiquait : « La condition sur $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}$ est en fait inutile, comme on voit aisément en se ramenant au cas où S est local de corps résiduel k, et en appliquant le théorème au cas du groupe G_k ». Comme signalé par Gabber, ceci est inexact sans hypothèse de platitude : si A est un anneau local artinien de caractéristique $p > 0$ et J un idéal propre non nul de A, soit H le sous-groupe $\mathrm{Spec}\,\mathrm{A}[x]/(x^p, \mathrm{J}x)$ de $\boldsymbol{\alpha}_{p,\,\mathrm{A}}$ (i.e. pour toute A-algèbre R, $\mathrm{H}(\mathrm{R}) = \{x \in \mathrm{R} \mid x^p = 0 \text{ et } \mathrm{J}x = 0\}$), alors H n'est pas plat sur A donc n'est pas de la forme $\mathrm{G}_p(\mathscr{L})$, où $\mathscr{L}$ est une p-algèbre de Lie libre de rang fini sur A.

Supposons maintenant S *affine*. Il y a alors une section $\sigma : \omega_{G/S} \to \mathscr{I}$ de la projection $\mathscr{I} \to \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$; elle induit un morphisme d'algèbres $\sigma' : \mathcal{S}_{\mathscr{O}_S}(\omega_{G/S}) \to \mathscr{A}$ et, d'après le lemme 7.2, σ' se factorise en un morphisme

$$\phi : \mathcal{S}_{\mathscr{O}_S}(\omega_{G/S})/\mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{A},$$

où $\mathscr{K}$ désigne l'idéal engendré par les puissances p-ièmes de sections de $\omega_{G/S}$. Si l'on filtre $\mathscr{A}$ (resp. $\mathcal{S}_{\mathscr{O}_S}(\omega_{G/S})/\mathscr{K}$) par les puissances de $\mathscr{I}$ (resp. de l'idéal engendré par $\omega_{G/S}$), il est clair que ϕ induit un épimorphisme des gradués associés. Donc ϕ est un épimorphisme de $\mathscr{O}_S$-modules localement libres de même rang (cf. 5.3.3) ; donc ϕ est un isomorphisme. Ceci prouve que (i) $\Rightarrow$ (ii).

468 ***7.4.2***. — Supposons maintenant G de hauteur $\leqslant 1$ et localement de présentation finie sur S. [72] Comme le morphisme de Frobenius $\mathrm{Fr} : G \to G^{(p)}$ est entier et se factorise par la section unité de $G^{(p)}$, alors G est entier (donc affine) sur S. Soit alors $\mathscr{A} = \mathscr{A}(G)$, comme G est supposé localement de présentation finie sur S, il en résulte que G est fini et de présentation finie sur S, donc que $\mathscr{A}(G)$ est un $\mathscr{O}_S$-module de présentation finie (cf. EGA IV_1, 1.4.7). Soit $\mathscr{I}$ l'idéal d'augmentation de $\mathscr{A}$; comme $\mathscr{A} = \eta_{\mathscr{A}}(\mathscr{O}_S) \oplus \mathscr{I}$ (où $\eta_{\mathscr{A}}$ est la section unité de $\mathscr{A}$), $\mathscr{I}$ est un $\mathscr{O}_S$-module de présentation finie, et il en est donc de même de $\omega_G = \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$. Lorsqu'on suppose G de hauteur $\leqslant 1$ et localement de type fini sur S, on obtient de même que $\mathscr{A}(G)$, $\mathscr{I}$ et $\omega_G = \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ sont des $\mathscr{O}_S$-modules de type fini.

Donc, sous l'hypothèse (iii′) on obtient que $\omega_{G/S}$ est fini localement libre sur $\mathscr{O}_S$, ainsi que $\mathscr{L} = \mathscr{L}ie(G/S) = \omega^*_{G/S}$. Soient alors $\mathscr{B} = \mathscr{U}_p(\mathscr{L})^*$ et $H = G_p(\mathscr{L}) = \operatorname{Spec} \mathscr{B}$. D'après le théorème 7.2, l'application identique de $\mathscr{L}$ correspond à un morphisme de groupes de $H = G_p(\mathscr{L})$ vers G, donc à un morphisme de $\mathscr{O}_S$-algèbres $\theta : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$. Il s'agit de montrer que θ, qui induit par définition un isomorphisme de $\omega_{G/S}$ sur $\omega_{H/S}$, est un isomorphisme.

Pour cela, on peut se restreindre au cas où S est affine. Il y a alors une section τ de la projection $\mathscr{I} \to \omega_{G/S}$; elle induit un morphisme d'algèbres $\tau' : \mathcal{S}_{\mathscr{O}_S}(\omega_{G/S}) \to \mathscr{A}$ et comme toute section locale de $\mathscr{I}$ est de puissance p-ième nulle (puisque $\mathrm{Fr} : G \to G^{(p)}$ se factorise par la section unité de $G^{(p)}$), τ' induit un morphisme de $\mathscr{O}_S$-algèbres ψ qui s'incrit dans le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_{\mathscr{O}_S}(\omega_{G/S})/\mathscr{K} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathscr{A} \arrow[d, "\theta"] \\ & \mathscr{B} \end{tikzcd}$$

où $\mathscr{K}$ est l'idéal engendré par les puissances p-ièmes de sections de $\omega_{G/S}$. D'une part, on montre comme en 7.4.1 que ψ est un épimorphisme de $\mathscr{O}_S$-modules. D'autre part, nous avons vu en 7.4.1 que $\phi = \theta \circ \psi$ est un isomorphisme. Il en va donc de même pour θ. Ceci prouve que (iii′) $\Rightarrow$ (i).

[72] N.D.E. : On a détaillé (et simplifié) l'original dans ce qui suit.

7.4.3. — [73] Montrons enfin que (iv) entraine (iii). Il suffit de montrer que $\omega_{\mathrm{G/S}}$ est localement libre, donc on peut supposer S affine d'anneau R. Comme remarqué au début de 7.4.2, l'hypothèse (iv) entraîne alors que $\mathrm{G} = \mathrm{Spec}\,\mathrm{A}$, pour une R-algèbre A qui est un R-module de présentation finie, ainsi que $\omega_{\mathrm{G/A}} = \mathrm{I}/\mathrm{I}^2$ (où I est l'idéal d'augmentation de A). Comme on suppose de plus G plat sur S, alors A est un R-module fini localement libre (cf. [**BAC**] II, § 5.2, Th. 1 et cor. 2) et, d'après *loc. cit.*, pour montrer que $\omega_{\mathrm{G/A}}$ est localement libre de rang fini, il suffit de montrer que $(\omega_{\mathrm{G/A}})_{\mathfrak{m}}$ est plat pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R. Donc on peut supposer R local, et A libre de rang $n+1$, donc I libre de rang n. Soient $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R et $k = \mathrm{R}/\mathfrak{m}$.

Notons I_k l'idéal d'augmentation de A_k et r la dimension de $\omega_{\mathrm{G}_k/k} = \mathrm{I}_k/\mathrm{I}_k^2$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de I_k telle que $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ soit une base de I_k^2, et soient $x_1, \dots, x_n$ des éléments de I relevant les e_i. D'après le lemme de Nakayama, $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de I sur R. Soit N le sous-R-module de I de base $(x_1, \dots, x_r)$ et soit B le quotient de l'algèbre symétrique de N par l'idéal engendré par les éléments x^p, pour $x \in \mathrm{N}$. Comme tout élément de I est de puissance p-ième nulle, on obtient un morphisme de R-algèbres

$$\psi : \quad \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{A}.$$

D'après 7.4.2, $\psi \otimes k$ est un isomorphisme. Il en résulte que $\mathrm{Coker}\,\psi = 0$ et que, notant $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}\,\psi$, le morphisme $\tau : \mathrm{K} \otimes k \to \mathrm{B} \otimes k$ est nul. Mais puisque ψ est surjectif et que A est plat sur R, alors τ est aussi injectif, d'où $\mathrm{K} \otimes k = 0$. D'autre part, comme A est un R-module de présentation finie, K est un R-module de type fini (cf. [**BAC**] I, § 2.8, Lemme 9), d'où $\mathrm{K} = 0$ d'après Nakayama. Donc ψ est un isomorphisme de R-algèbres, et comme $\psi^{-1}(\mathrm{I})$ contient l'idéal d'augmentation J de B, il en résulte que $\psi^{-1}(\mathrm{I}) = \mathrm{J}$, et donc ψ^{-1} induit un isomorphisme de R-modules de I/I^2 sur $\mathrm{J}/\mathrm{J}^2 = \mathrm{N}$. Ceci prouve que $\omega_{\mathrm{G/S}}$ est fini localement libre, d'où l'implication (iv) $\Rightarrow$ (iii). Ceci achève la démonstration du théorème 7.4.

Remarque 7.5. — [74] Il résulte évidemment des théorèmes 7.2 et 7.4 que les foncteurs $\mathrm{G} \mapsto \mathscr{L}ie(\mathrm{G})$ et $\mathscr{L} \mapsto \mathrm{G}_p(\mathscr{L})$ induisent des équivalences, quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des S-groupes localement de présentation finie et plats, de hauteur $\leqslant 1$, et la sous-catégorie pleine de celle des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-p-algèbres de Lie, formée des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-p-algèbres de Lie finies localement libres.

8. Cas d'un corps de base

8.1. Résumons maintenant les résultats obtenus dans le cas où S *est le spectre d'un corps k de caractéristique* $p > 0$. Disons alors qu'un k-schéma en groupes est *algébrique* si le schéma sous-jacent est de type fini sur k. Dans ce cas, d'après le théorème 7.2, on obtient : [75] 469

[73] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe pour démontrer que (iv) $\Rightarrow$ (iii), cf. la N.D.E. (71).

[74] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

[75] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 8.1.1 à 8.1.3, pour mettre en évidence les résultats qui y sont énoncés.

Théorème 8.1.1. — *Le foncteur* G_p*, qui associe à toute* p*-algèbre de Lie* $\mathscr{L}$ *de dimension finie sur* k *le* k*-groupe* $\mathrm{G}_p(\mathscr{L})$*, est adjoint à gauche au foncteur qui à tout* k*-groupe algébrique* G *associe* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G})$.

Combinant ceci avec le théorème 7.4, on obtient :

Théorème 8.1.2. — *Les foncteurs* $\mathrm{G}_p : \mathscr{L} \mapsto \mathrm{G}_p(\mathscr{L})$ *et* $\mathrm{G} \mapsto \mathscr{L}ie(\mathrm{G})$ *induisent des* équivalences*, quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des* p*-algèbres de Lie de dimension finie sur* k*, et celle des* k*-groupes algébriques de hauteur* $\leqslant 1$.

Alors, comme G_p est un foncteur adjoint à gauche, *il commute aux limites inductives,* [76] donc en particulier à la formation des conoyaux. D'autre part, si l'on a deux morphismes $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ et $\phi' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}$ entre k-groupes algébriques de hauteur $\leqslant 1$, alors le produit fibré $\mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{G}'$ est encore un k-groupe algébrique de hauteur $\leqslant 1$ (car le morphisme $\mathrm{Fr} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}^{(p)}$ commute au produits fibrés). Donc l'inclusion de la catégorie des k-groupes algébriques de hauteur $\leqslant 1$ dans celle de tous les k-groupes algébriques commute aux produits fibrés, donc en particulier à la formation des noyaux. On en déduit le :

Corollaire 8.1.3. — *Le foncteur* G_p *est* exact*, au sens suivant. Si* $\pi : \mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_2$ *est un morphisme surjectif entre* p*-algèbres de Lie de dimension finie sur* k *et si* i *est l'inclusion de* $\mathscr{L}_0 = \operatorname{Ker}\pi$ *dans* $\mathscr{L}_1$*, on a une suite exacte de* k*-groupes algébriques :*

$$1 \longrightarrow \mathrm{G}_p(\mathscr{L}_0) \xrightarrow{\mathrm{G}_p(i)} \mathrm{G}_p(\mathscr{L}_1) \xrightarrow{\mathrm{G}_p(\pi)} \mathrm{G}_p(\mathscr{L}_2) \longrightarrow 1\ . \qquad [77]$$

En effet, d'après ce qui précède, $\mathrm{G}_p(i)$ induit un isomorphisme de $\mathrm{G}_p(\mathscr{L}_0)$ sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{G}_p(\pi))$ (ce noyau étant le même dans la catégorie de tous les k-groupes algébriques H ou dans celle des H de hauteur $\leqslant 1$), et $\mathrm{G}_p(\pi) : \mathrm{G}_p(\mathscr{L}_1) \to \mathrm{G}_p(\mathscr{L}_2)$ identifie $\mathrm{G}_p(\mathscr{L}_2)$ au quotient de $\mathrm{G}_p(\mathscr{L}_1)$ par $\mathrm{G}_p(\mathscr{L}_0)$ dans la catégories des k-groupes algébriques.

Remarque 8.1.4. — [78] Soient $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un morphisme de k-groupes et $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(\phi)$. On suppose ϕ couvrant pour la topologie (fpqc) (ceci sera le cas, en particulier, si ϕ est couvrant pour une topologie moins fine, par exemple la topologie (fppf)). Alors, d'une part, ϕ est un K-torseur au-dessus de H (cf. IV 5.1.7.1). D'autre part, (cf. IV 6.3.1) il existe un recouvrement de H par des ouverts affines S_i, et pour chaque i un morphisme affine fidèlement plat $\mathrm{T}_i \to \mathrm{S}_i$ se factorisant par ϕ. Alors $\mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{T}_i$ est T_i-isomorphe à $\mathrm{K} \times \mathrm{T}_i$, donc fidèlement plat sur T_i, et donc, par descente (fpqc), $\mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathrm{S}_i \to \mathrm{S}_i$ est fidèlement plat, de sorte que ϕ est fidèlement plat.

Réciproquement, si ϕ est fidèlement plat et quasi-compact (resp. et localement de présentation finie), il est couvrant pour la topologie (fpqc) (resp. (fppf)), cf. IV 6.3.1. Rappelons enfin qu'un morphisme de faisceaux est couvrant si et seulement si c'est un

[76] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit, ainsi que la démonstration du corollaire ci-dessous.
[77] N.D.E. : De plus, d'après $\mathrm{VI_A}$, 3.2, $\mathrm{G}_p(\mathscr{L}_2)$ représente le faisceau (fppf) quotient de $\mathrm{G}_p(\mathscr{L}_1)$ par $\mathrm{G}_p(\mathscr{L}_0)$.
[78] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, signalée par O. Gabber, qui sera utile en 8.3.1.

épimorphisme, cf. IV 4.4.3. On obtient donc, en particulier, qu'un morphisme quasi-compact de k-groupes est fidèlement plat si et seulement si c'est un épimorphisme de faisceaux (fpqc).

8.2. Proposition. — *Considérons une suite exacte* [79] *de groupes algébriques sur un corps k de caractéristique $p > 0$*

$$1 \longrightarrow \mathrm{G}' \xrightarrow{\ \tau\ } \mathrm{G} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathrm{G}'' \longrightarrow 1$$

et les assertions suivantes :

(i) *Le morphisme π est lisse.*

(ii) G' *est lisse.*

(iii) *Pour tout entier $n > 0$, la suite ci-dessous, induite par τ et π, est exacte :* **470**

$$1 \longrightarrow {}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}' \longrightarrow {}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G} \longrightarrow {}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}'' \longrightarrow 1.$$

(iv) *Le morphisme* ${}_{\mathrm{Fr}}\pi : {}_{\mathrm{Fr}}\mathrm{G} \to {}_{\mathrm{Fr}}\mathrm{G}''$ *est un épimorphisme de faisceaux* (fppf).

(v) *Le morphisme* $\mathrm{Lie}(\pi) : \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{G}'')$ *est surjectif.*

Alors on a les implications (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) *et toutes les assertions sont équivalentes lorsque* G *est lisse sur k.*

En effet, (i) équivaut à (ii) d'après $\mathrm{VI_B}$ 9.2 (vii), et il est clair que (iii) implique (iv). D'autre part, l'équivalence de (iv) et (v) résulte de 8.1.3.

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{G}' \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\mathrm{Fr}^n(\mathrm{G}'/k)"'] & \mathrm{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{Fr}^n(\mathrm{G}/k)"'] & \mathrm{G}'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Fr}^n(\mathrm{G}''/k)"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{G}'^{(p^n)} \arrow[r, "\tau^{(p^n)}"'] & \mathrm{G}^{(p^n)} \arrow[r, "\pi^{(p^n)}"'] & \mathrm{G}''^{(p^n)} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

dont les deux lignes sont exactes : comme $\mathrm{Fr}^n(\mathrm{G}'/k)$ est un épimorphisme de faisceaux (fppf) d'après le corollaire 8.3.1 ci-dessous, π induit un épimorphisme de ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}$ sur ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}''$ (généraliser le lemme du serpent aux faisceaux en groupes non nécessairement commutatifs).

De même, lorsque G est lisse sur k, $\mathrm{Fr}(\mathrm{G}/k)$ est un épimorphisme, donc si de plus ${}_{\mathrm{Fr}}\pi$ est un épimorphisme, le même lemme du serpent appliqué au diagramme ci-dessus pour $n = 1$ montre que $\mathrm{Fr}(\mathrm{G}'/k)$ est un épimorphisme, donc que G' est lisse sur k, d'après 8.3.1 ci-dessous.

8.3. Proposition. — *Si* G *est un groupe localement de type fini* [80] *sur un corps k de caractéristique $p > 0$, il existe un entier n_0 tel que* $\mathrm{G}/({}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G})$ *soit lisse sur k pour $n \geqslant n_0$.*

---

[79] N.D.E. : i.e. π est fidèlement plat et i est un isomorphisme de G' sur $\mathrm{Ker}\,\pi$, de sorte que G'' représente le faisceau (fppf) quotient de G par G', cf. $\mathrm{VI_A}$, 3.2 et 5.2.

[80] N.D.E. : On a remplacé « algébrique » par « localement de type fini ».

471 Comme la construction de $G/({}_{\mathrm{Fr}^n}G)$ commute à l'extension du corps de base (4.1.1 et $\mathrm{VI_A}$, 3.3.2), nous pouvons supposer k parfait. Dans ce cas, $G_{\text{réd}}$ est un k-groupe localement de type fini (cf. $\mathrm{VI_A}$ 0.2) et l'on a le diagramme commutatif et exact suivant, où l'on a noté H le k-schéma $G_{\text{réd}}\backslash G$:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & G_{\text{réd}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Fr}^n(G_{\text{réd}}/k)"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Fr}^n(G/k)"] & H \arrow[d, "\mathrm{Fr}^n(H/k)"] \\
1 \arrow[r] & G_{\text{réd}}^{(p^n)} \arrow[r] & G^{(p^n)} \arrow[r] & H^{(p^n)}
\end{tikzcd}.$$

Or H est le spectre d'une k-algèbre finie, locale, de corps résiduel k (cf. $\mathrm{VI_A}$, 5.6.1). Par conséquent, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathrm{Fr}^n(H/k)$ se factorise à travers la section « unité » de $H^{(p^n)}$. Il s'ensuit que, pour $n \geqslant n_0$, $\mathrm{Fr}^n(G/k)$ se factorise à travers $G_{\text{réd}}^{(p^n)}$ et donc, d'après $\mathrm{VI_A}$, 5.4.1, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\mathrm{Fr}^n(G/k)"] \arrow[d, "\pi"'] & G_{\text{réd}}^{(p^n)} \\
G/({}_{\mathrm{Fr}^n}G) \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

où i est une immersion fermée (et π est la projection canonique). Comme, de plus, i induit un homéomorphisme des espaces topologiques sous-jacents, c'est donc un isomorphisme. Comme k est parfait, $G_{\text{réd}}^{(p^n)}$ est lisse sur k ($\mathrm{VI_A}$, 1.3.1), et donc $G/({}_{\mathrm{Fr}^n}G)$ est lisse sur k, pour tout $n \geqslant n_0$.

8.3.1. Corollaire. — *Soit* G *un groupe localement de type fini* [(80)] *sur un corps k de caractéristique $p > 0$ et soit n un entier $\geqslant 1$.* [(81)] *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est lisse sur k.*

(ii) $\mathrm{Fr}^n(G/k) : G \to G^{(p^n)}$ *est un épimorphisme de faisceaux* (fppf).

(iii) $\mathrm{Fr}^n(G/k) : G \to G^{(p^n)}$ *est fidèlement plat.*

D'abord, comme G est localement de type fini sur k, $\mathrm{Fr}^n(G/k)$ est de présentation finie, donc l'équivalence de (ii) et (iii) découle de 8.1.4. Supposons G lisse sur k, donc G réduit. Alors, comme $\mathrm{Fr}^n(G/k)$ est surjectif, il est fidèlement plat (cf. $\mathrm{VI_A}$, 6.2 ou $\mathrm{VI_B}$, 1.3).

Réciproquement, supposons $\mathrm{Fr}^n(G/k)$ fidèlement plat. Comme $\mathrm{Fr}^n(G^{(p^n)}/k)$ est déduit de $\mathrm{Fr}^n(G/k)$ par changement de base (cf. 4.1.3), il est donc aussi fidèlement plat, ainsi que le composé :

$$\mathrm{Fr}^{2n}(G/k) : \quad G \longrightarrow G^{(p^n)} \longrightarrow G^{(p^{2n})}.$$

---

(81) N.D.E. : On a explicité l'équivalence entre (ii) et (iii) et l'on a détaillé la démonstration.

On obtient ainsi que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Fr}^{mn}(\mathrm{G}/k) : \mathrm{G} \to \mathrm{G}^{(p^{mn})}$ est fidèlement plat, donc induit un isomorphisme $\mathrm{G}/({}_{\mathrm{Fr}^{mn}}\mathrm{G}) \simeq \mathrm{G}^{(p^{mn})}$ (cf. $\mathrm{VI_A}$, 5.4.1). Or, d'après la proposition 8.3, $\mathrm{G}^{(p^{mn})}$ est lisse sur k pour m grand, donc G l'est aussi, par descente (fpqc) (cf. EGA IV_4, 17.7.1).

8.4. Dans les deux énoncés qui terminent cet exposé, nous revenons au cas d'un corps k de caractéristique quelconque.

Lorsque k est de caractéristique 0 (resp. $p > 0$), soit n un entier $\geqslant 1$ (resp. un entier $\geqslant 1$ et premier à p) ; dans les deux cas, nous disons simplement que n est premier à la caractéristique de k. De plus, si G est un schéma en groupes sur k, nous notons **472**
$n_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ le morphisme de k-schémas qui applique un élément x de $\mathrm{G}(\mathrm{T})$ sur $x^n \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$, lorsque T est un k-schéma.

Proposition. — *Soient* G *un groupe algébrique sur un corps k et n un entier premier à la caractéristique de k. Alors* $n_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ *est un morphisme étale.*

[82] D'après $\mathrm{VI_B}$ 1.3, il suffit de montrer que n_{G} est étale à l'origine. Soient A l'anneau local de G à l'origine et I l'idéal maximal de A. D'après II 3.9.4, l'application $\mathrm{Lie}(n_{\mathrm{G}}) : \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, qui est induite par n_{G}, est l'homothétie de rapport n. C'est donc un isomorphisme ainsi que l'endomorphisme induit par n_{G} sur $\mathrm{I}/\mathrm{I}^2 = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})^*$. Si k est de caractéristique 0, G est lisse sur k ($\mathrm{VI_B}$ 1.6.1, voir aussi $\mathrm{VII_B}$ 3.3.1), donc le morphisme canonique $\mathcal{S}(\mathrm{I}/\mathrm{I}^2) \to \mathrm{gr}_{\mathrm{I}}(\mathrm{A})$ est un isomorphisme, où $\mathrm{gr}_{\mathrm{I}}(\mathrm{A})$ désigne le gradué associé à la filtration I-adique. Il en résulte que n_{G} induit un automorphisme de $\mathrm{gr}_{\mathrm{I}}(\mathrm{A})$, donc aussi du complété $\widehat{\mathrm{A}}$ de A, donc n_{G} est étale à l'origine (cf. EGA IV_4, 17.6.3).

Si la caractéristique est $p > 0$ et si G est de hauteur $\leqslant 1$, alors A est isomorphe au quotient de l'algèbre symétrique de $\omega_{\mathrm{G}/k} = \mathrm{I}/\mathrm{I}^2$ par l'idéal engendré par les puissances p-ièmes des éléments de $\omega_{\mathrm{G}/k}$ (cf. 7.4) ; on peut appliquer alors le « même » raisonnement qu'en caractéristique 0, et l'on obtient que n_{G} induit un automorphisme de A.

Si G est de hauteur $\leqslant r$ et si nous supposons notre assertion démontrée pour les groupes de hauteur $\leqslant r-1$, notons B, A et A′ les algèbres affines de ${}_{\mathrm{Fr}}\mathrm{G}$, G et $\mathrm{G}' = {}_{\mathrm{Fr}}\mathrm{G}\backslash\mathrm{G}$, et n_{B}, n_{A} et $n_{\mathrm{A}'}$ les endomorphismes de B, A et A′ qui sont induits par $n_{{}_{\mathrm{Fr}}\mathrm{G}}$, n_{G} et $n_{\mathrm{G}'}$. [83] Soit $\mathrm{I}' = \mathrm{I} \cap \mathrm{A}$ l'idéal maximal de A′, comme on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathrm{Fr}}\mathrm{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G} \arrow[d] \\ e \arrow[r] & \mathrm{G}' \end{tikzcd}$$

on a $\mathrm{B} = \mathrm{A}/\mathrm{I}'\mathrm{A}$. Observons que $n_{\mathrm{A}'}$ (resp. n_{B}) n'est autre que l'endomorphisme induit par n_{A} sur A′ (resp. sur B). D'après $\mathrm{VI_A}$ 3.2, A est un A′-module fidèlement

[82] N.D.E. : On a changé dans l'énoncé « étale à l'origine » en « étale », et l'on a ajouté la phrase qui suit.

[83] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

plat, et comme A' est un anneau local artinien (G' étant un k-groupe algébrique de hauteur $\leqslant r-1$), il en résulte que A est un A'-module libre. Comme la restriction de n_A à A' est $n_{A'}$, qui est un isomorphisme d'après l'hypothèse de récurrence, il résulte du lemme de Nakayama que n_A sera un automorphisme si l'endomorphisme qu'il induit sur $A/I'A$ en est un. Or cet endomorphisme n'est autre que n_B, qui est un automorphisme puisque B est de hauteur $\leqslant 1$. Donc n_A est un automorphisme.

Enfin, lorsque G est un groupe algébrique quelconque sur un corps de caractéristique $p > 0$, ce qui précède montre que n_G induit des automorphismes des k-schémas ${}_{\mathrm{Fr}^r}\mathrm{G}$; ces schémas sont affines sur k et ont pour algèbres les quotients de l'algèbre lo-
473 cale A par l'idéal $I^{\{p^r\}}$ engendré par les puissances p^r-ièmes des éléments de I. Comme n_G définit des automorphismes des algèbres $A/I^{\{p^r\}}$, on voit par passage à la limite projective, que n_G induit un automorphisme de $\widehat{A}$, donc n_G est étale à l'origine (EGA IV_4, 17.6.3).

8.5. Proposition. — *Soit* G *un groupe algébrique fini, de rang n sur le corps k. Alors* $n_G : G \to G$ *est le morphisme nul de* G.

Signalons tout de suite le corollaire suivant, obtenu en combinant 8.4 et 8.5 : [84]

Corollaire 8.5.1. — *Soit* G *un groupe algébrique fini, de rang n sur le corps k. Si n est premier à la caractéristique de k, alors* G *est étale sur k.*

Démontrons maintenant 8.5. Soit H un sous-groupe distingué de G de rang m sur k. Notons $\lambda : H \times G \to G$ le morphisme induit par la multiplication de G. Alors, avec les notations de VI_A 3.2, on a un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} H \times G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G \arrow[r, "\pi"] & H\backslash G \end{tikzcd}$$

Comme $\pi : G \to H\backslash G$ est fidèlement plat, quasi-compact (VI_A 3.2), et que pr_2 est localement libre de rang m, il résulte de EGA IV_2, 2.5.2, que $G \to H\backslash G$ est localement libre de rang m. Notant $r = rg_k(H\backslash G)$, on a donc $n = \mathrm{rg}_k(G) = r\,m$.

D'un autre côté, on a une suite exacte de groupes « abstraits »

$$1 \longrightarrow H(T) \longrightarrow G(T) \longrightarrow (H\backslash G)(T)$$

quel que soit le k-schéma T ; il est donc clair que n_G est nul si m_H et $r_{H\backslash G}$ le sont. Si l'on prend pour H la composante neutre G^0 de G, alors $G^0\backslash G$ est étale (cf. VI_A 5.5.1), de sorte qu'on peut supposer G étale sur k ou bien infinitésimal (cf. 7.0).

Si G est étale, on se ramène, par extension du corps de base, au cas où k est algébriquement clos. Dans ce cas, G est un groupe constant (cf. I 4.1), et l'énoncé est classique.

474 Si G est infinitésimal et non nul, k est nécessairement de caractéristique $p > 0$

[84] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire, indiqué implicitement dans l'original par : « (confer 8.4) ». Pour une autre démonstration du corollaire, n'utilisant pas 8.5, voir par exemple [**TO70**], Lemma 5.

(cf. $\mathrm{VI_B}$ 1.6.1 ou $\mathrm{VII_B}$ 3.3.1) ; les sous-groupes ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}$ forment alors une suite de composition de G, dont les quotients sont de hauteur $\leqslant 1$.

Ceci nous ramène au cas où G est de hauteur $\leqslant 1$. Soient alors A (resp. L) l'algèbre affine (resp. l'algèbre de Lie) de G et $\mathrm{U} = \mathrm{U}_p(\mathrm{L})$. D'après 7.4, on a $\mathrm{G} = \mathrm{G}_p(\mathrm{L})$ d'où $\mathrm{A} = \mathrm{U}^*$; donc si $\dim_k \mathrm{L} = r$, le rang de G sur k est p^r (cf. 5.3.3). Nous allons donc étudier le morphisme $p_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ défini par l'élévation à la puissance p ; il induit un endomorphisme p_{A} de A et, par dualité, un endomorphisme p_{U} de U.

Soit I l'idéal d'augmentation de A, nous allons montrer que $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}^p$. Supposant ceci établi, on aura donc $p_{\mathrm{A}}^r(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}^{p^r}$. D'autre part, on sait que $\mathrm{I}^{r(p-1)+1} = 0$ (puisque I est engendré par r éléments de puissance p-ième nulle). Comme $p^r > r(p-1)$, il en résulte que $p_{\mathrm{A}}^r(\mathrm{I}) = 0$, donc p_{G}^r est le morphisme nul. Il reste donc à montrer l'assertion :

$$(*) \qquad p_{\mathrm{A}}(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}^p.$$

Pour tout entier $s \geqslant 1$, on notera $m_{\mathrm{A}}^{s-1} : \mathrm{A}^{\otimes s} \to \mathrm{A}$ (resp. $\Delta_{\mathrm{U}}^s : \mathrm{U} \to \mathrm{U}^{\otimes s}$) l'application induite par la multiplication m_{A} de A (resp. la comultiplication Δ_{U} de U). Alors p_{A} est égal au composé suivant :

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\Delta_{\mathrm{A}}^{p-1}} \mathrm{A}^{\otimes p} \xrightarrow{m_{\mathrm{A}}^{p-1}} \mathrm{A}\ ,$$

et comme la transposée de m_{A} (resp. Δ_{A}) est Δ_{U} (resp. m_{U}), l'endomorphisme $p_{\mathrm{U}} = {}^t p_{\mathrm{A}}$ de U est le composé ci-dessous :

$$\mathrm{U} \xrightarrow{\Delta_{\mathrm{U}}^{p-1}} \mathrm{U}^{\otimes p} \xrightarrow{m_{\mathrm{U}}^{p-1}} \mathrm{U}\ .$$

[85] Soit J l'idéal d'augmentation de U, on a $\mathrm{U} = k1_{\mathrm{U}} \oplus \mathrm{J}$ et l'on notera π la projection $\mathrm{U} \to \mathrm{J}$ de noyau $k1_{\mathrm{U}}$. Pour tout entier $s \geqslant 1$, notons $(\mathrm{I}^s)^{\perp}$ l'orthogonal de I^s dans $\mathrm{A}^* = \mathrm{U}$, i.e. $(\mathrm{I}^s)^{\perp}$ est l'ensemble des $u \in \mathrm{U}$ tels que le composé ci-dessous soit nul :

$$\mathrm{I}^{\otimes s} \xrightarrow{m_{\mathrm{A}}^{s-1}} \mathrm{I} \xrightarrow{u} k\ .$$

Comme la transposée de m_{A} est Δ_{U}, on voit que $(\mathrm{I}^s)^{\perp}$ est le sous-espace vectoriel P_{s-1} formé des $u \in \mathrm{U}$ tels que $\Delta_{\mathrm{U}}^{s-1}(u)$ s'annule sur $\mathrm{I}^{\otimes s}$, i.e. notant $\overline{\Delta_{\mathrm{U}}^{s-1}}$ la composée de $\Delta_{\mathrm{U}}^{s-1}$ et de la projection $\pi^{\otimes s} : \mathrm{U}^{\otimes s} \to \mathrm{J}^{\otimes s}$, on obtient que

$$(\mathrm{I}^s)^{\perp} = \mathrm{P}_{s-1} = \operatorname{Ker} \overline{\Delta_{\mathrm{U}}^{s-1}}$$

(voir aussi $\mathrm{VII_B}$, 1.3.6). Donc, pour montrer l'assertion $(*)$, il faut montrer que l'application transposée $p_{\mathrm{U}} = {}^t p_{\mathrm{A}}$ applique P_{p-1} dans $\mathrm{I}^{\perp} = k1_{\mathrm{U}}$. Comme $p_{\mathrm{U}}(1_{\mathrm{U}}) = 1_{\mathrm{U}}$, il suffit de montrer l'assertion ci-dessous, où P_{p-1}^+ désigne $\mathrm{J} \cap \mathrm{P}_{p-1}$:

$$(**) \qquad p_{\mathrm{U}}(\mathrm{P}_{p-1}^+) = 0.$$

[85] N.D.E. : On a détaillé l'original dans le paragraphe ce qui suit.

D'autre part, on montre facilement, par récurrence sur s, que P^+_{s-1} est le sous-espace vectoriel de U engendré par les produits $x_1 \cdots x_t$, avec $1 \leqslant t \leqslant s-1$ et $x_i \in \mathrm{L}$ (cf. VII$_{\mathrm{B}}$ 4.3). Or, si $x_1, x_2, \ldots, x_t$ sont des éléments de L, on a :

$$p_{\mathrm{U}}(x_1 x_2 \cdots x_t) = m_{\mathrm{U}}^{p-1}\left(\prod_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{p} 1 \otimes \cdots \otimes \overset{\overset{i}{\downarrow}}{x_j} \otimes \cdots \otimes 1\right).$$

Il est clair que l'expression $\prod_j \sum_i 1\otimes\cdots\otimes x_j \otimes\cdots\otimes 1$ est une somme de p^t termes x_h indexés par les applications h de $\{1, \ldots, t\}$ dans $\{1, \ldots, p\}$. [86] Une telle application h définit une *partition ordonnée* $\mathfrak{p}_h$ de $\{1, \ldots, t\}$ en au plus p parts. En effet, notons $i_1 < \cdots < i_r$ les éléments de l'image de h et, pour $s = 1, \ldots, r$, posons $\mathrm{I}_s = h^{-1}(i_s)$ et $x_{\mathrm{I}_s} = \prod_{j \in \mathrm{I}_s} x_j$, le produit étant pris dans l'ordre croissant. Alors h correspond au p-tenseur

$$1 \otimes \cdots \otimes x_{\mathrm{I}_1} \otimes \cdots \otimes x_{\mathrm{I}_r} \otimes \cdots \otimes 1$$

(où chaque x_{I_s} est à la place i_s), et son image par m_{U}^p est le produit :

$$x_{\mathrm{I}_1} \otimes \cdots \otimes x_{\mathrm{I}_r}$$

qui ne dépend que de la partition ordonnée $\mathfrak{p} = (\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_r)$, et qu'on notera $x_{\mathfrak{p}}$. Pour $\mathfrak{p}$ fixé, $x_{\mathfrak{p}}$ est obtenu pour tous les choix de $i_1 < \cdots < i_r$ dans $\{1, \ldots, p\}$, et l'on obtient donc l'égalité

$$p_{\mathrm{U}}(x_1 x_2 \cdots x_t) = \sum_{\mathfrak{p}} \binom{p}{n(\mathfrak{p})} x_{\mathfrak{p}},$$

où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des partitions ordonnées de $\{1, \ldots, t\}$ en au plus p parts, et où $n(\mathfrak{p})$ désigne le nombre de parts de $\mathfrak{p}$. (On a $1 \leqslant n(\mathfrak{p}) \leqslant \min(t, p)$.)

475 Lorsque $t < p$, tous les termes $\binom{p}{n(\mathfrak{p})}$ sont donc nuls, de sorte que $p_{\mathrm{U}}(x_1 \cdots x_t) = 0$. Donc p_{U} s'annule sur P^+_{p-1}, ce qui prouve l'assertion $(**)$, et donc $(*)$, et achève la démonstration de 8.5.

Corollaire 8.5.2. — [87] *Soient* S *un schéma* réduit *et* G *un* S*-groupe fini localement libre de rang* n*. Alors* $n_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ *est le morphisme nul de* G.

En effet, soit S′ la somme des $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{S},\eta}$, pour η parcourant les points maximaux de S. Comme S est réduit, le morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est schématiquement dominant, et il en est de même du morphisme $f : \mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{G}$, puisque G est fini localement libre sur S (cf. EGA IV$_3$, 11.10.5). Comme $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$ affine, donc séparé, le lieu de coïncidence de n_{G} et du morphisme nul est un sous-schéma fermé de G, or il majore f d'après 8.5, donc égale G, i.e. n_{G} est le morphisme nul.

Remarque 8.5.3. — Signalons aussi que, d'après un théorème de P. Deligne (voir [**TO70**], p. 4), si G est un S-groupe *commutatif* fini localement libre de rang n sur une base S arbitraire, alors $n_{\mathrm{G}} = 0$.

[86] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, en remplaçant la notion de préordre par la notion équivalente de partition ordonnée.

[87] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire, signalé dans l'Exp. VIII, Remarque 7.3.1.

Bibliographie

[BAlg] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. I-III, Hermann, 1974, Chap. X, Masson, 1980.

[BAC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap. I-IV, Masson, 1985.

[BLie] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. I, Hermann, 1971.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[Ja03] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Academic Press 1987 ; 2nd edition, Amer. Math. Soc., 2003.

[TO70] J. Tate, F. Oort, *Groups schemes of prime order*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **3** (1970), 1-21.

EXPOSÉ $\mathrm{VII_B}$

ÉTUDE INFINITÉSIMALE DES SCHÉMAS EN GROUPES

par P. Gabriel

B) Groupes formels

L'étude des groupes formels est habituellement d'une simplicité extrême. Si cela 476
n'apparaît pas clairement dans les pages qui suivent, la responsabilité en incombe à un arithméticien, qui prétend connaître des groupes formels sur « autre chose que des corps ». (1) Nous avons donc déroulé pour les groupes formels « localement libres sur des limites projectives d'anneaux artiniens » les généralités qu'on énonce d'habitude pour les groupes formels définis sur un corps. Pour une étude plus détaillée de ces derniers, nous renvoyons au séminaire de géométrie algébrique 1964/65 de Heidelberg-Strasbourg. (2)

0. Rappels sur les anneaux et modules pseudocompacts

Ce paragraphe contient quelques préliminaires techniques ; nous y rappelons et complétons quelques résultats de [**CA**] (*Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 90, 1962).

0.1. Un anneau *pseudocompact* à gauche est un anneau topologique avec élément
unité, séparé et complet, qui possède une base de voisinages de 0 formée d'idéaux à 477
gauche $\mathfrak{l}$ de colongueur finie (i.e. $\mathrm{long}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\mathfrak{l}) < +\infty$). Nous allons supposer ici que A est commutatif, de sorte qu'il n'y a pas à distinguer « entre la gauche et la droite ». En particulier, les quotients $\mathrm{A}/\mathfrak{l}$ sont des anneaux artiniens et A s'identifie à la limite projective topologique de ces anneaux qu'on munit de la topologie discrète.

---

(1) N.D.E. : L'intérêt des groupes formels sur un anneau local noethérien complet apparaît, par exemple, dans les travaux de Lubin et Tate (cf. [**LT65**]). L'étude des groupes formels sur une base arbitraire, et des questions de relèvement et de déformation, en particulier pour les groupes de Barsotti-Tate (« groupes p-divisibles ») a donné lieu a une abondante littérature, cf. par exemple [**LT66, Ta67, Gr74, Me72, La75, Fo77, Il85, Br00**] ; en particulier, les résultats du présent exposé sont en grande partie repris dans le chapitre I de [**Fo77**].

(2) N.D.E. : Les éditeurs ont seulement trouvé un tel séminaire daté 1965/66 et intitulé « Groupes algébriques linéaires », où la notion de groupe formel n'apparaît pas ; voir par contre [**De72**].

Un anneau local noethérien complet $(\mathrm{A},\mathfrak{m})$ est évidemment pseudocompact [3].

0.1.1. — Tout idéal fermé I de A est l'intersection des idéaux ouverts qui le contiennent. [4] Tout idéal fermé maximal est donc ouvert. De plus, si $\mathfrak{l}$ est un idéal ouvert de A, les idéaux maximaux de $\mathrm{A}/\mathfrak{l}$ correspondent biunivoquement aux idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ qui contiennent $\mathfrak{l}$; ces derniers sont donc ouverts et fermés. Par conséquent, tout idéal fermé maximal est un idéal maximal *ouvert* (et donc fermé) ; la réciproque étant évidente. On notera $\Upsilon(\mathrm{A})$ l'ensemble de ces idéaux.

Si $\mathfrak{l}$ est un idéal ouvert de A et si $\mathfrak{m}\in\Upsilon(\mathrm{A})$, le localisé $(\mathrm{A}/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}}$ est donc un anneau local si $\mathfrak{m}$ contient $\mathfrak{l}$ et est nul sinon. Comme l'anneau $\mathrm{A}/\mathfrak{l}$ est artinien, il est produit direct d'un nombre fini d'anneaux locaux, ce qu'on peut écrire

$$\mathrm{A}/\mathfrak{l}\simeq\prod_{\mathfrak{m}\in\Upsilon(\mathrm{A})}(\mathrm{A}/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}}\ .$$

On tire de là des isomorphismes « canoniques »

$$\mathrm{A}\simeq\varprojlim_{\mathfrak{l}}(\mathrm{A}/\mathfrak{l})\simeq\varprojlim_{\mathfrak{l}}\prod_{\mathfrak{m}}(\mathrm{A}/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}}\simeq\prod_{\mathfrak{m}}\varprojlim_{\mathfrak{l}}(\mathrm{A}/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}}\simeq\prod_{\mathfrak{m}}\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}\ ,$$

où l'on a posé :

$$\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}=\varprojlim_{\mathfrak{l}}(\mathrm{A}/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}}\ .$$

Cette *composante locale* $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ est une limite projective filtrante d'anneaux locaux artiniens, munis de la topologie discrète ; c'est donc un anneau local qui est pseudocom-
478 pact pour la topologie de la limite projective. [5]

0.1.2. — Soit $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$ l'intersection des idéaux maximaux ouverts de A, c'est-à-dire le produit cartésien des idéaux $\mathfrak{m}\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ lorsqu'on identifie A à $\prod_{\mathfrak{m}}\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$. Pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de A, l'image de $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$ dans $\mathrm{A}/\mathfrak{l}$ est contenue dans le radical de $\mathrm{A}/\mathfrak{l}$. Une certaine puissance de cette image est donc nulle, de sorte que $\mathfrak{r}(\mathrm{A})^n$ est contenu dans $\mathfrak{l}$ lorsque n est assez grand. La suite des $\mathfrak{r}(\mathrm{A})^n$ tend donc vers 0.

Il en va de même de la suite des x^n, lorsque x appartient à $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$. Autrement dit, tout élément de $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$ est topologiquement nilpotent et la réciproque est claire. Il s'ensuit que la suite de terme général $1+x+\cdots+x^n$ est convergente et converge vers $1/(1-x)$ lorsque $x\in\mathfrak{r}(\mathrm{A})$. Cela montre que $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$ est le radical de Jacobson de A, c.-à-d., l'intersection de *tous* les idéaux maximaux de A (cf. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. 8, § 6, th. 1). [6]

---

[3]N.D.E. : (lorsqu'on le munit de la topologie $\mathfrak{m}$-adique)

[4]N.D.E. : En effet, si $x\notin\mathrm{I}$, il existe un idéal ouvert $\mathfrak{l}$ tel que $(x+\mathfrak{l})\cap\mathrm{I}=\varnothing$, alors $\mathrm{I}+\mathfrak{l}$ est un idéal ouvert ne contenant pas x. D'autre part, dans ce qui suit, on a explicité le fait que tout idéal « fermé maximal » est maximal et *ouvert*.

[5]N.D.E. : Remarquons que $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ est le *localisé* de A en l'idéal maximal $\mathfrak{m}$. En effet, l'élément unité $e_{\mathfrak{m}}$ de $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ est un idempotent de A n'appartenant pas à $\mathfrak{m}$, et comme $\mathrm{A}=\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}\times\mathrm{B}$, où $\mathrm{B}=\mathrm{A}(1-e_{\mathfrak{m}})$, alors $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ s'identifie au localisé $\mathrm{A}_{e_{\mathfrak{m}}}$ et donc aussi au localisé $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$, où $\mathrm{S}=\mathrm{A}-\mathfrak{m}$. D'autre part, comme $e_{\mathfrak{m}}(1-e_{\mathfrak{m}})=0$ alors $\mathfrak{m}$ contient $1-e_{\mathfrak{m}}$ donc aussi B et donc $\mathfrak{m}$ s'identifie à $\mathfrak{m}\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}\times\mathrm{B}$.

[6]N.D.E. : En effet, soit $x\in\mathfrak{r}(\mathrm{A})$; si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal ne contenant pas x, il existe $y\in\mathrm{A}$ tel que $1-xy\in\mathfrak{m}$, or $xy\in\mathfrak{r}(\mathrm{A})$ donc $1-xy$ est inversible, d'où une contradiction. Notons la conséquence suivante : si $\Upsilon(\mathrm{A})$ est un ensemble *fini* $\{\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_r\}$, les $\mathfrak{m}_i$ sont *tous* les idéaux maximaux de A.

Remarques. — [7] a) Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier *ouvert* de A alors, comme $A/\mathfrak{p}$ est artinien, $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal. Par conséquent, $\Upsilon(A)$ égale l'ensemble des idéaux *premiers ouverts* de A.

b) Chaque $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ est un *idéal de définition* de $A_{\mathfrak{m}}$, i.e. un idéal *ouvert* I tel que la suite des I^n tende vers 0 (cf. EGA 0_I, 7.1.2). Par conséquent, $\mathrm{Spec}(A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})$, muni de l'anneau topologique $A_{\mathfrak{m}}$, est un schéma *formel affine* au sens de EGA I, 10.1.2.

c) L'anneau topologique A est *admissible* au sens de EGA 0_I, 7.1.2, si et seulement si $\mathfrak{r}(A)$ est *ouvert* (donc un idéal de définition), et ceci a lieu si et seulement si $\Upsilon(A)$ est *fini*. Dans ce cas, le schéma formel affine $\mathrm{Spf}(A) = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{r}(A))$ (cf. EGA I, 10.1.2) a $\Upsilon(A)$, muni de la topologie discrète, comme espace sous-jacent, et le faisceau structural a pour anneau de sections sur une partie E de $\Upsilon(A)$ le produit $\prod_{\mathfrak{m}\in E} A_{\mathfrak{m}}$.

d) Soit A un anneau pseudocompact arbitraire. En 1.1 plus bas, l'espace $\Upsilon(A)$ est muni de la topologie discrète et du faisceau d'anneaux dont l'anneau des sections sur toute partie E est $\prod_{\mathfrak{m}\in E} A_{\mathfrak{m}}$. D'après b), tout point admet alors un voisinage ouvert qui est un schéma formel affine, donc ceci définit un *schéma formel* (EGA I, 10.4.2), qu'on notera $\mathrm{Spf}(A)$. (Pour que ce schéma formel soit affine, il faut qu'il soit quasi-compact, donc que $\Upsilon(A)$ soit fini, et en ce cas $\mathrm{Spf}(A)$ coïncide avec la définition de EGA I, 10.1.2).

0.1.3. — Si A et B sont deux anneaux pseudocompacts, un *homomorphisme* de A dans B est, par définition, une application *continue* compatible avec l'addition, la multiplication et les éléments unité. Un tel homomorphisme envoie un élément topologiquement nilpotent de A sur un élément topologiquement nilpotent de B ; il applique donc le radical $\mathfrak{r}(A)$ de A dans le radical $\mathfrak{r}(B)$ de B.

0.2. Soit A un anneau pseudocompact (commutatif). Un A-*module pseudocompact* M est un A-module topologique, séparé et complet, qui possède une base de voisinages de 0 formée de sous-modules M′ tels que M/M′ soit de longueur finie sur A.

Si M et N sont deux A-modules pseudocompacts, un *morphisme* de M dans N est par définition une application A-linéaire continue. On notera $\mathrm{Hom}_c(M, N)$ le groupe **479**
de ces morphismes.

Proposition 0.2.B. — [8] (i) *Les* A-*modules pseudocompacts forment une catégorie* abélienne*, qu'on notera* $\mathbf{PC}(A)$. (*En particulier, pour tout morphisme* $f : M \to N$, $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-module complet, donc* fermé *dans* N).

(ii) *Les* A-*modules pseudocompacts de longueur finie* (*dont la topologie est donc discrète*) *forment un système de cogénérateurs de* $\mathbf{PC}(A)$.

[7]N.D.E. : On a ajouté ces remarques, afin de pouvoir comparer la définition du *spectre formel* Spf(A) donnée en 1.1, avec celles de EGA I, 10.1.2 et 10.4.2.

[8]N.D.E. : On a mis en évidence les résultats de ce paragraphe dans la proposition qui suit, et l'on a indiqué ensuite les étapes de la démonstration, cf. [**CA**], § IV.3 ou [**DG70**], § V.2.

(iii) *Les produits infinis et limites projectives filtrantes sont exacts, c.-à-d.,* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ *vérifie l'axiome* (AB5*). [9]

Pour la commodité du lecteur, indiquons brièvement les étapes de la démonstration. D'abord, on a le lemme suivant ([**CA**] § IV.3, Lemme 1 ; pour la démonstration, voir [**BEns**], III, § 7.4, th. 1 et exemple 2) :

Lemme 0.2.C. — *Soient* B *un anneau,* I *un ensemble ordonné* filtrant, (M_i) *et* (N_i) *deux systèmes projectifs de* B*-modules à gauche, indexés par* I. *Soit* (s_i) *un morphisme de systèmes projectifs* $(\mathrm{M}_i) \to (\mathrm{N}_i)$*, tel que* s_i *soit* surjectif et de noyau artinien *pour tout* i*. Alors, l'application*

$$\varprojlim s_i : \quad \varprojlim \mathrm{M}_i \longrightarrow \varprojlim \mathrm{N}_i$$

est surjective.

Corollaire 0.2.D ([**CA**] § IV.3, Prop. 10 & 11). — *Soit* M *un* A*-module pseudocompact.*

(i) *Soit* K *un sous-module fermé de* M. *Alors* M/K*, muni de la topologie quotient, est un* A*-module pseudo-compact.*

(ii) *Soit* (M_i) *une famille filtrante décroissante de sous-modules fermés de* M.

(a) *L'application canonique* $\mathrm{M} \to \varprojlim \mathrm{M}/\mathrm{M}_i$ *est* surjective *et a pour noyau* $\bigcap_i \mathrm{M}_i$.

(b) *Pour tout sous-module* fermé N *de* M*, on a* $\mathrm{N} + \bigcap_i \mathrm{M}_i = \bigcap_i (\mathrm{N} + \mathrm{M}_i)$.

Démonstration. Soit (L_j) la famille filtrante décroissante des sous-modules ouverts de M. On munit M/K de la topologie quotient, i.e. une base de voisinages de 0 est formée par les sous-modules ouverts $(\mathrm{K}+\mathrm{L}_j)/\mathrm{K}$. Comme K est fermé, il est égal à l'intersection des $\mathrm{K}+\mathrm{L}_j$, donc l'application

$$\tau : \quad \mathrm{M}/\mathrm{K} \longrightarrow \varprojlim_j \mathrm{M}/(\mathrm{K}+\mathrm{L}_j)$$

est injective. Elle est également ouverte, le terme de droite étant la limite projective des modules discrets $\mathrm{M}/(\mathrm{K}+\mathrm{L}_j)$. De plus, pour chaque j, l'application $t_j : \mathrm{M}/\mathrm{L}_j \to \mathrm{M}/(\mathrm{K}+\mathrm{L}_j)$ est surjective, de noyau artinien, donc d'après le lemme précédent, l'application t dans le diagramme commutatif ci-dessous est surjective :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M} \arrow[r, "p", "\sim"'] \arrow[d] & \varprojlim_j \mathrm{M}/\mathrm{L}_j \arrow[d, "t"] \\
\mathrm{M}/\mathrm{K} \arrow[r, "\tau"] & \varprojlim_j \mathrm{M}/(\mathrm{K}+\mathrm{L}_j).
\end{tikzcd}$$

Comme p est un isomorphisme puisque M est complet, il en résulte que τ est surjectif, donc est un isomorphisme. Ceci prouve (i).

[9] N.D.E. : cf. [**Gr57**], I § 1.5 et Prop. 1.8 ; on peut aussi consulter, par exemple, [**Po73**], § 2.8 ou [**We95**], Append. A.4.

Montrons (ii) (a). D'après ce qui précède, on a pour tout i un isomorphisme $\mathrm{M}/\mathrm{M}_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_j \mathrm{M}/(\mathrm{M}_i + \mathrm{L}_j)$, et donc les deux flèches horizontales dans le diagramme commutatif ci-dessous sont des isomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M} \arrow[r, "p", "\sim"'] \arrow[d, "g"] & \varprojlim_j \mathrm{M}/\mathrm{L}_j \arrow[d, "s"] \\
\varprojlim_i \mathrm{M}/\mathrm{M}_i \arrow[r, "\sim"'] & \varprojlim_{i,j} \mathrm{M}/(\mathrm{M}_i + \mathrm{L}_j).
\end{tikzcd}$$

De plus, pour chaque j, la famille de sous-modules $(\mathrm{M}_i+\mathrm{L}_j)/\mathrm{L}_j$ admet un plus petit élément, puisque M/L_j est artinien, donc le morphisme $s_j : \mathrm{M}/\mathrm{L}_j \to \varprojlim_i \mathrm{M}/(\mathrm{L}_j + \mathrm{M}_i)$ est surjectif ; donc, d'après le lemme précédent, s est surjectif. Il en résulte que g est surjectif. Enfin, le noyau de g est la limite projective des M_i, i.e. leur intersection. Ceci prouve le point (a).

Déduisons-en le point (b). Comme N est un sous-module fermé (donc séparé et complet), c'est un module pseudocompact pour la topologie induite par celle de M. Donc, d'après (a), les morphismes f et g dans le diagramme commutatif et exact ci-dessous sont surjectifs :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{N} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \mathrm{M}/\mathrm{N} \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varprojlim_i \mathrm{N}/(\mathrm{N}\cap \mathrm{M}_i) \arrow[r] & \varprojlim_i \mathrm{M}/\mathrm{M}_i \arrow[r] & \varprojlim_i \mathrm{M}/(\mathrm{N}+\mathrm{M}_i) & .
\end{tikzcd}$$

Alors, d'après le « lemme du serpent », la suite $0 \to \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} g \to \operatorname{Ker} h \to 0$ est exacte, et l'égalité $\mathrm{N} + \bigcap_i \mathrm{M}_i = \bigcap_i (\mathrm{N} + \mathrm{M}_i)$ en résulte.

On peut maintenant démontrer la proposition 0.2.B. Soit $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un morphisme de A-modules pseudocompacts. Alors $\mathrm{K} = \operatorname{Ker}(f)$ est un sous-module fermé de M, donc séparé et complet, donc K est un module pseudocompact pour la topologie induite par celle de M. D'après 0.2.D (i), M/K muni de la topologie quotient est pseudocompact.

Montrons que le morphisme continu bijectif $\mathrm{M}/\mathrm{K} \to \operatorname{Im}(f)$ est bicontinu. Identifiant M/K à $\operatorname{Im}(f)$, il s'agit de montrer que la topologie quotient $\mathcal{Q}$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}$ induite par celle de N. Notons (L_j) (resp. (N_i)) l'ensemble filtrant décroissant des sous-modules ouverts de M (resp. N) et posons $\mathrm{N}'_i = \mathrm{N}_i \cap \operatorname{Im}(f)$. Soit $\mathrm{P} = (\mathrm{K} + \mathrm{L}_j)/\mathrm{K}$ un sous-module de M/K ouvert pour $\mathcal{Q}$. Comme $\mathrm{M}/(\mathrm{K} + \mathrm{L}_j)$ est artinien, la famille $\mathrm{N}'_i + \mathrm{P}$ a un plus petit élément $\mathrm{N}'_{i_0} + \mathrm{P}$. Comme les N'_i sont ouverts, donc fermés, pour $\mathcal{T}$ donc aussi pour $\mathcal{Q}$, il résulte de 0.2.D (ii) (b) que

$$\mathrm{N}'_{i_0} + \mathrm{P} = \bigcap_i (\mathrm{N}'_i + \mathrm{P}) = \mathrm{P} + \bigcap_i \mathrm{N}'_i = \mathrm{P},$$

d'où $\mathrm{N}'_{i_0} \subset \mathrm{P}$. Ceci montre que P est ouvert pour $\mathcal{T}$, et $\mathrm{M}/\mathrm{K} \to \operatorname{Im}(f)$ est donc un isomorphisme de modules pseudocompacts.

En particulier, $\operatorname{Im}(f)$ est complet pour $\mathcal{T}$, donc *fermé* dans N. Alors, d'après 0.2.D (i) à nouveau, $\operatorname{Coker}(f)$ muni de la topologie quotient est pseudocompact. Ceci prouve que $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ est une catégorie abélienne.

D'autre part, les limites projectives arbitraires existent dans $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$: si (M_i) est un système projectif de modules pseudocompacts, la limite projective des M_i a pour module sous-jacent la limite projective des modules sous-jacents, pour topologie celle de la limite projective. De plus, si l'on a une famille de suites exactes dans $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}_i \longrightarrow \mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{Q}_i \longrightarrow 0$$

alors la suite $0 \to \prod_i \mathrm{K}_i \to \prod_i \mathrm{M}_i \to \prod_i \mathrm{Q}_i \to 0$ est exacte. Le point (iii) de 0.2.B en découle, car dans toute catégorie abélienne où les produits arbitraires existent, les conditions (a) et (b) de 0.2.D sont équivalentes et équivalent à l'exactitude des limites projectives filtrantes (cf. [**Mi65**], III 1.2–1.9 ou [**Po73**], Chap. 2, Th. 8.6).

Enfin, tout module pseudocompact M est un sous-module du produit $\prod_{\mathrm{L}} \mathrm{M}/\mathrm{L}$, où L parcourt les sous-modules ouverts de M, donc les objets de longueur finie forment un système de cogénérateurs de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$. (De plus, tout objet de longueur n est isomorphe à un quotient A^n/L, où L est un sous-module ouvert de A^n de colongueur n ; ces quotients forment donc un *ensemble* de cogénérateurs.) Ceci achève la démonstration de 0.2.B.

(10) Soient (**Ab**) la catégorie des groupes abéliens et $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ formée des objets *de longueur finie*. Pour tout objet M de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$, notons $\mathbf{h}_c^{\mathrm{M}}$ le foncteur :

$$\mathbf{LF}(\mathrm{A}) \longrightarrow (\mathbf{Ab}), \qquad \mathrm{N} \mapsto \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

D'après [**CA**], § II.4, th. 1, lemme 4 et cor. 1, on a les résultats suivants. (11)

Proposition 0.2.E. — *Le foncteur* $\mathrm{M} \mapsto \mathbf{h}_c^{\mathrm{M}}$ *est une* anti-équivalence *de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ *sur la catégorie* $\mathbf{Lex}(\mathbf{LF}(\mathrm{A}), (\mathbf{Ab}))$ *des foncteurs exacts à gauche* $\mathbf{LF}(\mathrm{A}) \to (\mathbf{Ab})$.

Corollaire 0.2.F. — (i) *Un objet* P *de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ *est* projectif *si et seulement si le foncteur* $\mathbf{h}_c^{\mathrm{P}}$ *est exact (c.-à-d., si et seulement si le foncteur* $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{P}, -)$ *est exact sur* $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$*).*

(ii) *Soit* (M_i) *un système projectif filtrant* (12) *d'objets de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$*. Pour tout objet* N *de* $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$*, on a un isomorphisme fonctoriel en* N *:*

$$\mathrm{Hom}_c(\varprojlim \mathrm{M}_i, \mathrm{N}) \cong \varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i, \mathrm{N}).$$

(iii) *Toute limite projective filtrante et tout produit* (12) *d'objets projectifs de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ *est un objet projectif de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$.

Enfin, on déduit de 0.2.F le

Corollaire 0.2.G. — *Soit* $(\mathrm{M}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille d'objets de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$*. Alors* $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$ *est projectif si et seulement si chaque* M_i *l'est.*

(10) N.D.E. : On a inséré dans ce paragraphe la proposition 0.2.E et le corollaire 0.2.F, qui seront utiles en 0.2.2. (Dans l'original, ces résultats figuraient en 0.3).

(11) N.D.E. : En effet, $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ a un ensemble de cogénérateurs artiniens, les limites projectives filtrantes y sont exactes, et $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$ est la sous-catégorie des objets artiniens. La catégorie duale $\mathbf{PC}(\mathrm{A})^0$ a donc un ensemble de générateurs noethériens, et les limites inductives filtrantes y sont exactes. D'après la démonstration de [**CA**] § II.4, th. 1, le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, -)$ est une anti-équivalence de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ sur $\mathbf{Lex}(\mathbf{LF}(\mathrm{A}), (\mathbf{Ab}))$. De même, lemme 4 et cor. 1 de *loc. cit.* énoncent des résultats « *duaux* » de ceux du corollaire 0.2.F. Pour une démonstration « directe », voir [**DG70**], § V.2, th. 3.1, lemme 3.5, cor. 3.3 & 3.4.

(12) N.D.E. : Comme tout produit infini est une limite projective filtrante de produits finis, tout foncteur additif qui commute aux limites projectives filtrantes commute aussi aux produits infinis.

En effet, pour tout $\mathrm{N} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{LF}(\mathrm{A})$, on a $\mathrm{Hom}_c(\prod_i \mathrm{M}_i, \mathrm{N}) \cong \bigoplus_i \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i, \mathrm{N})$.

0.2.1. — Chaque composante locale $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ de A est un facteur direct de A, donc un objet projectif de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ (A est manifestement projectif). De plus, $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ a $\mathrm{S}_{\mathfrak{m}} = \mathrm{A}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ pour unique quotient simple, donc est indécomposable. D'autre part, tout objet simple de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ est isomorphe à un unique $\mathrm{S}_{\mathfrak{m}}$. D'après [**CA**], IV §3, cor. 1 du th. 3, [(13)] on a donc :

Proposition. — (i) *Tout objet projectif de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ *est produit direct d'objets projectifs indécomposables, uniquement déterminés* (*à isomorphisme près*).

(ii) *Tout objet projectif indécomposable est isomorphe à un unique* $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m} \in \Upsilon(\mathrm{A})$).

Définition. — Un A-module pseudocompact M est dit *topologiquement libre* s'il est isomorphe au produit d'une famille (A_i) d'exemplaires de A.

Dans ce cas, une famille (m_i) d'éléments de M est appelée une *pseudobase* de M si les applications A-linéaires de A_i dans M qui envoient l'élément unité de A_i sur m_i se prolongent en un isomorphisme de $\prod_i \mathrm{A}_i$ sur M.

0.2.2. — [(14)] Si M est un A-module pseudocompact, on notera $\mathrm{M}^\dagger$ le A-module (sans topologie) $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, \mathrm{A})$.

Réciproquement, si N est un A-module, on note $\mathrm{N}^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{A})$ son dual, muni de la topologie de la convergence ponctuelle, c.-à-d., une base de voisinages de 0 dans N^* est formée par les sous-modules suivants, où $x \in \mathrm{N}$ et $\mathfrak{l}$ est un idéal ouvert de A :

$$\mathscr{V}(x, \mathfrak{l}) = \{f \in \mathrm{N}^* \mid f(x) \in \mathfrak{l}\}.$$

Ceci fait de N^* un A-module pseudocompact. En effet, on voit d'abord que si $\mathrm{N} = \mathrm{A}$, alors $\mathrm{N}^* = \mathrm{A}$, muni de sa topologie d'anneau pseudo-compact, et si N est un module libre $\mathrm{A}^{(\mathrm{I})}$, alors N^* est le produit A^{I}, muni de la topologie produit. D'autre part, pour tout morphisme $\phi : \mathrm{N}_1 \to \mathrm{N}_2$, le morphisme transposé ${}^t\phi : \mathrm{N}_2^* \to \mathrm{N}_1^*$ est continu, puisque l'image inverse par ${}^t\phi$ d'un sous-module $\mathscr{V}(x_1, \mathfrak{l})$ de N_1^* n'est autre que le sous-module $\mathscr{V}(\phi(x_1), \mathfrak{l})$ de N_2^*. Alors, pour N arbitraire, prenant une présentation

$$\mathrm{A}^{(\mathrm{J})} \xrightarrow{\ \phi\ } \mathrm{A}^{(\mathrm{I})} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathrm{N} \longrightarrow 0\ ,$$

on voit que N^* est le noyau du morphisme continu ${}^t\phi : \mathrm{A}^{\mathrm{I}} \to \mathrm{A}^{\mathrm{J}}$, donc N^* est pseudocompact.

Lorsque A est artinien (auquel cas on peut prendre ci-dessus $\mathfrak{l} = 0$), on déduit de 0.2.F :

Proposition. — *Lorsque* A *est* artinien, *les foncteurs* **480**

$$\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}^\dagger \qquad et \qquad \mathrm{Q} \mapsto \mathrm{Q}^*\ ,$$

[(13)] N.D.E. : Ceci renvoie aux énoncés « duaux », établis dans *loc. cit.*, §2, Th. 2 et §1, Prop. 2 ; pour une démonstration « directe », voir [**DG70**], V, §2, Th. 4.5 et Exemple 4.6 b).

[(14)] N.D.E. : On a détaillé les résultats de ce paragraphe, qui jouent un rôle important dans la suite (cf. 1.2.3, 1.3.5, 2.2.1, etc.).

où P (*resp.* Q) *est un objet projectif de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ (*resp. un* A*-module projectif*)*, établissent une* anti-équivalence *entre la catégorie des* A*-modules pseudocompacts projectifs et celle des* A*-modules projectifs.* [15]

En particulier, *lorsque* A *est un corps* k, $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}^{\dagger}$ est une anti-équivalence de la catégorie de tous les k-modules pseudocompacts (on parle aussi de k*-espaces vectoriels linéairement compacts*) sur celle des k-espaces vectoriels. [16]

0.3. [17] Soient L et M deux A-modules pseudocompacts. Le foncteur

$$\mathbf{LF}(\mathrm{A}) \longrightarrow (\mathbf{Ab}), \qquad \mathrm{N} \mapsto \mathrm{Bil}_c(\mathrm{L} \times \mathrm{M}, \mathrm{N}),$$

où $\mathrm{Bil}_c(\mathrm{L} \times \mathrm{M}, \mathrm{N})$ désigne le groupe abélien des applications A-bilinéaires continues de $\mathrm{L} \times \mathrm{M}$ dans N, est exact à gauche.

D'après 0.2.E, il existe donc un A-module pseudocompact $\mathrm{L} \,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\, \mathrm{M}$, unique à isomorphisme unique près, qui représente ce foncteur, i.e. tel qu'on ait un isomorphisme fonctoriel, pour tout objet N de $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$:

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L} \,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\, \mathrm{M}, \mathrm{N}) \simeq \mathrm{Bil}_c(\mathrm{L} \times \mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

De plus, $\mathrm{L} \,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\, \mathrm{M}$ s'identifie à la limite projective $\mathrm{P} = \widehat{\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}}$ des A-modules (discrets) $(\mathrm{L}/\mathrm{L}') \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{M}/\mathrm{M}')$, où L' et M' parcourent respectivement les sous-modules ouverts de L et de M.

En effet, soit $\varphi : \mathrm{L} \times \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application bilinéaire continue de $\mathrm{L} \times \mathrm{M}$ dans un A-module (discret) de longueur finie N. D'après le lemme 0.3.1 ci-dessous, il existe des sous-modules ouverts L' et M' de L et M tels que $\varphi(\mathrm{L}' \times \mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{L} \times \mathrm{M}') = \{0\}$.
481 Cela signifie que l'application $\overline{\varphi} : \mathrm{L} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, qui est induite par φ, est de la forme $\varphi' \circ p$, où p est la projection canonique de $\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ sur $(\mathrm{L}/\mathrm{L}') \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{M}/\mathrm{M}')$. Si l'on note $\widehat{\varphi}$ la composée :

$$\mathrm{P} \longrightarrow (\mathrm{L}/\mathrm{L}') \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{M}/\mathrm{M}') \xrightarrow{\varphi'} \mathrm{N},$$

on voit que l'application $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ est une bijection fonctorielle de $\mathrm{Bil}_c(\mathrm{L} \times \mathrm{M}, \mathrm{N})$ sur $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{P}, \mathrm{N})$, d'où $\mathrm{P} \cong \mathrm{L} \,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\, \mathrm{M}$.

Le module pseudocompact $\mathrm{L} \,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\, \mathrm{M}$ est donc le séparé complété de $\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$, pour la topologie linéaire définie par les noyaux des projections canoniques de $\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ sur $(\mathrm{L}/\mathrm{L}') \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{M}/\mathrm{M}')$, et on l'appellera le *produit tensoriel complété* de L et M.

Si x et y appartiennent à L et M, l'image de $x \otimes_{\mathrm{A}} y$ dans $\mathrm{L} \,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\, \mathrm{M}$ sera notée $x \,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\, y$.

0.3.1. Lemme. — *Soient* L, M *et* N *des* A*-modules pseudocompacts,* N *étant de longueur finie. Si* $\varphi : \mathrm{L} \times \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *est une application* A*-bilinéaire continue, il existe des sous-modules ouverts* L' *et* M' *de* L *et* M *tels que* $\varphi(\mathrm{L}' \times \mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{L} \times \mathrm{M}') = \{0\}$.

---

[15] N.D.E. : Rappelons d'autre part que, sur un anneau *artinien*, un module est projectif si, et seulement si, il est plat, voir par exemple VI_{B}, N.D.E. (54) ou 0.3.7 plus loin.

[16] N.D.E. : On notera que la *somme directe dans* $\mathbf{PC}(k)$ d'une famille $(\mathrm{V}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de k-espaces vectoriels linéairement compacts est $(\prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{V}_i^{\dagger})^*$.

[17] N.D.E. : On a modifié ce paragraphe, en tenant compte des ajouts faits en 0.2.

En effet, $\varphi^{-1}(0)$ est un voisinage ouvert de $(0,0)$, donc contient un ouvert de la forme $\mathrm{L}_1 \times \mathrm{M}_1$, où L_1 et M_1 sont des sous-modules ouverts de L et M. Comme L/L_1 est de longueur finie, il existe des éléments $x_1, \dots, x_r$ de L tels que $\mathrm{L}_1 + \mathrm{A}x_1 + \cdots + \mathrm{A}x_r = \mathrm{L}$. Si $\mathrm{M}' \subset \mathrm{M}_1$ est « assez petit », on a aussi $\varphi(x_i, \mathrm{M}') = 0$ pour tout i, parce que l'application $y \mapsto \varphi(x_i, y)$ est continue ; on tire de là $\varphi(\mathrm{L}, \mathrm{M}') = \{0\}$; de même, $\varphi(\mathrm{L}', \mathrm{M}) = \{0\}$ si L' est assez petit.

Corollaire 0.3.1.1. — [18] *Soit* M *un* A*-module pseudocompact.*

(i) *Pour tout sous-module ouvert* M'*, il existe un idéal ouvert* $\mathfrak{l}$ *de* A *tel que* $\overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}} \subset \mathrm{M}'$.

(ii) *Par conséquent,* $\mathrm{M} \simeq \varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathrm{M}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}}$*, où* $\mathfrak{l}$ *parcourt le système projectif filtrant des idéaux ouverts de* A *et chaque* $\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}}$ *est muni de la topologie quotient* (*qui en fait un module pseudocompact, cf.* 0.2.D).

En effet, considérons l'application $\varphi : \mathrm{A} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}/\mathrm{M}'$, $(a,m) \mapsto am + \mathrm{M}'$; d'après 0.3.1 il existe un idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de A tel que $\mathfrak{l}\mathrm{M} \subset \mathrm{M}'$ et comme M' est aussi fermé, il contient aussi $\overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}}$. Comme l'intersection des sous-modules ouverts de M est nulle, on a donc $\bigcap_{\mathfrak{l}} \overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}} = (0)$. D'autre part, d'après 0.2.D, l'application $\phi : \mathrm{M} \to \varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathrm{M}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}}$ est surjective ; d'après (la démonstration de) 0.2.B, ϕ induit donc un isomorphisme $\mathrm{M}/\operatorname{Ker}(\phi) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathrm{M}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}}$, or on vient de voir que $\operatorname{Ker}(\phi) = \bigcap_{\mathfrak{l}} \overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}}$ est nul.

Remarque 0.3.1.2. — [19] Le produit tensoriel complété vérifie la condition usuelle d'associativité : si L, M, P sont des A-modules pseudocompacts, on a un isomorphisme canonique
$$(\mathrm{L} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{M}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{P} \simeq \mathrm{L} \mathbin{\widehat{\otimes}} (\mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{P});$$
en effet, ces deux objets représentent le foncteur qui associe à tout objet N de $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$ le groupe abélien des applications A-trilinéaires continues de $\mathrm{L} \times \mathrm{M} \times \mathrm{P}$ dans N.

0.3.2. — Soient $\mathrm{L}' \xrightarrow{f} \mathrm{L} \xrightarrow{g} \mathrm{L}'' \to 0$ une suite exacte et M un objet de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$. Il est clair que pour tout objet N de $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$, les suites induites :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Bil}_c(\mathrm{L}'' \times \mathrm{M}, \mathrm{N}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Bil}_c(\mathrm{L} \times \mathrm{M}, \mathrm{N}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Bil}_c(\mathrm{L}' \times \mathrm{M}, \mathrm{N}) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}'' \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{M}, \mathrm{N}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{M}, \mathrm{N}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}' \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{M}, \mathrm{N})
\end{tikzcd}$$

sont exactes. D'après 0.2.E, ceci équivaut à dire que la suite **482**

$$(*) \qquad \mathrm{L}' \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \xrightarrow{f \widehat{\otimes} \mathrm{M}} \mathrm{L} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \xrightarrow{g \widehat{\otimes} \mathrm{M}} \mathrm{L}'' \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \longrightarrow 0$$

est exacte. Donc :

Corollaire. — *Pour tout* A*-module pseudocompact* M*, le foncteur* $- \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ *est exact à droite.*

---

[18] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire.

[19] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

Prenons en particulier pour L l'anneau A, pour f l'inclusion d'un idéal fermé $\mathfrak{a}$ dans A, pour g la projection canonique de A sur $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$. On peut alors identifier $\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ à M au moyen de l'application $x\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} m \mapsto x\,m$. Comme l'image de $\mathfrak{a}\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ est fermée dans M (cf. 0.2.B) et que l'image de $\mathfrak{a}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ est partout dense dans $\mathfrak{a}\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$, l'image de $f\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ n'est autre que l'adhérence $\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}}$ de $\mathfrak{a}\mathrm{M}$ dans M. La suite exacte $(*)$ entraîne donc l'isomorphisme :

$$(\mathrm{A}/\mathfrak{a})\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{M} \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}/\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}}.$$

0.3.3. Lemme de Nakayama. — *Soient* A *un anneau pseudocompact,* M *un* A-*module pseudocompact et* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* A *contenu dans le radical* $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$. *L'égalité* $\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}}=\mathrm{M}$ *entraîne alors* $\mathrm{M}=0$.

En effet, supposons $\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}}=\mathrm{M}$. [20] Soient M' un sous-module ouvert de M et M'' le quotient M/M'. Comme M'' est discret, $\mathfrak{a}\mathrm{M}''$ est fermé dans M'', donc égal à $\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}''}$. D'après 0.3.2, l'application canonique de $\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}}$ dans $\mathrm{M}''/\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}''}$ est surjective, de sorte qu'on a $\mathfrak{a}\mathrm{M}''=\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}''}=\mathrm{M}''$. Puisque M'' est un A-module de type fini et $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{r}(\mathrm{A})$, ceci entraîne $\mathrm{M}''=0$, d'après le lemme de Nakayama usuel. Par conséquent, tout sous-module ouvert M' de M est égal à M, donc M est nul [21].

483 ***0.3.4***. — On tire du lemme de Nakayama les conséquences habituelles :

Corollaire. — *Soient* $\mathfrak{a}$ *un idéal fermé contenu dans* $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$ *et* $f:\mathrm{M}\to\mathrm{N}$ *un morphisme de* A-*modules pseudocompacts.*

(i) f *est surjectif si l'application induite* $f':\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}}\to\mathrm{N}/\overline{\mathfrak{a}\mathrm{N}}$ *l'est.* [22]

(ii) *Si* N *est projectif,* f *est inversible si* f' *l'est.*

En effet, (i) résulte du lemme 0.3.3 appliqué à $\operatorname{Coker} f$. Pour (ii), supposons f' inversible. Alors, d'après (i), f est surjectif, donc possède une section ; on applique alors 0.3.3 à $\operatorname{Ker} f$.

Lorsque A est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, on peut aussi déduire de 0.3.3 le *théorème d'échange* qui suit :

Théorème. — *Soient* A *un anneau pseudocompact* local, $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal,* M *un* A-*module topologiquement libre de pseudobase* $(m_i)_{i\in\mathrm{I}}$ (0.2.1) *et* N *un facteur direct* (*fermé*) *de* M. *Il existe une pseudobase de* M *formée d'éléments de* N *et de certains* m_i.

En effet, cela est clair lorsque A est un corps (se servir alors de la dualité de 0.2.2 et appliquer le théorème d'échange habituel) ; par conséquent, $\mathrm{N}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{N}}$ [23] a pour supplémentaire un module topologiquement libre sur $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$ de pseudobase $(\overline{m}_i)_{i\in\mathrm{J}}$, où $\overline{m}_i$ est l'image de m_i dans $\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{M}}$ et J une partie de I. Si P désigne le produit direct

[20] N.D.E. : Quitte à remplacer $\mathfrak{a}$ par son adhérence, on peut supposer $\mathfrak{a}$ *fermé.*

[21] N.D.E. : puisqu'égal à la limite projective des $\mathrm{M}/\mathrm{M}'=0$.

[22] N.D.E. : Par conséquent, tout A-module pseudocompact est quotient d'un A-module topologiquement libre (on se ramène d'abord au cas où A est local), cf. la preuve de 0.3.7.

[23] N.D.E. : On a corrigé $\mathrm{N}/\mathfrak{m}\mathrm{N}$ en $\mathrm{N}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{N}}$, et de même pour $\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{M}}$ ci-dessous.

$\prod_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{A}m_i$, l'application canonique de $\mathrm{N}\oplus\mathrm{P}$ dans M est « bijective modulo $\mathfrak{m}$ » ; elle est donc bijective d'après ce qui précède (pour une autre preuve voir [**CA**], § IV.2, prop. 8).

0.3.5. — Considérons maintenant trois A-modules pseudocompacts L, M et N, où N est de longueur finie. Munissant le A-module $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M},\mathrm{N})$ de la topologie discrète, tout élément ψ de $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M},\mathrm{N}))$ définit une application bilinéaire continue $\psi' : (\ell, m)\mapsto \psi(\ell)(m)$ de $\mathrm{L}\times\mathrm{M}$ dans N. On obtient ainsi un isomorphisme naturel **484**

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M},\mathrm{N})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{M},\mathrm{N}), \tag{1}$$

donc une autre caractérisation de $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M},\mathrm{N})$, qu'on va utiliser lorsque M est la limite projective d'un système projectif filtrant de A-modules pseudocompacts M_i. Alors, d'après (1) et 0.2.F (ii), on a des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\varprojlim \mathrm{M}_i,\mathrm{N}) &\simeq \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\mathrm{Hom}_c(\varprojlim \mathrm{M}_i,\mathrm{N}))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i,\mathrm{N})).\end{aligned} \tag{2}$$

De plus, comme le module $\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i,\mathrm{N})$ est discret, toute application continue de source L se factorise par un quotient de longueur finie de L. Par conséquent, l'application naturelle ci-dessous est un isomorphisme :

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i,\mathrm{N})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i,\mathrm{N})). \tag{3}$$

Enfin, d'après (1) et 0.2.F (ii) à nouveau, on a des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned}\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i,\mathrm{N})) &\simeq \varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}_i,\mathrm{N})\\ &\simeq \mathrm{Hom}_c(\varprojlim(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}_i),\mathrm{N}).\end{aligned} \tag{4}$$

Combinant les isomorphismes (2), (3), (4), on obtient :

Proposition. — *Soit* (M_i) *un système projectif filtrant d'objets de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$*, et soit* L (*resp.* N) *un objet de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ (*resp.* $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$)*. On a un isomorphisme fonctoriel en* N *:*

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\varprojlim \mathrm{M}_i,\mathrm{N}) \simeq \mathrm{Hom}_c(\varprojlim(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}_i),\mathrm{N}),$$

et donc un isomorphisme :

$$\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\varprojlim \mathrm{M}_i \simeq \varprojlim(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}_i).$$

Donc le produit tensoriel complété commute aux limites projectives filtrantes. [24]

0.3.6. — En particulier, [25] *le produit tensoriel complété commute aux produits infinis.* Par exemple, comme l'anneau A est le produit de ses composantes locales $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ (0.1.1), tout A-module pseudocompact M ($\simeq \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}$) s'identifie au produit des modules $\mathrm{M}_{\mathfrak{m}} = \mathrm{A}_{\mathfrak{m}}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}$ (les *composantes locales* de M).

[24] N.D.E. : On retrouve ainsi 0.3.1.1 : $\mathrm{L} = \mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{A} = \mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\varprojlim_{\mathfrak{l}}(\mathrm{A}/\mathfrak{l}) \simeq \varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathrm{L}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{L}}$, où $\mathfrak{l}$ parcourt les idéaux ouverts de A.

[25] N.D.E. : cf. N.D.E. (12).

De même, soient M et N deux A-modules pseudocompacts. On rappelle (cf. 0.2.2) que $\mathrm{M}^\dagger$ désigne $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, \mathrm{A})$. Considérons l'application

$$\varphi : \mathrm{M}^\dagger \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N}^\dagger \longrightarrow (\mathrm{M} \widehat{\otimes}_\mathrm{A} \mathrm{N})^\dagger$$

qui associe à un élément $f \otimes g$ de $\mathrm{M}^\dagger \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N}^\dagger$ l'application $m \widehat{\otimes} n \mapsto f(m)g(n)$ de $\mathrm{M} \widehat{\otimes}_\mathrm{A} \mathrm{N}$ dans A. Cette application φ est bijective lorsque M est isomorphe à A.

Corollaire. — *Lorsque* A *est* artinien*, φ est un isomorphisme chaque fois que* M *est topologiquement libre* (*ou plus généralement projectif*).

En effet, pour N fixé, le foncteur $\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{M} \widehat{\otimes}_\mathrm{A} \mathrm{N})^\dagger$ (resp. $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\dagger \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N}^\dagger$) transforme tout produit direct en somme directe, d'après ce qui précède et 0.2.F.

Remarque 0.3.6.A. — [26] En utilisant 0.2.F de façon similaire, on obtient aussi le résultat suivant : *Soient* A *un anneau artinien,* M, Q *des objets de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$, *et* N *un objet de* $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$. *On suppose* Q projectif*; alors on a des isomorphismes naturels :*

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, \mathrm{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathrm{Q}^\dagger, \mathrm{M}^\dagger) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q}^\dagger \otimes_\mathrm{A} \mathrm{N} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_c(\mathrm{Q}, \mathrm{N}).$$

0.3.7. — Pour tout $\mathfrak{m} \in \Upsilon(\mathrm{A})$, le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{A}_\mathfrak{m} \widehat{\otimes}_\mathrm{A} \mathrm{M}$ est évidemment exact.
485 Comme tout A-module pseudocompact projectif P est un produit de modules de la forme $\mathrm{A}_\mathfrak{m}$, il en résulte que le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{P} \widehat{\otimes}_\mathrm{A} \mathrm{M}$ est exact lorsque P est projectif. La réciproque est vraie :

Proposition. — *Soient* A *un anneau pseudocompact,* P *un* A*-module pseudocompact. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) P *est un objet projectif de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$.

(ii) *Chaque composante locale* $\mathrm{P}_\mathfrak{m}$ *est un* $\mathrm{A}_\mathfrak{m}$*-module topologiquement libre.*

(iii) *Le foncteur* $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{P} \widehat{\otimes}_\mathrm{A} \mathrm{M}$ *est exact.*

En effet, l'équivalence de (i) et (ii) résulte de 0.2.F (iii) et 0.2.1, et l'on vient de voir que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{P} \widehat{\otimes}_\mathrm{A} \mathrm{M}$ exact. Comme $\mathrm{P} \widehat{\otimes}_\mathrm{A} \mathrm{M}$ est le produit de ses composantes locales :

$$(\mathrm{P} \widehat{\otimes}_\mathrm{A} \mathrm{M})_\mathfrak{m} \simeq \mathrm{P}_\mathfrak{m} \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}_\mathfrak{m}} \mathrm{M}_\mathfrak{m} ,$$

on est ramené au cas où l'anneau A est local. On va prouver alors que P est *topologiquement libre.*

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A ; alors $\mathrm{P}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{P}}$ est un espace vectoriel linéairement compact sur $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$, donc un produit d'exemplaires de $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$ (cf. 0.2.2). Il y a donc une

[26] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, qui sera utile en 2.3.1.

famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'exemplaires de A et un isomorphisme $\varphi : \prod_{i\in\mathrm{I}}(\mathrm{A}_i/\mathfrak{m}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{P}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{P}}$. Comme $\prod_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i$ est projectif, il y a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{P} \arrow[d, "q"] \\
\prod_{i\in\mathrm{I}} (\mathrm{A}_i/\mathfrak{m}) \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] & \mathrm{P}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{P}}
\end{tikzcd}$$

où p et q désignent les projections canoniques. Appliquant le lemme de Nakayama à $\operatorname{Coker}\psi$ et notant que $(\mathrm{A}/\mathfrak{m})\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\psi$ n'est autre que φ, on voit que ψ est surjectif. [27]

Posant alors $\mathrm{B} = \prod_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i$ et $\mathrm{N} = \operatorname{Ker}\psi$, on a le diagramme commutatif et exact suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, bend left] & \\
 & \mathfrak{m}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{N} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{m}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{B} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{m}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{P} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{N} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{B} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{P} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & (\mathrm{A}/\mathfrak{m})\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{N} \arrow[r] & (\mathrm{A}/\mathfrak{m})\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{B} \arrow[r, "\varphi"] & (\mathrm{A}/\mathfrak{m})\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{P} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

Le « lemme du serpent » appliqué aux deux premières lignes montre alors que, dans **486**
la ligne du bas, le morphisme $(\mathrm{A}/\mathfrak{m})\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{N} \to (\mathrm{A}/\mathfrak{m})\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{B}$ est un monomorphisme. Mais alors, comme φ est un isomorphisme, $(\mathrm{A}/\mathfrak{m})\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{N}$ est nul ; d'où $\mathrm{N} = 0$ (0.3.3) et ψ un isomorphisme. [28]

0.3.8. Corollaire. — *Soient* A *un anneau local, noethérien, complet et* P *un* A*-module pseudocompact. Alors* P *est topologiquement libre si et seulement si* P *est plat sur* A.

En effet, l'application canonique de $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{P}$ dans $\mathrm{M}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{P}$ est bijective lorsque M est égal à A, donc aussi lorsque M est noethérien (prendre une présentation finie de M et utiliser l'exactitude à droite du produit tensoriel et du produit tensoriel complété).

---

[27] N.D.E. : Ceci montre le résultat annoncé dans la N.D.E. (22) : *tout* A*-module pseudocompact* M *est quotient d'un* A*-module topologiquement libre.* (Comme les produits sont exacts dans **PC**(A), on se ramène au cas où A est local, traité ci-dessus.)

[28] N.D.E. : Une démonstration tout-à-fait analogue, utilisant le « lemme de Nakayama nilpotent », montre que si A est *artinien* et P un A-module plat, chaque composante locale de P est un A-module libre (cf. [**BAC**], II § 3.2, cor. 2 de la prop. 5).

Or P est plat si et seulement si le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{P}$ est exact quand M parcourt les modules noethériens. De même, on a vu dans la démonstration de la proposition 0.3.7 que P est topologiquement libre si la suite

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}} \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{A} \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}} \mathrm{P} \longrightarrow (\mathrm{A}/\mathfrak{m}) \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}} \mathrm{P} \longrightarrow 0$$

est exacte. Donc P est topologiquement libre si et seulement si le foncteur $\mathrm{M} \mapsto$
487 $\mathrm{M} \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}} \mathrm{P}$ est exact quand M parcourt les modules noethériens. Le corollaire résulte donc de l'égalité $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{P} = \mathrm{M} \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}} \mathrm{P}$ établie ci-dessus.

0.4. Soit k un anneau pseudocompact ; une k-algèbre topologique est un anneau topologique A (commutatif), muni d'un morphisme d'anneaux topologiques $k \to \mathrm{A}$. On dit que A est une k-algèbre *profinie* si le k-module topologique sous-jacent est pseudocompact.

Dans ce cas, soit $\mathfrak{l}$ un k-sous-module ouvert de A. L'application composée

$$\varphi : \ \mathrm{A} \times \mathrm{A} \xrightarrow{\text{mult.}} \mathrm{A} \xrightarrow{\text{can.}} \mathrm{A}/\mathfrak{l}$$

est continue, donc, d'après le lemme 0.3.1, il existe un k-sous-module ouvert $\mathfrak{n}$ de A tel que $\varphi(\mathrm{A} \times \mathfrak{n}) = 0$. Cela signifie que $\mathfrak{l}$ contient l'idéal ouvert $\mathrm{A}\mathfrak{n}$ et entraîne que A est *un anneau pseudocompact.*

De même, soit M un A-module topologique dont le k-module sous-jacent est pseudocompact. Si M' est un k-sous-module ouvert de M, le lemme 0.3.1 appliqué à l'application

$$\mathrm{A} \times \mathrm{M} \xrightarrow{\text{mult.}} \mathrm{M} \xrightarrow{\text{can.}} \mathrm{M}/\mathrm{M}'$$

montre que M' contient un A-sous-module ouvert, donc que M est aussi un A-*module pseudocompact.* [29] Réciproquement :

Lemme. — *Soient* A *une k-algèbre profinie et* M *un* A*-module pseudocompact. Alors, le k-module* $\mathrm{M}_{|k}$ *obtenu par restriction des scalaires est pseudocompact.*

En effet, tout A-module pseudocompact de longueur finie est isomorphe à un quotient A^n/L (où L est un sous-module ouvert de A^n), donc est un k-module pseudocompact. Comme $\mathrm{M}_{|k}$ est une limite projective de tels modules, c'est un k-module pseudocompact.

0.4.1. — Si A et B sont deux k-algèbres profinies, un *morphisme* de A dans B est, par définition, un homomorphisme continu de k-algèbres. On notera $\mathbf{Alp}_{/k}$ la catégorie des k-algèbres profinies.

Elle possède évidemment des limites projectives : l'algèbre sous-jacente à une limite
488 projective est la limite projective des algèbres sous-jacentes ; la topologie est celle de la limite projective.

Elle possède aussi des *limites inductives finies* [30] : par exemple, si $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ et $g : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ sont deux morphismes de k-algèbres profinies, la somme amalgamée de B et C sous A a $\mathrm{B} \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$ pour A-module topologique sous-jacent (d'après 0.4, f et g

[29] N.D.E. : On a ajouté le lemme qui suit, cf. la N.D.E. (36) dans la proposition 0.5.

[30] N.D.E. : On verra en 0.4.2 qu'elle possède des limites inductives arbitraires.

munissent B et C de structures de A-module pseudocompact) ; la multiplication de $B\,\widehat{\otimes}_A\,C$ est évidemment telle que $(b\,\widehat{\otimes}\,c)(b'\,\widehat{\otimes}\,c') = (bb')\,\widehat{\otimes}\,(cc')$ si $b, b' \in B$ et $c, c' \in C$.

0.4.2. Définition. — Une k-algèbre profinie C sera dite de *longueur finie* si le k-module sous-jacent est de longueur finie (donc discret) ; nous noterons $\mathbf{Alf}_{/k}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Alp}_{/k}$ formée des k-algèbres de longueur finie. [31]

Pour toute k-algèbre profinie A, on notera $\mathbf{h}^A$ le foncteur :

$$\mathbf{Alf}_{/k} \longrightarrow (\mathbf{Ens}), \qquad C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(A, C).$$

Il est clair que $\mathbf{h}^A$ est un foncteur exact à gauche [32]. De plus, les projections canoniques $A \to A/\mathfrak{l}$ (où $\mathfrak{l}$ parcourt les idéaux ouverts de A), induisent, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ un isomorphisme canonique

$$\varinjlim_{\mathfrak{l}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alf}_{/k}}(A/\mathfrak{l}, C) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(A, C)\,,$$

fonctoriel en C. Cela signifie que $\mathbf{h}^A$ est la limite inductive des foncteurs représentables $\mathbf{h}^{A/\mathfrak{l}}$, c.-à-d.,

$$(*) \qquad \mathbf{h}^A \simeq \varinjlim_{\mathfrak{l}} \mathbf{h}^{A/\mathfrak{l}}\,.$$

Si B est une autre k-algèbre profinie, les propriétés générales du bifoncteur Hom et l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(\mathbf{h}^C, \mathbf{h}^B) = \mathbf{h}^B(C)$ pour C de longueur finie, donnent des isomorphismes :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(B, A) &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(B, A/\mathfrak{l})\\ &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}(\mathbf{h}^{A/\mathfrak{l}}, \mathbf{h}^B)\\ &\simeq \mathrm{Hom}(\varinjlim_{\mathfrak{l}} \mathbf{h}^{A/\mathfrak{l}}, \mathbf{h}^B)\,;\end{aligned}$$

combiné avec $(*)$ ceci montre que le foncteur contravariant $A \mapsto \mathbf{h}^A$ est *pleinement* 489
fidèle. En fait :

Proposition. — *Le foncteur* $A \mapsto \mathbf{h}^A$ *est une* anti-équivalence *de* $\mathbf{Alp}_{/k}$ *sur la catégorie des foncteurs exacts à gauche de* $\mathbf{Alf}_{/k}$ *dans* $(\mathbf{Ens})$.

Il suffit en effet, d'après ce qui précède, de montrer que tout foncteur exact à gauche $\mathbf{F} : \mathbf{Alf}_{/k} \to (\mathbf{Ens})$ est isomorphe à un foncteur du type $\mathbf{h}^A$; pour cela, on peut construire A comme suit (cf. TDTE II, § 3).

Comme $\mathbf{F}$ est exact à gauche, il y a, pour toute k-algèbre de longueur finie C et pour tout élément ξ de $\mathbf{F}(C)$, une plus petite sous-algèbre C' de C telle que ξ appartienne à l'image de $\mathbf{F}(C')$ dans $\mathbf{F}(C)$. Si l'on a $C' = C$, on dit que le couple (C, ξ) est *minimal.*

Les couples minimaux forment une catégorie si l'on prend pour morphismes de (C, ξ) dans (D, η) les homomorphismes φ de C dans D tels que $(\mathbf{F}\varphi)(\xi) = \eta$; il est clair qu'un tel φ est une surjection et que la catégorie des couples minimaux est

[31] N.D.E. : Attention, k n'est un objet de $\mathbf{Alf}_{/k}$ que si k est artinien, cf. 1.2.2 plus loin.
[32] N.D.E. : c.-à-d., qui commute aux limites projectives finies.

« filtrante à gauche ». De plus, on peut se restreindre aux couples (C,ξ) tels que C appartienne à un ensemble contenant des k-algèbres de longueur finie de chaque type d'isomorphisme [33]. Donc, le foncteur $(\mathrm{C},\xi)\mapsto \mathrm{C}$, qui a pour catégorie de départ celle des couples minimaux et pour catégorie d'arrivée celle des k-algèbres profinies, possède une limite projective ; on prend pour A cette limite projective.

Corollaire. — *La catégorie* $\mathbf{Alp}_{/k}$ *possède des limites inductives infinies.*

En effet, la catégorie des foncteurs exacts à gauche de $\mathbf{Alf}_{/k}$ vers $(\mathbf{Ens})$ possède des limites projectives, qui sont définies « argument par argument », c.-à-d., si $(\mathbf{F}_i)$ est un système projectif de tels foncteurs, on a, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$:

$$(\varprojlim \mathbf{F}_i)(\mathrm{C}) = \varprojlim \mathbf{F}_i(\mathrm{C})\,. \qquad {}^{(34)}$$

490 **0.5.** [35] Soit $\varphi : k\to \ell$ un homomorphisme d'anneaux pseudocompacts (cf. 0.1.3). On peut généraliser la construction de 0.3 comme suit.

Définition 0.5.A. — Pour tout objet M de $\mathbf{PC}(k)$ (resp. N de $\mathbf{PC}(\ell)$), nous noterons $\mathrm{M}\widehat{\otimes}_k\mathrm{N}$ le séparé complété de $\mathrm{M}\otimes_k\mathrm{N}$ pour la topologie linéaire définie par les noyaux des projections :

$$\mathrm{M}\otimes_k \ell \longrightarrow (\mathrm{M}/\mathrm{M}')\otimes_k(\mathrm{N}/\mathrm{N}')\,,$$

où M' (resp. N') est un sous-module ouvert de M (resp. de N). Alors, $\mathrm{M}\widehat{\otimes}_k\mathrm{N}$ est un *ℓ-module pseudocompact.* Si $m\in\mathrm{M}$ et $x\in\mathrm{N}$, nous noterons $m\widehat{\otimes}_k x$ l'image canonique de $m\otimes_k x$ dans $\mathrm{M}\widehat{\otimes}_k\mathrm{N}$.

Ceci s'applique en particulier lorsque $\mathrm{N}=\ell$, dans ce cas on dira que $\mathrm{M}\widehat{\otimes}_k\ell$ est le ℓ-module pseudocompact *déduit de* M *par le changement de base* $k\to\ell$.

Remarques 0.5.B. — (i) Lorsqu'on considérera un tel changement de base, ℓ ne sera pas en général une k-algèbre profinie : un exemple typique est le cas où k est un corps et ℓ est une extension arbitraire K de k.

(ii) Toutefois, si le k-module sous-jacent à N est pseudocompact (par exemple si ℓ est une k-algèbre profinie) alors, d'après 0.4, tout sous-k-module ouvert de N contient un sous-ℓ-module ouvert de N ; par conséquent, $\mathrm{M}\widehat{\otimes}_k\mathrm{N}$ coïncide dans ce cas avec le produit tensoriel complété (cf. 0.3) des k-modules pseudocompacts M et N, et la notation ne comporte donc pas d'ambiguïté.

---

[33] N.D.E. : En effet, tout k-module discret de longueur n est isomorphe à k^n/L, où L est un sous-module ouvert de k^n de colongueur n. Ensuite, on peut considérer *l'ensemble* des (classes d'isomorphisme de) structures de k-algèbre profinie sur chaque tel module.

[34] N.D.E. : Si $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est un système inductif de $\mathbf{Alp}_{/k}$, sa limite inductive dans $\mathbf{Alp}_{/k}$ est le séparé complété de la k-algèbre B, limite inductive des k-algèbres sous-jacentes, pour la topologie définie par les idéaux I tels que $\mathrm{I}\cap\mathrm{A}_i$ soit un idéal ouvert de A_i pour tout i, et $\mathrm{long}_k(\mathrm{B}/\mathrm{I})<\infty$. Noter que si, par exemple, K/k est une extension algébrique de corps, de degré infini, et si (k_i) désigne le système inductif filtrant des sous-extensions de degré fini, alors la limite inductive du système (k_i) dans $\mathbf{Alp}_{/k}$ est l'anneau nul !

[35] N.D.E. : On a détaillé ce paragraphe.

Le k-module $\mathrm{N}_{|k}$ obtenu par restriction des scalaires est de toute façon un k-module topologique, i.e. l'application $k \times \mathrm{N} \to \mathrm{N}$, $(t, n) \mapsto \varphi(t)n$ est continue. On notera $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, \mathrm{N}_{|k})$ le groupe abélien des homomorphismes continus de k-modules de M dans $\mathrm{N}_{|k}$.

Proposition 0.5.C. — *Pour tout* $\mathrm{M} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{PC}(k)$ *et* $\mathrm{N} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{PC}(\ell)$*, on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{PC}(\ell)}(\mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell, \mathrm{N}) \simeq \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, \mathrm{N}_{|k}).$$ [36]

En effet, soit ϕ un homomorphisme continu $\mathrm{M} \to \mathrm{N}_{|k}$, alors l'application ϕ' : $\mathrm{M} \times \ell \to \mathrm{N}$, $(m, \lambda) \mapsto \lambda\phi(m)$ est continue et « bilinéaire » (c.-à-d., k-linéaire en le premier facteur et ℓ-linéaire en le second). Si N' un sous-ℓ-module ouvert de N, on montre comme dans le lemme 0.3.1 qu'il existe un sous-module ouvert M' de M et un idéal ouvert ℓ' de ℓ tels que $\phi'(\mathrm{M}' \times \ell)$ et $\phi'(\mathrm{M} \times \ell')$ soient contenus dans N'. Il en résulte que ϕ induit un homomorphisme continu de ℓ-modules $\Phi : \mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell \to \mathrm{N}$, tel que $\Phi(m \mathbin{\widehat{\otimes}} \lambda) = \lambda\phi(m)$, pour tout $m \in \mathrm{M}$ et $\lambda \in \ell$.

Réciproquement, on associe à tout morphisme $f : \mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell \to \mathrm{N}$ le morphisme $f' : m \mapsto f(m \mathbin{\widehat{\otimes}_k} 1)$ de M dans $\mathrm{N}_{|k}$.

On obtient alors, comme en 0.3.2, 0.3.5 et 0.3.1.2, le :

Corollaire 0.5.D. — *Le foncteur* $\mathbf{PC}(k) \to \mathbf{PC}(\ell)$, $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell$ *est exact à droite, et commute aux limites projectives filtrantes, c.-à-d., si* (M_i) *est un système projectif filtrant d'objets de* $\mathbf{PC}(k)$*, on a un isomorphisme canonique :*

$$(\varprojlim \mathrm{M}_i) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell \simeq \varprojlim(\mathrm{M}_i \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell).$$

De plus, si M, N *sont des* k*-modules pseudocompacts, on a un isomorphisme canonique :*

$$(\mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{N}) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell \cong (\mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell) \mathbin{\widehat{\otimes}_\ell} (\mathrm{N} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell).$$

Définition 0.5.E. — Enfin, si A est une k-algèbre profinie, il y a sur $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell$ une et une seule structure de ℓ-algèbre profinie telle que, si $a, b \in \mathrm{A}$ et $\lambda, \mu \in \ell$,

$$(a \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \lambda)(b \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mu) = (ab) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} (\lambda\mu).$$

On dit que $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell$ est la ℓ-algèbre profinie déduite de A par *l'extension des scalaires* (ou le « changement de base ») $k \to \ell$.

1. Variétés formelles sur un anneau pseudocompact 491

1.1. On peut associer à tout anneau pseudocompact A un schéma formel (EGA I, 10.4.2) en procédant comme suit : l'espace topologique sous-jacent est l'ensemble $\Upsilon(\mathrm{A})$ des idéaux premiers ouverts (donc maximaux) de A, qu'on munit de la topologie discrète ; le faisceau structural a le produit cartésien $\prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{E}} \mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ pour espace des sections

[36] N.D.E. : Par conséquent, si ℓ est une k-algèbre *profinie*, le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell$ est adjoint à gauche du foncteur de restriction des scalaires $\mathbf{PC}(\ell) \to \mathbf{PC}(k)$ (cf. lemme 0.4).

sur une partie E de $\Upsilon(\mathrm{A})$. Le schéma formel ainsi obtenu est noté $\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ (le *spectre formel* de A). [37]

Si A et B sont deux anneaux pseudocompacts, un *morphisme* de $\mathrm{Spf}(\mathrm{B})$ dans $\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ consiste en la donnée d'une application f de $\Upsilon(\mathrm{B})$ dans $\Upsilon(\mathrm{A})$ et d'une famille d'homomorphismes continus $f_y^\natural : \mathrm{A}_{f(y)} \to \mathrm{B}_y$, pour $y \in \Upsilon(\mathrm{B})$. Un tel morphisme induit un homomorphisme continu $f^\natural$ de $\mathrm{A} = \prod_{x\in\Upsilon(\mathrm{A})} \mathrm{A}_x$ dans $\mathrm{B} = \prod_{y\in\Upsilon(\mathrm{B})} \mathrm{B}_y$. La réciproque est vraie :

Proposition. — *Le foncteur contravariant* $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ *est pleinement fidèle.*

En effet, si $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un homomorphisme continu d'algèbres, l'image réciproque $\varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ d'un idéal maximal ouvert de B est un idéal premier ouvert de A, donc maximal dans A. On obtient donc une application $\mathfrak{n} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ de $\Upsilon(\mathrm{B})$ dans $\Upsilon(\mathrm{A})$, et φ induit un homomorphisme continu $\mathrm{A}_{\varphi^{-1}(\mathfrak{n})} \to \mathrm{B}_{\mathfrak{n}}$. Donc φ induit un morphisme de schémas formels $\mathrm{Spf}(\varphi) : \mathrm{Spf}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$. On vérifie facilement que $\mathrm{Spf}(\varphi)^\natural = \varphi$, et que $\mathrm{Spf}(f^\natural) = f$, pour tout morphisme $f : \mathrm{Spf}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$, d'où la proposition.

Bien que nous ne parlions ici que de schémas formels de la forme $\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$, nous utiliserons le langage des schémas formels plutôt que celui des anneaux pseudocompacts, afin d'appuyer nos assertions sur une intuition géométrique.

1.2. Soit k un anneau pseudocompact.

492 ***Définition 1.2.A***. — [38] Nous appellerons *variété formelle* sur k tout schéma formel X au-dessus de $\mathrm{Spf}(k)$ qui est isomorphe à un k-schéma formel $\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ pour une certaine k-algèbre profinie A. L'algèbre A est alors isomorphe à *l'algèbre affine* de X, c'est-à-dire à l'algèbre des sections du faisceau structural $\mathscr{O}_\mathrm{X}$ de X.

On notera $\mathbf{Vaf}_{/k}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des schémas formels sur $\mathrm{Spf}(k)$ dont les objets sont les k-variétés formelles. [39]

D'après 1.1, le foncteur $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ est une anti-équivalence de $\mathbf{Alp}_{/k}$ (0.4.1) sur $\mathbf{Vaf}_{/k}$. Donc, d'après le corollaire 0.4.2 :

Proposition 1.2.B. — *La catégorie* $\mathbf{Vaf}_{/k}$ *possède des limites projectives et inductives.* [40]

Par exemple, soient $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vaf}_{/k}$ et $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ et $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ deux k-variétés formelles au-dessus de X et soient A, B, C les algèbres affines de X, Y, Z ; d'après

[37] N.D.E. : cf. Remarques 0.1.2.

[38] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 1.2.A à 1.2.E, pour des références ultérieures.

[39] N.D.E. : Notons que, d'après la définition des morphismes (1.1), tout $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vaf}_{/k}$ est la *somme directe* dans $\mathbf{Vaf}_{/k}$ des variétés formelles ponctuelles $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x})$, pour $x \in \mathrm{X}$.

[40] N.D.E. : En particulier, les *conoyaux* existent dans $\mathbf{Vaf}_{/k}$, voir ci-dessous. Remarquons d'autre part qu'une limite projective filtrante dans $\mathbf{Vaf}_{/k}$, dont tous les morphismes de transition sont surjectifs, peut être vide, cf. N.D.E. (34).

0.4.1, l'algèbre affine du produit fibré $Y \times_X Z$ s'identifie à $B \widehat{\otimes}_A C$, (41) de sorte que l'inclusion de $\mathbf{Vaf}_{/k}$ dans la catégorie de tous les k-schémas formels commute aux limites projectives finies (cf. EGA I, 10.7).

Les limites inductives de k-variétés formelles correspondent aux limites projectives de leurs algèbres affines.

***Exemple 1.2.C* (Conoyaux)**. — Soit, par exemple, $d, e : X \rightrightarrows Y$ une double-flèche de $\mathbf{Vaf}_{/k}$; l'algèbre affine de $\mathrm{Coker}(d, e)$ est isomorphe au noyau des homomorphismes induits sur les algèbres affines de X et Y, mais on peut aussi donner de $\mathrm{Coker}(d, e)$ la construction suivante : l'espace topologique sous-jacent à $\mathrm{Coker}(d, e)$ est le conoyau des espaces sous-jacents (42) ; si p est la projection canonique de l'ensemble sous-jacent à Y sur le conoyau et si z appartient au conoyau, l'algèbre locale de $\mathrm{Coker}(d, e)$ en z est le noyau de la double-flèche

$$d^\natural, e^\natural : \prod_{p(y)=z} \mathscr{O}_{Y,y} \rightrightarrows \prod_{q(x)=z} \mathscr{O}_{X,x}$$

où l'on a posé $q = p \circ d = p \circ e$ et où $d^\natural$ et $e^\natural$ sont induits par les homomorphismes $d^\natural_x$ **493**
et $e^\natural_x$ (notations de 1.1).

Définition 1.2.D. — Si $\varphi : k \to \ell$ est un homomorphisme d'anneaux pseudocompacts et X une k-variété formelle d'algèbre affine A, le schéma formel $X \times_{\mathrm{Spf}(k)} \mathrm{Spf}(\ell)$, obtenu par changement de base, est une ℓ-variété formelle, que nous noterons aussi $X \widehat{\otimes}_k \ell$ et qui a pour algèbre affine le produit tensoriel complété $A \widehat{\otimes}_k \ell$ (cf. 0.5 et EGA I, § 10).

Remarque 1.2.E. — Comme toute variété formelle sur k se décompose en variétés formelles sur les composantes locales de k, *nous supposerons dans certaines démonstrations que k est un anneau pseudocompact local.*

Donnons maintenant quelques exemples, en même temps que nous fixons notre terminologie.

1.2.1. — Un *k-foncteur* sera, par définition, un foncteur *covariant* de $\mathbf{Alf}_{/k}$ dans $(\mathbf{Ens})$. D'après 1.1 et 0.4.2, on peut identifier $\mathbf{Vaf}_{/k} \cong (\mathbf{Alp}_{/k})^0$ à une sous-catégorie pleine de la catégorie des k-foncteurs, en associant à toute k-variété formelle X le foncteur :

$$\mathbf{Alf}_{/k} \longrightarrow (\mathbf{Ens}), \qquad C \mapsto X(C) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(C), X).$$

(41) N.D.E. : Notons que $Y \times_X Z$ est la somme directe, pour $x \in X$, des variétés formelles $B_x \widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{X,x}} C_x$, où B_x est le produit des $\mathscr{O}_{Y,y}$ pour les $y \in Y$ tels que $f(y) = x$, et C_x est défini de façon analogue. Ceci sera utilisé en 2.5.1.

(42) N.D.E. : c.-à-d., l'ensemble quotient de Y par les identifications $d(x) = e(x)$, pour tout $x \in X$, muni de la topologie quotient, qui est ici la topologie discrète.

Nous rencontrerons plus loin des k-foncteurs $\mathbf{F}$ qui associent à tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ un module $\mathbf{F}(\mathrm{C})$ sur C et à tout morphisme $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$ une application k-linéaire $\mathbf{F}(\varphi) : \mathbf{F}(\mathrm{C}) \to \mathbf{F}(\mathrm{D})$ telle que, si $x \in \mathbf{F}(\mathrm{C})$ et $\lambda \in \mathrm{C}$:

$$\mathbf{F}(\varphi)(\lambda x) = \varphi(\lambda)\mathbf{F}(\varphi)(x)\,.$$

D'après l'Exp. I, 3.1, un tel $\mathbf{F}$ est muni d'une structure de $\mathbf{O}_k$-module, si l'on note $\mathbf{O}_k$ le k-foncteur en anneaux qui associe à tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ l'anneau sous-jacent à C .

494 ***Définitions***. — (i) Un $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{F}$ sera dit *admissible* si tout morphisme $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$ induit une bijection de $\mathrm{D} \otimes_{\mathrm{C}} \mathbf{F}(\mathrm{C})$ sur $\mathbf{F}(\mathrm{D})$. [43]

(ii) On dira que $\mathbf{F}$ est *plat* s'il est admissible et si, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{F}(\mathrm{C})$ est un C-module plat. [44]

Par exemple, si M est un k-module (*pas nécessairement pseudocompact*), nous noterons (comme dans l'Exp. I, 4.6.1) $\mathbf{W}(\mathrm{M})$ le $\mathbf{O}_k$-module $\mathrm{C} \mapsto \mathrm{C} \otimes_k \mathrm{M}$; alors $\mathbf{W}(\mathrm{M})$ est plat lorsque M est plat sur k.

De plus, le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathbf{W}(\mathrm{M})$ a pour adjoint à droite le foncteur qui associe à tout $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{F}$ le k-module $\varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathbf{F}(k/\mathfrak{l})$, où $\mathfrak{l}$ parcourt les idéaux ouverts de k.

1.2.2. — Dans la suite, un $\mathbf{O}_k$-module sera toujours désigné par une lettre en caractères gras telle que $\mathbf{F}$; lorsque k est artinien, nous écrirons alors simplement F au lieu de $\mathbf{F}(k)$. Dans ce cas, il va de soi que le foncteur $\mathbf{F} \mapsto \mathrm{F}$ induit une équivalence de la catégorie des $\mathbf{O}_k$-modules plats sur celle des k-modules plats ! La terminologie que nous avons adoptée a donc seulement pour but de nous permettre de raisonner « comme si k était toujours artinien ».

Conformément à l'exposé I § 3.1, nous utiliserons des conventions analogues pour d'autres structures algébriques : ainsi, une $\mathbf{O}_k$-*algèbre* (resp. une $\mathbf{O}_k$-*coalgèbre*, resp. une $\mathbf{O}_k$-*algèbre de Lie*, resp. une $\mathbf{O}_k$-*p-algèbre de Lie*) consistera en la donnée d'un $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{M}$ et, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, d'une structure de C-algèbre (resp. de C-coalgèbre, resp. de C-algèbre de Lie, resp. de C-p-algèbre de Lie) sur $\mathbf{M}(\mathrm{C})$; on suppose de plus que, pour tout morphisme $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$, l'application de $\mathrm{D} \otimes_{\mathrm{C}} \mathbf{M}(\mathrm{C})$ dans $\mathbf{M}(\mathrm{D})$, qui est induite par $\mathbf{M}(\varphi)$, est un homomorphisme de D-algèbres (resp. de D-coalgèbres, etc.).

Notons enfin que, si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont deux $\mathbf{O}_k$-modules, $\mathbf{F} \otimes_k \mathbf{G}$ désignera le $\mathbf{O}_k$-module $\mathrm{C} \mapsto \mathbf{F}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathbf{G}(\mathrm{C})$.

1.2.3. — [45] Commençons par le lemme suivant.

---

[43] N.D.E. : On a introduit cette terminologie, cf. la N.D.E. (47) dans 1.2.3.

[44] N.D.E. : et donc *projectif*, puisque C est artinien.

[45] N.D.E. : On a ajouté le lemme qui suit et l'on a introduit la numérotation 1.2.3.A à 1.2.3.F, pour des références ultérieures.

Lemme 1.2.3.A. — *Soit* $k \to \mathrm{K}$ *un morphisme d'anneaux pseudocompacts,* B *un* K-*module pseudocompact, et* M *un* k-*module* (*sans topologie*) projectif. *On a un isomorphisme canonique de* K-*modules pseudocompacts*

$$\theta : \ \mathrm{Hom}_k(\mathrm{M}, k) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{B} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_k(\mathrm{M}, \mathrm{B}). \tag{2}$$

Ici, $\mathrm{M}^* = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{M}, k)$ est muni de la topologie définie en 0.2.2, qui en fait un k-module pseudocompact, et la topologie de $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{M}, \mathrm{B})$ est définie de façon analogue : une base de voisinages de 0 est formée par les sous-K-modules suivants, où $x \in \mathrm{M}$ et B' est un sous-K-module ouvert de B :

$$\mathscr{H}(x, \mathrm{B}') = \{f \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{M}, \mathrm{B}) \mid f(x) \in \mathrm{B}'\}.$$

Enfin, $\mathrm{M}^* \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{B}$ est le K-module pseudocompact déduit de M^* par changement de base, cf. 0.5.A.

Ceci étant, θ est évidemment un isomorphisme lorsque $\mathrm{M} = k$; de plus, les deux membres de (2), considérés comme foncteurs en M, transforment somme directes en produits (en particulier, commutent aux sommes directes finies). On obtient donc que (2) est un isomorphisme lorsque M est un k-module libre, puis lorsque M est projectif.

Définition 1.2.3.B. — Soit N un k-module *pseudocompact*. Nous notons $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})$ ou $\mathbf{N}^\dagger$ **495**
[46] le $\mathbf{O}_k$-module qui associe à tout $\mathrm{C} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alf}_{/k}$ le C-module $(\mathrm{C} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{N})^\dagger$ dual de $\mathrm{C} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{N}$ (0.2.2), c.-à-d., le C-module

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{C} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{N}, \mathrm{C}) \cong \mathrm{Hom}_c(\mathrm{N}, \mathrm{C}_{|_k}) \,,$$

où $\mathrm{C}_{|_k}$ désigne le k-module C obtenu par restriction des scalaires. Ce $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})$ sera appelé *le dual* de N.

Si $k_{\mathfrak{m}}$ est une composante locale de k, alors, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$,

$$\mathrm{Hom}_c(k_{\mathfrak{m}}, \mathrm{C}_{|_k}) = \mathrm{C}_{\mathfrak{m}} = \mathrm{C} \otimes_k k_{\mathfrak{m}}$$

est un C-module projectif, et de plus on a $\mathrm{D} \otimes_{\mathrm{C}} \mathrm{C}_{\mathfrak{m}} = \mathrm{D}_{\mathfrak{m}}$, pour tout morphisme $\mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$; donc $\mathbf{V}_k^f(k_{\mathfrak{m}})$ est un $\mathbf{O}_k$-module plat (cf. 1.2.1). Comme tout k-module pseudocompact projectif est un produit de modules $k_{\mathfrak{m}}$ (cf. Prop. 0.2.1), on déduit du corollaire 0.2.F le :

Corollaire 1.2.3.C. — $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})$ *est un* $\mathbf{O}_k$-*module plat lorsque* N *est un* k-*module pseudocompact projectif.*

Définition 1.2.3.D. — Réciproquement, si $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_k$-module *admissible* (cf. 1.2.1), [47] nous appelons *dual de* $\mathbf{M}$ et nous notons $\Gamma^*(\mathbf{M})$ le k-module pseudocompact défini comme suit. Pour $\mathfrak{l}$ parcourant les idéaux ouverts de k, on munit chaque $k/\mathfrak{l}$-module

$$\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* = \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}), k/\mathfrak{l})$$

---

(46) N.D.E. : En fait, on n'utilisera pas cette seconde notation, voir la N.D.E. (47).

(47) N.D.E. : Les éditeurs ne comprennent pas la définition qui suit si $\mathbf{M}$ n'est pas supposé *admissible*, d'où l'ajout de cette hypothèse. D'autre part, on a noté $\Gamma^*(\mathbf{M})$ au lieu de $\mathbf{M}^*$, afin d'éviter des confusions entre $\mathbf{M}^*$, le *module* dual du foncteur $\mathbf{M}$, et $\mathbf{N}^\dagger$, le *foncteur* dual du module N, cf. N.D.E. (46). Enfin, on a détaillé la construction de $\Gamma^*(\mathbf{M})$.

de la topologie décrite en 0.2.2, qui en fait un k-module pseudocompact. Comme $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}) \simeq \mathbf{M}(k/\mathfrak{l}') \otimes (k/\mathfrak{l})$ pour $\mathfrak{l} \supset \mathfrak{l}'$, on a des morphismes de transition :

$$\mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}'}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}'), k/\mathfrak{l}') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}'}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}'), k/\mathfrak{l}) = \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}), k/\mathfrak{l})$$

et par définition $\Gamma^*(\mathbf{M})$ est la limite projective de ce système projectif (filtrant) de k-modules pseudocompacts.

Désormais, on suppose de plus que $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_k$-module *plat* (cf. 1.2.1), alors chaque $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}')$ est un $(k/\mathfrak{l}')$-module projectif, donc les morphismes de transition ci-dessus sont surjectifs, et donc il en est de même des projections $\Gamma^*(\mathbf{M}) \to \mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*$, puisque dans $\mathbf{PC}(k)$ les limites projectives filtrantes sont exactes.

Si $\tau : k \to \mathrm{K}$ est un morphisme d'anneaux pseudocompacts, on notera $\mathbf{M} \otimes_k \mathrm{K}$ ou simplement $\mathbf{M}_{\mathrm{K}}$ le $\mathbf{O}_{\mathrm{K}}$-foncteur défini comme suit. Si C est une K-algèbre de longueur finie, alors le noyau de $k \to \mathrm{C}$ est un idéal ouvert $\mathfrak{l}$, et l'on pose $\mathbf{M}_{\mathrm{K}}(\mathrm{C}) = \mathbf{M}(k/\mathfrak{l}) \otimes_k \mathrm{C}$; on a alors $\mathbf{M}_{\mathrm{K}}(\mathrm{C}) = \mathbf{M}(k/\mathfrak{l}') \otimes_k \mathrm{C}$ pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}'$ contenu dans $\mathfrak{l}$. On définit alors $\Gamma^*_{\mathrm{K}}(\mathrm{M}_{\mathrm{K}})$ comme la limite projective, pour I parcourant les idéaux ouverts de K, des K-modules pseudocompacts :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}/\mathrm{I}}(\mathbf{M}_{\mathrm{K}}(\mathrm{K}/\mathrm{I}), \mathrm{K}/\mathrm{I}) = \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}), \mathrm{K}/\mathrm{I}),$$

où dans le terme de droite $\mathfrak{l}$ est un quelconque idéal ouvert de k tel que $\tau(\mathfrak{l}) \subset \mathrm{I}$. De plus, d'après 1.2.3.A, le terme de droite s'identifie à $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \widehat{\otimes}_k (\mathrm{K}/\mathrm{I})$. Comme les projections $\Gamma^*(\mathbf{M}) \to \mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*$ sont surjectives, on voit que la limite projective des $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \widehat{\otimes}_k (\mathrm{K}/\mathrm{I})$ n'est autre que le K-module pseudocompact $\Gamma^*(\mathbf{M}) \widehat{\otimes}_k \mathrm{K}$ (cf. 0.5.A). On a ainsi obtenu que, pour tout $\mathbf{O}_k$-module *plat* $\mathbf{M}$, la formation de $\Gamma^*(\mathbf{M})$ *commute à l'extension de la base*, i.e. on a

$$(\star) \qquad \Gamma^*_{\mathrm{K}}(\mathbf{M} \otimes_k \mathrm{K}) \simeq \Gamma^*(\mathbf{M}) \widehat{\otimes}_k \mathrm{K}.$$

Proposition 1.2.3.E. — (i) *Les foncteurs* $\mathrm{N} \mapsto \mathbf{V}^f_k(\mathrm{N})$ *et* $\mathbf{M} \mapsto \Gamma^*(\mathbf{M})$ *définissent une anti-équivalence entre la catégorie des k-modules pseudocompacts projectifs et celle des $\mathbf{O}_k$-modules plats.* [48]

(ii) *De plus, si $k \to \mathrm{K}$ est un morphisme d'anneaux pseudocompacts, alors l'anti-équivalence précédente « commute au changement de base » au sens suivant : si* $\mathrm{N} \simeq \Gamma^*(\mathbf{M})$*, alors* $\mathrm{N} \widehat{\otimes}_k \mathrm{K} \simeq \Gamma^*_{\mathrm{K}}(\mathbf{M} \otimes_k \mathrm{K})$.

Démonstration. D'une part, on a une transformation naturelle $\phi_{\mathrm{N}} : \mathrm{N} \to \Gamma^*(\mathbf{V}^f_k(\mathrm{N}))$. Comme le foncteur $\Gamma^* \circ \mathbf{V}^f_k$ commute aux produits, d'après 0.3.5 et 0.2.F, il suffit de vérifier que ϕ_{N} est un isomorphisme lorsque N est une composante locale $k_{\mathfrak{m}}$ de k. Dans ce cas, pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de k contenu dans $\mathfrak{m}$, le morphisme naturel

$$(k/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}\big(\mathrm{Hom}_c(k_{\mathfrak{m}} \widehat{\otimes}\, k/\mathfrak{l},\ k/\mathfrak{l}),\ k/\mathfrak{l}\big)$$

est un isomorphisme, d'où le résultat.

[48] N.D.E. : On a ajouté le point (ii) ci-dessous, ainsi que la démonstration qui suit. L'original indiquait : « Si $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_k$-module plat, il est clair que $\mathbf{M}$ n'est autre que le dual de $\mathbf{M}^*$, donc *les foncteurs* $\mathrm{N} \mapsto \mathbf{N}^*$ *et* $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}^*$ *définissent une anti-équivalence*... »

D'autre part, soit $\mathbf{M}$ un $\mathbf{O}_k$-module plat. Montrons que $\Gamma^*(\mathbf{M}) = \varprojlim \mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*$ est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$. Soit $\mathrm{N} \to \mathrm{N}'$ un morphisme surjectif entre objets de $\mathbf{LF}(k)$. D'après 0.2.F (i) et (ii), il suffit de montrer que l'application naturelle

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*, \mathrm{N}) \longrightarrow \varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*, \mathrm{N}')$$

est surjective. Mais ceci est clair, car N et N′ sont des $k/\mathfrak{l}_0$-modules, pour un certain idéal ouvert $\mathfrak{l}_0$; donc, si $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{l}_0$, tout morphisme $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \to \mathrm{N}'$ se relève en un morphisme $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \to \mathrm{N}$, puisque $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*$ est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k/\mathfrak{l})$.

On a un morphisme $\psi : \mathbf{M} \to \mathbf{V}_k^f(\Gamma^*(\mathbf{M}))$ de foncteurs de $\mathbf{Alf}_{/k}$ dans $(\mathbf{Ens})$. Soit B un objet de $\mathbf{Alf}_{/k}$, montrons que

$$(1) \qquad \psi(\mathrm{B}) : \ \mathbf{M}(\mathrm{B}) \longrightarrow \mathbf{V}_k^f(\Gamma^*(\mathbf{M}))(\mathrm{B}) = \mathrm{Hom}_c\Big(\varprojlim_{\mathfrak{l}} \big(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \,\widehat{\otimes}_k\, \mathrm{B}\big), \mathrm{B}\Big)$$

est une bijection (dans l'égalité ci-dessus, on a utilisé le fait que $\widehat{\otimes}$ commute aux limites projectives filtrantes). Soit $\mathfrak{l}_0$ un idéal ouvert de k contenu dans le noyau de $k \to \mathrm{B}$. D'après le lemme 1.2.3.A, pour tout $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{l}_0$, on a un isomorphisme canonique de B-modules pseudocompacts :

$$\mathbf{M}(k/l)^* \,\widehat{\otimes}_k\, \mathrm{B} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}), \mathrm{B})$$

et, puisque $\mathbf{M}(\mathrm{B}) = \mathbf{M}(k/\mathfrak{l}) \otimes_{k/\mathfrak{l}} \mathrm{B}$, le terme de droite égale $\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathbf{M}(\mathrm{B}), \mathrm{B})$. Donc, le système projectif dans (1) est constant pour $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{l}_0$, et (1) se réduit au morphisme canonique

$$\mathbf{M}(\mathrm{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c\big(\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathbf{M}(\mathrm{B}), \mathrm{B}), \mathrm{B}\big),$$

qui est un isomorphisme d'après 0.2.2, puisque B est artinien et $\mathbf{M}(\mathrm{B})$ un B-module projectif. Ceci prouve le point (i) de la proposition, et le point (ii) découle de l'isomorphisme $(\star)$ établi plus haut.

Remarque 1.2.3.F. — Revenons à l'énoncé de la proposition, et supposons de plus que N soit un k-module pseudocompact *topologiquement libre*. Dans ce cas, on peut choisir « de manière cohérente » des bases pour les C-modules $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})(\mathrm{C})$.

En effet, soient (n_i) une pseudobase de N (0.2.1) et n_i^{C} l'image canonique de n_i dans $\mathrm{C} \,\widehat{\otimes}_k\, \mathrm{N}$, pour $\mathrm{C} \in \mathbf{Alf}_{/k}$. Si l'on définit l'élément δ_i^{C} de $(\mathrm{C} \,\widehat{\otimes}_k\, \mathrm{N})^\dagger$ par les égalités $\delta_i^{\mathrm{C}}(n_i^{\mathrm{C}}) = 1$ et $\delta_i^{\mathrm{C}}(n_j^{\mathrm{C}}) = 0$ pour $i \neq j$, la famille (δ_i^{C}) est une base de $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})(\mathrm{C})$; en outre, pour tout morphisme $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})(\varphi)$ envoie δ_i^{C} sur δ_i^{D}.

1.2.4. — [49] Pour tout k-module pseudocompact E, soit $\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})$ *l'algèbre symétrique complétée de* E, définie de la manière suivante. Soit $\mathrm{T}_k(\mathrm{E})$ la somme directe des k-modules pseudocompacts :

$$\widehat{\bigotimes}_k^n \mathrm{E} = \mathrm{E} \,\widehat{\otimes}_k \cdots \widehat{\otimes}_k\, \mathrm{E} \quad (n \geqslant 0\,; \quad \text{si } n = 0, \quad \widehat{\bigotimes}_k^0 \mathrm{E} = k)\,;$$

on fait de $\mathrm{T}_k(\mathrm{E})$ une k-algèbre graduée en définissant la multiplication de la façon 496

[49] N.D.E. : Dans ce paragraphe, on a modifié l'ordre, en définissant d'abord $\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})$ et énonçant ensuite que $\mathbb{V}_k^f(\mathrm{E})$ représente $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{E})$.

habituelle ; soit alors $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ le quotient de $\mathrm{T}_k(\mathrm{E})$ par l'idéal homogène qui a pour n-ième composante le k-sous-module fermé de $\widehat{\bigotimes}^n_k \mathrm{E}$ engendré par les éléments :

$$x_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} \cdots \mathbin{\widehat{\otimes}} x_i \mathbin{\widehat{\otimes}} x_{i+1} \mathbin{\widehat{\otimes}} \cdots \mathbin{\widehat{\otimes}} x_n - x_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} \cdots \mathbin{\widehat{\otimes}} x_{i+1} \mathbin{\widehat{\otimes}} x_i \mathbin{\widehat{\otimes}} \cdots \mathbin{\widehat{\otimes}} x_n.$$

Si l'on désigne par $\mathrm{S}^n_k(\mathrm{E})$ ce quotient, $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ est évidemment une k-algèbre graduée de n-ième composante $\mathrm{S}^n_k(\mathrm{E})$.

On munit $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ de la topologie linéaire définie par l'ensemble Υ des idéaux $\mathfrak{l}$ tels que $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})/\mathfrak{l}$ soit un k-module de longueur finie et que $\mathrm{S}^n_k(\mathrm{E}) \cap \mathfrak{l}$ soit un sous-module ouvert de $\mathrm{S}^n_k(\mathrm{E})$ pour tout n. Alors, l'algèbre profinie $\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})$ est le séparé complété de $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ pour cette topologie. (50)

On note $\mathbb{V}^f_k(\mathrm{E})$ la k-variété formelle $\mathrm{Spf}(\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E}))$. *Elle représente le k-foncteur* $\mathbf{V}^f_k(\mathrm{E})$*, c.-à-d., pour tout objet* C *de* $\mathbf{Alf}_{/k}$*, on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathbf{V}^f_k(\mathrm{E})(\mathrm{C}) = \mathrm{Hom}_c(\mathrm{E}, \mathrm{C}_{|k}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E}), \mathrm{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(\mathrm{C}), \mathbb{V}^f_k(\mathrm{E})).$$

Dans toute la suite, nous identifions $\mathbb{V}^f_k(\mathrm{E})$ au k-foncteur $\mathbf{V}^f_k(\mathrm{E})$.

1.2.5. — D'après 1.2.4, le morphisme nul de E dans k est associé à un morphisme d'algèbres profinies $\pi : \widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E}) \to k$; ce morphisme π induit l'application nulle sur $\mathrm{S}^n_k(\mathrm{E})$ pour $n \geqslant 1$ et définit une section du morphisme structural $\mathbb{V}^f_k(\mathrm{E}) \to \mathrm{Spf}(k)$.

Nous noterons $\mathbb{V}^{f,0}_k(\mathrm{E})$ la variété formelle qui a pour points les images des points de $\mathrm{Spf}(k)$ par la section $\mathrm{Spf}(\pi)$ et qui a les mêmes algèbres locales que $\mathbb{V}^f_k(\mathrm{E})$ en ces points.

(51) Alors, l'algèbre affine de $\mathbb{V}^{f,0}_k(\mathrm{E})$ est le séparé complété de $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ pour la topologie définie par les idéaux $\mathfrak{l} \in \Upsilon$ (cf. 1.2.4) *qui contiennent* $\mathrm{S}^n_k(\mathrm{E})$ *pour n assez grand.* On en déduit que c'est le produit infini :

$$k[[\mathrm{E}]] = k \times \mathrm{E} \times \mathrm{S}^2_k(\mathrm{E}) \times \mathrm{S}^3_k(\mathrm{E}) \times \cdots$$

D'autre part, soient C un objet de $\mathbf{Alf}_{/k}$, u un élément de $\mathbb{V}^f_k(\mathrm{C}) = \mathrm{Hom}_c(\mathrm{E}, \mathrm{C})$, et $\phi : \widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E}) \to \mathrm{C}$ le morphisme de k-algèbres profinies correspondant à u. Alors $\mathrm{Ker}(\phi)$ est un idéal ouvert (i.e. ϕ appartient à $\mathbb{V}^{f,0}_k(\mathrm{C})$) si et seulement si $\mathrm{Ker}(\phi)$ contient

(50) N.D.E. : Par exemple, soient k un corps, E un k-espace vectoriel pseudocompact, $\mathrm{V} = \mathrm{Hom}_c(\mathrm{E}, k)$; on a $\mathrm{E} \simeq \mathrm{V}^*$ (cf. 0.2.2). Pour tout sous-espace de dimension finie W de V, soit $\mathscr{F}(\mathrm{W})$ l'ensemble des points fermés du k-schéma $\mathbb{V}(\mathrm{W}) = \mathrm{Spec}\, \mathrm{S}_k(\mathrm{W}^*)$. Notons $\mathscr{F}(\mathrm{V})$ la limite inductive des $\mathscr{F}(\mathrm{W})$. Alors $\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})$ est le produit pour $x \in \mathscr{F}(\mathrm{V})$ des k-algèbres pseudocompactes

$$\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})_x = \varprojlim_{\mathrm{W}} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{W},x}$$

où W parcourt les sous-espaces de V de dimension finie tels que $x \in \mathscr{F}(\mathrm{W})$, et $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{W},x}$ désigne le séparé complété de l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathbb{V}(\mathrm{W}),x}$ pour la topologie définie par les idéaux de codimension finie (qui coïncide ici avec la topologie $\mathfrak{m}$-adique). Si k est algébriquement clos et $(v_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une base de V, de sorte que E possède une pseudobase $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$, chaque composante locale $\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})_x$ est isomorphe à l'anneau des séries formelles $k[[e_i, i \in \mathrm{I}]]$, muni de la topologie définie par les idéaux de codimension finie.

(51) N.D.E. : On a détaillé la suite de ce paragraphe.

$S_k^n(E)$ pour n assez grand, c.-à-d., si et seulement si $u(E)$ est contenu dans le radical $\mathfrak{r}(C)$ de C. Donc : *pour tout objet* C *de* $\mathbf{Alf}_{/k}$*, on a des isomorphismes canoniques :* 497

$$\mathbb{V}_k^{f,0}(E)(C) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(k[[E]], C) \simeq \mathrm{Hom}_c(E, \mathfrak{r}(C)).$$

1.2.6. — Une k-variété formelle V est dite de *longueur finie* si son algèbre affine l'est. De même, si S est un schéma, un S-schéma X est dit *de longueur finie* si X est fini sur S et si l'image directe de $\mathscr{O}_X$ sur S est un $\mathscr{O}_S$-module de longueur finie. [52] Donc, se donner un S-schéma de longueur finie X « est la même chose » que se donner un ensemble fini $\{s_1, \dots, s_n\}$ de points fermés de S, et en chacun de ces points une $\mathscr{O}_{S,s_i}$-algèbre de longueur finie.

On voit donc que les S-schémas de longueur finie s'identifient aux variétés formelles de longueur finie sur le schéma formel $\widehat{S}$ qui suit. L'espace topologique sous-jacent à $\widehat{S}$ est l'ensemble des points fermés de S muni de la topologie discrète, si s est un tel point fermé, le faisceau structural $\mathscr{O}_{\widehat{S}}$ a pour tige $\mathscr{O}_{\widehat{S},s}$ en s le séparé complété $\widehat{\mathscr{O}}_{S,s}$ de $\mathscr{O}_{S,s}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux de colongueur finie ; on a donc $\widehat{S} = \mathrm{Spf}\,\mathscr{A}(\widehat{S})$, où $\mathscr{A}(\widehat{S})$ est le produit des $\widehat{\mathscr{O}}_{S,s}$, pour s parcourant les points fermés de S, muni de la topologie produit.

Définition. — Si X est un S-schéma, on note $\widehat{X}/\widehat{S}$ la variété formelle sur $k = \mathscr{A}(\widehat{S})$ définie comme suit. L'espace topologique sous-jacent est formé des points $x \in X$ tels que $[\kappa(x) : \kappa(s)] < \infty$, où s est l'image de x dans S ; l'anneau local $\mathscr{O}_{\widehat{X}/\widehat{S},x}$ est le séparé complété de $\mathscr{O}_{X,x}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux I de $\mathscr{O}_{X,x}$ tels que $\mathscr{O}_{X,x}/I$ soit de longueur finie comme $\mathscr{O}_{S,s}$-module (N. B. puisque $[\kappa(x) : \kappa(s)] < \infty$, ceci équivaut à dire que $\mathscr{O}_{X,x}/I$ est de longueur finie comme $\mathscr{O}_{X,x}$-module).

Soit $\mathbf{Vaf}^{\ell f}_{/\widehat{S}}$ la catégorie des variétés formelles de longueur finie sur $\widehat{S}$ (identifiée à celle des S-schémas de longueur finie). D'après 1.1 et 1.2.1, la catégorie $\mathbf{Vaf}_{/\widehat{S}}$ des variétés formelles sur $\widehat{S}$ est équivalente à celle des foncteurs contravariants exacts à gauche de $\mathbf{Vaf}^{\ell f}_{/\widehat{S}}$ dans $(\mathbf{Ens})$. En particulier, pour tout S-schéma X, le foncteur $T \mapsto \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Sch}_{/S})}(T, X)$, de $\mathbf{Vaf}^{\ell f}_{/\widehat{S}}$ vers $(\mathbf{Ens})$, est un tel foncteur exact à gauche, donc correspond à une variété formelle sur $\widehat{S}$. Celle-ci n'est autre que $\widehat{X}/\widehat{S}$: [53]

Proposition. — *Pour tout* S*-schéma* X*, les foncteurs*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/\widehat{S}}}(-, \widehat{X}/\widehat{S}) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Sch}_{/S})}(-, X)$$

ont même restriction à $\mathbf{Vaf}^{\ell f}_{/\widehat{S}}$*. On obtient ainsi un* foncteur $X \mapsto \widehat{X}/\widehat{S}$ *de* $(\mathbf{Sch}_{/S})$ *vers* $\mathbf{Vaf}_{/\widehat{S}}$*,* qui commute aux limites projectives finies.

---

[52] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[53] N.D.E. : On a amplifié la proposition qui suit, en y insérant le fait que le foncteur $X \mapsto \widehat{X}/\widehat{S}$ commute aux limites projectives finies (dans l'original, ceci figurait dans la démonstration de 1.3.4 – la démonstration donnée ici est plus directe que l'originale). De plus, ce résultat sera utile dans la Section 2 et dans 3.3.1.

En effet, on voit facilement que la variété formelle $\widehat{X}/\widehat{S}$ a la propriété requise, et que la correspondance $X \mapsto \widehat{X}/\widehat{S}$ est fonctorielle. Prouvons la seconde assertion.

Posons $\mathscr{S} = (\mathbf{Sch}_{/S})$ et $\mathscr{V} = \mathbf{Vaf}_{/\widehat{S}}$, et notons $\widehat{X}$ au lieu de $\widehat{X}/\widehat{S}$. On sait (1.2.B) que $\mathscr{V}$ possède des limites projectives arbitraires. Soit $(X_i)_{i\in I}$ un système projectif dans $\mathscr{S}$ et supposons que $X = \varprojlim X_i$ existe dans $\mathscr{S}$ (ce qui est le cas si I est fini). Comme le foncteur qui associe à tout objet Y de $\mathscr{S}$ (resp. V de $\mathscr{V}$) le foncteur $\mathbf{h}_Y = \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(-, Y)$ (resp. $\mathbf{h}_V = \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(-, V)$) commute aux limites projectives, on a, pour tout S-schéma T de longueur finie, des isomorphismes fonctoriels :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(T, X) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(T, X_i) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(T, \widehat{X}_i) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(T, \varprojlim \widehat{X}_i).$$

Par conséquent, le foncteur $X \mapsto \widehat{X}/\widehat{S}$ commute aux limites projectives lorsqu'elles existent dans $(\mathbf{Sch}_{/S})$; en particulier, il commute aux limites projectives finies.

498 ***1.3. Proposition***. — *Soient $f : X \to Y$ un morphisme de variétés formelles sur k,* A *et* B *les algèbres affines de* X *et* Y, $g : B \to A$ *le morphisme induit par f. Alors f est un* monomorphisme *de $\mathbf{Vaf}_{/k}$ si et seulement si g est une* surjection.

[54] D'après 1.1, $A \mapsto \mathrm{Spf}(A)$ est une anti-équivalence de $\mathbf{Alp}_{/k}$ sur $\mathbf{Vaf}_{/k}$, donc f est un monomorphisme si et seulement si g est un épimorphisme, et ceci est bien le cas si g est surjectif.

Réciproquement, supposons que g soit un épimorphisme et montrons qu'il est surjectif. Pour tout $\mathfrak{n} \in \Upsilon(B)$, posons $A_{\mathfrak{n}} = A \widehat{\otimes}_B B_{\mathfrak{n}}$; d'après 0.4, A est un B-module pseudocompact, donc est le produit des $A_{\mathfrak{n}}$ (cf. 0.3.6). Alors, g est le produit des morphismes $g_{\mathfrak{n}} : B_{\mathfrak{n}} \to A_{\mathfrak{n}}$ déduits de g par changement de base. Ceux-ci sont encore des épimorphismes, ce qui nous ramène à démontrer le résultat lorsque B est local, d'idéal maximal $\mathfrak{n}$. Posons $K = B/\mathfrak{n}$.

D'après le lemme de Nakayama 0.3.3, il suffit de montrer que le morphisme $g \widehat{\otimes}_B K$ est surjectif ; il est déduit de g par changement de base, donc est un épimorphisme de $\mathbf{Alp}_{/K}$. On peut donc supposer que $B = K$ est un corps. Or f est un monomorphisme si et seulement si le morphisme diagonal $X \to X \times_Y X$ est un isomorphisme, c'est-à-dire si l'homomorphisme $x \widehat{\otimes}_K x' \to x x'$ est un isomorphisme de $A \widehat{\otimes}_K A$ sur A. Comme K est un corps, cela implique $A = K$.

Remarque. — [55] Il résulte de la proposition que tout *monomorphisme* $f : X \to Y$ de variétés formelles est un *isomorphisme* de X *sur une sous-variété formelle* (nécessairement fermée !) de Y.

1.3.1. — La proposition précédente entraîne en particulier que *tout monomorphisme* $f : X \to Y$ *de* $\mathbf{Vaf}_{/k}$ *est effectif* (cf. IV 1.3). [56] Il n'en va pas de même pour les épimorphismes, comme on le voit facilement en modifiant un peu le contrexemple

[54] N.D.E. : On a détaillé le début de la démonstration.

[55] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

[56] N.D.E. : c.-à-d., dans la catégorie opposée $(\mathbf{Vaf}_{/k})^0 = \mathbf{Alp}_{/k}$, le morphisme $g : B \to A$ correspondant à f est un épimorphisme effectif. Ceci est bien le cas, car g est surjectif, donc induit (cf. la démonstration de 0.2.B) un *isomorphisme* de k-algèbres profinies $B/I \xrightarrow{\sim} A$, où $I = \mathrm{Ker}\, g$. Par

de l'Exp. V, § 2.c) ; [57] c'est pourquoi nous allons considérer une classe sympathique d'épimorphismes effectifs.

Lemme. — [58] *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de* k*-variétés formelles et soient* A, B *les algèbres affines de* X, Y *et* $f^\natural : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *le morphisme induit par* f*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout* $x \in \mathrm{X}$*, l'homomorphisme* $f_x^\natural : \mathscr{O}_{\mathrm{Y},f(x)} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *fait de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{Y},f(x)}$*-module pseudocompact* topologiquement libre*.*

(ii) *Pour tout* $y \in \mathrm{Y}$*, la composante locale* $\mathrm{A}_y = \prod_{f(x)=y} \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *est un* B_y*-module pseudocompact* topologiquement libre*.*

(iii) $f^\natural : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *fait de* A *un* B*-module pseudocompact projectif.*

(iv) *Le foncteur* $\mathbf{PC}(\mathrm{B}) \to \mathbf{PC}(\mathrm{A})$*,* $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} \mathrm{A}$ *est exact.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que f *est* topologiquement plat*.*

Les implications (i) ⇒ (ii) ⇔ (iii) ⇔ (iv) découlent de 0.2.F (iii) et 0.3.7. Réciproquement, supposons (ii) vérifié et soient $x \in \mathrm{X}$ et $y = f(x)$. Comme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est un facteur direct de A_y, c'est un B_y-module pseudocompact projectif, donc topologiquement libre d'après 0.2.1 (puisque B_y est local).

D'autre part, un morphisme $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ de k-variétés formelles est dit *surjectif* s'il induit une surjection des ensembles sous-jacents.

Proposition. — *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme* surjectif et topologiquement plat *de* k*-variétés formelles. Alors* f *est un* épimorphisme effectif (cf. IV 1.3). 499

En effet, soient A, B les algèbres affines de X, Y et $g : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ le morphisme induit par f. Il s'agit de montrer que Y s'identifie au conoyau de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{X}$, c.-à-d., que pour tout $\mathfrak{n} \in \Upsilon(\mathrm{B})$, $\mathrm{B}_{\mathfrak{n}}$ s'identifie au sous-anneau de $\mathrm{A}_{\mathfrak{n}} = \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} \mathrm{B}_{\mathfrak{n}}$ formé des a tels que $a \mathbin{\widehat{\otimes}} 1 = 1 \mathbin{\widehat{\otimes}} a$.

On peut donc supposer B local, d'idéal maximal $\mathfrak{n}$. Notre hypothèse signifie alors que g fait de A un B-module topologiquement libre et non nul. D'après le lemme de Nakayama 0.3.3, $\mathrm{A}/\overline{\mathfrak{n}\mathrm{A}}$ n'est pas nul, de sorte que le morphisme $g' : \mathrm{B}/\mathfrak{n} \to \mathrm{A}/\overline{\mathfrak{n}\mathrm{A}}$ déduit de g est injectif. D'après le lemme 1.3.2 ci-dessous, B est un facteur direct de A comme B-module, disons $\mathrm{A} = \mathrm{B} \oplus \mathrm{A}'$; il en résulte que B s'identifie à la partie de A formée des a tels que $a \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} 1 = 1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} a$.

---

conséquent, tout morphisme $\phi : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ de $\mathbf{Alp}_{/k}$, nul sur I, descend en un morphisme $\overline{\phi} : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ tel que $\phi = \overline{\phi} \circ g$.

[57] N.D.E. : i.e. soient k un corps, $\mathrm{X} = \mathrm{Spf}(k[[\mathrm{T}]])$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{Spf}(\mathrm{B})$, où B est la sous-$k$-algèbre de $\mathrm{A} = k[[\mathrm{T}]]$ engendrée topologiquement par T^3 et T^4 (c.-à-d., B est formée des séries formelles $\sum a_n \mathrm{T}^n$ telles que $a_n = 0$ pour $n = 1, 2, 5$). Alors $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un épimorphisme qui n'est pas effectif ; en effet, le conoyau de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{X}$ est $\mathrm{Spf}(\mathrm{B}')$, où B' est la sous-algèbre de A formée des a tels que $a \mathbin{\widehat{\otimes}} 1 = 1 \mathbin{\widehat{\otimes}} a$, et B' contient T^5.

[58] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, qui explique la terminologie « topologiquement plat ».

1.3.2. Lemme. — *Soient* B *un anneau pseudocompact* local*,* $\mathfrak{n}$ *son idéal maximal,* M *et* N *deux* B*-modules pseudocompacts* projectifs *et* g *un morphisme* $\mathrm{M} \to \mathrm{N}$*. Si* $(\mathrm{B}/\mathfrak{n})\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{B}}\, g$ *est injectif,* g *est un isomorphisme de* M *sur un facteur direct de* N*.*

En effet, supposons que $g' = (\mathrm{B}/\mathfrak{n})\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{B}}\, g$ soit injectif. Comme $\mathrm{B}/\mathfrak{n}$ est un corps, g' possède alors une rétraction r'. Notons p et q les projections canoniques de M et N sur $\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{n}\mathrm{M}}$ et $\mathrm{N}/\overline{\mathfrak{n}\mathrm{N}}$; comme N est projectif, il existe un morphisme $r : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ tel que $p \circ r = r' \circ q$; par conséquent, r' est déduit de r par passage au quotient. Alors, puisque $r' \circ g'$ est un isomorphisme, il en est de même de $r \circ g$, d'après 0.3.4 (puisque M est projectif). Soit s l'isomorphisme réciproque de $r \circ g$, alors $s \circ r$ est une rétraction de g.

1.3.3. Proposition. — *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *et* $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *des morphismes de* k*-variétés formelles.*

500 (i) *Si* f *et* g *sont topologiquement plats,* $g \circ f$ *l'est aussi.*

(ii) *Si* f *et* $g \circ f$ *sont topologiquement plats et si* f *est surjectif,* g *est topologiquement plat.*

(iii) *Si* f *est topologiquement plat,* $f \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ *l'est pour tout changement de base* $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$*.*

Les assertions (i) et (iii) sont claires. Pour prouver (ii), appelons $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ les algèbres affines de $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$, et $f' : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ et $g' : \mathrm{C} \to \mathrm{B}$ les morphismes induits par f et g. Comme $g \circ f$ est topologiquement plat, $f' \circ g'$ fait de A un C-module pseudocompact projectif ; de même, f' fait de A un B-module pseudocompact projectif et fidèle. Lorsque P parcourt les C-modules pseudocompacts et N les B-modules pseudocompacts, les foncteurs $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{C}}\,\mathrm{A}$ et $\mathrm{N} \mapsto \mathrm{N}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{B}}\,\mathrm{A}$ sont donc exacts ; comme le deuxième est en outre fidèle, le foncteur $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{C}}\,\mathrm{B}$ est exact ; d'après 0.3.7, B est donc un C-module pseudocompact projectif.

1.3.4. Proposition. — *Soient* S *un schéma,* Y *un* S*-schéma* localement noethérien *et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* S*-morphisme* localement de type fini et fidèlement plat*, de sorte que* f *est un* épimorphisme effectif*, i.e. la suite ci-dessous est* exacte (cf. IV 6.3.1 (iv) et IV 1.3) *:*

$$(*) \qquad \mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X} \overset{\mathrm{pr}_1}{\underset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} \mathrm{X} \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{Y}\,.$$

Alors le morphisme de $\widehat{\mathrm{S}}$*-variétés formelles* $\widehat{f} : \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}} \to \widehat{\mathrm{Y}}/\widehat{\mathrm{S}}$ (cf. 1.2.6) *est* surjectif et topologiquement plat*, et la suite ci-dessous, déduite de* $(*)$*, est* exacte *:*

$$\widehat{(*)} \qquad \widehat{\mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}} \overset{\widehat{\mathrm{pr}_1}}{\underset{\widehat{\mathrm{pr}_2}}{\rightrightarrows}} \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}} \xrightarrow{\ \widehat{f}\ } \widehat{\mathrm{Y}}/\widehat{\mathrm{S}}\,.$$

501 Soit en effet y un point de Y de projection s sur S et tel que $\kappa(y)$ soit une extension finie du corps résiduel $\kappa(s)$ de s. Comme f est surjectif et localement de type fini, $f^{-1}(y)$ est non vide et localement de type fini sur $\kappa(y)$; les points fermés de $f^{-1}(y)$ sont alors les points de $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ se projetant sur y. Ceci montre que $\widehat{f}$ est surjectif.

(59) Soit x un point fermé de $f^{-1}(y)$. Comme Y est localement noethérien et f localement de type fini, l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$ (resp. $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$) est noethérien, donc les puissances de l'idéal maximal sont de colongueur finie, de sorte que l'anneau local de $\widehat{\mathrm{Y}}/\widehat{\mathrm{S}}$ en y (resp. de $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ en x) est le complété $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{Y},y}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$ (resp. $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$) pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Alors, comme f est plat, $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$ est plat sur $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{Y},y}$, d'après SGA 1, IV 5.8. Donc, d'après 0.3.8, $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$ est un $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{Y},y}$-module topologiquement libre. Ceci montre que $\widehat{f}$ est topologiquement plat.

Donc, d'après la proposition 1.3.1, $\widehat{f}$ est un épimorphisme effectif, i.e. la suite ci-dessous (où l'on a noté $\widehat{\mathrm{X}}$ au lieu de $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$) est exacte :

$$\widehat{\mathrm{X}} \underset{\widehat{\mathrm{Y}}}{\times} \widehat{\mathrm{X}} \underset{\widehat{\mathrm{pr}_2}}{\overset{\widehat{\mathrm{pr}_1}}{\rightrightarrows}} \widehat{\mathrm{X}} \xrightarrow{\ \widehat{f}\ } \widehat{\mathrm{Y}}\ .$$

De plus, d'après 1.2.6, on a un isomorphisme naturel (en particulier, qui commute avec les projections sur $\widehat{\mathrm{X}}$) :

$$\widehat{\mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X}} \simeq \widehat{\mathrm{X}} \underset{\widehat{\mathrm{Y}}}{\times} \widehat{\mathrm{X}}.$$

Par conséquent, la suite $\widehat{(*)}$ est exacte.

1.3.5. — Soit k un anneau pseudocompact. Une variété formelle X sur k est dite *topologiquement plate* si son algèbre affine A est un k-module pseudocompact *projectif*, c.-à-d., si le morphisme structural $\mathrm{X} \to \mathrm{Spf}(k)$ est topologiquement plat.

(60) Notons d'abord que 0.2.2 et 0.3.6 entraînent le résultat suivant (analogue à $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$, 3.1.1).

Lemme 1.3.5.A. — *Supposons k* artinien. *Les foncteurs* $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^{\dagger} = \mathrm{Hom}_c(\mathrm{A}, k)$ *et* $\mathrm{C} \mapsto \mathrm{C}^{*} = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{C}, k)$ *définissent une* anti-équivalence *entre la catégorie des* k-algèbres profinies topologiquement plates*, et celle des* k-coalgèbres plates.

En effet, si A est une k-algèbre profinie topologiquement plate, alors, d'après 0.3.6, on a un *isomorphisme* de k-modules :

$$\mathrm{A}^{\dagger} \otimes_k \mathrm{A}^{\dagger} \xrightarrow{\ \sim\ } (\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A})^{\dagger},$$

de sorte que la multiplication $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ induit par dualité une structure de k-coalgèbre sur $\mathrm{A}^{\dagger}$. Le reste découle alors de la proposition 0.2.2.

Revenons au cas d'un anneau pseudocompact k arbitraire.

Définition 1.3.5.B. — À toute k-variété formelle X dont l'anneau affine A est un k-module pseudocompact *projectif*, on associe une $\mathbf{O}_k$-coalgèbre plate $\mathbf{H}(\mathrm{X})$, définie comme suit.

Notons $\mathbf{H}(\mathrm{X})$ le $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})$ « dual de A » ; c'est un $\mathbf{O}_k$-module plat, puisque le k-module pseudocompact sous-jacent à A est projectif (cf. 1.2.3.C). De plus, d'après 502

(59) N.D.E. : On a détaillé ce qui suit ; ensuite, on a tiré profit de l'ajout fait en 1.2.6.

(60) N.D.E. : On a ajouté le lemme suivant, utilisé implicitement dans l'original ; d'autre part, on a introduit la numérotation 1.3.5.A à 1.3.5.D, pour des références ultérieures.

0.3.6, l'on a :

$$\mathbf{V}_k^f(\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{A}) \simeq \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A}),$$

et donc la multiplication de A induit par transposition un morphisme diagonal :

$$\mathbf{H}(\mathrm{X}) = \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{A}) = \mathbf{H}(\mathrm{X}) \otimes \mathbf{H}(\mathrm{X})$$

qui fait de $\mathbf{H}(\mathrm{X})$ une $\mathbf{O}_k$-coalgèbre plate. Nous dirons que $\mathbf{H}(\mathrm{X})$ est *la coalgèbre de* X *sur* $\mathbf{O}_k$.

Définition 1.3.5.C. — Réciproquement, à toute $\mathbf{O}_k$-coalgèbre $\mathbf{C}$ on peut associer un k-foncteur (cf. 1.2.1) $\mathrm{Spf}^*(\mathbf{C})$, défini comme suit. Pour tout objet B de $\mathbf{Alf}_{/k}$, on pose (avec les notations de $\mathrm{VII_A}$ 3.1) :

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{Spf}^*(\mathbf{C})(\mathrm{B}) &= \mathrm{Hom}_{\text{B-coalg.}}(\mathrm{B}, \mathbf{C}(\mathrm{B})) \\ &= \{x \in \mathbf{C}(\mathrm{B}) \mid \varepsilon_{\mathbf{C}(\mathrm{B})}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \Delta_{\mathbf{C}(\mathrm{B})}(x) = x \otimes x\}. \end{aligned}$$

[61] Supposons de plus que le $\mathbf{O}_k$-module sous-jacent à $\mathbf{C}$ soit *admissible* (cf. 1.2.1), et posons

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{A} = \Gamma^*(\mathbf{C}) = \varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathbf{C}(k/\mathfrak{l})^* .$$

Alors, les structures d'algèbres sur chaque $\mathbf{C}(k/\mathfrak{l})^*$ munissent A d'une structure de k-algèbre profinie. Pour tout objet B de $\mathbf{Alf}_{/k}$, on a :

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(\mathrm{B}), \mathrm{Spf}(\mathrm{A})) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/\mathrm{B}}}(\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{B}, \mathrm{B}).$$

Supposons enfin que $\mathbf{C}$ soit un $\mathbf{O}_k$-module *plat*. Alors, d'après 1.2.3.E, $\mathrm{A} = \Gamma^*(\mathbf{C})$ est un k-module pseudocompact *projectif*. De plus, on a vu dans la démonstration de *loc. cit.* que, si $\mathfrak{l}_0$ est un idéal ouvert de k contenu dans le noyau de $k \to \mathrm{B}$, on a des isomorphismes

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{B} = \varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathbf{C}(k/\mathfrak{l})^* \,\widehat{\otimes}_k\, \mathrm{B} \simeq \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}_0}(\mathbf{C}(k/\mathfrak{l}_0), \mathrm{B}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathbf{C}(\mathrm{B}), \mathrm{B})$$

et nous noterons $\mathbf{C}(\mathrm{B})^*$ le terme de droite. Enfin, d'après le lemme 1.3.5.A appliqué à l'anneau artinien B, on a un isomorphisme naturel

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{Hom}_{\text{B-coalg.}}(\mathrm{B}, \mathbf{C}(\mathrm{B})) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/\mathrm{B}}}(\mathbf{C}(\mathrm{B})^*, \mathrm{B}).$$

Alors, en combinant (1), (5), (4), (3) et (2), on obtient, lorsque $\mathbf{C}$ est une $\mathbf{O}_k$-coalgèbre *plate*, un isomorphisme de foncteurs :

$$(\star) \qquad \mathrm{Spf}^*(\mathbf{C}) \simeq \mathrm{Spf}(\mathrm{A}) = \mathrm{Spf}(\Gamma^*(\mathbf{C})).$$

Par conséquent, si l'on note $\mathscr{A}(\mathrm{X})$ l'algèbre affine d'une k-variété formelle X, on obtient, en tenant-compte de 1.2.3.E :

Proposition 1.3.5.D. — (i) *Les foncteurs* $\mathrm{X} \mapsto \mathbf{H}(\mathrm{X}) = \mathbf{V}_k^f(\mathscr{A}(\mathrm{X}))$ *et* $\mathbf{C} \mapsto \mathrm{Spf}^*(\mathbf{C}) = \mathrm{Spf}(\Gamma^*(\mathbf{C}))$ *définissent une* équivalence *entre la catégorie des* k-variétés formelles topologiquement plates *et celle des* $\mathbf{O}_k$-coalgèbres plates.

(ii) *De plus, cette équivalence* « commute au changement de base » *: si* $k \to \mathrm{K}$ *est un morphisme d'anneaux pseudocompacts, alors* $\mathrm{X}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K}$ *correspond à* $\mathbf{H}(\mathrm{X}) \otimes_k \mathrm{K}$.

[61] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

1.3.6. — Dans la suite de cet exposé, nous définirons plusieurs fois une k-variété formelle topologiquement plate X en exhibant la coalgèbre $\mathbf{H}(\mathrm{X})$. Il nous faudra alors interpréter au moyen de $\mathbf{H}(\mathrm{X})$ certaines propriétés géométriques de X. Nous donnons ici un exemple de cette situation : supposons donnée une section σ du morphisme structural $\mathrm{X} \to \mathrm{Spf}(k)$ et demandons-nous sous quelle condition σ induit un isomorphisme des espaces topologiques sous-jacents. [62]

Pour commencer, supposons k artinien. Soient $(\mathrm{H}, \Delta, \varepsilon)$ une k-coalgèbre plate, $\mathrm{H}^+ = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ et $\mathrm{A} = \mathrm{H}^*$ la k-algèbre profinie duale de H. Supposons donné un morphisme de k-coalgèbres $k \to \mathrm{H}$, c.-à-d., un élément ϕ de H tel que $\varepsilon(\phi) = 1$ et $\Delta(\phi) = \phi \otimes \phi$. D'une part, ϕ définit un morphisme continu d'algèbres $\Phi : \mathrm{A} \to k$, et donc une section $\sigma : \mathrm{Spf}(k) \to \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ de la projection $\mathrm{Spf}(\mathrm{A}) \to \mathrm{Spf}(k)$.

D'autre part, on définit des sous-k-modules de H en posant $\mathrm{H}_0 = k\phi$ et, pour $n \geqslant 1$, **503**

$$\mathrm{H}_n = \{x \in \mathrm{H} \mid \Delta(x) - x \otimes \phi \in \mathrm{H}_{n-1} \otimes \mathrm{H}^+\};$$

ceci vaut aussi pour $n = 0$ si l'on pose $\mathrm{H}_{-1} = (0)$. On voit, par récurrence sur n, que $\mathrm{H}_{n-1} \subset \mathrm{H}_n$. On dira que $\mathrm{H}_0 \subset \mathrm{H}_1 \subset \cdots$ est la *filtration de* H *définie par* ϕ.

Remarque. — Comme $\Delta(\mathrm{H}_n) \subset \mathrm{H}_n \otimes \mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{H}_{n-1} \otimes \mathrm{H}^+$, on a $\Delta(\mathrm{H}_n) \subset \mathrm{H}_n \otimes \mathrm{H}$. Puisque Δ est cocommutative (i.e. $\sigma \circ \Delta = \Delta$, où $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$), on a également $\Delta(\mathrm{H}_n) \subset \mathrm{H} \otimes \mathrm{H}_n$. Lorsque H/H_n est *plat* sur k, il en résulte que H_n est une sous-coalgèbre de H (voir aussi 1.3.6.A (iii) ci-dessous). Mais en général, $\Delta : \mathrm{H}_n \to \mathrm{H}_n \otimes \mathrm{H}$ ne se factorise pas à travers $\mathrm{H}_n \otimes \mathrm{H}_n$. [63]

Lemme 1.3.6.A. — *Soient k un anneau* artinien*,* H *une k-coalgèbre* plate*,* $\mathrm{A} = \mathrm{H}^*$ *la k-algèbre profinie duale, ϕ un élément de* H *tel que $\varepsilon(\phi) = 1$ et $\Delta(\phi) = \phi \otimes \phi$. Soient $\Phi : \mathrm{A} \to k$ le morphisme continu d'algèbres, $\sigma : \mathrm{Spf}(k) \to \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ la section de* $\mathrm{Spf}(\mathrm{A}) \to \mathrm{Spf}(k)$*, et* (H_n) *la filtration de* H *définis par ϕ. Notons* $\mathrm{I} = \mathrm{Ker}\,\Phi$*.*

(i) *Pour tout $n \geqslant 1$,* H_{n-1} *est l'orthogonal dans* H *de l'adhérence* $\overline{\mathrm{I}^n}$ *de* I^n*.*

(ii) *Par conséquent, σ induit une bijection des ensembles sous-jacents si et seulement si* $\mathrm{H} = \bigcup_n \mathrm{H}_n$*.* [64]

(iii) *Si de plus chaque* H/H_n *est* plat *sur k, alors, pour tout $n \geqslant 0$,*

$$(*) \qquad \Delta(\mathrm{H}_n) \subset \sum_{i=0}^{n} \mathrm{H}_i \otimes \mathrm{H}_{n-i}\,;$$

en particulier, chaque H_n *est alors une* sous-coalgèbre *de* H.

[62] N.D.E. : Dans le lemme 1.3.6.A qui suit, on a détaillé la démonstration des points (i) et (ii), et l'on a ajouté le point (iii).

[63] N.D.E. : Par exemple, soient k_0 un corps, $k = k_0[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^n)$, où $n \geqslant 4$, $\mathrm{H} = k\,\phi \oplus k\,x$, avec $\varepsilon(x) = 0$ et $\Delta(x) = x \otimes \phi + \phi \otimes x + t\,x \otimes x$, où t est l'image de T dans k. Alors, $\mathrm{H}_i = k\,\phi \oplus t^{n-i}\,x$ pour $i = 0, \ldots, n$ mais, pour $2 \leqslant i \leqslant n-2$, $\Delta(t^{n-i}\,x)$ n'appartient pas à l'image de $\mathrm{H}_i \otimes \mathrm{H}_i$ dans $\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}$.

[64] N.D.E. : Dans ce cas, on dit que la coalgèbre H est *connexe*, cf. l'ajout 2.9.

Démonstration. Notons que, pour tout $x \in \mathrm{H}$, l'application $\mathrm{A} \to k$, $f \mapsto f(x)$ est continue, donc si I^n est annulé par x, il en est de même de son adhérence $\overline{\mathrm{I}^n}$. On pose alors, pour tout $n \geqslant 1$,

$$(\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp} = \{x \in \mathrm{H} \mid f(x) = 0, \quad \text{pour tout } f \in \overline{\mathrm{I}^n}\}.$$

Supposons que $\sigma : \mathfrak{m} \mapsto \Phi^{-1}(\mathfrak{m})$ soit une bijection de $\mathrm{Spf}(k)$ sur $\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$. Comme I est contenu dans l'intersection des $\Phi^{-1}(\mathfrak{m})$, il résulte de 0.1.2 que la suite des idéaux (I^n) tend vers 0. Soit alors $x \in \mathrm{H}$; comme $\mathrm{J}(x) = \{f \in \mathrm{A} \mid f(x) = 0\}$ est un sous-k-module ouvert et fermé de A, il contient $\overline{\mathrm{I}^n}$ pour n assez grand, autrement dit, $x \in (\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp}$ pour n assez grand.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{H} = \bigcup_n (\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp}$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier ouvert de A ; d'après la définition de la topologie de A (0.2.2), $\mathfrak{p}$ contient un sous-k-module ouvert de la forme

$$\mathscr{V}(x_1, \dots, x_s) = \{f \in \mathrm{A} \mid f(x_1) = \cdots = f(x_s) = 0\}.$$

D'après l'hypothèse, il existe un entier n tel que $x_1, \dots, x_s \in (\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp}$, et donc $\mathrm{I}^n \subset \mathfrak{p}$. De plus, comme k est artinien, $\mathrm{Spf}(k)$ est un ensemble fini $\{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r\}$ et il existe un entier $t \geqslant 1$ tel que $(\prod_i \mathfrak{m}_i)^t = 0$, d'où

$$\prod_i \Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i)^t \subset \mathrm{I}.$$

Donc $\mathfrak{p}$ contient le produit des $\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i)^{tn}$; puisque $\mathfrak{p}$ est premier, il en résulte que $\mathfrak{p}$ contient, donc égale, l'un des $\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i)$. On a ainsi démontré que :

$$\sigma \text{ est une bijection } \iff \mathrm{H} = \bigcup_n (\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp}. \qquad [65]$$

D'autre part, on a $\mathrm{H} = k\phi \oplus \mathrm{H}^+$; notons π la projection $\mathrm{H} \to \mathrm{H}^+$ de noyau $k\phi$. Pour tout $n \geqslant 0$, soient Δ^n la comultiplication « itérée » $\mathrm{H} \to \mathrm{H}^{\otimes(n+1)}$, $\overline{\Delta^n}$ la composée de Δ^n avec la projection $\pi^{\otimes(n+1)} : \mathrm{H}^{\otimes(n+1)} \to (\mathrm{H}^+)^{\otimes(n+1)}$, et

$$\mathrm{H}'_n = \mathrm{Ker}(\overline{\Delta^n}) = \big\{x \in \mathrm{H} \mid \Delta^n(x) \in \sum_{i=0}^{n} \mathrm{H}^{\otimes(n-i)} \otimes \mathrm{H}_0 \otimes \mathrm{H}^{\otimes i}\big\}.$$

(On pose $\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathrm{H}}$, d'où $\mathrm{H}'_0 = \mathrm{H}_0$). On voit facilement, par récurrence sur n, que

$$(*) \qquad \mathrm{H}_n \subset \mathrm{H}'_n \subset (\overline{\mathrm{I}^{(n+1)}})^{\perp}.$$

Jusqu'à présent, on n'a pas utilisé l'hypothèse que H soit plat sur k. Supposons maintenant H plat, donc *projectif* sur k, de sorte que $\mathrm{A}^{\dagger} = \mathrm{H}$, d'après 0.2.2, et montrons que $\mathrm{H}_n = (\overline{\mathrm{I}^{(n+1)}})^{\perp}$. C'est clair pour $n = 0$. Supposons-le donc vérifié pour $n < r$. Alors H_{r-1} est le noyau du morphisme $\mathrm{H} \to (\overline{\mathrm{I}^r})^{\dagger}$ et donc, puisque H^+ est plat, le morphisme

$$(\mathrm{H}/\mathrm{H}_{r-1}) \otimes \mathrm{H}^+ \longrightarrow (\overline{\mathrm{I}^r})^{\dagger} \otimes \mathrm{H}^+$$

[65] N.D.E. : Ceci vaut également sans supposer H *cocommutative* (k restant un anneau commutatif artinien) : dans ce cas, une base de voisinages de 0 dans $\mathrm{A} = \mathrm{H}^*$ est donnée par les idéaux bilatères J tels que A/J soit de longueur finie sur k, et la démonstration précédente montre que $\mathrm{H} = \bigcup_n (\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp}$ si et seulement si les $\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i)$ sont les seuls idéaux premiers ouverts de A.

est injectif. D'autre part, l'hypothèse entraîne que I est un k-module pseudocompact projectif (car facteur direct de $\mathrm{A} = \mathrm{H}^*$), d'où, d'après 0.3.6,

$$(\overline{\mathrm{I}^r} \,\widehat{\otimes}\, \mathrm{I})^\dagger \simeq (\overline{\mathrm{I}^r})^\dagger \otimes \mathrm{I}^\dagger = (\overline{\mathrm{I}^r})^\dagger \otimes \mathrm{H}^+.$$

Alors, la suite exacte :

$$\overline{\mathrm{I}^r} \,\widehat{\otimes}\, \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}/\overline{\mathrm{I}^{r+1}} \longrightarrow 0$$

donne par dualité la suite exacte : 504

$$(1) \qquad (\overline{\mathrm{I}^r})^\dagger \otimes \mathrm{H}^+ \xleftarrow{\ \delta\ } \mathrm{H} \longleftarrow (\mathrm{A}/\overline{\mathrm{I}^{r+1}})^\dagger \longleftarrow 0,$$

où δ est obtenu en composant Δ_{H} avec la projection :

$$(2) \qquad \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H} \otimes \mathrm{H}^+ \longrightarrow (\mathrm{H}/\mathrm{H}_{r-1}) \otimes \mathrm{H}^+ \hookrightarrow (\overline{\mathrm{I}^r})^\dagger \otimes \mathrm{H}^+.$$

Or, pour tout $u \in \mathrm{H}$, la projection de $\Delta(u)$ sur $\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}^+$ est $\Delta(u) - u \otimes \phi$. Alors, (1) et (2) montrent que si u appartient à $(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{I}^{r+1}})^\dagger = (\overline{\mathrm{I}^{r+1}})^\perp$, alors $\Delta(u) - u \otimes \phi$ appartient au noyau de l'application $\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}^+ \to (\mathrm{H}/\mathrm{H}_{r-1}) \otimes \mathrm{H}^+$, c'est-à-dire à $\mathrm{H}_{r-1} \otimes \mathrm{H}^+$, et donc $u \in \mathrm{H}_r$. Ceci achève la démonstration des points (i) et (ii), et montre aussi que $\mathrm{H}_n = \mathrm{Ker}(\overline{\Delta^n})$.

Démontrons (iii). Pour tout $i \geqslant 0$, posons $\mathrm{H}_i^+ = \mathrm{H}_i \cap \mathrm{H}^+$. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $x \in \mathrm{H}_n$, $\overline{x} = x - \varepsilon(x)\phi$ appartient à H_n^+ et l'on a :

$$\Delta(x) = \varepsilon(x)\,\phi \otimes \phi + \overline{x} \otimes \phi + \phi \otimes \overline{x} + \overline{\Delta}(\overline{x}).$$

Donc, il suffit de montrer que :

$$\overline{\Delta}(\mathrm{H}_n^+) \subset \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{H}_i^+ \otimes \mathrm{H}_{n-i}^+.$$

Pour tout $i = 0, \dots, n-1$, $\overline{\Delta^n}$ se factorise en :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^+ \arrow[r, "\overline{\Delta}"] & \mathrm{H}^+ \otimes \mathrm{H}^+ \arrow[r, "\overline{\Delta^i} \otimes \overline{\Delta^{n-i-1}}"] \arrow[d] & (\mathrm{H}^+)^{\otimes(i+1)} \otimes (\mathrm{H}^+)^{\otimes(n-i)} \\
& \dfrac{\mathrm{H}^+}{\mathrm{H}_i^+} \otimes \dfrac{\mathrm{H}^+}{\mathrm{H}_{n-i-1}^+} \arrow[r, "f"] & \dfrac{\mathrm{H}^+}{\mathrm{H}_i^+} \otimes (\mathrm{H}^+)^{\otimes(n-i)}. \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

De plus, comme $\mathrm{H}^+/\mathrm{H}_i^+$ et $(\mathrm{H}^+)^{\otimes(n-i)}$ sont plats, les applications f et g ci-dessus sont injectives. Il en résulte que $\overline{\Delta(\mathrm{H}_n^+)}$ est contenu dans $\mathrm{H}_i^+ \otimes \mathrm{H}^+ + \mathrm{H}^+ \otimes \mathrm{H}_{n-i-1}^+$, pour tout $i = 0, \dots, n-1$. Le point (iii) découle alors du lemme ci-dessous, appliqué à $\mathrm{M} = \mathrm{H}^+$ et $\mathrm{E}_i = \mathrm{H}_{i-1}^+$.

Lemme 1.3.6.B. — *Soient k un anneau,* $0 = \mathrm{E}_0 \subset \mathrm{E}_1 \subset \cdots \mathrm{E}_n \subset \mathrm{M}$ *des k-modules. On suppose* M/E_i plat *pour tout i. Alors on a l'égalité :*

$$\bigcap_{i=0}^{n} (\mathrm{E}_i \otimes \mathrm{M} + \mathrm{M} \otimes \mathrm{E}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i \otimes \mathrm{E}_{n-i+1}.$$

Notons K (resp. S) le terme de gauche (resp. droite). On voit facilement que $\mathrm{S} \subset \mathrm{K}$; montrons la réciproque. Pour $i = 0, \ldots, n$, posons $\mathrm{K}_i = \mathrm{K} \cap (\mathrm{E}_i \otimes \mathrm{M})$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, comme $\mathrm{M}/\mathrm{E}_{n-i+1}$ et $\mathrm{E}_i/\mathrm{E}_{i-1}$ sont plats, l'application τ_i ci-dessous est injective, et l'application composée :

$$(\mathrm{E}_i/\mathrm{E}_{i-1}) \otimes \mathrm{M} \longrightarrow (\mathrm{E}_i/\mathrm{E}_{i-1}) \otimes (\mathrm{M}/\mathrm{E}_{n-i+1}) \xhookrightarrow{\tau_i} (\mathrm{M}/\mathrm{E}_{i-1}) \otimes (\mathrm{M}/\mathrm{E}_{n-i+1})$$

a pour noyau $(\mathrm{E}_i/\mathrm{E}_{i-1}) \otimes \mathrm{E}_{n-i+1}$. Comme l'image de K_i dans $(\mathrm{E}_i \otimes \mathrm{M})/(\mathrm{E}_{i-1} \otimes \mathrm{M})$ est contenue dans, et contient, ce noyau, on en déduit que

$$\mathrm{K}_i = \mathrm{K}_{i-1} + \mathrm{E}_i \otimes \mathrm{E}_{n-i+1}\,,$$

d'où le lemme.

[66] Pour terminer ce paragraphe, revenons à un anneau pseudocompact arbitraire k. Soient $(\mathbf{H}, \Delta, \varepsilon)$ une $\mathbf{O}_k$-coalgèbre plate, $\mathbf{H}^+ = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$, $\mathrm{A} = \Gamma^*(\mathbf{H})$ la k-algèbre profinie duale, $\mathrm{X} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$, de sorte que $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathrm{X})$ (cf. 1.3.5). Supposons donné un morphisme de $\mathbf{O}_k$-coalgèbres $\phi : \mathbf{O}_k \to \mathbf{H}$; il définit une morphisme continu de k-algèbres $\mathrm{A} \to k$, et donc une section σ du morphisme structural $\mathrm{X} \to \mathrm{Spf}(k)$.

Pour tout objet B de $\mathbf{Alf}_{/k}$, on note $\mathbf{H}_0(\mathrm{B}) = \phi(\mathrm{B}) = \mathrm{B}\phi_{\mathrm{B}}$, où ϕ_{B} est l'élément $\phi(1_{\mathrm{B}})$ de $\mathbf{H}(\mathrm{B})$ et l'on définit des sous-$\mathbf{O}_k$-modules $\mathbf{H}_n$ de $\mathbf{H}$, en posant, pour $n \geqslant 1$,

$$\mathbf{H}_n(\mathrm{B}) = \{u \in \mathbf{H}(\mathrm{B}) \mid \Delta(u) - u \otimes \phi_{\mathrm{B}} \in \mathbf{H}_{n-1}(\mathrm{B}) \otimes \mathbf{H}^+(\mathrm{B})\}.$$

On obtient ainsi une filtration $\mathbf{H}_0 \subset \mathbf{H}_1 \subset \cdots$ de $\mathbf{H}(\mathrm{X})$. D'après ce qui précède, on a :

Proposition. — *Pour que σ induise un isomorphisme sur les espaces topologiques sous-jacents, il faut et il suffit que $\mathbf{H}(\mathrm{X})$ soit la réunion des $\mathbf{H}_n$.*

1.4. Théorème. — *Soient k un anneau pseudocompact et $d_0, d_1 : \mathrm{X}_1 \rightrightarrows \mathrm{X}$ un couple d'équivalence de $\mathbf{Vaf}_{/k}$* (cf. Exp. V, § 2.b) *tel que d_1 soit* topologiquement plat.

(i) *La projection canonique de X sur X/X_1 ($= \mathrm{Coker}(d_0, d_1)$) est* surjective et topologiquement plate*, et le morphisme $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{X}/\mathrm{X}_1} \mathrm{X}$ de composantes d_0 et d_1 est un* isomorphisme*.*

(ii) *Si X est topologiquement plat sur k, il en est de même de X/X_1.*

Notons d'abord que (ii) découle de (i), d'après 1.3.3 (ii). La démonstration de (i) occupe les paragraphes 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.3.

1.4.1. — *Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas où X a un seul point.* Comme nous avons affaire à un couple d'équivalence, on voit comme dans l'Exp. V, § 3.e), qu'on
505 définit une relation d'équivalence dans l'ensemble sous-jacent à X en déclarant que deux points x, y sont équivalents s'il existe un point z de X_1 tel que $d_0(z) = y$ et $d_1(z) = x$. On peut évidemment supposer sans inconvénient que X contient une seule classe d'équivalence pour cette relation, autrement dit que X/X_1 a un seul point (voir la construction de X/X_1 donnée en 1.2).

---

[66] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit ; l'original se limitait au cas où k est artinien.

Dans ce cas, soient x un point quelconque de X et U la variété formelle qui a x pour seul point et qui a même anneau local que X en x. On voit alors comme dans l'Exp. V, § 6, que la relation d'équivalence induite par (d_0, d_1) sur U vérifie encore les hypothèses du théorème et qu'il suffit de faire la preuve pour cette dernière relation d'équivalence (U est une « quasi-section »).

Rappelons brièvement le principe de la démonstration faite dans l'Exp. V, § 6. Posons $\mathrm{V} = d_0^{-1}(\mathrm{U}) = \mathrm{U} \times_{i, d_0} \mathrm{X}_1$, où i est l'inclusion de U dans X ; soient u et v les morphismes de source V induits respectivement par d_0 et d_1 :

$$\mathrm{X} \xleftarrow{\ v\ } \mathrm{V} \xrightarrow{\ u\ } \mathrm{U}\,.$$

Il est clair que u et v sont topologiquement plats et que u est surjectif ; comme X contient une seule classe d'équivalence, v est surjectif. Si (v_0, v_1) est l'image réciproque du couple d'équivalence (d_0, d_1) par v (cf. V, 3.a)), il résulte de V, 3.c) et 3.d), que X/X_1 et le quotient de U par la relation d'équivalence induite par (d_0, d_1) s'identifient tous deux à $\mathrm{Coker}(v_0, v_1)$. On voit alors, comme dans la démonstration de V, 6.1, que si la conclusion du théorème 1.4 est vérifiée pour U, elle l'est aussi pour X.

1.4.2. — On se trouve ainsi ramené au cas où X a un seul point. [67] Considérons alors le diagramme commutatif suivant (cf. V, § 1, (0,1,2)) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}_2 \arrow[r, shift left, "d'_1"] \arrow[r, shift right, "d'_0"'] \arrow[d, "d'_2"'] & \mathrm{X}_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"] & \mathrm{X} \arrow[d] \\
\mathrm{X}_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X} \arrow[r] & \mathrm{X}/\mathrm{X}_1
\end{tikzcd}$$

où X_2 est le produit fibré $\mathrm{X}_1 \underset{d_1, d_0}{\times} \mathrm{X}_1$, et où d'_0, d'_1 et d'_2 sont respectivement les 506
morphismes « $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ », « $(x,y,z) \mapsto (x,z)$ » et « $(x,y,z) \mapsto (y,z)$ ». [68]

Si B, A, A_1 et A_2 désignent respectivement les algèbres affines de X/X_1, X, X_1 et X_2, le diagramme précédent induit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_1 \arrow[l, shift right, "j_1"'] \arrow[l, shift left, "j_0"] & \mathrm{A} \arrow[l, "i_0"'] \\
\mathrm{A}_1 \arrow[u, "j_2"] & \mathrm{A} \arrow[l, shift right, "i_1"'] \arrow[l, shift left, "i_0"] \arrow[u, "i_1"'] & \mathrm{B} \arrow[l, "i"'] \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes sont exactes et les carrés déterminés par (i_0, j_0) et (i_1, j_1) cocartésiens. Comme le morphisme $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ de composantes d_0 et d_1 est un

[67] N.D.E. : On peut donc supposer k *local*.
[68] N.D.E. : cf. Exp. V, § 2.b).

monomorphisme par hypothèse, le morphisme $\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{A} \to \mathrm{A}_1$ de composantes i_0 et i_1 est surjectif, d'après la proposition 1.3.

Cela signifie que i_1 fait de A_1 un A-module pseudocompact (supposé topologiquement libre), engendré par $i_0(\mathrm{A})$. Comme A est local, le lemme 1.4.3 ci-dessous entraîne l'existence d'un k-module topologiquement libre V et d'un morphisme de k-modules pseudocompacts $f : \mathrm{V} \to \mathrm{A}$ tels que le morphisme

$$\alpha_1 : \ \mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{A}_1, \qquad a \mathbin{\widehat{\otimes}} v \mapsto i_1(a)\cdot i_0(f(v))$$

507 soit inversible. Soient $\alpha : \mathrm{B}\widehat{\otimes}_k\mathrm{V} \to \mathrm{A}$ et $\alpha_2 : \mathrm{A}_1\widehat{\otimes}_k\mathrm{V} \to \mathrm{A}_2$ les morphismes :

$$b \mathbin{\widehat{\otimes}} v \mapsto i(b)\cdot f(v) \qquad \text{et} \qquad a_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} v \mapsto j_2(a_1)\cdot j_0 i_0(f(v)).$$

Dans le diagramme commutatif suivant, les deux lignes sont donc exactes et les deux carrés de gauche sont cocartésiens. Comme α_1 est inversible, il en va de même pour α_2, donc pour α.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_1 \arrow[l, shift right, "j_1"'] \arrow[l, shift left, "j_0"] & \mathrm{A} \arrow[l, "i_0"'] \\
\mathrm{A}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V} \arrow[u, "\alpha_2"] & \mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V} \arrow[u, "\alpha_1"'] \arrow[l, shift right, "i_1 \widehat{\otimes} \mathrm{V}"'] \arrow[l, shift left, "i_0 \widehat{\otimes} \mathrm{V}"] & \mathrm{B}\mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}. \arrow[l, "i \widehat{\otimes} \mathrm{V}"'] \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Ceci montre d'une part que A est topologiquement libre sur B, de pseudobase $f(\mathrm{V})$ (cf. 0.2.1), et qu'on obtient une pseudobase de A_1 sur A (où A_1 est considéré comme A-module au moyen de i_1) en prenant l'image par i_0 de $f(\mathrm{V})$; cela entraîne que le morphisme $\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_\mathrm{B} \mathrm{A} \to \mathrm{A}_1$ de composantes i_1 et i_0 est inversible :

$$\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_\mathrm{B} \mathrm{A} \simeq \mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_\mathrm{B} \mathrm{B}\mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V} \simeq \mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V} \simeq \mathrm{A}_1 .$$

Ceci prouve le théorème 1.4, modulo le lemme 1.4.3 qui suit.

1.4.3. Lemme. — *Soient k un anneau pseudocompact,* A *une k-algèbre profinie* locale*,* A_1 *un* A*-module* topologiquement libre *et $i_0 : \mathrm{M} \to \mathrm{A}_1$ un morphisme de k-modules pseudocompacts. On suppose que l'application*

$$\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{A}_1, \qquad a \mathbin{\widehat{\otimes}} m \mapsto a\cdot i_0(m)$$

est surjective*. Il existe alors un k-module* topologiquement libre V *et un morphisme de k-modules pseudocompacts $f : \mathrm{V} \to \mathrm{M}$, tels que l'application*

$$\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{A}_1, \qquad a \mathbin{\widehat{\otimes}} v \mapsto a\cdot i_0(f(v))$$

soit bijective.

Comme tout k-module pseudocompact est le quotient d'un k-module topologiquement libre (cf. N.D.E. (27)), on peut supposer sans inconvénient que M est to-
508 pologiquement libre ; prenons donc pour M le produit direct d'une famille $(\mathrm{M}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ d'exemplaires de k. Dans ce cas, $\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{M}$ n'est autre que le produit $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{M}_i$. Comme l'application $a \mathbin{\widehat{\otimes}} m \mapsto a\cdot i_0(m)$ est surjective et que A_1 est projectif, le noyau de cette application est un facteur direct de $\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{M}$; comme A est local, il

résulte du théorème d'échange (0.3.4) que ce noyau a pour supplémentaire un produit partiel $\prod_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_k\, \mathrm{M}_i$, où J désigne une certaine partie de I. On peut donc prendre $\mathrm{V} = \prod_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{M}_i$.

1.5. Soit k un anneau pseudocompact.

Définition. — Nous dirons qu'une famille de morphismes $f_i : \mathrm{X}_i \to \mathrm{X}$ de $\mathbf{Vaf}_{/k}$ est une *famille surjective topologiquement plate* si le morphisme $\coprod_i \mathrm{X}_i \to \mathrm{X}$, induit par les f_i, est surjectif et topologiquement plat ; cela signifie que chaque f_i est topologiquement plat et que tout point de X appartient à l'image d'au moins l'un des X_i.

Il résulte de 1.3.3 que les familles surjectives, topologiquement plates définissent une *prétopologie* sur $\mathbf{Vaf}_{/k}$ (IV 4.2.5) ; la topologie correspondante sera appelée la *topologie plate* sur $\mathbf{Vaf}_{/k}$.

D'après IV, 4.3.5, un foncteur $\mathrm{F} : (\mathbf{Vaf}_{/k})^0 \to (\mathbf{Ens})$ est un faisceau pour la topologie plate si et seulement si F transforme toute somme directe en produit direct et si la suite

$$\mathrm{F(Y)} \xrightarrow{\mathrm{F}(f)} \mathrm{F(X)} \underset{\mathrm{F(pr_2)}}{\overset{\mathrm{F(pr_1)}}{\rightrightarrows}} \mathrm{F(X\times_Y X)}$$

est exacte pour tout morphisme surjectif topologiquement plat $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$.

[69] D'après IV, 4.5, la proposition 1.3.1 entraîne que la topologie plate est *moins fine* que la topologie canonique, c.-à-d., pour tout objet X de $\mathbf{Vaf}_{/k}$, le foncteur $\mathbf{h}_\mathrm{X} : \mathrm{T} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{T}, \mathrm{X})$ est un *faisceau* pour la topologie plate. (Dans la suite, on identifiera, comme d'habitude (cf. Exp. I), X à $\mathbf{h}_\mathrm{X}$.) 509

D'après IV, 4.6.5, on peut reformuler le théorème 1.4 comme suit.

Théorème. — *Soient k un anneau pseudocompact, $d_0, d_1 : \mathrm{X}_1 \rightrightarrows \mathrm{X}$ un couple d'équivalence dans $\mathbf{Vaf}_{/k}$, et X/X_1 la variété formelle quotient* (i.e. $\mathrm{Coker}(d_0, d_1)$, cf. 1.2). *Si d_1 est* topologiquement plat*, alors X/X_1 représente le* faisceau quotient *pour la topologie plate.*

1.6. Pour terminer ces généralités sur les variétés formelles, il nous reste à définir brièvement les variétés formelles étales sur k. [70]

---

[69] N.D.E. : On a modifié l'original dans ce qui suit. En particulier, on a remplacé l'énoncé : « si $d_0, d_1 : \mathrm{X}_1 \rightrightarrows \mathrm{X}$ est une relation d'équivalence telle que d_1 soit topologiquement plat, la formation du quotient commute avec $\mathbf{h}$ » par le théorème ci-dessous.

[70] N.D.E. : L'original continuait ainsi : « Une variété formelle X sur k est dite *étale*, si le morphisme diagonal $\Delta_\mathrm{X} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}\times\mathrm{X}$ est un isomorphisme local, c'est-à-dire si Δ_X induit un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}\times\mathrm{X},\Delta_\mathrm{X}(x)}$ sur $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ pour tout point x de X. On voit facilement à l'aide de SGA I, que cette formulation est équivalente aux deux suivantes : la variété formelle X est topologiquement plate, et, pour tout point $x \in \mathrm{X}$, de projection $s \in \mathrm{Spf}(k)$, $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}\,\widehat{\otimes}_k\,\kappa(s)$ est une extension finie séparable du corps résiduel $\kappa(s)$ de s ; ou encore, si A désigne l'algèbre affine de X, les composantes locales (0.1) de $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_k(k/\mathfrak{l})$ sont des algèbres finies et étales sur $k/\mathfrak{l}$, quel que soit l'idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de k. » Dans ce qui suit, on a rectifié l'omission de l'hypothèse de platitude dans la première condition ci-dessus, et détaillé l'équivalence desdites conditions.

Rappels 1.6.A. — (i) Rappelons d'abord (cf. EGA 0_{IV}, 19.10.2) qu'une k-algèbre topologique A est dite *formellement étale* sur k (pour les topologies données sur k et A, resp. pour les topologies discrètes) si, pour toute k-algèbre topologique *discrète* C (pas nécessairement artinienne), et tout idéal nilpotent J de C, tout morphisme continu de k-algèbres $\mathrm{A} \to \mathrm{C}/\mathrm{J}$ se relève de façon unique en un morphisme continu $\mathrm{A} \to \mathrm{C}$ (A étant munie de la topologie donnée, resp. de la topologie discrète). On voit aussitôt que cette propriété est préservée par changement de base, c.-à-d., pour tout morphisme $k \to k'$ d'anneaux pseudocompacts, $\mathrm{A} \widehat{\otimes}_k k'$ est alors formellement étale sur k'. D'autre part, on voit facilement qu'il suffit de vérifier la condition de relèvement pour tout idéal J de carré nul, cf. EGA IV_4, 17.1.2 (ii). On dit que A est *étale* sur k si elle est formellement étale sur k pour les topologies discrètes, et si de plus A est une k-algèbre de présentation finie (cf. EGA IV_4, 17.3.2 (ii)). Dans la suite, k étant un anneau pseudocompact et A une k-algèbre profinie, on utilisera « formellement étale » au sens des topologies données (sauf mention du contraire).

(ii) Rappelons aussi que si $\mathrm{F} \in k[\mathrm{T}]$ est un polynôme polynôme unitaire de degré $d \geqslant 1$, *séparable* (i.e. tel que l'idéal engendré par F et son polynôme dérivé F' soit $k[\mathrm{T}]$), alors la k-algèbre $\mathrm{B} = k[\mathrm{T}]/(\mathrm{F})$ (qui est libre de rang d sur k, et munie de la topologie produit) est formellement étale sur k. En effet, soient C une k-algèbre discrète (de sorte que le noyau de $k \to \mathrm{C}$ est un idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de k), J un idéal de C de carré nul, et $\phi : \mathrm{B} \to \mathrm{C}/\mathrm{J}$ un morphisme continu de k-algèbres. Notons que, B étant un k-module libre de rang fini, $\mathfrak{l}\mathrm{B}$ est un idéal ouvert de B, donc tout relèvement $\Phi : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ de ϕ est automatiquement continu. Soient t l'image de T dans B et u_0 un relèvement arbitraire de $\phi(t)$ dans C, alors $\mathrm{F}(u_0) \in \mathrm{J}$ (puisque $\phi(t)$ est racine de F) ; d'autre part il existe $\mathrm{G}, \mathrm{H} \in k[\mathrm{T}]$ tels que $\mathrm{GF} + \mathrm{HF}' = 1$, d'où $\mathrm{H}(u_0)\mathrm{F}'(u_0) = 1 - \mathrm{G}(u_0)\mathrm{F}(u_0)$, et le terme de droite est inversible, puisque $\mathrm{F}(u_0)$ est de carré nul, donc $\mathrm{F}'(u_0)$ est inversible. Cherchons $h \in \mathrm{J}$ tel que $x = x_0 + h$ soit racine de F ; ceci équivaut à $0 = \mathrm{F}(u) = \mathrm{F}(u_0) + \mathrm{F}'(u_0)h$, et comme $\mathrm{F}'(u_0)$ est inversible, ceci a pour unique solution $h = -\mathrm{F}'(u_0)^{-1}\mathrm{F}(u_0) \in \mathrm{J}$. Bien entendu, la même démonstration (sans faire d'hypothèses de continuité pour les morphismes $k \to \mathrm{C}$, ϕ et Φ) montre que B est aussi une k-algèbre étale.

(iii) Rappelons enfin que si A est un produit fini $\mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_n$, alors A est formellement étale sur k si et seulement si les A_i le sont. [71] En effet, il suffit de le voir pour $n = 2$, dans ce cas soit $e = 1_{\mathrm{A}_1}$ l'idempotent tel que $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}e$ et $\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}(1-e)$, et supposons donné un morphisme continu $\mathrm{A} \to \mathrm{C}/\mathrm{J}$, où J est un idéal de carré nul. Comme le polynôme $\mathrm{F} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X}$ est séparable (on a $\mathrm{F}' = 2\mathrm{X} - 1$ et $(\mathrm{F}')^2 - 4\mathrm{F} = 1$), l'idempotent $\phi(e)$ de C/J se relève de façon unique en un idempotent f de C, d'où $\mathrm{C} = \mathrm{C}f \oplus \mathrm{C}(1-f)$, et alors se donner un relèvement de Φ équivaut à se donner deux morphismes $\Phi_1 : \mathrm{A}_1 \to \mathrm{C}f$ et $\Phi_2 : \mathrm{A}_2 \to \mathrm{C}(1-f)$, relevant les restrictions de ϕ à A_1 et A_2. Le même argument montre que si e est un idempotent de k tel que $\mathrm{A} = \mathrm{A}e$, alors A est formellement étale sur k si et seulement si elle l'est sur le localisé k_e (qui s'identifie à ke).

[71] N.D.E. : Signalons au passage que la démonstration donnée dans EGA 0_{IV}, 19.3.5 (v) est erronée.

Soient maintenant X une k-variété formelle et A son algèbre affine. Si x est un point de X (i.e. un idéal maximal ouvert $\mathfrak{m}$ de A), d'image s dans $\mathrm{Spf}(k)$, on notera $k_{\mathfrak{m}}$ ou k_s la composante locale de k correspondant à s.

Définition 1.6.B. — Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) A est *formellement étale* sur k.

(b) Pour tout $\mathfrak{m} \in \Upsilon(\mathrm{A})$, $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ est *formellement étale* sur k (ou sur $k_{\mathfrak{m}}$).

(c) Pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de k, $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_k(k/\mathfrak{l}) = \mathrm{A}/\overline{\mathrm{A}\mathfrak{l}}$ est formellement étale sur $k/\mathfrak{l}$.

(d) Pour tout $\mathfrak{m} \in \Upsilon(\mathrm{A})$ et tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de $k_{\mathfrak{m}}$, $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}/\overline{\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}\mathfrak{l}}$ est formellement étale sur $k_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{l}$.

On dira que X est *étale* sur k si elle vérifie ces conditions, et on notera $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Vaf}_{/k}$ formée des variétés formelles étales sur k. [72]

Remarquons que si $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{C}/\mathrm{J}$ un morphisme continu de k-algèbres, où C est une k-algèbre discrète et J un idéal de carré nul, alors $\mathrm{I} = \mathrm{Ker}(\phi)$ est un idéal ouvert de A, donc A/I est artinien, donc I n'est contenu que dans un nombre fini d'idéaux maximaux ouverts $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$, donc contient le produit des composantes $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ pour $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_i$, qui égale $\mathrm{A}(1-e)$ où e désigne l'idempotent de A tel que $\mathrm{A}e = \prod_{i=1}^r \mathrm{A}_{\mathfrak{m}_i}$. Donc $\phi(e) = 1_{\mathrm{C}/\mathrm{J}}$ et il revient au même de se donner un relèvement continu de ϕ ou du morphisme de $\mathrm{A}e \simeq \mathrm{A}/\mathrm{A}(1-e)$ vers C/J, induit par ϕ.

D'autre part, on sait (cf. N.D.E. (24)) que $\mathrm{A} \simeq \varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathrm{A}/\overline{\mathrm{A}\mathfrak{l}}$. Compte-tenu de ces remarques et des rappels précédents, on obtient facilement l'équivalence des conditions indiquées.

Définitions 1.6.C. — Notons $\kappa(k) = \prod_{s\in\mathrm{Spf}(k)} \kappa(s)$, muni de la topologie produit, i.e. la variété formelle $\mathrm{Spf}(\kappa(k))$ est la somme directe des $\mathrm{Spec}\,\kappa(s)$, pour $s \in \mathrm{Spf}(k)$. D'autre part, on notera $\mathrm{S}_{\kappa(k)}$ le *schéma* somme directe des $\mathrm{Spec}\,\kappa(s)$, pour $s \in \mathrm{Spf}(k)$.

Pour toute variété formelle X sur k, on notera $\mathrm{X}_\kappa = \mathrm{X}\,\widehat{\otimes}_k\,\kappa(k)$ la variété formelle sur $\kappa(k)$ obtenue par changement de base, i.e. X_κ a les même points que X et pour tout $x \in \mathrm{X}$, de projection s sur $\mathrm{Spf}(k)$, on a $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_\kappa,x} = \mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \otimes_k \kappa(s)$. Ce foncteur de changement de base $\mathbf{Vaf}_{/k} \to \mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}$ envoie $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$ dans $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa(k)}$ (cf. 1.6.A (i)).

On a alors (cf. SGA 1, I 6.2) :

Lemme 1.6.D. — *Pour tout* $\mathrm{Y} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$ *et* $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vaf}_{/k}$, *l'application canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}}(\mathrm{X}_\kappa, \mathrm{Y}_\kappa)$$

est bijective. *En particulier, le foncteur* $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k} \to \mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa(k)}$ *est* pleinement fidèle (*et on verra plus bas que c'est une équivalence*).

En effet, notons A (resp. B) l'algèbre affine de X (resp. Y) et $\mathfrak{r}$ le radical de k, supposons donné un morphisme $\mathrm{B}\,\widehat{\otimes}_k\,\kappa(k) \to \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_k\,\kappa(k)$ ou, ce qui revient au même, un morphisme $\phi : \mathrm{B} \to \mathrm{A}/\overline{\mathfrak{r}\mathrm{A}}$.

[72] N.D.E. : Notons que $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$ est stable par limites projectives *finies*.

Pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de k, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathfrak{r}^n \subset \mathfrak{l}$, d'où $(\mathfrak{r}\mathrm{A})^n \subset \mathfrak{l}\mathrm{A} \subset \overline{\mathfrak{l}\mathrm{A}}$, et comme l'application de multiplication $m_{n-1} : \mathrm{A}^n \to \mathrm{A}$ est continue, on a donc aussi $(\overline{\mathfrak{r}\mathrm{A}})^n \subset \overline{\mathfrak{l}\mathrm{A}}$, i.e. $\overline{\mathfrak{r}\mathrm{A}}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{A}}$ est un idéal nilpotent de $\mathrm{A}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{A}}$. Par conséquent, ϕ se relève de façon unique en un morphisme $\phi_{\mathfrak{l}} : \mathrm{B} \to \mathrm{A}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{A}}$. Par unicité, ces morphismes forment un système projectif, donc donnent un morphisme continu $\Phi : \mathrm{B} \to \varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathrm{A}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{A}} = \mathrm{A}$. De plus, Φ est unique car si Φ' est un second relèvement de ϕ, alors Φ' et Φ coïncident modulo $\overline{\mathfrak{l}\mathrm{A}}$ pour tout $\mathfrak{l}$, donc sont égaux.

Proposition 1.6.E. — (a) *Soient* X *une variété formelle sur* k *et* A *son algèbre affine. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X *est étale sur* k.

(ii) X *est topologiquement plate sur* k *et le morphisme diagonal* $\Delta : \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ *est un* isomorphisme local, *i.e.* Δ_{X} *induit un isomorphisme* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}\times\mathrm{X},\Delta(x)} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *pour tout point* x *de* X.

(iii) *Pour tout* $x \in \mathrm{X}$, *de projection* s *sur* $\mathrm{Spf}(k)$, $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *est isomorphe à* $k_s[\mathrm{T}]/(\mathrm{F})$, *où* $\mathrm{F} \in k_s[\mathrm{T}]$ *est un polynôme unitaire* séparable (cf. 1.6.A (ii)).

(iv) X *est topologiquement plate sur* k, *et, pour tout point* $x \in \mathrm{X}$, *de projection* s *sur* $\mathrm{Spf}(k)$, $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \widehat{\otimes}_k \kappa(s)$ *est une extension finie séparable de* $\kappa(s)$.

(v) *Pour tout idéal ouvert* $\mathfrak{l}$ *de* k, *chaque composante locale de* $\mathrm{A} \widehat{\otimes}_k (k/\mathfrak{l})$ *est une algèbre* étale finie *sur l'anneau artinien* $k/\mathfrak{l}$.

(b) $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa(k)}$ *s'identifie à la catégorie des schémas étales sur* $\mathrm{S}_{\kappa(k)}$ (*cf.* 1.6.C), *et le foncteur* $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_\kappa$ *induit une* équivalence de catégories $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa(k)}$ (cf. SGA 1, I 6.1).

Démonstration. (a) Notons I le noyau du morphisme de multiplication $m : \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A} \to \mathrm{A}$. Supposons X étale sur k, i.e. A formellement étale sur k. Alors, d'après EGA 0_{IV}, 20.7.4, le séparé complété de I/I^2, pour la topologie quotient de celle de I, est nul, i.e. on a $\mathrm{I} = \overline{\mathrm{I}^2}$. Or, pour tout $x \in \mathrm{X}$, I est contenu dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{\Delta(x)}$ de $\mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}$, donc le localisé $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_{\Delta(x)}}$ est contenu dans l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}\times\mathrm{X},\Delta(x)}$, et donc, d'après le lemme de Nakayama 0.3, on a $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_{\Delta(x)}} = 0$, et donc $\Delta : \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ est un isomorphisme local.

Supposons maintenant que Δ soit un isomorphisme local et que k soit un *corps* κ, et montrons que chaque $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est une κ-algèbre étale de dimension finie. Remplaçant X par $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x})$, on peut supposer que $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est locale. On procède alors comme dans la démonstration de EGA IV_4, 17.4.1, (b) $\Rightarrow$ (d$''$). Soit K une extension normale finie de κ contenant le corps résiduel $\kappa(x)$, et soient $\mathrm{B} = \mathrm{A} \otimes_\kappa \mathrm{K} = \mathrm{A} \widehat{\otimes}_\kappa \mathrm{K}$ (comme $[\mathrm{K} : \kappa] < \infty$ alors $- \widehat{\otimes}_\kappa \mathrm{K}$ et $- \otimes_\kappa \mathrm{K}$ coïncident) et $\mathrm{X}_{\mathrm{K}} = \mathrm{Spf}(\mathrm{B}) = \mathrm{X} \widehat{\otimes}_\kappa \mathrm{K}$. Alors $\Delta_{\mathrm{K}} : \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \widehat{\otimes}_{\mathrm{K}} \mathrm{X}_{\mathrm{K}}$ est encore un isomorphisme local, donc pour tout $y \in \mathrm{X}_{\mathrm{K}}$, la multiplication $\mathrm{B}_y \widehat{\otimes}_{\mathrm{K}} \mathrm{B}_y \to \mathrm{B}_y$ induit un isomorphisme $(\mathrm{B}_y \widehat{\otimes}_{\mathrm{K}} \mathrm{B}_y)_{\mathfrak{m}_{\Delta_{\mathrm{K}}(y)}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_y$. Or, comme le corps résiduel de B_y est K (cf. par exemple VI_{A}, 1.1.1, N.D.E. (11)), $\mathrm{C} = \mathrm{B}_y \widehat{\otimes}_{\mathrm{K}} \mathrm{B}_y$ est déjà un anneau local (en effet, $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_y \widehat{\otimes}_{\mathrm{K}} \mathrm{B}_y + \mathrm{B}_y \widehat{\otimes}_{\mathrm{K}} \mathfrak{m}_y$ est formé d'éléments topologiquement nilpotents, donc est contenu dans le radical de C, et $\mathrm{C}/\mathfrak{n} = \mathrm{K} \widehat{\otimes}_{\mathrm{K}} \mathrm{K} = \mathrm{K}$ est un corps) donc on obtient que le morphisme de multiplication

$\mathrm{B}_y \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{K}} \mathrm{B}_y \to \mathrm{B}_y$ est un isomorphisme. Prenant une pseudobase de B_y sur K contenant l'élément unité 1, on en déduit que $\mathrm{B}_y = \mathrm{K}$. Comme de plus B est finie sur A, X_{K} est un ensemble fini, donc $\mathrm{B} = \mathrm{A} \otimes_{\kappa} \mathrm{K}$ est le produit d'un nombre fini de copies de K, et ceci entraîne que A est une κ-algèbre étale finie.

On obtient ainsi que, si κ est un corps, toute κ-algèbre profinie A étale sur κ est le produit d'extensions finies séparables K_i de κ, muni de la topologie produit, donc la variété formelle Spf(A) est la somme directe des $\mathrm{Spf}(\mathrm{K}_i) = \mathrm{Spec}(\mathrm{K}_i)$, et l'on en déduit que $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa}$ s'identifie à la catégorie des κ-schémas étales.

Ce qui précède montre l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iv) (puisque $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \kappa(s)$ est formellement étale sur $\kappa(s)$), et entraîne le point (b) de 1.6.E. En effet, soit à nouveau k un anneau pseudocompact arbitraire. D'après ce qui précède, $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa(k)}$ s'identifie à la catégorie des schémas étales sur $\mathrm{S}_{\kappa(k)}$. Montrons que $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_\kappa$ induit une équivalence $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa(k)}$. Compte-tenu de 1.6.D, il suffit de montrer que pour tout $s \in \mathrm{Spf}(k)$ et toute extension finie séparable K de $\kappa(s)$, il existe une k_s-algèbre étale A telle que $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \kappa(s) \simeq \mathrm{K}$. Soient ξ un élément primitif de l'extension $\mathrm{K}/\kappa(s)$, n son degré, et $\mathrm{F} \in k_s[\mathrm{T}]$ un polynôme unitaire de degré n dont l'image $\overline{\mathrm{F}}$ dans $\kappa(s)[\mathrm{T}]$ est le polynôme minimal de ξ. Comme $\overline{\mathrm{F}}'$ est inversible dans $\kappa(s)[\mathrm{T}]/(\overline{\mathrm{F}})$, il résulte du lemme de Nakayama que F' est inversible dans $k_s[\mathrm{T}]/(\mathrm{F})$, donc F est un polynôme séparable et donc, d'après 1.6.A (ii), $\mathrm{A} = k_s[\mathrm{T}]/(\mathrm{F})$ est une k_s-algèbre étale telle que $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \kappa(s) \simeq \mathrm{K}$. On obtient ainsi que toute k_s-algèbre profinie étale locale est libre de rang fini sur k_s (donc a fortiori topologiquement libre sur k), et donc toute k-algèbre profinie étale est topologiquement libre sur k.

Par ailleurs, la condition (v) implique la condition (d) de 1.6.B, donc implique (i). On a donc obtenu que (i), (iii) et (v) sont équivalentes, et impliquent (ii), qui implique (iv). Enfin, soit A une k-algèbre profinie vérifiant (iv), montrons que A est formellement étale sur k. Pour cela, on peut supposer A et k locaux, notons κ le corps résiduel de k ; par hypothèse, $\mathrm{K} = \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \kappa$ est une extension finie séparable de κ, disons de degré n. D'après ce qu'on a vu plus haut (et tenant compte du lemme 1.6.D), il existe alors une k-algèbre B libre de rang n, formellement étale sur k, et un morphisme continu $\phi : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ tel que $\phi \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \kappa$ soit un isomorphisme. Comme A est topologiquement plate sur k, ceci entraîne que $\mathrm{Coker}(\phi) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \kappa = 0$ et aussi $\mathrm{Ker}(\phi) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \kappa = 0$; d'après le lemme de Nakayama 0.3, on a donc $\mathrm{Coker}(\phi) = 0 = \mathrm{Ker}(\phi)$, donc ϕ est un isomorphisme (cf. la démonstration de 0.2.B). Ceci achève la démonstration de 1.6.E.

[73] Soit X une variété formelle sur k. Pour tout $x \in \mathrm{X}$, de projection s sur $\mathrm{Spf}(k)$, le corps résiduel $\kappa(x)$ est une extension finie de $\kappa(s)$ et l'on note $\kappa_e(x)$ la clôture séparable de $\kappa(s)$ dans $\kappa(x)$.

Proposition 1.6.F. — (i) *L'inclusion de* $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$ *dans* $\mathbf{Vaf}_{/k}$ *possède un adjoint à gauche* $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$ *: la variété* X_e *a les mêmes points que* X, *pour tout* $x \in \mathrm{X}$, *de projection* s *sur* $\mathrm{Spf}(k)$, *soient* ξ *un élément primitif de* $\kappa_e(x)$, n *son degré,* u *un relèvement arbitraire*

[73] N.D.E. : Dans ce qui suit, on a utilisé les ajouts précédents pour détailler la contruction du foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$, et montrer qu'il commute aux produits finis (ceci est utilisé dans 2.5.1).

510 *de ξ dans $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$, et $\mathrm{F} \in k[\mathrm{T}]$ unitaire de degré n annulant u ; on pose $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_e,x} = k[\mathrm{T}]/(\mathrm{F})$. Alors pour tout $\mathrm{Y} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$, les applications canoniques ci-dessous sont bijectives :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}}(\mathrm{X}_\kappa,\mathrm{Y}_\kappa) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{X}_e,\mathrm{Y}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}}((\mathrm{X}_e)_\kappa,\mathrm{Y}_\kappa),
\end{tikzcd}$$

la flèche verticale étant induite par les inclusions $\kappa_e(x) \hookrightarrow \kappa(x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}$. Ceci définit, en particulier, un morphisme $p : \mathrm{X} \to \mathrm{X}_e$, et tout morphisme de k-variétés formelles $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, avec Y étale *sur k, se factorise de façon unique à travers p.*

(ii) *Le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$ commute aux produits finis.*

En effet, (i) découle de 1.6.E (b) et 1.6.D. Prouvons (ii). Compte-tenu de l'équivalence de catégories 1.6.E (b), on peut supposer que k est un corps. Dans ce cas, on voit facilement que si X est une k-variété formelle semi-locale, i.e. dont l'algèbre affine A est semi-locale, alors l'algèbre affine de X_e est la plus grande sous-algèbre de A qui soit étale sur k, notons-la A_e. On se ramène ainsi à voir que si K,L sont deux extensions de degré fini de k, alors l'inclusion $\mathrm{K}_e \otimes \mathrm{L}_e \subset (\mathrm{K}\otimes\mathrm{L})_e$ est une égalité. Soit p l'exposant caractéristique de k (i.e. $p = 1$ si $\mathrm{car}(k) = 0$ et $p = \mathrm{car}(k)$ sinon), alors pour tout $x \in \mathrm{K}\otimes\mathrm{L}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^{p^n} \in \mathrm{K}_e \otimes \mathrm{L}_e$, donc toute sous-algèbre B de $\mathrm{K}\otimes\mathrm{L}$ est radicielle sur $\mathrm{K}_e\otimes\mathrm{L}_e$, et il en résulte que $\mathrm{K}_e \otimes \mathrm{L}_e = (\mathrm{K}\otimes\mathrm{L})_e$.

Remarquons, en conservant les notations précédentes, que $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_e,x}$ n'est pas nécessairement une sous-algèbre de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$, mais c'est le cas lorsque X est topologiquement plate sur k, d'après la proposition suivante.

1.6.1. — Soient Y une k-variété formelle *étale* et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de $\mathbf{Vaf}_{/k}$. On a alors le carré cartésien ci-dessous, où Γ_f est le morphisme graphe $\mathrm{X} \to \mathrm{X}\times\mathrm{Y}$, de composantes id_X et f,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \arrow[r, "\Gamma_f"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{X}\times\mathrm{Y} \arrow[d, "f\boxtimes\mathrm{id}_\mathrm{Y}"] \\
\mathrm{Y} \arrow[r, "\Delta_\mathrm{Y}"] & \mathrm{Y}\times\mathrm{Y}.
\end{tikzcd}$$

Il s'ensuit que Γ_f est un isomorphisme local, donc que $f = \mathrm{pr}_\mathrm{Y}\circ\Gamma_f$ est topologiquement plat si pr_Y l'est, par exemple si X est topologiquement plat sur k.

Réciproquement, comme $\mathrm{Y} \to k$ est topologiquement plat, $\mathrm{X} \to k$ le sera aussi si f l'est (cf. 1.3.3). Prenant en particulier pour f le morphisme canonique $p : \mathrm{X} \to \mathrm{X}_e$ de 1.6, on obtient :

Proposition. — *Soit X une variété formelle sur k. Le morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{X}_e$ est topologiquement plat si et seulement si X est topologiquement plate sur k.*

Remarque 1.6.2. — [74] Lorsque k est un corps *parfait*, le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$ est aussi *adjoint à droite* de l'inclusion $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k} \hookrightarrow \mathbf{Vaf}_{/k}$. En effet, dans ce cas on a $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_e,x} = \kappa(x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}$, et les projections canoniques $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \to \kappa(x)$ définissent un morphisme $s : \mathrm{X}_e \to \mathrm{X}$, qui est une section de $p : \mathrm{X} \to \mathrm{X}_e$. Pour tout morphisme $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ les diagrammes ci-dessous sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{\mathrm{Y},f(x)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \arrow[d] \\ \kappa(f(x)) \arrow[r] & \kappa(x) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "f"] & \mathrm{Y} \\ \mathrm{X}_e \arrow[u, "s_{\mathrm{X}}"] \arrow[r, "f_e"] & \mathrm{Y}_e \arrow[u, "s_{\mathrm{Y}}"'] \end{tikzcd}$$

donc s est fonctoriel en X, et il en résulte que $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$ est adjoint à droite de l'inclusion $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k} \hookrightarrow \mathbf{Vaf}_{/k}$. Donc, étant un adjoint à droite, $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$ commute aux limites projectives lorsqu'elles existent dans $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$ [75], donc en particulier aux produits finis. (Ceci se vérifie aussi directement : pour toute k-variété formelle X, d'algèbre affine A, X_e a pour algèbre affine le quotient de A par son radical $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$, et puisque k est parfait, le quotient de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \widehat{\otimes} \mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$ par son radical est l'algèbre $\kappa(x) \otimes_k \kappa(y)$, puisque cette dernière est semi-simple.)

2. Généralités sur les groupes formels

511

2.1. Soient k un anneau pseudocompact et G un *k-groupe formel*, c'est-à-dire un groupe de la catégorie $\mathbf{Vaf}_{/k}$ des variétés formelles sur k. Soit A l'algèbre affine de G. La loi de composition de G définit évidemment un *morphisme diagonal*, c.-à-d., un homomorphisme de k-algèbres profinies $\Delta_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}$; cet homomorphisme vérifie les conditions suivantes :

(i) le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{A}}"] \arrow[d, "\Delta_{\mathrm{A}}"'] & \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A} \arrow[d, "\Delta_{\mathrm{A}} \widehat{\otimes} \mathrm{id}_{\mathrm{A}}"] \\ \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \widehat{\otimes} \Delta_{\mathrm{A}}"] & \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(ii) il existe une *augmentation* (nécessairement unique), c'est-à-dire un homomorphisme de k-algèbres profinies $\varepsilon_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to k$ tel que les applications composées

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\Delta_{\mathrm{A}}} \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathrm{A}} \widehat{\otimes} \mathrm{id}_{\mathrm{A}}} k \widehat{\otimes}_k \mathrm{A} \simeq \mathrm{A}$$

$$\text{et} \qquad \mathrm{A} \xrightarrow{\Delta_{\mathrm{A}}} \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \widehat{\otimes} \varepsilon_{\mathrm{A}}} \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k k \simeq \mathrm{A}$$

soient les applications identiques de A.

[74] N.D.E. : On a inséré ici cette remarque, qui dans l'original apparaissait en 2.5.2.

[75] N.D.E. : c'est le cas pour les limites projectives finies.

(iii) il existe un *antipodisme* (nécessairement unique), c'est-à-dire un homomorphisme de k-algèbres profinies $c_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ tel que l'application composée

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\Delta_{\mathrm{A}}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A} \xrightarrow{c_{\mathrm{A}} \widehat{\otimes} \mathrm{id}_{\mathrm{A}}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A} \xrightarrow{m_{\mathrm{A}}} \mathrm{A}$$

512 soit égale à $\eta_{\mathrm{A}} \circ \varepsilon_{\mathrm{A}}$, si l'on note m_{A} l'application linéaire qui envoie $a \mathbin{\widehat{\otimes}} b$ sur ab et η_{A} l'application $\lambda \mapsto \lambda 1_{\mathrm{A}}$ de k dans A.

Réciproquement, la donnée de $(\Delta_{\mathrm{A}}, \varepsilon_{\mathrm{A}}, c_{\mathrm{A}})$ vérifiant (i)–(iii) munit G d'une structure de k-groupe formel. [76] Explicitement, pour toute k-algèbre profinie B, l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ des morphismes continus de *k-modules* $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est muni d'une structure de groupe, fonctorielle en B, définie par

$$\phi \cdot \phi' = m_{\mathrm{B}} \circ (\phi \mathbin{\widehat{\otimes}} \phi') \circ \Delta_{\mathrm{A}},$$

l'élément neutre étant $\eta_{\mathrm{B}} \circ \varepsilon_{\mathrm{A}}$ (où m_{B} est la multiplication de B et η_{B} l'application $\lambda \mapsto \lambda 1_{\mathrm{B}}$ de k dans B), et $\phi \circ c_{\mathrm{A}}$ étant l'inverse de ϕ ; et l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ des morphismes continus de *k-algèbres* $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ en est un sous-groupe (car l'algèbre B est commutative).

Définition. — Un *morphisme* de k-groupes formels $\theta : \mathrm{K} \to \mathrm{G}$ est, par définition, un morphisme de k-variétés formelles qui respecte les structures de groupe. Si B (resp. A) est l'algèbre affine de K (resp. G) et si $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est le morphisme correspondant à θ, ceci équivaut à dire que f est compatible avec les comultiplications, c.-à-d.,

$$(f \mathbin{\widehat{\otimes}} f) \circ \Delta_{\mathrm{A}} = \Delta_{\mathrm{B}} \circ f$$

(les conditions $\varepsilon_{\mathrm{B}} \circ f = \varepsilon_{\mathrm{A}}$ et $c_{\mathrm{B}} \circ f = f \circ c_{\mathrm{A}}$ étant alors automatiquement vérifiées). On notera $\mathbf{Grf}_{/k}$ la catégorie des k-groupes formels.

Notations. — Dans la suite, nous appellerons *idéal d'augmentation* de A l'idéal $\mathrm{I}_{\mathrm{A}} = \mathrm{Ker}(\varepsilon_{\mathrm{A}})$, et nous noterons $\omega_{\mathrm{G}/k}$ le k-module pseudocompact $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2}$, c'est-à-dire le quotient de I_{A} par l'idéal fermé engendré par les produits xy, pour $x, y \in \mathrm{I}_{\mathrm{A}}$.

2.2. Soit $\mathbf{H}$ un groupe de la catégorie des coalgèbres sur $\mathbf{O}_k$, i.e. pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{H}(\mathrm{C})$ est muni d'une structure de C-coalgèbre en groupes (cf. $\mathrm{VII_A}$ 3.2 ; à la suite de Manin, nous dirons *bialgèbre* [77] au lieu de coalgèbre en groupes) ; de plus, si $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ est un morphisme de $\mathbf{Alf}_{/k}$, l'application $\mathrm{D} \otimes_{\mathrm{C}} \mathbf{H}(\mathrm{C}) \to \mathbf{H}(\mathrm{D})$ est un homomorphisme de D-bialgèbres.

Définition. — Nous résumerons les propriétés ci-dessus en disant que $\mathbf{H}$ est une *bialgèbre* sur $\mathbf{O}_k$.

[76] N.D.E. : On dira aussi que A est un *cogroupe* dans la catégorie des k-algèbres profinies. D'autre part, on a détaillé ce qui suit ; en particulier, on a explicité ce qu'est un morphisme de groupes formels $\mathrm{K} \to \mathrm{G}$, cf. la proposition 2.3.1.

[77] N.D.E. : On dit aussi « bigèbre » (cf. [**BAlg**], III § 11.4) ; rappelons (cf. $\mathrm{VII_A}$, 3.1, N.D.E. (26)) que toutes les « bialgèbres » considérées ici sont supposées cocommutatives et munies d'une antipode, i.e. ce sont en fait des *algèbres de Hopf cocommutatives*.

Il est clair que le foncteur $\mathbf{H} \mapsto \mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})$ de 1.3.5 commute aux produits finis. Il transforme donc une bialgèbre sur $\mathbf{O}_k$ en un *k-foncteur en groupes*, c'est-à-dire, un foncteur (covariant) de $\mathbf{Alf}_{/k}$ dans la catégorie des groupes.

Et en effet, pour toute k-algèbre de longueur finie C, les éléments de

$$\mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})(\mathrm{C}) = \mathrm{Spf}^*(\mathbf{H}(\mathrm{C})) = \{x \in \mathbf{H}(\mathrm{C}) \mid \varepsilon(x) = 1 \quad \text{et} \quad \Delta(x) = x \otimes x\}$$

forment un groupe pour la multiplication de l'algèbre $\mathbf{H}(\mathrm{C})$ (cf. $\mathrm{VII_A}$ 3.2.2). Notons d'ailleurs que la condition $\Delta(x) = x \otimes x$ entraîne l'égalité $\varepsilon(x) = \varepsilon(x)^2$, donc aussi $\varepsilon(x) = 1$ si C est locale et $x \neq 0$. [78]

2.2.1. — Une bialgèbre $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{O}_k$ est dite *plate* si le module sous-jacent est plat 513
(cf. 1.2.1). [79] Si $\mathbf{H}$ est plate alors, d'après 1.3.5, $\mathrm{A} = \Gamma^*(\mathbf{H})$ est une k-algèbre profinie topologiquement plate, et $\mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})$ est isomorphe, comme foncteur de $(\mathbf{Alf}_{/k})^0 = \mathbf{Vaf}_{/k}$ vers $(\mathbf{Ens})$, au foncteur

$$\mathrm{Spf}(\mathrm{A}) : \ \mathrm{C} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(\mathrm{C}), \mathrm{Spf}(\mathrm{A})).$$

La structure de groupe de $\mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})$ munit donc $\mathscr{G}(\mathbf{H}) = \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ d'une structure de groupe formel, qui est décrite explicitement comme suit.

Pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, comme le C-module sous-jacent à $\mathbf{H}(\mathrm{C})$ est projectif, on déduit du lemme 1.2.3.A, par récurrence sur n, des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{H}(\mathrm{C})^*\big)^{\widehat{\otimes}(n+1)} &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}\big(\mathbf{H}(\mathrm{C}), (\mathbf{H}(\mathrm{C})^*)^{\widehat{\otimes}\, n}\big)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}\big(\mathbf{H}(\mathrm{C}), (\mathbf{H}(\mathrm{C})^{\otimes n})^*\big) \simeq \big(\mathbf{H}(\mathrm{C})^{\otimes(n+1)}\big)^*.\end{aligned}$$

On déduit de ceci (pour $n = 1, 2$) que la structure de C-algèbre de $\mathbf{H}(\mathrm{C})$ munit $\mathbf{H}(\mathrm{C})^*$ d'une application diagonale vérifiant les conditions 2.1 (i)–(iii), tout ceci de manière fonctorielle en C.

Par conséquent, $\mathrm{A} = \Gamma^*(\mathbf{H}) = \varprojlim \mathbf{H}(k/\mathfrak{l})^*$ est munie d'une structure de cogroupe dans $\mathbf{Alp}_{/k}$, qui définit sur $\mathscr{G}(\mathbf{H})$ la structure de groupe formel annoncée.

Réciproquement, soit G un k-groupe formel topologiquement plat, d'algèbre affine A, et notons $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ la $\mathbf{O}_k$-coalgèbre $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})$ (cf. 1.2.3). Le morphisme diagonal $\Delta_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A}$ induit alors, pour toute k-algèbre de longueur finie C, une application C-linéaire

$$\mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})(\mathrm{C}) \underset{\mathrm{C}}{\otimes} \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})(\mathrm{C}) \longrightarrow \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})(\mathrm{C})$$

qui fait de la coalgèbre $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})(\mathrm{C})$ une C-bialgèbre. On dira que $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ est *la bialgèbre* covariante *du groupe formel* G. [80] Donc, d'après la proposition 1.3.5.D :

Proposition. — (i) *Les foncteurs* $\mathrm{G} \mapsto \mathbf{H}(\mathrm{G})$ *et* $\mathbf{H} \mapsto \mathscr{G}(\mathbf{H})$ *définissent une* équivalence *entre la catégorie des k-groupes formels* topologiquement plats *et celle des* $\mathbf{O}_k$*-bialgèbres* plates. [81]

[78] N.D.E. : Puisque $\Delta(x) = x \otimes x$ on a $x = \varepsilon(x)x$, donc $\varepsilon(x) = 0$ ne peut se produire que si $x = 0$.

[79] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[80] N.D.E. : On a ajouté l'adjectif « *covariant* » pour faire voir que le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathbf{H}(\mathrm{G})$ est covariant ; cette terminologie est utilisée dans [**Di73**], I § 2.14.

[81] N.D.E. : On rappelle que dans cet exposé, « bialgèbre » signifie « algèbre de Hopf cocommutative ».

(ii) *Cette équivalence* « commute au changement de base » *: si $k \to \mathrm{K}$ est un morphisme d'anneaux pseudocompacts, alors* $\mathbf{H}(\mathrm{G}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K}) = \mathbf{H}(\mathrm{G})\otimes_k\mathrm{K}$ *et* $\mathscr{G}(\mathbf{H}\otimes_k\mathrm{K}) = \mathscr{G}(\mathbf{H})\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K}$.

Lorsque k est un anneau artinien et G un k-groupe formel topologiquement plat, le foncteur $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ est évidemment déterminé par sa valeur $\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathbf{H}(\mathrm{G})(k)$ en k. On dira aussi que H(G) est la *bialgèbre* (covariante) *de* G. [82] Par conséquent, notant $\mathcal{H}_k$ la catégorie des k-algèbres de Hopf et $\mathcal{H}^{\mathrm{cocom}}_{\mathrm{plat}/k}$ la sous-catégorie pleine formée des k-algèbres de Hopf plates sur k et cocommutatives, on obtient donc :

Corollaire. — *Soit k un anneau* artinien.

(i) *Les foncteurs* $\mathrm{G}\mapsto\mathrm{H}(\mathrm{G})$ *et* $\mathrm{H}\mapsto\mathscr{G}(\mathrm{H}) = \mathrm{Spf}^*\,\mathrm{H}(\mathrm{G})$ *définissent une* équivalence *entre la catégorie des k-groupes formels* topologiquement plats *et* $\mathcal{H}^{\mathrm{cocom}}_{\mathrm{plat}/k}$.

(ii) *Cette équivalence* « commute au changement de base » *: si $k \to \mathrm{K}$ est un morphisme d'anneaux artiniens, alors* $\mathrm{H}(\mathrm{G}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K}) = \mathrm{H}(\mathrm{G})\otimes_k\mathrm{K}$ *et* $\mathscr{G}(\mathrm{H}\otimes_k\mathrm{K}) = \mathscr{G}(\mathrm{H})\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K}$.

D'autre part, notons aussi $\mathcal{H}^{\mathrm{com}}_{\mathrm{plat}/k}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}_k$ formée des k-algèbres de Hopf plates sur k et commutatives, et rappelons que le foncteur $\mathrm{K}\mapsto\mathscr{O}(\mathrm{K})$ est une *anti-équivalence* de la catégorie des k-schémas en groupes affines sur $\mathcal{H}^{\mathrm{com}}_{\mathrm{plat}/k}$.

514 ***2.2.2***. — Supposons pour simplifier k artinien et soit G un k-groupe formel topologiquement plat. [83] Alors G est *commutatif* si et seulement si son algèbre affine $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ a une comultiplication cocommutative, ce qui équivaut à dire que la bialgèbre H(G) a une multiplication commutative. Dans ce cas, H(G) est une algèbre de Hopf commutative et cocommutative, plate sur k, donc si l'on pose $\mathrm{D}'(\mathrm{G}) = \mathrm{Spec}\,\mathrm{H}(\mathrm{G})$, alors $\mathrm{D}'(\mathrm{G})$ est un *k-schéma en groupes commutatifs, affine et plat* sur k. Réciproquement, si T est un tel k-schéma en groupes, son algèbre affine $\mathscr{O}(\mathrm{T})$ est un groupe commutatif dans la catégorie des k-coalgèbres cocommutatives plates sur k et donc, d'après 1.3.5.C, on obtient un k-groupe formel topologiquement plat D(T) en posant :

$$\mathrm{D}(\mathrm{T}) = \mathrm{Spf}^*\,\mathscr{O}(\mathrm{T}) = \mathrm{Spf}(\mathscr{A}), \qquad \text{où} \qquad \mathscr{A} = \mathscr{O}(\mathrm{T})^*.$$

Comme, d'après 1.3.5.D, on a des isomorphismes canoniques $\mathrm{G} = \mathrm{Spf}^*\,\mathrm{H}(\mathrm{G})$ et $\mathrm{H}(\mathrm{D}(\mathrm{T})) = \mathscr{O}(\mathrm{T})$, on obtient des isomorphismes canoniques :

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}'(\mathrm{G})) = \mathrm{Spf}^*\,\mathscr{O}(\mathrm{D}'(\mathrm{G})) = \mathrm{Spf}^*\,\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathrm{G},$$
$$\mathrm{D}'(\mathrm{D}(\mathrm{T})) = \mathrm{Spec}\,\mathrm{H}(\mathrm{D}(\mathrm{T})) = \mathrm{Spec}\,\mathscr{O}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}.$$

De plus, notant k-Gr. la catégorie des k-schémas en groupes, on a, d'après le corollaire 2.2.1, des isomorphismes fonctoriels :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathrm{G},\mathrm{D}(\mathrm{T})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_k}(\mathrm{H}(\mathrm{G}),\mathscr{O}(\mathrm{T})) \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-Gr.}}(\mathrm{T},\mathrm{D}'(\mathrm{G})),$$

On obtient donc la :

[82] N.D.E. : On a introduit ici la notation $\mathcal{H}^{\mathrm{cocom}}_{\mathrm{plat}/k}$, qui sera utile plus bas.

[83] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, afin d'introduire les notations $\mathrm{D}'(\mathrm{G})$ et $\mathrm{D}(\mathrm{K})$, cf. [**Ca62**], § 14.

Proposition (Dualité de Cartier). — *Soit k un anneau* artinien*.*

(i) *Les foncteurs* $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{D}'(\mathrm{G}) = \operatorname{Spec} \mathrm{H}(\mathrm{G})$ *et* $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{D}(\mathrm{T}) = \operatorname{Spf}^* \mathscr{O}(\mathrm{T})$ *induisent une* anti-équivalence *entre la catégorie $\mathcal{FC}_k$ des k-groupes formels* commutatifs topologiquement plats *et la catégorie $\mathcal{AC}_k$ des k-schémas en groupes* commutatifs, affines et plats*, i.e.* G *et* $\mathrm{D}'(\mathrm{G})$ (*resp.* T *et* D(T)) *sont reliés par les égalités :* [84]

$$\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathscr{O}(\mathrm{D}'(\mathrm{G})) \qquad \textit{et} \qquad \mathscr{O}(\mathrm{T}) = \mathrm{H}(\mathrm{D}(\mathrm{T})).$$

(ii) *Cette anti-équivalence* « commute au changement de base » *: si $k \to \mathrm{K}$ est un morphisme d'anneaux artiniens, alors* $\mathrm{D}'(\mathrm{G} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{K}) = \mathrm{D}'(\mathrm{G}) \otimes_k \mathrm{K}$ *et* $\mathrm{D}(\mathrm{T} \otimes_k \mathrm{K}) = \mathrm{D}(\mathrm{T}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{K}$.

(iii) *En particulier, si k est un* corps*, on obtient une anti-équivalence entre la catégorie des k-groupes formels commutatifs et celle des k-schémas en groupes commutatifs affines, qui commute à l'extension du corps de base.*

2.3. Considérons maintenant un k-groupe formel arbitraire [85] G, d'algèbre affine A. Notons toujours $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ le $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})$ dual de A et désignons par φ_{G} l'homomorphisme fonctoriel

$$\varphi_{\mathrm{G}} : \ \mathbf{H}(\mathrm{G}) \underset{k}{\otimes} \mathbf{H}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathbf{H}(\mathrm{G} \times \mathrm{G})$$

qui est induit par l'application naturelle (0.3.6), pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$:

$$(\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{C})^\dagger \otimes_{\mathrm{C}} (\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{C})^\dagger \longrightarrow \big((\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{C}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{C}} (\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{C})\big)^\dagger .$$

Si $m : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est la multiplication de G, l'application composée :

$$\mathbf{H}(\mathrm{G}) \underset{k}{\otimes} \mathbf{H}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\varphi_{\mathrm{G}}} \mathbf{H}(\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \xrightarrow{\mathbf{H}(m)} \mathbf{H}(\mathrm{G})$$

fait de $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ une algèbre sur $\mathbf{O}_k$; pour tout $\mathrm{C} \in \mathbf{Alf}_{/k}$, l'élément unité de $\mathbf{H}(\mathrm{G})(\mathrm{C}) = (\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{C})^\dagger$ est l'augmentation de $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{C}$ (cf. 2.1). [86] Si G n'est pas topologiquement plat sur k, φ_{G} n'est pas nécessairement un isomorphisme, et donc le morphisme $\delta_{\mathrm{G}} : \mathbf{H}(\mathrm{G}) \to \mathbf{H}(\mathrm{G} \times \mathrm{G})$ induit par le morphisme diagonal « $x \mapsto (x, x)$ » de G dans $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$, ne se factorise pas nécessairement à travers $\mathbf{H}(\mathrm{G}) \otimes_k \mathbf{H}(\mathrm{G})$, i.e. $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ n'est pas nécessairement une $\mathbf{O}_k$-bialgèbre.

Pour cette raison nous dirons simplement, dans le cas général, que $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ est « *l'algèbre covariante* » du groupe formel G. **515**

Bien entendu, lorsque G est *topologiquement plat* sur k, φ_{G} est un isomorphisme, et l'on retrouve la structure de $\mathbf{O}_k$-bialgèbre sur $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ définie en 2.2.1.

---

[84] N.D.E. : Si l'on note $\mathcal{FC}_k^f$ (resp. $\mathcal{AC}_k^f$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{FC}_k$ (resp. $\mathcal{AC}_k$) formée des objets G (resp. T) tels que H(G) (resp. $\mathscr{O}$(T)) soit un k-module *fini* (et donc fini localement libre), alors $\mathcal{FC}_k^f$ et $\mathcal{AC}_k^f$ ont toutes deux les mêmes objets que la catégorie $\mathscr{C}$ des k-algèbres de Hopf commutatives et cocommutatives, finies et plates sur k, la correspondance $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{H}(\mathrm{G})$ (resp. $\mathrm{T} \mapsto \mathscr{O}(\mathrm{T})$) étant covariante (resp. contravariante), et l'on retrouve ainsi la « dualité de Cartier » de la catégorie $\mathcal{AC}_k$, déjà vue en $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$, 3.3.1.

[85] N.D.E. : c.-à-d., pas nécessairement topologiquement plat sur k

[86] N.D.E. : On a modifié l'ordre des phrases dans ce qui suit.

2.3.1 Proposition. — *Soient* K *et* G *deux k-groupes formels, d'algèbres affines* B *et* A. *On suppose* K topologiquement plat *sur k. Il existe alors une bijection canonique de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathrm{K},\mathrm{G})$ *sur l'ensemble des homomorphismes de $\mathbf{O}_k$-algèbres unitaires* $h : \mathbf{H}(\mathrm{K}) \to \mathbf{H}(\mathrm{G})$ *tels que le diagramme*

$$
(*)\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{H}(\mathrm{K}) \otimes_k \mathbf{H}(\mathrm{K}) \arrow[r, "h\otimes h"] & \mathbf{H}(\mathrm{G}) \otimes_k \mathbf{H}(\mathrm{G}) \arrow[dr, "\varphi_{\mathrm{G}}"] & \\
& & \mathbf{H}(\mathrm{G}\times\mathrm{G}) \\
\mathbf{H}(\mathrm{K}) \arrow[uu, "\Delta_{\mathbf{H}(\mathrm{K})}"] \arrow[r, "h"] & \mathbf{H}(\mathrm{G}) \arrow[ur, "\delta_{\mathrm{G}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

soit commutatif.

Comme K est topologiquement plat, $\mathbf{H}(\mathrm{K})$ est muni d'une structure de bialgèbre (cf. 2.2) et $\Delta_{\mathbf{H}(\mathrm{K})}$ en est le morphisme diagonal ; autrement dit, avec les notations de 2.3, on a $\Delta_{\mathbf{H}(\mathrm{K})} = \varphi_{\mathrm{K}}^{-1} \circ \delta_{\mathrm{K}}$. Lorsque G est aussi topologiquement plat sur k, notre proposition résulte de l'équivalence de catégories établie en 2.2.1.

516 Dans le cas général, on peut supposer k artinien et raisonner sur les algèbres $\mathrm{H}(\mathrm{K}) = \mathrm{B}^\dagger$ et $\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathrm{A}^\dagger$. Soient $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{A},\mathrm{B})$ l'ensemble des applications k-linéaires continues de A dans B et $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{B}^\dagger,\mathrm{A}^\dagger)$ l'ensemble des applications k-linéaires de $\mathrm{B}^\dagger$ dans $\mathrm{A}^\dagger$.

[87] D'après 0.3.6.A, on sait que si M,P sont des k-modules pseudocompacts, et si P est *projectif*, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M},\mathrm{P}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathrm{P}^\dagger,\mathrm{M}^\dagger), \qquad f \mapsto {}^t f$$

(où ${}^t f$ désigne la transposée de f) est bijective. (On appliquera ceci à $\mathrm{M} = \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{A}$ et $\mathrm{P} = \mathrm{B}$, ou bien $\mathrm{M} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{P} = \mathrm{B}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{B}$).

Soit $f \in \mathrm{Hom}_c(\mathrm{A},\mathrm{B})$. Considérons les diagrammes ci-dessous, où les carrés (0) sont commutatifs, et où les deux flèches verticales non nommées sont ${}^t(f\,\widehat{\otimes}\,f)$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{A} \arrow[r, "m_{\mathrm{A}}"] \arrow[d, "f\,\widehat{\otimes}\,f"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \mathrm{A} \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{A}}"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{A} \arrow[d, "f\,\widehat{\otimes}\,f"] \\
\mathrm{B}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{B} \arrow[r, "m_{\mathrm{B}}"'] & \mathrm{B} \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{B}}"'] & \mathrm{B}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{B}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{A}^\dagger \otimes \mathrm{A}^\dagger \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{G}}"] \arrow[dr, phantom, "(0)"] & (\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{A})^\dagger \arrow[dr, phantom, "(1')"] & \mathrm{A}^\dagger \arrow[l, "\delta_{\mathrm{G}}=m_{\mathrm{A}}^t"'] \arrow[dr, phantom, "(2')"] & (\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{A})^\dagger \arrow[l, "\Delta_{\mathrm{A}}^t"'] \arrow[dr, phantom, "(0)"] & \mathrm{A}^\dagger \otimes \mathrm{A}^\dagger \arrow[l, "\varphi_{\mathrm{G}}"'] \\
\mathrm{B}^\dagger \otimes \mathrm{B}^\dagger \arrow[u, "{}^tf\otimes{}^tf"] \arrow[r, equal] & (\mathrm{B}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{B})^\dagger \arrow[u] & \mathrm{B}^\dagger \arrow[l, "\delta_{\mathrm{K}}=m_{\mathrm{B}}^t"] \arrow[u, "{}^tf"'] & (\mathrm{B}\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{B})^\dagger \arrow[l, "\Delta_{\mathrm{B}}^t"] \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathrm{B}^\dagger \otimes \mathrm{B}^\dagger \arrow[u, "{}^tf\otimes{}^tf"']
\end{tikzcd}
$$

[87] N.D.E. : On a détaillé la suite de la démonstration.

Si $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ correspond à un morphisme de groupes formels $\mathrm{K} \to \mathrm{G}$, alors les carrés (1) et (2) sont commutatifs, et $\varepsilon_\mathrm{B} \circ f = \varepsilon_\mathrm{A}$; par conséquent, les carrés (1′) et (2′) sont commutatifs et ${}^tf$ envoie l'unité de $\mathrm{B}^\dagger = \mathrm{H}(\mathrm{K})$ sur celle de $\mathrm{A}^\dagger = \mathrm{H}(\mathrm{G})$, i.e. ${}^tf$ est un morphisme de k-algèbres unitaires $\mathrm{H}(\mathrm{K}) \to \mathrm{H}(\mathrm{G})$ tel que le diagramme $(*)$ de la proposition soit commutatif.

Réciproquement, si ${}^tf$ vérifie ces conditions, alors $\varepsilon_\mathrm{B} \circ f = \varepsilon_\mathrm{A}$ et les carrés (1′) et (2′) sont commutatifs. Comme, pour $\mathrm{M} = \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A}$ et $\mathrm{P} = \mathrm{B}$ (resp. $\mathrm{M} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{P} = \mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{B}$), l'application $g \mapsto {}^tg$ est injective, on en déduit que les carrés (1) et (2) sont commutatifs, donc f est compatible avec les multiplications et les morphismes diagonaux de A et B. Il reste à voir que $f(1_\mathrm{A}) = 1_\mathrm{B}$. Or, il résulte de ce qui précède que $\varepsilon_\mathrm{B} f(1) = 1$, $\Delta_\mathrm{B} f(1) = f(1) \mathbin{\widehat{\otimes}} f(1)$ et $f(1) \cdot f(1) = f(1)$. Les deux premières conditions entraînent, d'après 2.1 (iii), que $f(1)$ admet $c_\mathrm{B} f(1)$ pour inverse dans B ; par conséquent $f(1) \cdot f(1) = f(1)$ entraîne $f(1) = 1$. Donc $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme de $\mathbf{Alp}_{/k}$, compatible avec les comultiplications de A et B.

2.3.2. — *Supposons maintenant* pour simplifier *l'anneau k artinien.* Lorsque G est topologiquement plat sur k, l'algèbre $\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathbf{H}(\mathrm{G})(k)$ peut être caractérisée par une propriété universelle (due à Cartier). Rappelons (cf. 1.2.1) que si U est un k-module, on note $\mathbf{W}(\mathrm{U})$ le foncteur qui à toute k-algèbre de longueur finie C associe le C-module $\mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C}$. [88] Si U est une k-algèbre (associative, avec élément unité), il en est de même de $\mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C}$; nous noterons $\mathbf{W}(\mathrm{U})^\times$ le k-foncteur en groupes qui associe à tout $\mathrm{C} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alf}_{/k}$ le groupe multiplicatif des éléments inversible de l'algèbre $\mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C}$: 517

$$\mathbf{W}(\mathrm{U})^\times(\mathrm{C}) = (\mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C})^\times.$$

De plus, identifions G au k-foncteur en groupes $\mathrm{C} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(\mathrm{C}), \mathrm{G})$ et notons $\mathrm{Hom}_{k\text{-Gr.}}(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U})^\times)$ l'ensemble des homomorphismes de k-foncteurs en groupes de G dans $\mathbf{W}(\mathrm{U})^\times$. On a la

Proposition. — *Soit k un anneau artinien. Pour tout groupe formel* G *topologiquement plat sur k et pour toute k-algèbre* U*, il y a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-Gr.}}(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U})^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg.}}(\mathrm{H}(\mathrm{G}), \mathrm{U}).$$

Notons A l'algèbre affine de G, par hypothèse c'est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$, et $\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathrm{A}^\dagger$. Pour tout objet P de $\mathbf{PC}(k)$, notons $\mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{P}$ la limite projective des k-modules $\mathrm{U} \otimes_k (\mathrm{P}/\mathrm{N})$, où N parcourt les sous-modules ouverts de P. On a des applications linéaires

$$\mathrm{U} \otimes_k (\mathrm{P}/\mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k((\mathrm{P}/\mathrm{N})^*, \mathrm{U})$$

qui envoient $u \otimes x$ sur l'application k-linéaire $f \mapsto f(x)u$ et qui forment un système 518
projectif filtrant. On obtient donc, par passage à la limite projective, un morphisme

$$\mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{P} \xrightarrow{\psi_\mathrm{P}} \mathrm{Hom}_k(\mathrm{P}^\dagger, \mathrm{U}) \,. \tag{1}$$

[88] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui précède, et dans ce qui suit on a noté $\mathbf{W}(\mathrm{U})^\times$ au lieu de U_m. Rappelons d'autre part (cf. 1.2.1) qu'on appelle « k-foncteur » un foncteur covariant $\mathbf{Alf}_{/k} \to (\mathbf{Ens})$.

Lorsque $\mathrm{P} = k$, ψ_k est évidemment un isomorphisme ; de plus, les deux membres de (1), considérés comme foncteurs en P, commutent aux produits infinis (tout produit étant limite projective filtrante de produits finis). On obtient donc que (1) est un isomorphisme lorsque P est un produit de copies de k, puis lorsque P est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$ (les deux membres de (1) commutant aux sommes directes finies).

Notons maintenant $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U}))$ l'ensemble des morphismes de k-foncteurs de G dans $\mathbf{W}(\mathrm{U})$. Comme $\mathrm{G} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A}) = \varinjlim \mathrm{Spf}(\mathrm{A}/\mathfrak{l})$, où $\mathfrak{l}$ parcourt les idéaux ouverts de A, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}\big(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U})\big) = \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}\big(\mathrm{Spf}(\mathrm{A}/\mathfrak{l}), \mathbf{W}(\mathrm{U})\big) = \varprojlim \mathrm{U} \otimes_k (\mathrm{A}/\mathfrak{l}) = \mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A}.$$

D'après ce qui précède, on obtient donc un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}\big(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U})\big) = \mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A} \xrightarrow{\psi_{\mathrm{A}}} \mathrm{Hom}_k(\mathrm{H}(\mathrm{G}), \mathrm{U}) \ . \tag{2}$$

Pour toute k-algèbre de longueur finie C, la multiplication fait de $\mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C}$ un monoïde à élément unité, et tout morphisme de monoïdes à élément unité $\mathrm{G}(\mathrm{C}) \to \mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C}$ est nécessairement un morphisme de *groupes* $\mathrm{G}(\mathrm{C}) \to (\mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C})^{\times}$. Par conséquent, on obtient que $\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathrm{Gr.}}(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U})^{\times})$ est la partie de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U}))$ formée des morphismes de k-foncteurs en monoïdes à élément unité.

Il reste à voir que ces morphismes correspondent aux applications k-linéaires de H(G) dans U qui préservent la multiplication et les éléments unité. [89] Pour simplifier l'écriture, $\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathrm{A}^{\dagger}$ sera noté H et l'on écrira $\widehat{\otimes}$ au lieu de $\widehat{\otimes}_k$. Notons Δ_{A}, m_{A} et ε_{A} (resp. Δ_{H}, m_{H} et ε_{H}) la comultiplication, la multiplication et l'augmentation de A (resp. H). Soit $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}\big(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U})\big)$, notons γ son image dans $\mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A}$ et $\phi : \mathrm{H} \to \mathrm{U}$ l'application k-linéaire associée. Alors θ envoie la section unité $s \in \mathrm{G}(k)$ sur un élément u de U, et comme s correspond à l'augmentation $\varepsilon : \mathrm{A} \to k$, qui est l'élément unité 1_{H} de H, on voit que $\theta(s) = 1_{\mathrm{U}}$ si et seulement si $\phi(1_{\mathrm{H}}) = 1_{\mathrm{U}}$.

Par ailleurs, le morphisme $\theta \circ m_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathbf{W}(\mathrm{U})$ correspond à l'élément $(\mathrm{id}_{\mathrm{U}} \mathbin{\widehat{\otimes}} \Delta_{\mathrm{A}})(\gamma)$, et celui-ci correspond, par dualité, à l'application $\phi \circ m_{\mathrm{H}} : \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \to \mathrm{U}$.

D'autre part, le morphisme $\theta \circ \mathrm{pr}_1 : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathbf{W}(\mathrm{U})$ correspond à l'élément $\gamma \mathbin{\widehat{\otimes}} 1_{\mathrm{A}}$ de $\mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A}$, qui correspond par dualité à $\phi \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{H}} \otimes \varepsilon) : \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \to \mathrm{U}$. De même, $\theta \circ \mathrm{pr}_2$ correspond à l'élément $\tau(\gamma \mathbin{\widehat{\otimes}} 1_{\mathrm{A}})$ de $\mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A}$ (où $\tau(u \mathbin{\widehat{\otimes}} a \mathbin{\widehat{\otimes}} b) = u \mathbin{\widehat{\otimes}} b \mathbin{\widehat{\otimes}} a$), qui correspond par dualité à $\phi \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{H}}) : \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \to \mathrm{U}$. Enfin, l'application de multiplication $\mu = m_{\mathrm{U} \widehat{\otimes} \mathrm{A} \widehat{\otimes} \mathrm{A}}$ ci-dessous :

$$(\mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A}) \times (\mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A}), \qquad (u \mathbin{\widehat{\otimes}} a_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} a_2,\, u' \mathbin{\widehat{\otimes}} a_3 \mathbin{\widehat{\otimes}} a_4) \mapsto uu' \mathbin{\widehat{\otimes}} a_1 a_3 \mathbin{\widehat{\otimes}} a_2 a_4$$

peut être vue comme la composée de l'endomorphisme σ_{23} de $(\mathrm{U} \otimes \mathrm{U}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A}^{\widehat{\otimes} 4}$ qui « échange les facteurs a_2 et a_3 », et de l'application

$$(\mathrm{U} \otimes \mathrm{U}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A}^{\widehat{\otimes} 2} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A}^{\widehat{\otimes} 2} \xrightarrow{m_{\mathrm{U}} \widehat{\otimes} m_{\mathrm{A}} \widehat{\otimes} m_{\mathrm{A}}} \mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A} \ .$$

[89] N.D.E. : L'original indiquait que : « (cela) résulte du caractère fonctoriel de ψ_{A} ». On a détaillé cela dans ce qui suit.

On en déduit que l'application $\mu \circ (\phi \circ \mathrm{pr}_1, \phi \circ \mathrm{pr}_2) : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathbf{W}(\mathrm{U})$ correspond à l'application composée β ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \arrow[r, "\beta"] \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathrm{H}} \circ \sigma_{23} \circ \mathrm{id}_{\mathrm{H}}"'] & \mathrm{U} \\
\mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \arrow[dr, "(\mathrm{id}_{\mathrm{H}} \otimes \varepsilon_{\mathrm{H}}) \otimes (\varepsilon_{\mathrm{H}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{H}})"'] & & \mathrm{U} \otimes \mathrm{U} \arrow[u, "m_{\mathrm{U}}"'] \\
 & \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \arrow[ur, "\phi \otimes \phi"'] & .
\end{tikzcd}$$

Enfin, θ est compatible avec les lois de G et de $\mathbf{W}(\mathrm{U})^{\times}$ si et seulement si $\theta \circ m_{\mathrm{G}}$ égale $\mu \circ (\phi \circ \mathrm{pr}_1, \phi \circ \mathrm{pr}_2)$ ce qui équivaut, d'après ce qui précède, à $\phi \circ m_{\mathrm{H}} = \beta$. Or il est clair que $(\phi \circ m_{\mathrm{H}})(x \otimes y) = \phi(xy)$, et l'on voit facilement que $\beta(x \otimes y) = \phi(x)\phi(y)$.

2.4. Revenons maintenant à un anneau pseudocompact quelconque k pour appliquer aux groupes formels les résultats de 1.4–1.5 sur le passage au quotient par une relation d'équivalence topologiquement plate.

[90] Soient $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ un *monomorphisme* de k-groupes formels, $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ le morphisme « multiplication » de G et λ le morphisme composé **519**

$$\lambda : \quad \mathrm{G} \times \mathrm{H} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times u} \mathrm{G} \times \mathrm{G} \xrightarrow{\mu} \mathrm{G}.$$

Comme u est un monomorphisme, le couple

$$\mathrm{G} \times \mathrm{H} \underset{\lambda}{\overset{\mathrm{pr}_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{G}$$

est un couple d'équivalence dans $\mathbf{Vaf}_{/k}$ (cf. V, 2.b)). Rappelons (cf. 1.2.C) que le conoyau G/H de ce couple est défini comme suit.

Soient $\mathscr{O}(\mathrm{G})$ et $\mathscr{O}(\mathrm{H})$ les algèbres affines de G et H, $\Delta : \mathscr{O}(\mathrm{G}) \to \mathscr{O}(\mathrm{G}) \widehat{\otimes}_k \mathscr{O}(\mathrm{G})$ le morphisme diagonal de $\mathscr{O}(\mathrm{G})$, et I le noyau du morphisme $u^\natural : \mathscr{O}(\mathrm{G}) \to \mathscr{O}(\mathrm{H})$. (On sait, d'après la proposition 1.3, que $u^\natural$ induit un isomorphisme $\mathscr{O}(\mathrm{G})/\mathrm{I} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(\mathrm{H})$). Alors, l'algèbre affine $\mathscr{O}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ de G/H est le noyau du couple de morphismes :

$$\mathscr{O}(\mathrm{G}) \underset{(\mathrm{id} \widehat{\otimes} u^\natural)\Delta}{\overset{\tau_1}{\rightrightarrows}} \mathscr{O}(\mathrm{G}) \widehat{\otimes}_k \mathscr{O}(\mathrm{H}),$$

où $\tau_1(x) = x \widehat{\otimes} 1$, c.-à-d.,

$$\mathscr{O}(\mathrm{G}/\mathrm{H}) = \{x \in \mathscr{O}(\mathrm{G}) \mid \Delta(x) - x \widehat{\otimes} 1 \in \mathscr{O}(\mathrm{G}) \widehat{\otimes} \mathrm{I}\}.$$

Si, de plus, H est *topologiquement plat* sur k, alors pr_1 est topologiquement plat et l'on déduit du théorème 1.4 le théorème suivant.

[90] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Théorème. — *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un* monomorphisme *de k-groupes formels. On suppose* H topologiquement plat *sur k. Alors, la projection $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G/H}$ est surjective et topologiquement plate, on a un isomorphisme*

$$(*) \qquad \mathrm{G} \times \mathrm{H} \xrightarrow{\sim} \mathrm{G} \underset{\mathrm{G/H}}{\times} \mathrm{G}$$

et G/H *représente le* faisceau-quotient *pour la topologie plate.*

Par conséquent, G/H *est muni d'une structure canonique d'objet à groupe d'opérateurs* G*, telle que $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G/H}$ soit un morphisme d'objets à opérateurs. Si de plus u identifie* H *à un sous-groupe* invariant *de* G*, alors* G/H *est muni d'une structure canonique de k-*groupe formel, *telle que $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G/H}$ soit un morphisme de k-groupes formels, et* H *est le noyau de p.*

En effet, la première assertion découle de 1.4 ; les deux autres de IV, corollaires 5.2.2 et 5.2.4.

Corollaire. — [91] *Soient* G *un k-groupe formel,* H *un sous-groupe formel de* G, A (*resp.* A/J, B) *l'algèbre affine de* G (*resp.* H, G/H), $\mathrm{I_A}$ *l'idéal d'augmentation de* A, *et* $\mathrm{I_B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{I_A}$. *On suppose* H topologiquement plat *sur k. Alors* J *égale* $\overline{\mathrm{AI_B}}$*, l'idéal fermé engendré par* $\mathrm{I_B}$.

En effet, la projection $\mathrm{B} \to \mathrm{B/I_B}$ correspond à la « section unité » $e : \mathrm{Spf}(k) \to \mathrm{G/H}$ de G/H. D'après $(*)$, H s'identifie au produit fibré $\mathrm{Spf}(k) \times_{\mathrm{G/H}} \mathrm{G}$, et donc son algèbre affine A/J s'identifie à $(\mathrm{B/I_B}) \widehat{\otimes}_{\mathrm{B}} \mathrm{A} \simeq \mathrm{A}/\overline{\mathrm{AI_B}}$.

2.4.A. — [92] Soient G, Q des k-groupes formels topologiquement plats ; on suppose qu'il existe des homomorphismes $\sigma : \mathrm{Q} \to \mathrm{G}$ et $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{Q}$ tels que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id_Q}$. En particulier, σ est un monomorphisme, donc Q est un sous-groupe formel de G (cf. la remarque 1.3). Soient $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}(\pi)$ et σ' l'inclusion $\mathrm{N} \hookrightarrow \mathrm{G}$. Alors G est le *produit semi-direct* de N par Q (cf. I, 2.3.8), i.e. pour tout $\mathrm{B} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alf}_{/k}$, identifiant N(B) et Q(B) à leurs images dans G(B) par σ' et σ, N(B) est un sous-groupe invariant de G(B) et l'application

$$(1) \qquad \mu : \quad \mathrm{N(B)} \times \mathrm{Q(B)} \longrightarrow \mathrm{G(B)}, \qquad (x, q) \mapsto xq$$

est bijective. Alors le morphisme de k-variétés formelles

$$(2) \qquad \theta : \quad \mathrm{G(B)} \longrightarrow \mathrm{N(B)}, \qquad g \mapsto g \cdot \sigma\pi(g^{-1})$$

est une rétraction de σ', l'inverse de μ est l'application

$$(3) \qquad g \mapsto (\theta(g), \pi(g))$$

et $\theta \circ \sigma' : \mathrm{N} \to \mathrm{G/Q}$ est un isomorphisme de k-variétés formelles. En particulier, N est topologiquement plat sur k, d'après 1.4 (ii). Notons α (resp. β) l'application de

[91] N.D.E. : On a explicité ce corollaire, qui est utilisé, par exemple, en 5.2.1/5.2.3.

[92] N.D.E. : On a ajouté les paragraphes 2.4.A et 2.4.B, qui seront utiles en 5.1.3, resp. en 2.9.

$Q \times N$ (resp. $G \times N = N \times Q \times N$) vers N définie ensemblistement par $\alpha(q, y) = qyq^{-1}$ (resp. $\beta(x, q, y) = x\alpha(q, y)$). Alors on a le diagramme commutatif ci-dessous :

(4)
$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mathrm{id} \times \theta"] \arrow[d, "m_G"'] & G \times N \arrow[r, "\theta \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\beta"] & N \times N \arrow[dl, "m_N"] \\ G \arrow[r, "\theta"] & N & \end{tikzcd}.$$

Ceci peut s'exprimer comme suit en termes des algèbres affines A, A_0 et A' de G, Q et N (cf. 5.1.3 plus loin). Soient $\rho' : A \to A'$, $\rho : A \to A_0$ et $\tau : A_0 \to A$ les homomorphismes de k-bialgèbres correspondant à σ', σ et π, et soit $I = \mathrm{Ker}(\rho)$. Alors, d'après le corollaire précédent, A' s'identifie à $A/\overline{A\tau(J_0)}$, où J_0 désigne l'idéal d'augmentation de A_0.

D'autre part, soit B l'algèbre affine de G/Q, c'est le noyau du couple de morphismes :

$$A \underset{(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\rho)\Delta_A}{\overset{\tau_1}{\rightrightarrows}} A \,\widehat{\otimes}_k\, A_0,$$

i.e. $B = \{x \in A \mid \Delta_A(x) - x \,\widehat{\otimes}\, 1 \in A \,\widehat{\otimes}\, I\}$. Notons γ le morphisme continu de k-algèbres $\theta^\natural : A' \to A$; c'est une section de ρ' et un isomorphisme de k-algèbres profinies de A' sur B. D'autre part, $\tau = \pi^\natural$ identifie A_0 à une sous-bialgèbre de A, qui n'est autre que l'algèbre affine du quotient $N\backslash G$. On déduit alors de (1) et (3) que l'on a un isomorphisme de k-algèbres profinies

$$(*) \qquad A' \,\widehat{\otimes}_k\, A_0 \xrightarrow{\sim} A, \qquad a' \,\widehat{\otimes}\, a_0 \mapsto \gamma(a')\tau(a_0),$$

dont l'inverse est l'application $a \mapsto (\rho' \otimes \rho)\Delta_A(a)$.

Enfin, identifions A' à son image dans A par γ, de sorte que la projection $A \to A'$ est alors $\gamma\rho'$. Notant $\Delta_{A'}$ la comultiplication de A', on déduit alors de (4) que $\Delta_A(A') \subset A \,\widehat{\otimes}\, A'$ et que le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\Delta_A"] \arrow[d, equal] & A \,\widehat{\otimes}\, A' \arrow[d, "\gamma\rho' \otimes \mathrm{id}"] \\ A' \arrow[r, "\Delta_{A'}"] & A' \,\widehat{\otimes}\, A' \end{tikzcd}$$

(on a donc aussi $\gamma\rho' \circ c_A = c_{A'}$, où c_A (resp. $c_{A'}$) est l'antipode de A (resp. A')). D'autre part, notant m_A la multiplication de A, on déduit de (2) que, pour tout $a \in A$,

$$\gamma\rho'(a) = (m_A \circ (\mathrm{id} \otimes \tau\rho\, c_A) \circ \Delta_A)(a).$$

2.4.B. — (92) Supposons, pour simplifier, k *artinien.* Alors ce qui précède s'exprime plus simplement en termes des bialgèbres covariantes de G, Q, N. En effet, comme

$\mathrm{G} = \mathrm{N} \times \mathrm{Q}$ comme k-variétés formelles, alors $\mathrm{H(G)} = \mathrm{H(N)} \otimes_k \mathrm{H(Q)}$ comme k-coalgèbres. De plus, comme la multiplication de G est donnée par

$$(x, q) \cdot (x', q') = (x\alpha(q, x'), qq'), \qquad \text{où} \quad \alpha(q, x') = qxq^{-1},$$

alors la multiplication de H(G) est donnée comme suit : pour tout $x \in \mathrm{H(N)}$, $q \in \mathrm{H(Q)}$,

$$(x \otimes q) \cdot (x' \otimes q') = x\phi(q, x') \otimes qq',$$

où $\phi : \mathrm{H(Q)} \otimes_k \mathrm{H(N)}$ est le morphisme de k-coalgèbres induit par α. Comme α est le morphisme composé ci-dessous (où δ_{G} (resp. m_{G}) est le morphisme diagonal (resp. la multiplication) de G, c_{Q} le morphisme d'inversion de Q et $v(q \otimes q' \otimes x) = q \otimes x \otimes q')$:

$$\mathrm{Q} \times \mathrm{N} \xrightarrow{v\circ(\delta_{\mathrm{G}}\times \mathrm{id})} \mathrm{Q} \times \mathrm{N} \times \mathrm{Q} \xrightarrow{\mathrm{id}\times\mathrm{id}\times c_{\mathrm{Q}}} \mathrm{Q} \times \mathrm{N} \times \mathrm{Q} \xrightarrow{m_{\mathrm{G}}} \mathrm{G}\,,$$

on obtient, notant encore c_{Q} l'antipode de H(Q), que

$$(\star) \qquad \phi(q \otimes x') = \sum_i q_i\, x' c_{\mathrm{Q}}(q'_i) \qquad \text{si} \qquad \Delta_{\mathrm{H(Q)}}(q) = \sum_i q_i \otimes q'_i.$$

En particulier, si M est un groupe abstrait et si H(Q) est l'algèbre de groupe kM (i.e. $\mathrm{Q} = \mathrm{Spf}^* k\mathrm{M}$ est le *k-groupe formel constant* M_k), alors pour tout $\gamma \in \mathrm{M}$ et $x' \in \mathrm{H(N)}$ on a $\phi(\gamma \otimes x') = \gamma x' \gamma^{-1}$, et ceci définit une action de M sur H(N) par automorphismes d'algèbre de Hopf.

2.4.1 Proposition. — *Soit* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{K}$ *un morphisme de k-groupes formels. Si* $\mathrm{H} =$
520 $\mathrm{Ker}(f)$ *est* topologiquement plat *sur k, l'homomorphisme* $f' : \mathrm{G/H} \to \mathrm{K}$*, qui est induit par f, est un* monomorphisme.

C'est une conséquence des résultats de l'exposé IV [(93)] ; nous en donnons cependant une démonstration directe. Soient T une variété formelle de longueur finie sur k et t un élément de (G/H)(T) tel que $f' \circ t$ soit l'élément unité de K(T). Nous devons montrer que t est l'élément unité de (G/H)(T). Notons p la projection $\mathrm{G} \to \mathrm{G/H}$ et X le produit fibré $\mathrm{T} \times_{\mathrm{G/H}} \mathrm{G}$.

D'après 2.4, p est surjectif et topologiquement plat, donc il en est de même du morphisme $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{X} \to \mathrm{T}$, donc pr_1 est un épimorphisme d'après la proposition 1.3.1, donc il suffit de montrer que $t \circ \mathrm{pr}_1$ est l'élément unité de (G/H)(X). Notons pr_2 la projection $\mathrm{X} \to \mathrm{G}$, on a $t \circ \mathrm{pr}_1 = p \circ \mathrm{pr}_2$, d'où l'égalité $1 = f' \circ t \circ \mathrm{pr}_1 = f' \circ p \circ \mathrm{pr}_2 = f \circ \mathrm{pr}_2$; alors la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G} \xrightarrow{f} \mathrm{K}$$

montre que pr_2 se factorise à travers H, donc $p \circ \mathrm{pr}_2$ est le morphisme nul. Comme $p \circ \mathrm{pr}_2 = t \circ \mathrm{pr}_1$, ceci prouve la proposition.

On déduit de la proposition le corollaire suivant. Notons $\mathscr{O}(\mathrm{G})$, $\mathscr{O}(\mathrm{K})$ et $\mathscr{O}(\mathrm{G/H})$ les algèbres affines de G, K et G/H ; on a vu (2.4) que p induit une injection de $\mathscr{O}(\mathrm{G/H})$ dans $\mathscr{O}(\mathrm{G})$. De plus, d'après la proposition 1.3, comme $f' : \mathrm{G/H} \to \mathrm{K}$ est un monomorphisme, le morphisme $\mathscr{O}(\mathrm{K}) \to \mathscr{O}(\mathrm{G/H})$ est surjectif, d'où :

(93) N.D.E. : cf. IV, 5.2.6.

Corollaire. — *Soient* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{K}$ *un morphisme de* k*-groupes formels et* $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(f)$. *Si* H *est topologiquement plat sur* k*, alors* $\mathscr{O}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ *est l'image de* $\mathscr{O}(\mathrm{K})$ *dans* $\mathscr{O}(\mathrm{G})$.

2.4.2. — Gardons les notations précédentes et supposons H *et* G *topologiquement plats sur* k. Alors G est topologiquement plat sur k et sur G/H, donc, d'après 1.3.3, G/H est topologiquement plat sur k. Par conséquent, d'après 2.4, la projection canonique q de K sur $\mathrm{Coker}(f')$ est topologiquement plate et f' est un isomorphisme de G/H sur $\mathrm{Ker}(q)$. Il est clair d'autre part qu'on a $\mathrm{Coker}(f) = \mathrm{Coker}(f')$. Donc, sous l'hypothèse que G et $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(f)$ soient topologiquement plats sur k, on a obtenu un isomorphisme entre $\mathrm{Ker}(q)$, *l'image* de f, et $\mathrm{G}/\mathrm{Ker}(f)$, la *coïmage* de f. Ceci entraîne le théorème ci-dessous.

Théorème. — *Soit* k *un corps. Les* k*-groupes formels* commutatifs *forment une catégorie abélienne.* 521

Corollaire. — *Soit* k *un corps. Les* k*-schémas en groupes* affines commutatifs *forment une catégorie abélienne.* (94)

Ceci résulte du théorème et de l'équivalence de catégories 2.2.2.

2.5. Un k-groupe formel est dit *étale* si la variété formelle sous-jacente est étale (cf. 1.6) ; ces groupes formels ont une structure très simple. En effet, *supposons* k *local* ; soient κ le corps résiduel de k, κ_s une clôture séparable de κ et Γ le groupe de Galois topologique de κ_s sur κ. Appelons Γ-*ensemble* la donnée d'un ensemble E et d'une opération *continue* de Γ sur E (i.e. le groupe d'isotropie de tout élément $x \in \mathrm{E}$ est un sous-groupe ouvert de Γ).

Pour toute k-variété formelle X, on pose :

$$\mathrm{X}(\kappa_s) = \varinjlim_{\ell} \mathrm{X}(\ell),$$

où ℓ parcourt les extensions finies de κ contenues dans κ_s. (95) Alors Γ opère continûment sur chaque $\mathrm{X}(\ell)$, donc aussi sur $\mathrm{X}(\kappa_s)$. De plus, soit $\mathrm{X}_\kappa = \mathrm{X} \widehat{\otimes}_k \kappa$ (cf. 1.6.C) ; pour tout ℓ on a $\mathrm{X}(\ell) = \mathrm{X}_\kappa(\ell)$, d'où $\mathrm{X}(\kappa_s) = \mathrm{X}_\kappa(\kappa_s)$.

Supposons maintenant X *étale* sur k, alors X_κ est la κ-variété formelle somme directe des $\mathrm{Spec}\,\kappa(x)$, pour $x \in \mathrm{X}$, et si l'on note X'_κ le κ-*schéma* somme directe des $\mathrm{Spec}\,\kappa(x)$, on voit que $\mathrm{X}_\kappa(\kappa_s)$ n'est autre que $\mathrm{X}'_\kappa(\kappa_s) = \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Sch}_{/\kappa})}(\mathrm{Spec}\,\kappa_s, \mathrm{X}'_\kappa)$.

Notons $\mathscr{C} = (\mathbf{Sch}^{\text{ét}}_{/\kappa})$ la sous-catégorie pleine de $(\mathbf{Sch}_{/\kappa})$ formée des κ-schémas étales. On sait que le foncteur $\mathrm{X}' \mapsto \mathrm{X}'(\kappa_s)$ est une *équivalence* de $\mathscr{C}$ sur la catégorie $\mathscr{C}'$ des Γ-ensembles (cf. SGA 1, V §§ 7-8 ou [**DG70**], § I.4 6.4), il induit donc une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{C}$-groupes et celle des $\mathscr{C}'$-groupes, or on voit aussitôt qu'un $\mathscr{C}'$-groupe est la même chose qu'un groupe abstrait G muni d'une opération continue de Γ par automorphismes de groupes (on dira alors que G est un Γ-*groupe*).

(94) N.D.E. : voir aussi les remarques suivant $\mathrm{VI_A}$, 5.4.3.

(95) N.D.E. : Noter que si $[\kappa_s : \kappa] = \infty$, κ_s n'est *pas* une κ-algèbre profinie, donc l'écriture précédente est un abus de notation. D'autre part, on a détaillé l'original dans ce qui suit.

Compte-tenu des équivalences $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa} \xrightarrow{\sim} (\mathbf{Sch}^{\text{ét}}_{/\kappa})$ de 1.6.E, on obtient donc la :

Proposition. — *Soient k un anneau pseudocompact* local, *κ son corps résiduel, κ_s une clôture séparable de κ et $\Gamma = \mathrm{Gal}(\kappa_s/\kappa)$.*

(i) *Le foncteur* $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}(\kappa_s)$ *est une* équivalence *de la catégorie des k*-variétés formelles étales *sur celle des* Γ-ensembles.

(ii) *Il induit une* équivalence *de la catégorie des k*-groupes formels étales *sur celle des* Γ-groupes.

Remarque 2.5.A. — [96] Soient k un corps, k_s une clôture séparable de k, G un k-groupe formel étale et M le groupe abstrait $\mathrm{G}(k_s)$. Notons X un ensemble de représentants des orbites de $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ dans M, et pour tout $x \in \mathrm{X}$ soient Γ_x son stabilisateur, qui est un sous-groupe de Γ d'indice fini, et $\mathrm{L}_x = k_s^{\Gamma_x}$, qui est une extension de k de degré $[\Gamma : \Gamma_x]$ (voir, par exemple, [**BAlg**], V § 10.10). Alors, d'après l'équivalence de catégories ci-dessus, l'algèbre affine $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ de G est le produit des L_x, muni de la topologie produit, et donc les L_x sont exactement les quotients simples $\mathscr{A}(\mathrm{G})/\mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal ouvert de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$. Comme ceux-ci correspondent par dualité aux sous-cogèbres de H(G), on obtient que H(G) est *pointée* (i.e. $\dim_k(\mathrm{C}) = 1$ pour toute sous-cogèbre simple C) si et seulement si $\mathrm{L}_x = k$ pour tout x, et dans ce cas $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est l'algèbre topologique k^{M}, donc H(G) est l'algèbre de groupe kM, et l'on a donc $\mathrm{M} = \{x \in \mathrm{H}(\mathrm{G}) \mid \varepsilon(x) = 1 \text{ et } \Delta(x) = x \otimes x\} = \mathrm{G}(k)$.

2.5.1. — Supposons de nouveau l'anneau pseudocompact k quelconque. Comme le
522 foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$ de 1.6.F commute aux produits finis, il transforme tout groupe formel G en un groupe formel étale G_e, et comme le morphisme $p : \mathrm{X} \to \mathrm{X}_e$ de *loc. cit.* est fonctoriel en X, alors $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_e$ est dans ce cas un morphisme de groupes formels.

[97] Considérons le noyau $\mathrm{Ker}(p)$, c'est le produit fibré du diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{G} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{Spf}(k) \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathrm{G}_e \end{tikzcd}$$

où ε est la section unité de G_e. Comme p induit une bijection sur les ensembles sous-jacents, on en déduit (cf. 1.2, N.D.E. (41)) que $\mathrm{Ker}(p)$ a pour ensemble sous-jacent l'image de $\mathrm{Spf}(k)$ par ε et que pour tout point s de $\mathrm{Spf}(k)$, l'algèbre locale de $\mathrm{Ker}(p)$ au point $\varepsilon(s)$ est $\mathscr{O}_{\mathrm{G},\varepsilon(s)} \widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}_e,\varepsilon(s)}} k_s$. De plus, en chaque point $\varepsilon(s)$, le corps résiduel de $\mathscr{O}_{\mathrm{G},\varepsilon(s)}$ est $\kappa(s)$, et donc $\mathscr{O}_{\mathrm{G}_e,\varepsilon(s)} = k_s$, d'où $\mathscr{O}_{\mathrm{Ker}(p),\varepsilon(s)} = \mathscr{O}_{\mathrm{G},\varepsilon(s)}$. Pour ces raisons

[96] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.
[97] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

nous dirons que $\mathrm{Ker}(p)$ est *le voisinage infinitésimal de l'origine* de G et nous écrirons $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{G}_0$, obtenant ainsi une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathrm{G}_0 \xrightarrow{\text{incl.}} \mathrm{G} \xrightarrow{p} \mathrm{G}_e \ .$$

Dans la suite, nous dirons que G est *infinitésimal* si $\mathrm{G} = \mathrm{G}_0$. [98] Ceci équivaut à dire que pour tout $s \in \mathrm{Spf}(k)$, ou encore pour tout morphisme continu $k \to \kappa$, où κ est un corps muni de la topologie discrète, l'élément unité est l'unique élément de $\mathrm{G}(\kappa(s))$ resp. de $\mathrm{G}(\kappa)$.

Supposons de plus que G soit *topologiquement plat* sur k. [99] Alors, d'après 1.6.1, le morphisme $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_e$ est topologiquement plat, et comme il est bijectif, c'est donc un épimorphisme effectif d'après la proposition 1.3.1. Par conséquent, G_e s'identifie au quotient G/G_0. On a donc obtenu :

Corollaire. — *Soit* G *un groupe formel* topologiquement plat *sur k. Alors* G_e *s'identifie au quotient* G/G_0 *; c.-à-d., on a une suite exacte de groupes formels :*

$$1 \longrightarrow \mathrm{G}_0 \xrightarrow{\text{incl.}} \mathrm{G} \xrightarrow{p} \mathrm{G}_e \longrightarrow 1.$$

2.5.2. — Supposons que k soit un *corps parfait*. Dans ce cas, on a vu (cf. 1.6.2) que le morphisme $p : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$ possède une section $s : \mathrm{X}_e \to \mathrm{X}$ qui dépend fonctoriellement **523**
de X ; cette section est donc un morphisme de groupes formels lorsque X est un groupe formel. On obtient donc la :

Proposition. — *Lorsque k est un corps* parfait*, tout k-groupe formel* G *est canoniquement isomorphe au* produit semi-direct *d'un groupe infinitésimal* G_0 *et d'un groupe étale* G_e *opérant sur* G_0*.* [100]

Si, de plus, G est *commutatif*, alors G est le produit de G_0 et de G_e. D'après 2.2.2, cette décomposition canonique des k-groupes formels commutatifs correspond à une décomposition analogue des k-schémas affines en groupes commutatifs, voir le paragraphe 2.5.3 ci-dessous.

Remarque 2.5.2.A. — [101] La suite exacte $1 \to \mathrm{G}_0 \to \mathrm{G} \to \mathrm{G}_e \to 1$ n'est pas nécessairement scindée lorsque k n'est pas parfait : donnons l'exemple suivant, tiré de [**DG70**], § III.6, 8.6. Soit k un corps non parfait, de caractéristique $p > 0$. Soit $\lambda \in k - k^p$, soit L_λ la p-algèbre de Lie abélienne de base (x, y), la puissance p-ième symbolique (cf. $\mathrm{VII_A}$, 5.2) étant donnée par $x^{(p)} = x$ et $y^{(p)} = \lambda x$, soit $\mathrm{U}_p(\mathrm{L}_\lambda) = k[x, y]/(x^p - x, y^p - \lambda x)$ l'algèbre enveloppante restreinte de L_λ (cf. $\mathrm{VII_A}$, 5.3), et soit G_λ le k-groupe formel

---

(98) N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

(99) N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

(100) N.D.E. : Le même argument montre aussi que, pour un corps k *arbitraire*, si tous les corps résiduels de G égalent k, alors G_e est le k-groupe *constant* $(\mathrm{M})_k$, où $\mathrm{M} = \mathrm{G}(k) = \mathrm{Spf}^*\,\mathrm{H}(\mathrm{G})$, et $\mathrm{H}(\mathrm{G})$ est le produit semi-direct de $\mathrm{H}(\mathrm{G}_0)$ par l'algèbre de groupe $k\mathrm{M}$, cf. l'ajout 2.9 plus loin.

(101) N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

commutatif d'algèbre affine $\mathrm{U}_p(\mathrm{L}_\lambda)$. Alors G_λ est une extension non-scindée du k-groupe étale constant $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k$ par le k-groupe infinitésimal $\boldsymbol{\alpha}_{p,\,k} = \operatorname{Spf} k[x]/(x^p - x)$, i.e. on a une suite exacte non-scindée de k-groupes formels commutatifs : [102]

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{\alpha}_{p,\,k} \longrightarrow \mathrm{G}_\lambda \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k \longrightarrow 0\ .$$

Elle correspond par dualité à une suite exacte non-scindée de k-groupes algébriques commutatifs :

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_{p,\,k} \longrightarrow \mathrm{D}'(\mathrm{G}_\lambda) \longrightarrow \boldsymbol{\alpha}_{p,\,k} \longrightarrow 0$$

où $\boldsymbol{\mu}_{p,\,k} = \operatorname{Spec} k[t]/(t^p - 1)$ (et l'on obtient ainsi toutes les extensions de $\boldsymbol{\alpha}_{p,\,k}$ par $\boldsymbol{\mu}_{p,\,k}$, cf. [**DG70**], § III.6, 8.6).

2.5.3. — [103] Soit k un corps.

Définition 2.5.3.A. — On dira qu'un k-schéma en groupes commutatifs est *unipotent* s'il est isomorphe à $\operatorname{Spec} \mathrm{H}(\mathrm{G})$, où G est un k-groupe formel commutatif *infinitésimal.* [104]

[105] D'autre part, suivant l'Exp. IX, Définition 1.1, on dit qu'un k-schéma en groupes H est *de type multiplicatif* s'il existe un schéma S, fidèlement plat et quasi-compact au-dessus de $\operatorname{Spec} k$, tel que H_S soit un S-groupe diagonalisable, i.e. soit isomorphe à $\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$ pour un certain groupe abélien « abstrait » M. Par descente (fpqc), ceci entraîne que H est *affine* et commutatif. D'autre part, comme on peut remplacer S par le corps résiduel d'un de ses points, on voit que H est de type multiplicatif si et seulement si il existe une extension K de k telle que H_K soit un K-groupe diagonalisable.

Proposition 2.5.3.B. — *Soit* T *un k-schéma en groupes commutatifs affine et soit k_s une clôture séparable de k.*

(i) *Pour que* T *soit* de type multiplicatif*, il faut et il suffit que son dual* D(T) *soit un k-groupe formel commutatif* étale.

(ii) *Par conséquent,* T *est de type multiplicatif si et seulement si* $\mathrm{T} \otimes_k k_s$ *est diagonalisable.*

Démonstration. Notons $\mathscr{A}$ l'algèbre affine de D(T) et $\mathscr{A}_0$ sa composante locale en l'élément neutre ; alors D(T) est étale sur k si et seulement si $\mathscr{A}_0 = k$. Si K est une extension de k, alors l'algèbre $\mathscr{A}_0 \,\widehat{\otimes}_k\, \mathrm{K}$ est locale (car limite projective d'anneaux artiniens locaux), donc coïncide avec la composante locale $(\mathscr{A} \,\widehat{\otimes}_k\, \mathrm{K})_0$; de plus, comme

[102] N.D.E. : $\boldsymbol{\alpha}_{p,\,k}$, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k$ et G_λ sont aussi des k-groupes algébriques finis et plats sur k, cf. la N.D.E. (84) dans 2.2.2.

[103] N.D.E. : On a introduit la numérotation 2.5.3 et 2.5.3.A à 2.5.3.C.

[104] N.D.E. : Cela coïncide avec la notion « usuelle » de k-schéma en groupes unipotent, cf. l'ajout 2.8 à la fin de la Section 2.

[105] N.D.E. : L'original indiquait : « disons qu'un k-schéma en groupes commutatifs est de type multiplicatif s'il est isomorphe à $\operatorname{Spec} \mathrm{H}(\mathrm{G})$, où G est un k-groupe formel commutatif étale ». On a donné ici la définition « usuelle », tirée de l'Exp. IX, 1.1, et l'on a montré l'équivalence avec la condition précédente ; voir aussi [**DG70**], § IV.1, Th. 2.2.

la formation de D(T) commute au changement de base (cf. 2.2.2), on a aussi $\mathscr{A}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K} \simeq \mathrm{D}(\mathrm{T}_\mathrm{K})$.

Supposons T de type multiplicatif, alors il existe une extension K de k telle que $\mathscr{O}(\mathrm{T})\otimes_k \mathrm{K}$ soit isomorphe, comme K-algèbre de Hopf, à l'algèbre de groupe KM, pour un certain groupe abélien M. Alors $\mathscr{A}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K}$ est isomorphe à l'algèbre K^M, munie de la topologie produit, donc on a $\mathrm{K} = (\mathscr{A}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K})_0 = \mathscr{A}_0\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K}$ et ceci entraîne que $\mathscr{A}_0 = k$, donc D(T) est étale.

Réciproquement, supposons que D(T) soit étale. Alors $\mathrm{D}(\mathrm{T})\,\widehat{\otimes}_k\,k_s = \mathrm{D}(\mathrm{T}_{k_s})$ est un k_s-groupe constant M, donc sa bigèbre covariante est l'algèbre de groupe $k_s\mathrm{M}$ (cf. la remarque 2.5.A), donc $\mathscr{O}(\mathrm{T}) \otimes_k k_s = k_s\mathrm{M}$, ce qui prouve que T est de type multiplicatif, et déployé par l'extension $k \to k_s$. La proposition en découle.

D'après 2.2.2, 2.5.1, et 2.5, on obtient :

Corollaire 2.5.3.C. — *Soit k un corps et soit* G *un k-schéma en groupes commutatifs affine.*

(i) G *contient un sous-groupe de type multiplicatif* G_m *tel que* G/G_m *soit unipotent.*

(ii) *Lorsque k est* parfait*, il existe en outre une rétraction canonique de* G *sur* G_m*, de sorte que* G *est le produit d'un groupe unipotent et d'un groupe de type multiplicatif.*

(iii) [(106)] *Soient k_s une clôture séparable de k et $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$. La catégorie des k-schémas en groupes de type multiplicatif est anti-équivalente à la catégorie des Γ-modules continus.*

2.6. Nous allons maintenant étudier les groupes formels infinitésimaux, auxquels sont consacrés les paragraphes suivants. Dans cette étude, les *algèbres de Lie* jouent un rôle primordial.

Supposons d'abord *l'anneau de base k artinien* et soit G un groupe formel sur k. On peut donner de l'algèbre de Lie de G trois interprétations différentes que nous utiliserons toutes :

a) Soient D l'algèbre $k[d]/(d^2)$ des nombres duaux sur k et δ l'homomorphisme de **524**
D dans k qui annule d. Pour tout groupe formel G sur k, Lie(G) est le noyau de $\mathrm{G}(\delta)$, de sorte qu'on a par définition une *suite exacte de groupes*

$$1 \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{D}) \xrightarrow{\mathrm{G}(\delta)} \mathrm{G}(k) \longrightarrow 1\ .$$

b) Soit A l'algèbre affine de G et $\mathrm{I_A} = \mathrm{Ker}\,\varepsilon_\mathrm{A}$ son idéal d'augmentation. Le groupe G(D) a pour éléments les morphismes de k-algèbres profinies $f : \mathrm{A} \to \mathrm{D}$. La condition $\mathrm{G}(\delta)(f) = 1$ équivaut à $\delta \circ f = \varepsilon_\mathrm{A}$. Comme $x - \varepsilon_\mathrm{A}(x)\cdot 1_\mathrm{A} \in \mathrm{I_A}$, pour tout $x \in \mathrm{A}$, ceci équivaut à $f(\mathrm{I_A}) \subset k\cdot d$, donc $\mathrm{Ker}(f)$ contient I_A^2 et donc aussi $\overline{\mathrm{I}_\mathrm{A}^2}$, donc f induit une application linéaire continue f' de $\mathrm{I_A}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{A}^2} = \omega_{\mathrm{G}/k}$ dans k telle que, pour tout $x \in \mathrm{A}$, on ait l'égalité

$$f(x) = \varepsilon_\mathrm{A}(x)\cdot 1_\mathrm{D} + f'(\overline{x})\cdot d,$$

(106) N.D.E. : On a ajouté le point (iii), conséquence de la proposition 2.5.

où $\overline{x}$ désigne l'image de $x-\varepsilon_{\mathrm{A}}(x)\cdot 1_{\mathrm{A}}$ dans $\mathrm{I_A}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2}$. On voit alors que *l'application* $f \mapsto f'$ *définit une bijection de* Lie(G) *sur le dual topologique* $\omega^{\dagger}_{\mathrm{G}/k}$ *de* $\omega_{\mathrm{G}/k}$ (cf. 0.2.2).

Cette bijection respecte les structures de groupe. En effet, soient f et g deux éléments de Lie(G) ; leur produit $f\cdot g$ est l'application composée $h \circ \Delta_{\mathrm{A}}$, où $h : \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A} \to \mathrm{D}$ est tel que $h(b \mathbin{\widehat{\otimes}} b') = f(b)g(b')$. Or, si $a \in \mathrm{I_A}$ on a, d'après 2.1 (ii), $\Delta_{\mathrm{A}}(a) - a \mathbin{\widehat{\otimes}} 1 - 1 \mathbin{\widehat{\otimes}} a \in \mathrm{I_A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{I_A}$, d'où $(f\cdot g)(a) = f(a) + g(a)$ (cf. aussi II 3.10).

Dans la suite, nous identifions Lie(G) à $\omega^{\dagger}_{\mathrm{G}/k}$ au moyen de la bijection $f \mapsto f'$ décrite ci-dessus. *Le groupe* Lie(G) *est donc muni d'une structure de k-module.*

525 **c)** Soient $\mathrm{A}^{\dagger}$ et $\mathrm{D}^{\dagger}$ les k-modules duaux de A et D, $\{1_{\mathrm{D}}^{\dagger}, d^{\dagger}\}$ la base duale de la base $\{1_{\mathrm{D}}, d\}$ de D sur k (on a $1_{\mathrm{D}}^{\dagger} = \delta$). Comme D est libre de rang fini sur k, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{A},\mathrm{D}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathrm{D}^{\dagger},\mathrm{A}^{\dagger}), \qquad f \mapsto {}^t f$$

est bijective. D'un autre côté, ${}^t f$ est déterminé par les valeurs ${}^t f(1_{\mathrm{D}}^*)$ et ${}^t f(d^*) = x$. La condition $\mathrm{G}(\delta)(f) = 1$ équivaut à l'égalité ${}^t f(1_{\mathrm{D}}^*) = \varepsilon_{\mathrm{A}}$. On voit aisément d'autre part que f est compatible avec la multiplication si et seulement si l'on a (cf. 2.3) :

$$(*) \qquad \delta_{\mathrm{G}}(x) = \varphi_{\mathrm{G}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x).$$

Enfin, il est clair qu'une application linéaire continue $f : \mathrm{A} \to \mathrm{D}$, qui est compatible avec la multiplication et telle que $\delta \circ f = \varepsilon_{\mathrm{A}}$, envoie l'élément unité de A sur celui de D. [107] L'application $f \mapsto x$ nous permet donc d'identifier Lie(G) à l'ensemble des « éléments primitifs » de H(G) (i.e. les $x \in \mathrm{H(G)}$ vérifiant la relation $(*)$). Si x et y sont deux tels éléments, on a

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{G}}(xy) = \delta_{\mathrm{G}}(x)\delta_{\mathrm{G}}(y) &= \varphi_{\mathrm{G}}\big((x\otimes 1 + 1\otimes x)(y \otimes 1 + 1 \otimes y)\big)\\ &= \varphi_{\mathrm{G}}(xy \otimes 1 + x \otimes y + y \otimes x + 1 \otimes xy),\end{aligned}$$

d'où $\delta_{\mathrm{G}}(xy - yx) = \varphi_{\mathrm{G}}\big((xy-yx)\otimes 1 + 1 \otimes (xy - yx)\big)$.

Ceci montre que le k-module Lie(G) est identifié à une sous-algèbre de Lie de H(G) : nous dirons que Lie(G) *est l'algèbre de Lie de* G. [108]

526 ***2.6.1***. — Lorsque k est un anneau pseudocompact arbitraire et G un groupe formel sur k, nous appelons $\mathbf{O}_k$*-algèbre de Lie de* G le foncteur $\mathbf{Lie}$(G) qui associe à tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ la C-algèbre de Lie du C-groupe formel $\mathrm{G}' = \mathrm{G}\widehat{\otimes}_k\mathrm{C}$: [109] posons $\mathrm{A}' = \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{C}$, comme $\mathrm{I_A}$ est facteur direct de A, alors $\mathrm{I}_{\mathrm{A}'}$ égale $\mathrm{I_A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{C} = \mathrm{I_A} \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}} \mathrm{A}'$,

---

(107) N.D.E. : En effet, $\delta\circ f = \varepsilon_{\mathrm{A}}$ entraîne que $f(1) = 1+\lambda d$, avec $\lambda \in k$, et alors $f(1) = f(1)^2 = 1+2\lambda d$ donne $\lambda = 0$.

(108) N.D.E. : En comparant avec $\mathrm{VII_A}$ 2.5, on voit que si K est un k-schéma en groupes *de type fini* et si G est le complété formel de K à l'origine (i.e. $\mathscr{A}$(G) est le complété de l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{K},e}$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, où $\mathfrak{m}$ est le noyau de l'augmentation $\varepsilon : \mathscr{O}_{\mathrm{K},e} \to k$) alors H(G) s'identifie à l'algèbre des distributions U(K), et Lie(G) à Lie(K). (La condition que K soit de type fini sur k est utilisée pour assurer que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est un k-module de longueur finie, donc discret, de sorte que son dual topologique coïncide avec son dual ordinaire.) En particulier, lorsque G est un k-groupe formel *fini* (i.e. tel que $\mathscr{A}$(G) soit un k-module fini), auquel cas G peut aussi être considéré comme le k-schéma en groupes Spec $\mathscr{A}$(G), les deux définitions de Lie(G) coïncident.

(109) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

et puisque $\omega_{G/k} = I_A \widehat{\otimes}_A k$ et de même $\omega_{G'/C} = I_{A'} \widehat{\otimes}_{A'} C$, on obtient que $\omega_{G'/C} = \omega_{G/k} \widehat{\otimes}_A C$ et donc

$$\mathbf{Lie}(G)(C) = \mathrm{Hom}_c(\omega_{G/k} \widehat{\otimes}_A C, C) \qquad \text{i.e.} \qquad \mathbf{Lie}(G) = \mathbf{V}_k^f(\omega_{G/k})$$

(avec les notations de 1.2.3.B). Donc, d'après la proposition 1.2.3.E, $\mathbf{Lie}(G)$ est plate sur $\mathbf{O}_k$ si et seulement si $\omega_{G/k}$ est un k-module pseudocompact projectif.

2.6.2. — Réciproquement, toute algèbre de Lie $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{O}_k$ définit un k-foncteur en groupes. Désignons en effet par $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ le foncteur qui associe à tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ l'algèbre enveloppante $\mathrm{U}(\mathbf{L}(C))$ de la C-algèbre de Lie $\mathbf{L}(C)$. D'après $\mathrm{VII_A}$, 3.2.2, $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ est une bialgèbre sur $\mathbf{O}_k$ et détermine donc, d'après 2.2, un k-foncteur en groupes $\mathrm{Spf}^* \mathbf{U}(\mathbf{L})$ que nous noterons désormais $\mathscr{G}(\mathbf{L})$. Ainsi, $\mathscr{G}(\mathbf{L})(C)$ est le groupe des éléments $z \in \mathrm{U}(\mathbf{L}(C))$ d'augmentation 1 et tels que $\Delta_{\mathrm{U}(\mathbf{L}(C))}(z) = z \otimes z$.

De plus, lorsque $\mathbf{L}$ est plate sur $\mathbf{O}_k$, on a la proposition suivante.

Proposition. — [110] *Soit* $\mathbf{L}$ *une* $\mathbf{O}_k$*-algèbre de Lie* plate.

(i) $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ *est un groupe* formel topologiquement plat *sur k, qui a* $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ *pour* $\mathbf{O}_k$*-bialgèbre.*

(ii) $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ *est* infinitésimal.

(iii) *Pour tout objet* C *de* $\mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))(C)$ *s'identifie à l'ensemble*

$$\mathrm{Prim}\,\mathrm{U}(\mathbf{L}(C)) = \{x \in \mathrm{U}(\mathbf{L}(C)) \mid \varepsilon(x) = 0 \quad \textit{et} \quad \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$$

des éléments primitifs *de* $\mathrm{U}(\mathbf{L}(C))$. *En particulier, on a un morphisme naturel de* $\mathbf{O}_k$*-algèbres de Lie* $\tau_{\mathbf{L}} : \mathbf{L} \to \mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))$.

En effet, l'hypothèse que $\mathbf{L}$ soit plate sur $\mathbf{O}_k$ signifie que pour tout morphisme $C \to D$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$, on a $\mathbf{L}(D) = \mathbf{L}(C) \otimes_C D$, et que pour chaque composante locale C' de C, $\mathbf{L}(C')$ est un C'-module libre. La première condition entraîne que $\mathrm{U}(\mathbf{L}(D)) = \mathrm{U}(\mathbf{L}(C)) \otimes D$ (d'après la propriété universelle du produit tensoriel et celle du foncteur $L \mapsto \mathrm{U}(L)$), et la seconde condition entraîne, d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (cf. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, I 2.7), que $\mathrm{U}(\mathbf{L}(C'))$ est un C'-module libre. Donc la bialgèbre $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ est plate sur $\mathbf{O}_k$.

Pour démontrer (ii) et (iii), on peut supposer que k est artinien. Posons alors $L = \mathbf{L}(k)$, $U = \mathrm{U}(L)$, $U_0 = k \cdot 1_U$ et soit U^+ l'idéal bilatère de U engendré par l'image de L. Posons en outre, pour tout $n \geqslant 1$,

$$U_n = \{u \in U \mid \Delta_U(u) - u \otimes 1 \in U_{n-1} \otimes U^+\}.$$

D'après 1.3.6, il suffit de montrer que U est la réunion des U_n. Or, si l'on identifie L à 527
son image canonique dans U, L est évidemment contenu dans U_1. Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de L, on a donc $\Delta_U(x_1 \cdots x_n) = (x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1) \cdots (x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n)$, ce qui montre, par récurrence sur n, que le produit $x_1 \cdots x_n$ appartient à U_n, donc que $U = \bigcup_n U_n$. Ceci prouve (ii).

[110] N.D.E. : On a mis en évidence les points (i) et (ii), et l'on a ajouté le point (iii), qui sera utile en 2.6.3 et 3.3.2.

D'autre part, soit $\mathrm{D} = k[d]/(d^2)$ l'algèbre des nombres duaux sur k. Par hypothèse, on a $\mathbf{L}(\mathrm{D}) \simeq \mathrm{L} \otimes \mathrm{D}$, d'où $\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{D})) \simeq \mathrm{U} \otimes \mathrm{D}$, d'après les propriétés universelles du produit tensoriel et de l'algèbre enveloppante. Il en résulte que $\mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))(k)$ s'identifie à l'ensemble des éléments $z = 1 + xd$ de $\mathrm{U} \oplus \mathrm{U}d$ (où $x \in \mathrm{U}$) tels que $\varepsilon(z) = 1$ et $\Delta(z) = z \otimes z$, ce qui équivaut à $\varepsilon(x) = 0$ et $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, c.-à-d., à $x \in \operatorname{Prim} \mathrm{U}$. En particulier, l'application $\tau_{\mathrm{L}} : x \mapsto 1 + dx$ est un morphisme de $\mathbf{O}_k$-algèbres de Lie, de $\mathbf{L}$ vers $\mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))$.

2.6.3. — Si $\mathbf{L}$ est une algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$, le groupe formel $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ peut être caractérisé par une propriété universelle. [111] En effet, tout morphisme ϕ de $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ dans un groupe formel G induit un morphisme $\mathbf{Lie}(\phi) : \mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L})) \to \mathbf{Lie}(\mathrm{G})$; composant celui-ci avec le morphisme $\tau_{\mathbf{L}} : \mathbf{L} \to \mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))$ (cf. 2.6.2), on obtient un morphisme $\phi' : \mathbf{L} \to \mathbf{Lie}(\mathrm{G})$, et l'on a :

Proposition. — *Si* G *est un k-groupe formel et* $\mathbf{L}$ *une* $\mathbf{O}_k$*-algèbre de Lie* plate*, l'application $\phi \mapsto \phi'$ définie ci-dessus est une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathscr{G}(\mathbf{L}), \mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathbf{L}, \mathbf{Lie}(\mathrm{G}))$$

où le terme de droite désigne l'ensemble des morphismes de $\mathbf{O}_k$*-algèbres de Lie de* $\mathbf{L}$ *dans* $\mathbf{Lie}(\mathrm{G})$*.*

On se ramène en effet tout de suite au cas où k est artinien. Posons $\mathrm{L} = \mathbf{L}(k)$. D'après 2.3.1, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathscr{G}(\mathbf{L}), \mathrm{G})$ est en bijection avec l'ensemble des morphismes d'algèbres unitaires $\phi : \mathrm{U}(\mathrm{L}) \to \mathrm{H}(\mathrm{G})$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U}(\mathrm{L}) \arrow[r, "h"] \arrow[dd, "\Delta_{\mathrm{U}(\mathrm{L})}"'] & \mathrm{H}(\mathrm{G}) \arrow[dr, "\delta_{\mathrm{G}}"] & \\
 & & \mathrm{H}(\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \\
\mathrm{U}(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{U}(\mathrm{L}) \arrow[r, "h \otimes h"] & \mathrm{H}(\mathrm{G}) \otimes \mathrm{H}(\mathrm{G}) \arrow[ur, "\varphi_{\mathrm{G}}"'] &
\end{tikzcd}.$$

528 Or h est défini par sa restriction à L, qui est un morphisme d'algèbres de Lie de L dans l'algèbre de Lie sous-jacente à H(G), et la commutativité du diagramme signifie que h applique L dans la partie de H(G) formée des x tels que $\delta_{\mathrm{G}}(x) = \varphi_{\mathrm{G}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$, qui n'est autre que Lie(G), cf. 2.6 c).

2.7. Nous terminons ces généralités sur un énoncé qui remonte à S. Lie et qui nous servira au paragraphe 5.1. *Un monoïde formel sur k* est par définition un couple (M, m) formé d'une variété formelle M et d'un morphisme $m : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ tel que $m(\mathrm{C})$ fasse de $\mathrm{M}(\mathrm{C})$ un monoïde pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$. [112] En particulier, la « section unité », qui associe à tout objet C l'élément unité de M(C), définit une

[111] N.D.E. : On a modifié ce qui suit, en tirant profit de l'ajout fait dans 2.6.2.

[112] N.D.E. : Ici et dans ce qui suit, on a écrit « monoïde » au lieu de « monoïde à élément unité » (on rappelle qu'un monoïde est par définition un ensemble muni d'une loi de composition associative et possédant un élément unité).

section ε_{M} de la projection canonique $\mathrm{M} \to \mathrm{Spf}(k)$. Nous dirons que le monoïde formel M est *infinitésimal* si ε_{M} induit une bijection des ensembles sous-jacents.

Proposition. — *Tout k-monoïde formel* M *topologiquement plat et infinitésimal est un k-groupe formel.* [113]

Nous devons montrer que M(C) est un groupe pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$. On se ramène donc de suite au cas où k est artinien. Soit alors $\mathrm{U} = \mathrm{H}(\mathrm{M})$ la coalgèbre de M (1.3.5) ; la multiplication $m : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ induit un morphisme de coalgèbres $m_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \otimes \mathrm{U} \to \mathrm{U}$, qui fait de U une algèbre associative sur k ; cette algèbre a pour élément unité l'image de l'élément unité de k par l'application de k dans U qui est **529**
induite par la section unité ε_{M} de M. De même, la projection $\mathrm{M} \to \mathrm{Spf}(k)$ induit un homomorphisme ε_{U} de U dans k ; nous noterons U^+ le noyau de ε_{U}.

Nous devons montrer qu'il existe un antipodisme, c'est-à-dire un morphisme de coalgèbres $c_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ tel qu'on ait, pour tout $u \in \mathrm{U}$:

$$(*) \qquad (m_{\mathrm{U}} \circ (c_n \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{U}}) \circ \Delta_{\mathrm{U}})(x) = \varepsilon_{\mathrm{U}}(u) \cdot 1_{\mathrm{U}}.$$

Soit (U_n) la filtration de U définie en 1.3.6, posons $\mathrm{U}_n^+ = \mathrm{U}^+ \cap \mathrm{U}_n$. Comme M est infinitésimal, U^+ est la réunion des sous-modules U_n^+. [114] On pose alors $c_0(1) = 1$ et $c_1(x) = -x$ si $x \in \mathrm{U}_1^+$, i.e. si x est un élément primitif. Supposons $c_{n-1} : \mathrm{U}_{n-1} \to \mathrm{U}$ construite de façon à vérifier $(*)$ pour tout $x \in \mathrm{U}_{n-1}$, et soit $x \in \mathrm{U}_n^+$. D'après la démonstration du lemme 1.3.6.A, on a $\Delta_{\mathrm{U}}(x) - x \otimes 1 \in \mathrm{U}_{n-1} \otimes \mathrm{U}^+$ (c'est ici qu'intervient l'hypothèse que U soit plate sur k), donc on peut écrire $\Delta_{\mathrm{U}}(x) = x \otimes 1 + \sum_i y_i \otimes z_i$, avec $y_i \in \mathrm{U}_{n-1}$; on pose alors $c_n(x) = -\sum_i c_{n-1}(y_i) z_i$. On obtient ainsi une application k-linéaire $c : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$, qui est l'inverse à gauche de id_{U} pour la loi de monoïde sur $\mathrm{End}_k(\mathrm{U})$, définie par $f \cdot g = m_{\mathrm{U}} \circ (f \otimes g) \circ \Delta_{\mathrm{U}}$ (l'élément unité étant l'application $\eta : u \mapsto \varepsilon(u) \cdot 1_{\mathrm{U}}$). Il en résulte que c est uniquement déterminé, et est aussi l'inverse à droite de id_{U}, i.e. on a aussi $m_{\mathrm{U}} \circ (c_n \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{U}}) \circ \Delta_{\mathrm{U}} = \eta$ (sans supposer U cocommutative).

2.8. Schémas en groupes unipotents sur un corps. — [115] Soit k un corps. « Rappelons » qu'un k-schéma en groupes G est dit *unipotent* s'il vérifie les deux conditions suivantes (cf. [**DG70**], § IV.2, Prop. 2.5) :

---

[113] N.D.E. : D'après l'équivalence de catégories de 1.3.5.D, un monoïde dans la catégorie des k-variétés formelles topologiquement plates « est la même chose » qu'un monoïde dans la catégorie des $\mathbf{O}_k$-coalgèbres cocommutatives plates, c.-à-d.une $\mathbf{O}_k$-bigèbre cocommutative (au sens usuel, c.-à-d., pas nécessairement munie d'une antipode). De plus, d'après 1.3.6, l'hypothèse que M soit *infinitésimal* équivaut à dire que la bigèbre correspondante est *connexe*. Donc, si k est un anneau artinien, la proposition équivaut à dire que : *toute k-bigèbre cocommutative connexe, plate sur k, est une k-algèbre de Hopf, i.e. possède une antipode* (et l'hypothèse de cocommutativité est en fait superflue, cf. la démonstration).

[114] N.D.E. : L'original continuait ainsi : « on montre alors facilement, par récurrence sur n, qu'il existe une et une seule application linéaire $c_n : \mathrm{U}_n \to \mathrm{U}_n$ telle que l'application composée $m_{\mathrm{U}} \circ (c_n \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{U}}) \circ \Delta_{\mathrm{U}} : \mathrm{U}_n^+ \to \mathrm{U}$ soit nulle » ; on a détaillé la démonstration, qui repose sur celle du lemme 1.3.6.A.

[115] N.D.E. : On a ajouté cette sous-section.

(a) G est affine.

(b) Tout $\mathscr{O}(\mathrm{G})$-comodule simple est trivial, c.-à-d., si $\rho : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \otimes_k \mathscr{O}(\mathrm{G})$ est une structure de $\mathscr{O}(\mathrm{G})$-comodule sur un k-espace vectoriel $\mathrm{V} \neq 0$, et s'il n'existe pas de sous-espace non nul $\mathrm{W} \neq \mathrm{V}$ tel que $\rho(\mathrm{W}) \subset \mathrm{W} \otimes_k \mathscr{O}(\mathrm{G})$, alors V est de dimension 1 et $\rho(v) = v \otimes 1$ pour tout $v \in \mathrm{V}$.

D'après *loc. cit.*, lorsque G est de type fini sur k, ceci équivaut à la définition donnée dans l'Exp. XVII, § 1, à savoir que G possède une suite de composition finie dont les quotients successifs sont isomorphes à des k-sous-groupes de $\mathbb{G}_{a,\,k}$.

Or, pour tout k-schéma en groupes affine G, la comultiplication de $\mathscr{O}(\mathrm{G})$ munit le k-module pseudocompact $\mathrm{A} = \mathscr{O}(\mathrm{G})^*$ d'une structure de k-algèbre profinie, non nécessairement commutative, l'élément unité 1_{A} étant l'augmentation $\varepsilon : \mathscr{O}(\mathrm{G}) \to k$. D'autre part, soit $\mathrm{I} = \{f \in \mathrm{A} \mid f(1_{\mathscr{O}(\mathrm{G})}) = 0\}$; c'est un idéal bilatère de A, et l'on a $\mathrm{A} = k \cdot 1_{\mathrm{A}} \oplus \mathrm{I}$, cf. 1.3.6.

Soit V un sous-espace de A de codimension finie, considérons l'application k-bilinéaire continue $\varphi : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{V}$, $(a, b) \mapsto ab + \mathrm{V}$; d'après le lemme 0.3.1, il existe deux sous-espaces $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2$ de codimension finie dans A tels que V contienne AL_2 et $\mathrm{L}_1\mathrm{A}$, alors $\mathrm{L} = \mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$ est un sous-espace de codimension finie de A, et V contient l'idéal bilatère ALA, qui est de codimension finie. Ceci montre que les idéaux bilatères de codimension finie forment une base de voisinages de 0. On en déduit qu'un $\mathscr{O}(\mathrm{G})$-comodule « est la même chose » qu'un A-*module continu*, i.e. un A-module V tel que l'application $\mathrm{A} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ soit continue, V étant muni de la topologie discrète. Un tel module est évidemment réunion de sous-modules V_i de dimension finie sur k, chacun étant un module sur une k-algèbre quotient A_i de A, de dimension finie sur k. Il en résulte que si M est un module continu simple, il est de dimension finie sur k, et est un module fidèle simple sur la k-algèbre de dimension finie $\mathrm{A}/\operatorname{Ann}(\mathrm{M})$; cette dernière est donc une k-algèbre de dimension finie simple, i.e. $\operatorname{Ann}(\mathrm{M})$ est un idéal maximal ouvert de A. Réciproquement, soit P un idéal premier [116] ouvert de A, alors A/P est une k-algèbre de dimension finie dans laquelle l'idéal (0) est premier, donc c'est une k-algèbre de dimension finie simple, donc il existe à isomorphisme près un unique A-module continu simple dont l'annulateur est P. Il en résulte que l'application $\mathrm{M} \mapsto \operatorname{Ann}(\mathrm{M})$ définit une bijection entre les classes d'isomorphisme de A-modules continus simples et les idéaux premiers ouverts de A. En particulier, on appelle « module trivial » le A-module A/I, qui est de dimension 1 sur k ; il correspond au $\mathscr{O}(\mathrm{G})$-comodule V de dimension 1 trivial, i.e. tel que $\rho(v) = v \otimes 1_{\mathscr{O}(\mathrm{G})}$ pour tout $v \in \mathrm{V}$. On obtient donc la proposition suivante :

Proposition 2.8.1. — *Soient k un corps,* G *un k-schéma en groupes affine et* $\mathrm{A} = \mathscr{O}(\mathrm{G})^*$.

[116] N.D.E. : On rappelle qu'un idéal bilatère P d'un anneau A est dit premier si dans A/P le produit de deux idéaux bilatères non nuls est non nul.

(i) *Alors* G *est unipotent si et seulement si* I *est l'unique idéal premier ouvert de* A. [117]

(ii) *En particulier, si* G *est* commutatif*, de sorte que* $\mathscr{O}(G) = H(D(G))$*, où* $D(G) = \operatorname{Spf}(A)$ *désigne le dual de Cartier de* G*, alors* G *est unipotent si et seulement si* D(G) *est infinitésimal.*

2.9. Algèbres de Hopf cocommutatives pointées sur un corps. — [118] Soient k un corps, C une k-cogèbre, A l'algèbre C^* munie de la structure de k-algèbre profinie, non nécessairement commutative, décrite en 2.8 ; d'après 0.2.2, on a $C = A^\dagger = \operatorname{Hom}_c(A, k)$. On en déduit que l'application $D \mapsto D^\perp = \{f \in A \mid f(D) = 0\}$ est une bijection de l'ensemble des sous-cogèbres de C sur celui des idéaux bilatères (dans la suite, on dira simplement « idéaux ») fermés de A ; la bijection réciproque étant donnée par $I \mapsto I^\perp = \{x \in C = A^\dagger \mid x(I) = 0\}$. Comme tout idéal fermé maximal est un idéal maximal ouvert (cf. 0.2.1), toute sous-cogèbre contient donc une sous-cogèbre simple, nécessairement de dimension finie.

Rappelons qu'une sous-cogèbre D de C est dite *irréductible* si elle ne contient qu'une seule sous-cogèbre simple S_0, ce qui équivaut à dire que $\mathfrak{m}_0 = S_0^\perp$ est l'unique idéal maximal ouvert contenant $D^\perp$, i.e. que $D^\perp + \mathfrak{m} = A$ pour tout idéal maximal ouvert $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0$. C'est en particulier le cas si $D = S_0$. Alors la somme Σ_0 de toutes les sous-cogèbres irréductibles C_i contenant S_0 est évidemment une sous-cogèbre, et elle est irréductible car, pour tout $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0$, on a, d'après 0.2.D :

$$\mathfrak{m} + \bigcap_i C_i^\perp = \bigcap_i (\mathfrak{m} + C_i^\perp) = A.$$

On dit que Σ_0 est la *composante irréductible* de C correspondant à C_0.

D'autre part, on dit que C est *pointée* si toute sous-k-cogèbre simple de C est de dimension 1 ; ceci équivaut à dire que pour tout idéal maximal ouvert $\mathfrak{m}$ de A, on a $A/\mathfrak{m} = k$. Rappelons aussi que C est dite *connexe* si elle est irréductible et pointée. (Remarquons au passage que si C est une bigèbre, elle est connexe si et seulement si elle est irréductible, puisque $k \cdot 1_C$ est une sous-cogèbre simple.)

Supposons désormais que C soit *cocommutative.* Alors A est commutative et est donc le produit de ses composantes locales $A_\mathfrak{m}$, pour $\mathfrak{m} \in \Upsilon(A)$ (cf. 0.1.1) ; notons $S_\mathfrak{m}$ la sous-cogèbre simple $\mathfrak{m}^\perp \simeq (A/\mathfrak{m})^*$ et $\Sigma_\mathfrak{m}$ sa composante irréductible. On peut décrire $\Sigma_\mathfrak{m}$ comme suit. Notons $J_\mathfrak{m}$ le noyau de la projection $A \to A_\mathfrak{m}$, il est contenu dans $\mathfrak{m}$ et c'est le plus petit idéal fermé I de $\mathfrak{m}$ tel que $I + \mathfrak{m}' = A$ pour tout $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$. En effet, si I a cette propriété, alors I contient $A_{\mathfrak{m}'}$ pour tout $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$, donc contient $J_\mathfrak{m}$. Comme $A = J_\mathfrak{m} \oplus A_\mathfrak{m}$, il en résulte que $\Sigma_\mathfrak{m} = J_\mathfrak{m}^\perp$ s'identifie à $A_\mathfrak{m}^\dagger$. On peut maintenant démontrer la :

Proposition 2.9.1. — *Soit k un corps.*

(117) N.D.E. : Ceci équivaut aussi à dire que $k \cdot 1_{\mathscr{O}(G)}$ est l'unique k-sous-cogèbre simple de $\mathscr{O}(G)$; voir par exemple [**Ab80**], 3.1.4 ; signalons au passage une coquille dans *loc. cit.*, p. 130, ligne 4 : $M \simeq C^*/\operatorname{ann} M$ est à remplacer par $C^*/\operatorname{ann} M \simeq \operatorname{End}_k(M)$.

(118) N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, pour traduire dans le langage des algèbres de Hopf cocommutatives la proposition 2.5.2, ainsi que la variante signalée dans la N.D.E. (100).

(i) *Soit* G *un k-groupe formel tel que tous les corps résiduels de* G *égalent k. Alors* G_e *est le k-groupe constant* M_k*, où* $\mathrm{M} = \mathrm{G}(k) = \{x \in \mathrm{H}(\mathrm{G}) \mid \varepsilon(x) = 1$ *et* $\Delta(x) = x \otimes x\}$*, et* H(G) *est le produit semi-direct de* $\mathrm{H}(\mathrm{G}_0)$ *par* $k\mathrm{M}$ (*cf.* 2.4.B).

(ii) *De façon équivalente : soit* H *une k-algèbre de Hopf cocommutative pointée. Alors* H *est le produit semi-direct de la composante irréductible* H_0 *de l'élément unité* 1_{H} *par* $k\mathrm{M}$*, où* $\mathrm{M} = \{x \in \mathrm{H} \mid \varepsilon(x) = 1$ *et* $\Delta(x) = x \otimes x\}$.

Démontrons (i). Comme tous les corps résiduels de G égalent k, alors la projection $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_e$ admet la section $s : \mathrm{G}_e \to \mathrm{G}$ définie par $\mathscr{O}_{\mathrm{G},g} \to \kappa(g) = k$, pour tout $g \in \mathrm{G}$; de plus, pour tout $g, h \in \mathrm{G}$, $\mathscr{O}_{\mathrm{G},g} \widehat{\otimes}_k \mathscr{O}_{\mathrm{G},h}$ est local de corps résiduel k, et l'on obtient donc que $s \times s$ est une section de la projection $\pi \times \pi : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to (\mathrm{G} \times \mathrm{G})_e = \mathrm{G}_e \times \mathrm{G}_e$. Comme π est un morphisme de groupes, il en résulte que $\pi \circ m_{\mathrm{G}} \circ (s \times s) = m_{\mathrm{G}_e} = \pi \circ s \circ m_{\mathrm{G}_e}$, et comme π est un épimorphisme ceci entraîne que s est un morphisme de groupes. On obtient donc que $\mathrm{G} = \mathrm{G}_0 \rtimes \mathrm{G}_e$, et donc H(G) est le produit semi-direct de $\mathrm{H}(\mathrm{G}_0)$ par $\mathrm{H}(\mathrm{G}_e)$. De plus, comme tous les corps résiduels de G égalent k, alors $\mathrm{H}(\mathrm{G}_e)$ est l'algèbre de groupe $k\mathrm{M}$, où $\mathrm{M} = \mathrm{G}_e(k)$ (cf. 2.5.A). Enfin, comme G_0 est infinitésimal, le morphisme $\mathrm{G}(k) \to \mathrm{G}_e(k)$ est injectif ; il est donc bijectif (puisqu'il admet une section), donc $\mathrm{M} = \mathrm{G}(k)$. Le point (i) en découle.

Pour prouver (ii), il reste juste à voir que H_0 égale $\mathrm{H}(\mathrm{G}_0)$. Or l'élément unité 1_{H} de H n'est autre que l'augmentation $\varepsilon_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to k$, qui est la section unité de $\mathrm{G}(k)$, donc la composante locale de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ correspondant à H_0 n'est autre que $\mathscr{A}(\mathrm{G}_0)$ et donc, d'après ce qu'on a vu plus haut, on a $\mathrm{H}_0 = \mathscr{A}(\mathrm{G}_0)^\dagger = \mathrm{H}(\mathrm{G}_0)$. Ceci prouve la proposition.

Remarques 2.9.2. — (a) La proposition ci-dessus, contenue implicitement dans 2.5.2, a été obtenue indépendamment par B. Kostant (cf. [**Sw69**], Preface). Combiné avec le théorème de Cartier 3.3 plus bas (cf. [**Ca62**], § 12, Th. 3), aussi obtenu par Kostant (cf. [**Sw69**], *loc. cit.*), ce résultat est souvent appelé « théorème de Cartier-Gabriel-Kostant ».

(b) Sous la forme (ii), 2.9.1 a été étendu par R. G. Heyneman et M. E. Sweedler au cas où l'on suppose que H est pointée et somme directe de ses composantes irréductibles (mais n'est pas nécessairement cocommutative), cf. [**HS69**], Th. 3.5.8.

3. Phénomènes particuliers à la caractéristique 0

530 Dans toute la Section 3, nous supposons que l'anneau pseudocompact k contient le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

3.1. Lemme. — *Soient* C *une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative unitaire,* L *une algèbre de Lie sur* C *dont le* C*-module sous-jacent est libre. Alors l'application canonique* $\mathrm{L} \to \mathrm{U}(\mathrm{L})$ *est un* isomorphisme *de* L *sur l'ensemble des éléments primitifs de* U(L).

En effet, identifions L à son image canonique dans U(L) ; soient I un ensemble totalement ordonné et $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une base de L indexée par I ; désignons par $\mathbb{N}^{(\mathrm{I})}$ l'ensemble des familles $n = (n_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'entiers naturels telles que n_i soit nul sauf peut-être pour un nombre fini d'indices $i_1 < i_2 < \cdots < i_s$ (ces indices dépendent de n) ; posons enfin $x^n = x_{i_1}^{n_{i_1}} x_{i_2}^{n_{i_2}} \cdots x_{i_s}^{n_{i_s}}$ et $n! = (n_{i_1}!)(n_{i_2}!)\cdots(n_{i_s}!)$.

On sait alors que les x^n forment une base de U(L) (théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt) et on voit facilement qu'on a

$$(*) \qquad \Delta_{\mathrm{U(L)}}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \sum \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$

la somme étant étendue à tous les éléments m de $\mathbb{N}^{(\mathrm{I})}$ tels que $0 \leqslant m \leqslant n$ (i.e. tels que $0 \leqslant m_i \leqslant n_i$ pour tout i). Il s'ensuit évidemment qu'on a $\Delta_{\mathrm{U(L)}}(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u$ si et seulement si u est une combinaison linéaire des x_i.

3.2. Supposons maintenant C *artinien*, de radical $\mathfrak{r}$. Pour toute C-algèbre U (associative, unitaire), l'idéal $\mathfrak{r}$U est donc formé d'éléments nilpotents ; si x appartient à $\mathfrak{r}$U, nous poserons **531**

$$\exp_{\mathrm{U}} x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \quad .$$ (119)

On obtient ainsi une bijection de $\mathfrak{r}$U sur $1 + \mathfrak{r}$U ; la bijection réciproque applique un élément $1 + y$ de $1 + \mathfrak{r}$U sur

$$\log_{\mathrm{U}}(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \cdots \quad .$$

De plus, il est clair que l'application $\exp_{\mathrm{U}}$ est fonctorielle en U. (120)

L'anneau C étant toujours artinien, supposons U muni d'une structure de bialgèbre sur C (cf. 2.2). Pour tout élément primitif x de $\mathfrak{r}$U (cf. VII$_{\mathrm{A}}$ 3.2.3), on a alors

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathrm{U}}(\exp_{\mathrm{U}} x) &= \exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(\Delta_{\mathrm{U}}(x)) \\ &= \exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\ &= \exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(x \otimes 1) \cdot \exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(1 \otimes x) \\ &= \big((\exp_{\mathrm{U}} x) \otimes 1\big) \cdot \big(1 \otimes (\exp_{\mathrm{U}} x)\big) \\ &= (\exp_{\mathrm{U}} x) \otimes (\exp_{\mathrm{U}} x). \end{aligned}$$

On voit donc que la bijection $\exp_{\mathrm{U}}$ transforme un élément primitif de $\mathfrak{r}$U en un élément z de $1 + \mathfrak{r}$U tel que $\Delta_{\mathrm{U}}(z) = z \otimes z$. Réciproquement, si z vérifie ces conditions alors, posant $x = \log_{\mathrm{U}}(z)$, le calcul précédent montre que $\exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$ égale $z \otimes z = \Delta(\exp_{\mathrm{U}} x) = \exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(\Delta_{\mathrm{U}}(x))$, d'où $x \otimes 1 + 1 \otimes x = \Delta_{\mathrm{U}}(x)$. (121) Notons de plus que si $z \in 1 + \mathfrak{r}$U vérifie $\Delta_{\mathrm{U}}(z) = z \otimes z$, alors $\varepsilon_{\mathrm{U}}(z)^2 = \varepsilon_{\mathrm{U}}(z)$ et comme $\varepsilon_{\mathrm{U}}(z)$ est inversible (puisque z l'est, $\mathfrak{r}$ étant nilpotent), il en résulte que $\varepsilon_{\mathrm{U}}(z) = 1$.

Considérons en particulier une algèbre de Lie L *plate* sur C, prenons pour U l'algèbre enveloppante U(L) de L sur C et identifions L à son image canonique dans U. D'après le lemme 3.1, L est donc l'ensemble des éléments primitifs de U (en effet L est un produit de modules libres sur les composantes locales de C). Considérons alors **532**

(119) N.D.E. : Si $x, x' \in \mathfrak{r}$U *commutent*, on a donc $\exp_{\mathrm{U}}(x + x') = (\exp_{\mathrm{U}} x)(\exp_{\mathrm{U}} x')$.

(120) N.D.E. : c.-à-d., pour tout morphisme $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ de C-algèbres, on a $\phi(\exp_{\mathrm{U}}(x)) = \exp_{\mathrm{V}} \phi(x)$.

(121) N.D.E. : On a détaillé ce qui précède et ajouté la phrase qui suit.

le C-groupe formel $\mathscr{G}(\mathrm{L}) = \mathrm{Spf}^* \,\mathrm{U}(\mathrm{L})$, qui a $\mathrm{U} = \mathrm{U}(\mathrm{L})$ pour bialgèbre covariante (cf. 2.6.2). Soient $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de C et $\overline{\mathrm{C}} = \mathrm{C}/\mathfrak{m}$. Comme $\mathscr{G}(\mathrm{L})$ est infinitésimal (*loc. cit.*), l'élément unité de $\overline{\mathrm{U}} = \mathrm{U} \otimes_{\mathrm{C}} \overline{\mathrm{C}}$ est le seul élément $\overline{z}$ de $\overline{\mathrm{U}}$ tel que [122] $\varepsilon_{\overline{\mathrm{U}}}(\overline{z}) = 1$ et $\Delta_{\overline{\mathrm{U}}}(\overline{z}) = \overline{z} \otimes \overline{z}$. Il s'ensuit que les éléments z de U tels que $\varepsilon_{\mathrm{U}}(z) = 1$ et $\Delta_{\mathrm{U}}(z) = z \otimes z$ appartiennent nécessairement à $1 + \mathfrak{r}\mathrm{U}$.

Enfin, comme $\mathrm{L} \cap \mathfrak{r}\mathrm{U}$ s'identifie à $\mathfrak{r}\mathrm{L} = \mathrm{L} \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}$, on voit finalement que : $\exp_{\mathrm{U}}$ *définit une bijection de* $\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}$ *sur le groupe* $\mathscr{G}(\mathrm{L})(\mathrm{C})$. Nous résumons :

Proposition. — *Soient k un anneau pseudocompact contenant $\mathbb{Q}$ et* $\mathbf{L}$ *une* $\mathbf{O}_k$*-algèbre de Lie* plate.

(i) *Pour tout objet* C *de* $\mathbf{Alf}_{/k}$, *notons* $\mathfrak{r}(\mathrm{C})$ *son radical ; alors l'application*

$$\exp_{\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{C}))} : \quad \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}(\mathrm{C}) \longrightarrow \mathscr{G}(\mathbf{L})(\mathrm{C})$$

est bijective et fonctorielle *en* C *et* $\mathbf{L}$.

(ii) *Le morphisme naturel* $\mathbf{L} \to \mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))$ (*cf.* 2.6.2) *est un* isomorphisme *de* $\mathbf{O}_k$*-algèbres de Lie.* [123]

3.2.1. — La bijection $\exp_{\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{C}))}$ permet de définir par transport de structure une loi de groupe sur l'ensemble $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}(\mathrm{C})$ (qu'on identifie à une partie de $\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ comme en 3.2). Si x et y sont deux éléments de $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}(\mathrm{C})$, cette loi est telle que

$$\begin{aligned} x \cdot y = \log\big((\exp x)(\exp y)\big) &= \log(1 + \sum_{p+q>0} \frac{x^p}{p!}\frac{y^q}{q!}) = \\ &= \sum_{m \geqslant 1} \sum_{p_i+q_i>0} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \frac{x^{p_1}}{p_1!}\frac{y^{q_1}}{q_1!} \cdots \frac{x^{p_m}}{p_m!}\frac{y^{q_m}}{q_m!} = \sum_{\ell \geqslant 1} \mathrm{P}_\ell(x,y) \end{aligned}$$

533 où $\mathrm{P}_\ell(x,y)$ désigne la somme des monômes de degré total ℓ en x et y. On a par exemple :

$$\mathrm{P}_1(x,y) = x + y$$

$$\mathrm{P}_2(x,y) = \underbrace{\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}}_{m=1} - \underbrace{\frac{1}{2}(x^2 + xy + yx + y^2)}_{m=2} = \frac{1}{2}(xy - yx) = \frac{1}{2}[x,y]$$

et $\mathrm{P}_3(x,y)$ est la somme des trois termes suivants :

$$\underbrace{\frac{x^3}{6} + \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{6}}_{m=1} - \underbrace{\frac{1}{2}\Big(x^3 + \frac{3}{2}x^2y + \frac{1}{2}yx^2 + xyx + yxy + \frac{1}{2}y^2x + \frac{3}{2}xy^2 + y^3\Big)}_{m=2}$$

$$\underbrace{+\frac{1}{3}(x^3 + x^2y + yx^2 + xyx + yxy + y^2x + xy^2 + y^3)}_{m=3}$$

[122] N.D.E. : On a ajouté la condition $\varepsilon_{\overline{\mathrm{U}}}(\overline{z}) = 1$, omise dans l'original.

[123] N.D.E. : On a ajouté le point (ii), conséquence immédiate de 3.1.

d'où $\mathrm{P}_3(x,y) = \dfrac{1}{12}(x^2y+yx^2-2xyx-2yxy+y^2x+xy^2) = \dfrac{1}{12}\big([[y,x],x] + [y,[y,x]]\big)$.

On peut montrer plus généralement qu'on a la *formule de Campbell-Hausdorff* :
(124)

$$\mathrm{P}_\ell(x,y) = \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(-1)^{m-1}}{m\cdot\ell} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_m\\ q_1,\dots,q_{m-1}}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\mathrm{ad}\,x)^{p_i}}{p_i!}\,\frac{(\mathrm{ad}\,y)^{q_i}}{q_i!}\right) \frac{(\mathrm{ad}\,x)^{p_m}}{p_m!}(y)$$
$$+ \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(-1)^{m-1}}{m\cdot\ell} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_{m-1}\\ q_1,\dots,q_{m-1}}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\mathrm{ad}\,x)^{p_i}}{p_i!}\,\frac{(\mathrm{ad}\,y)^{q_i}}{q_i!}\right)(x)$$

où les $p_j, q_i \in \mathbb{N}$ vérifient $p_i+q_i \geqslant 1$ pour $i=1,\dots,m-1$ et $p_m+\sum_{i=1}^{m-1}(p_i+q_i) = \ell-1$ (i.e. dans les sommes ci-dessus, chaque « monôme de Lie » non nul est de degré total ℓ) ; pour une démonstration, voir N. Jacobson, *Lie Algebras* (Interscience, 1962), § V.5, ou [**BLie**], II § 6.4, Th. 2.

3.3. Si G est un k-groupe formel d'algèbre affine A, rappelons qu'on note $\mathrm{I_A}$ l'idéal d'augmentation de A et $\omega_{\mathrm{G}/k}$ le k-module pseudocompact $\mathrm{I_A}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{A}^2} \simeq \mathrm{I_A}\mathbin{\widehat{\otimes}_\mathrm{A}} k$.

Théorème **(**Cartier). — *Soient k un anneau pseudocompact* [125] *contenant* $\mathbb{Q}$ *et* G *un k-groupe formel. Les assertions suivantes sont équivalentes :* 534

(i) *Il existe une $\mathbf{O}_k$-algèbre de Lie* plate $\mathbf{L}$ *telle que* G *soit isomorphe à* $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ (*et dans ce cas* $\mathbf{L} = \mathbf{Lie}(\mathrm{G})$ *d'après* 3.2).

(ii) *Il existe un k-module pseudocompact* projectif ω *tel que la variété formelle sous-jacente à* G *soit isomorphe à la variété formelle* $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)$ (*cf.* 1.2.5) *d'algèbre affine* $k[[\omega]]$ (*et dans ce cas* $\omega \simeq \omega_{\mathrm{G}/k}$).

(iii) G *est* infinitésimal *et* $\omega_{\mathrm{G}/k}$ *est un k-module pseudocompact* projectif.

(iv) G *est* infinitésimal et topologiquement plat *sur k.*

(i) ⇒ (ii) : Soit $\omega = \Gamma^*(\mathbf{L})$ le k-module pseudocompact dual de $\mathbf{L}$ (cf. 1.2.3.D). Pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, nous devons exhiber un isomorphisme de $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)(\mathrm{C})$ sur $\mathscr{G}(\mathbf{L})(\mathrm{C})$ qui soit fonctoriel en C. D'après 1.2.5, $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)(\mathrm{C})$ s'identifie à l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(\omega,\mathfrak{r}(\mathrm{C}))$ des applications k-linéaires continues de ω dans le radical de C. Cet ensemble est naturellement isomorphe à l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(\omega\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{C},\mathfrak{r}(\mathrm{C}))$ des applications C-linéaires continues de $\omega\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{C}$ dans $\mathfrak{r}(\mathrm{C})$; enfin, comme $\omega\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{C}$ est un C-module pseudocompact projectif, l'application canonique

$$(\omega\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{C})^\dagger \otimes_\mathrm{C} \mathfrak{r}(\mathrm{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c(\omega\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{C},\mathfrak{r}(\mathrm{C}))$$

est bijective (cf. 0.3.6.A). Comme, d'après 1.2.3.E, $\mathbf{L}(\mathrm{C})$ s'identifie à $\mathbf{V}_k^f(\Gamma^*(\mathbf{L}))(\mathrm{C}) = (\omega\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{C})^\dagger$, on obtient que $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)(\mathrm{C})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{L}(\mathrm{C})\otimes_\mathrm{C}\mathfrak{r}(\mathrm{C})$, lequel est canoniquement isomorphe à $\mathscr{G}(\mathbf{L})(\mathrm{C})$ d'après la proposition 3.2. Ceci prouve 535

(124) N.D.E. : On a corrigé la formule donnée, qui était erronée, et ajouté la référence [**BLie**].
(125) N.D.E. : On a supprimé l'hypothèse que k soit *local* (la *démonstration* se ramène à ce cas).

l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Soient ω un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$ et h un isomorphisme de $k[[\omega]]$ sur l'algèbre affine A de G. Composant h avec l'augmentation $\varepsilon_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to k$, on obtient un homomorphisme $\varepsilon_{\mathrm{A}} \circ h : k[[\omega]] \to k$, qui est déterminé par sa restriction λ à ω ; celle-ci envoie ω dans le radical $\mathfrak{r}$ de k. Donc l'application $x \mapsto x - \lambda(x)$, de ω dans le radical de $k[[\omega]]$, se prolonge d'après la propriété universelle de $k[[\omega]]$ (cf. 1.2.5) en un endomorphisme ℓ_λ de $k[[\omega]]$. Les égalités $\ell_\lambda \circ \ell_{-\lambda} = \ell_{-\lambda} \circ \ell_\lambda = \mathrm{id}$ montrent que ℓ_λ est un automorphisme de $k[[\omega]]$. Par conséquent, $h \circ \ell_\lambda$ est, comme h, un isomorphisme de $k[[\omega]]$ sur A et de plus $\varepsilon_{\mathrm{A}} \circ h \circ \ell_\lambda$ applique ω sur 0. Quitte à remplacer h par $h \circ \ell_\lambda$, on peut donc supposer que $\varepsilon_{\mathrm{A}} \circ h$ s'annule sur l'idéal fermé I de $k[[\omega]]$ qui est engendré par ω. Dans ce cas, h induit un isomorphisme de $\mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ sur $\mathrm{I_A}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2}$; comme $\mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2} \simeq \omega$, il en résulte que $\omega_{\mathrm{G}/k} = \mathrm{I_A}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2}$ est isomorphe à ω, donc projectif. Il est clair d'autre part que $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)$ est infinitésimal, de même que G.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons que G soit infinitésimal et que $\omega_{\mathrm{G}/k}$ soit projectif. Soit $\mathbf{L}$ la $\mathbf{O}_k$-algèbre de Lie de G ; le $\mathbf{O}_k$-module sous-jacent est $\mathbf{V}_k^f(\omega_{\mathrm{G}/k})$, d'après 2.6.1. Par conséquent, $\mathbf{L}$ est plate sur $\mathbf{O}_k$, et $\Gamma^*(\mathbf{L}) \simeq \omega_{\mathrm{G}/k}$, d'après la proposition 1.2.3.E. Donc, d'après la démonstration de (i) $\Rightarrow$ (ii), l'algèbre affine du k-groupe formel $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ s'identifie à $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$. D'autre part, d'après 2.6.3, le morphisme identique de $\mathbf{L}$ est associé canoniquement à un morphisme de groupes formels $\mathscr{G}(\mathbf{L}) \to \mathrm{G}$, donc à un morphisme continu de k-algèbres

$$\phi : \quad \mathrm{A} \longrightarrow k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]].$$

Soit I l'idéal fermé de $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$ engendré par $\omega_{\mathrm{G}/k}$, filtrons $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$ (resp. A) par les adhérences des idéaux I^n (resp. $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^n$). Il s'agit de montrer que ϕ, qui induit par définition l'identité sur $\omega_{\mathrm{G}/k} = \mathrm{I_A}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2} = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$, est un isomorphisme.

536 Comme $\omega_{\mathrm{G}/k}$ est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$, il existe une section τ de la projection canonique $\mathrm{I_A} \to \omega_{\mathrm{G}/k}$. D'après la propriété universelle de $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$ (cf. 1.2.5), τ définit un morphisme continu d'algèbres

$$\psi : \quad k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]] \longrightarrow \mathrm{A}$$

et $\phi \circ \psi$ induit l'application identique sur $\omega_{\mathrm{G}/k}$, donc aussi sur le gradué associé à $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$. Il en résulte que $\phi \circ \psi$ est un isomorphisme, d'après [**CA**], § V.7, Lemme 1. (126)

De plus, ψ induit un isomorphisme de $\mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ sur $\mathrm{I_A}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2}$, donc une *surjection* des gradués associés à $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$ et A. D'autre part, comme G est radiciel, $\mathrm{I_A}$ est contenu dans le radical de A, de sorte que l'intersection des $\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^n}$ est nulle. Donc, d'après *loc. cit.*, ψ est surjectif. Alors, comme $\phi \circ \psi$ est un isomorphisme et ψ une surjection, ψ et ϕ sont des isomorphismes. Ceci prouve que (iii) $\Rightarrow$ (i).

Notons enfin qu'il est clair que (i) ou (ii) entraînent (iv), de sorte qu'il reste à prouver l'implication (iv) $\Rightarrow$ (ii). Pour cela, on peut supposer k local, de corps résiduel

(126) N.D.E. : cf. 5.1.5 plus loin ; voir aussi [**BAC**], III, § 2.8, Th. 1 et corollaires. D'autre part, on a détaillé l'original dans ce qui suit.

k_0. Posons alors $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G}\,\widehat{\otimes}_k\,k_0$, $\omega = \omega_{\mathrm{G}/k}$, $\omega_0 = \omega\,\widehat{\otimes}_k\,k_0$, etc. [127] Comme k_0 est un corps, le k_0-module pseudocompact ω_0 possède une pseudobase $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$; notant ω' le k-module topologiquement libre produit de copies k_λ de k, pour $\lambda \in \Lambda$, et relevant chaque y_λ en un élément x_λ de ω, on obtient une application k-linéaire continue $f : \omega' \to \omega$ telle que $f_0 = f\,\widehat{\otimes}_k\,k_0$ soit inversible. [128] Comme ω' est un k-module pseudocompact projectif, f se relève en une application k-linéaire continue $g : \omega' \to \mathrm{I}_\mathrm{A}$ telle que $\pi \circ g = f$, où π est la projection $\mathrm{I}_\mathrm{A} \to \omega$. D'après la propriété universelle de $k[[\omega']]$ (cf. 1.2.5), g induit un morphisme d'algèbres topologiques $\phi : k[[\omega']] \to \mathrm{A}$. **537**

Or $\omega'\,\widehat{\otimes}_k\,k_0$ s'identifie à $\omega\,\widehat{\otimes}_k\,k_0 = \omega_{\mathrm{G}_0/k_0}$ et donc $k[[\omega']]\,\widehat{\otimes}_k\,k_0$ s'identifie à $k_0[[\omega_{\mathrm{G}_0/k_0}]]$. Comme les hypothèses (iii) sont vérifiées pour k_0 et G_0, la démonstration de (iii) $\Rightarrow$ (i) montre que $\phi_0 = \phi\,\widehat{\otimes}_k\,k_0$ est inversible. Comme, d'autre part, $k[[\omega']]$ et A sont des k-modules pseudocompacts projectifs, alors ϕ est inversible d'après 0.3.4. (En particulier, notant I l'idéal d'augmentation de $k[[\omega']]$, ϕ induit un isomorphisme de $\omega' = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ sur $\mathrm{I}_\mathrm{A}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{A}^2} = \omega$.)

3.3.1. Corollaire. — *Soient* S *un schéma* localement noethérien *sur* $\mathbb{Q}$ *et* G *un* S-*schéma en groupes* plat et localement de type fini. [129] *Si* $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}$ *est un* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-module localement libre,* G *est* lisse sur S en tout point de la section unité.

En effet, soient x un point de la section unité, s son image dans S, $\mathscr{O}_x$ et $\mathscr{O}_s$ les algèbres locales de x et s. [130] Comme, par hypothèse, $\mathscr{O}_s$ et $\mathscr{O}_x$ sont des anneaux locaux *noethériens*, alors la topologie $\mathfrak{m}$-adique sur chacun de ces anneaux coïncide avec la topologie « pseudocompacte » définie par les idéaux de codimension finie. Notons alors $\widehat{\mathscr{O}}_x$ et $\widehat{\mathscr{O}}_s$ les complétés pour cette topologie. D'après EGA IV_4, 17.5.3, G est lisse sur S au point x si et seulement si $\widehat{\mathscr{O}}_x$ est formellement lisse sur $\widehat{\mathscr{O}}_s$, ces deux algèbres étant munies de la topologie $\mathfrak{m}$-adique ; il suffit donc de montrer cette dernière propriété. Or $\widehat{\mathscr{O}}_x$ et $\widehat{\mathscr{O}}_s$ sont les anneaux locaux de x et s dans les variétés formelles $\widehat{\mathrm{G}}/\widehat{\mathrm{S}}$ et $\widehat{\mathrm{S}}$ définies en 1.2.6. Posons $k = \widehat{\mathscr{O}}_s$ et $\mathrm{H} = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathscr{O}}_x)$, alors H est une k-variété formelle infinitésimale et, comme la formation de $\widehat{\mathrm{G}}/\widehat{\mathrm{S}}$ commute au produit (*loc. cit.*), H est un k-*groupe formel* infinitésimal. Notons I l'idéal d'augmentation de $\mathscr{O}_x$. D'après les hypothèses, $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S},x} = \mathrm{I}/\mathrm{I}^2$ est un $\mathscr{O}_s$-module localement libre de rang fini n. Comme $\mathscr{O}_s$ est noethérien, il en résulte que $\omega_{\mathrm{H}/k}$, qui est le complété de $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S},x}$, s'identifie à $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S}} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \widehat{\mathscr{O}}_s$, donc est un k-module topologiquement libre de rang n. Donc, d'après l'implication (iv) $\Rightarrow$ (ii) de 3.3, $\widehat{\mathscr{O}}_x$ est isomorphe à $k[[\omega_{\mathrm{H}/k}]]$, i.e. à une algèbre de séries formelles $k[[t_1, \dots, t_n]]$. Enfin, celle-ci est formellement lisse sur k, d'après EGA 0_{IV}, 19.3.3. Ceci prouve le corollaire.

Nous retrouvons donc ainsi un résultat obtenu par ailleurs pour les schémas en groupes *localement de présentation finie* sur un schéma *arbitraire* S, cf. VI_B, 1.6.

---

(127) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

(128) N.D.E. : On ne sait pas *a priori* que ω est un k-module pseudocompact *projectif*, mais cela va résulter de ce qui suit : comparer avec la démonstration de (iv) $\Rightarrow$ (iii) dans VII_A, 7.4.

(129) N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse de platitude, omise dans l'original.

(130) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

3.3.2. Corollaire. — *Soit k un corps de caractéristique* 0. *Le foncteur* $\mathrm{L} \mapsto \mathscr{G}(\mathrm{L})$ *est une* équivalence *de la catégorie des k-algèbres de Lie sur celle des k-groupes formels infinitésimaux.* [131]

538 En effet, quand G parcourt les k-groupes formels infinitésimaux, le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathscr{G}(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G})$ est isomorphe, d'après le théorème 3.3, au foncteur identique de la catégorie des k-groupes infinitésimaux. De même, d'après 3.2 (ii), le foncteur $\mathrm{L} \mapsto \mathrm{Lie}(\mathscr{G}(\mathrm{L})) = \mathrm{Prim}\,\mathrm{U}(\mathrm{L})$ est isomorphe au foncteur identique de la catégorie des k-algèbres de Lie.

3.3.3. — Supposons toujours que k est un corps de caractéristique 0. Soient $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et Γ le groupe de Galois topologique de $\overline{k}$ sur k.

Pour tout k-groupe formel G, nous notons $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{G})$ le k-foncteur en groupes qui associe à toute k-algèbre commutative de dimension finie C le groupe des automorphismes du C-groupe formel $\mathrm{G}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{C}$. [132] Comme G est topologiquement plat sur k (puisque k est un corps), i.e. son algèbre affine $\mathrm{A} = \mathrm{A}(\mathrm{G})$ est topologiquement plate sur k, ou, de façon équivalente, sa bialgèbre covariante $\mathrm{H} = \mathrm{H}(\mathrm{G})$ est plate sur k, alors ce k-foncteur est un *k-groupe formel*. En effet, comme $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{G})$ s'identifie au produit fibré du diagramme suivant (cf. Exp. I, 1.7.3) :

$$\begin{tikzcd} & \underline{\mathrm{End}}_k(\mathrm{G}) \times \underline{\mathrm{End}}_k(\mathrm{G}) \arrow[d] \\ \mathrm{Spf}(k) \arrow[r] & \underline{\mathrm{End}}_k(\mathrm{G}) \times \underline{\mathrm{End}}_k(\mathrm{G}) \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale (resp. horizontale) est donnée par $(\phi, \psi) \mapsto (\phi\circ\psi, \psi\circ\phi)$ (resp. est la section unité), il suffit de voir que le k-foncteur $\underline{\mathrm{End}}_k(\mathrm{G})$ est représenté par un élément de $\mathbf{Vaf}_{/k}$, c.-à-d., (cf. 1.1 et 0.4.2) qu'il est est *exact à gauche*, i.e. commute aux produits fibrés de k-algèbres. Or se donner un élément de $\underline{\mathrm{End}}_k(\mathrm{G})(\mathrm{C})$ équivaut à se donner, disons, un morphisme de k-algèbres $\phi : \mathrm{H} \to \mathrm{H} \otimes_k \mathrm{C}$ qui respecte aussi la structure de coalgèbre, i.e. tel que les diagrammes bien connus soient commutatifs ; comme H est plat sur k, alors $\mathrm{H} \otimes_k -$ commute aux produits fibrés de k-algèbres, et

---

[131] N.D.E. : Comme, d'après 2.7, 2.2.1 et 1.3.6, un k-groupe formel *infinitésimal* G est « la même chose » qu'une k-bigèbre cocommutative *connexe* H (cf. 2.9), cet énoncé est équivalent au théorème ci-dessous, obtenu indépendamment par Kostant (cf. 2.9.2). Ce théorème avait été obtenu auparavant par J. W. Milnor et J. C. Moore ([**MM65**]), sous l'hypothèse additionnelle que H soit engendrée comme algèbre par ses éléments primitifs (bien que paru en 1965, ce texte avait circulé avant 1960, cf. l'analyse [**Ja65**]), de sorte qu'il est souvent appelé « théorème de Cartier-Kostant-Milnor-Moore ».

Théorème (Cartier-Kostant-Milnor-Moore). — *Soit k un corps de caractéristique* 0. *Les foncteurs* $\mathrm{L} \mapsto \mathrm{U}(\mathrm{L})$ *et* $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{Prim}(\mathrm{H})$ *définissent une* équivalence *entre la catégorie des k-algèbres de Lie et celle des k-bigèbres cocommutatives connexes.*

D'autre part, si k est un anneau artinien contenant $\mathbb{Q}$, alors 3.2 (ii) et 3.3 (combinés avec 2.7, 2.2.1 et 1.3.6) montrent de même que le foncteur $\mathrm{L} \mapsto \mathscr{G}(\mathrm{L})$ (resp. $\mathrm{L} \mapsto \mathrm{U}(\mathrm{L})$) est une équivalence de la catégorie des k-algèbres de Lie *plates* sur celle des k-groupes formels infinitésimaux *topologiquement plats* (resp. sur celle des k-bigèbres cocommutatives connexes *plates*).

[132] N.D.E. : L'original indiquait : « Ce k-foncteur est manifestement exact à gauche (H est topologiquement plat sur k !) ». On a détaillé cela dans ce qui suit.

on en déduit que le k-foncteur $\underline{\mathrm{End}}_k(\mathrm{G})$ est exact à gauche, de sorte que nous pouvons le traiter comme un k-groupe formel.

Si L est une k-algèbre de Lie et G le groupe formel $\mathscr{G}(\mathrm{L})$, le théorème 3.3 montre que $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{G})$ est isomorphe au k-foncteur en groupes $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{L})$ qui associe à une k-algèbre de dimension finie C le groupe des automorphismes de la C-algèbre de Lie $\mathrm{C} \otimes_k \mathrm{L}$.

Si G est un k-groupe formel arbitraire, nous avons vu en 2.5.2 que G se décompose canoniquement en un produit semi-direct d'un groupe formel étale G_e et d'un groupe formel infinitésimal G_0. Ce produit semi-direct est déterminé par la donnée de $\mathrm{L} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_0)$, du Γ-groupe $\mathrm{M} = \mathrm{G}_e(\overline{k}) = \mathrm{G}(\overline{k})$ et d'un morphisme de k-groupes formels

$$\Phi : \quad \mathrm{G}_e \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{G}_0) \simeq \underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{L}).$$

Un tel morphisme envoie G_e dans la « partie étale » $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{L})_e$ de $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{L})$, cf. 2.5.1. Il est donc déterminé par la donnée d'un morphisme de Γ-groupes :

$$\phi = \Phi(\overline{k}) : \quad \mathrm{M} \longrightarrow (\underline{\mathrm{Aut}}_k\,\mathrm{L})(\overline{k}) = \mathrm{Aut}_k(\mathrm{L} \otimes_k \overline{k}\,).$$

Si l'on fait opérer Γ dans $\mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$ au moyen de la formule $\gamma(\ell \otimes t) = \ell \otimes \gamma(t)$, alors **539**
ϕ fait opérer M dans $\mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$ par automorphismes de k-algèbre de Lie de telle façon qu'on ait $\phi(\gamma(m)) = \gamma \circ \phi(m) \circ \gamma^{-1}$, c.-à-d. :

$$\gamma(m)(\ell \otimes t) = \gamma\big(m(\ell \otimes \gamma^{-1}(t))\big)$$

pour tout $m \in \mathrm{M}$, $\gamma \in \Gamma$ et $\ell \otimes t \in \mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$. Nous exprimons cette dernière condition en disant que M *opère dans* $\mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$ *de manière compatible avec* Γ.

On peut résumer la situation à l'aide d'un énoncé « savant » : appelons Γ-*algèbre de Lie* sur k la donnée d'un triplet $(\mathrm{L}, \mathrm{M}, \phi)$ formé d'une k-algèbre de Lie L, d'un Γ-groupe M et d'une opération ϕ de M dans $\mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$ qui soit « compatible avec l'action de Γ dans M et dans $\mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$ ».

Si $(\mathrm{L}, \mathrm{M}, \phi)$ et $(\mathrm{L}', \mathrm{M}', \phi')$ sont deux telles Γ-algèbres de Lie, un morphisme de la première dans la seconde est un couple (f, θ) formé d'un morphisme $f : \mathrm{L} \to \mathrm{L}'$ de k-algèbres de Lie et d'un morphisme $\theta : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ de Γ-groupes tels que

$$(f \otimes 1)(m \cdot x) = \theta(m) \cdot (f \otimes 1)(x)$$

pour tout $x \in \mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$ et $m \in \mathrm{M}$. On obtient alors :

Théorème. — *Soit k un corps de caractéristique* 0. *Alors le foncteur qui associe à* G *le triplet* $(\mathrm{Lie}(\mathrm{G}), \mathrm{G}(\overline{k}), \Phi(\overline{k}))$ *est une* équivalence *de la catégorie des k-groupes formels sur celle des Γ-algèbres de Lie.* [133]

4. Phénomènes particuliers à la caractéristique $p > 0$

540

Dans toute la Section 4, nous désignons par p un nombre premier, par k un anneau pseudocompact de caractéristique p, par π l'endomorphisme continu $x \mapsto x^p$ de k.

---

[133] N.D.E. : En particulier, lorsque $k = \overline{k}$, on retrouve ainsi le « théorème de Cartier-Gabriel-Kostant » signalé en 2.9.2.

4.1. Soit X une k-variété formelle d'algèbre affine A, on note $\mathrm{X}^{(p/k)}$ ou $\mathrm{X}^{(p)}$ la k-variété formelle $\mathrm{X}\,\widehat{\otimes}_\pi\, k$ obtenue par le changement de base $\pi : k \to k$ (cf. 1.2.D), elle a pour algèbre affine le produit tensoriel complété $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_\pi\, k$. Alors, le morphisme continu $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_\pi\, k \to \mathrm{A}$ qui applique $a\,\widehat{\otimes}_\pi\,\lambda$ sur $a^p\lambda$ induit un morphisme de k-variétés formelles

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/k) : \quad \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}^{(p/k)}\,.$$

Dans la suite, nous dirons que $\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/k)$ est *le morphisme de Frobenius de* X *relativement à k* et nous écrirons souvent Fr au lieu de $\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/k)$.

4.1.1. — [134] Considérons maintenant un schéma S sur le corps premier $\mathbb{F}_p$ et un S-schéma $\eta : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$; soit fr(S) le morphisme de Frobenius « absolu » de S (il induit l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et applique toute section f du faisceau structural sur f^p ; cf. $\mathrm{VII_A}$ 4.1) et soit $\mathrm{X}^{(p)}$ le S-schéma $\mathrm{X}\times_{\mathrm{fr(S)}}\mathrm{S}$ ($\mathrm{VII_A}$, *loc. cit.*), i.e. le morphisme structural $\mathrm{X}^{(p)} \to \mathrm{S}$ est $\mathrm{fr(S)}\circ\eta$.

Soit $\widehat{\mathrm{S}}$ le schéma formel dont l'espace topologique sous-jacent est l'ensemble des points fermés de S, muni de la topologie discrète, l'anneau local $\mathscr{O}_{\widehat{\mathrm{S}},s}$ en un tel point fermé s étant le séparé complété $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{S},s}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux de colongueur finie (cf. 1.2.6) ; son algèbre affine $k = \mathscr{A}(\widehat{\mathrm{S}})$ est donc le produit des $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{S},s}$, pour s parcourant les points fermés de S. Rappelons (*loc. cit.*) qu'on note $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ la k-variété formelle formée des points $x \in \mathrm{X}$ tels que $[\kappa(x) : \kappa(s)] < \infty$, où s est l'image de x dans S, l'anneau local $\mathscr{O}_{\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}},x}$ étant le séparé complété $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux I tels que $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}/\mathrm{I}$ soit de longueur finie comme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$-module (et donc aussi comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$-module). On peut donc former, par changement de base, la k-variété formelle $(\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}})^{(p)} = (\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}})\,\widehat{\otimes}_\pi\, k$.

On peut considérer aussi la k-variété formelle $\widehat{\mathrm{X}^{(p)}}/\widehat{\mathrm{S}}$: l'ensemble sous-jacent est formé des $x \in \mathrm{X}^{(p)} = \mathrm{X}$ tels que, notant s l'image de x dans S, le morphisme

$$\kappa(s) \xrightarrow{\ \mathrm{fr}\ } \kappa(s) \xrightarrow{\ \eta^\natural\ } \kappa(x)$$

fasse de $\kappa(x)$ une extension de degré fini de $\kappa(s)$; dans ce cas, il en est de même de $\eta^\natural : \kappa(s) \to \kappa(x)$, i.e. x est un point de $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$, et l'on a alors

$$\mathscr{O}_{\widehat{\mathrm{X}^{(p)}}/\widehat{\mathrm{S}},x} = \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}\,\widehat{\otimes}_\pi\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{S},s} = \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X}^{(p)},x}$$

541 (la deuxième égalité puisque $\mathrm{X} \mapsto \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ commute aux produits, cf. 1.2.6). On voit donc que : $\widehat{\mathrm{X}^{(p)}}/\widehat{\mathrm{S}}$ *s'identifie à une sous-variété formelle* de $(\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}})^{(p)}$. De plus, on a l'égalité si et seulement si pour tout point fermé s de S, $\kappa(s)$ est de degré fini sur $\kappa(s)^p$, ce qui est le cas par exemple si S est un schéma localement de type fini sur un corps κ tel que $[\kappa : \kappa^p] < +\infty$.

[134] N.D.E. : On a corrigé l'original, qui donnait l'inclusion $(\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}})^{(p)} \subset \widehat{\mathrm{X}^{(p)}}/\widehat{\mathrm{S}}$ au lieu de l'inclusion inverse. Signalons d'autre part que ce paragraphe n'est pas utilisé dans la suite.

4.1.2. — Soit G un k-groupe formel. Comme le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^{(p)} = \mathrm{X}\,\widehat{\otimes}_\pi\, k$ commute aux produits finis, il transforme un k-groupe formel en un k-groupe formel. En outre, comme $\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/k)$ est fonctoriel en X, le morphisme

$$\mathrm{Fr} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}^{(p)}$$

est un homomorphisme de k-groupes formels. Si l'on pose $\mathrm{G}^{(p^{n+1})} = (\mathrm{G}^{(p^n)})^{(p)}$ il en va de même pour le morphisme composé

$$\mathrm{Fr}^n = \mathrm{Fr}^n(\mathrm{G}/k) : \quad \mathrm{G} \xrightarrow{\mathrm{Fr}} \mathrm{G}^{(p)} \xrightarrow{\mathrm{Fr}} \mathrm{G}^{(p^2)} \xrightarrow{\mathrm{Fr}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{Fr}} \mathrm{G}^{(p^n)}.$$

Notons A l'algèbre affine de G et I_A son idéal d'augmentation.

Définitions. — (a) Le noyau de Fr^n sera noté ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}$. Il résulte directement des définitions que ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}$ est *infinitésimal* et a pour algèbre affine le quotient $\mathrm{A}/\mathrm{I}_\mathrm{A}^{\{p^n\}}$, où $\mathrm{I}_\mathrm{A}^{\{p^n\}}$ désigne l'idéal fermé de A engendré par les puissances p^n-ièmes des éléments de I_A.

(b) On dit que G est de *hauteur* $\leqslant n$ si $\mathrm{I}_\mathrm{A}^{\{p^n\}} = 0$, c'est-à-dire si l'on a ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G} = \mathrm{G}$.

4.2. Il est clair que *l'algèbre de Lie* $\mathbf{Lie}(\mathrm{G})$ *d'un k-groupe formel* G *est une p-sous-algèbre de Lie de l'algèbre* $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ (cf. 2.3). En effet, on se ramène tout de suite au cas **542**
où k est artinien ; dans ce cas, $\mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ est la partie de $\mathrm{H}(\mathrm{G})$ formée des éléments x tels que $\varphi_\mathrm{G}(x \otimes 1 + 1 \otimes x) = \Delta_\mathrm{G}(x)$ avec les notations de 2.3 et 2.6 (c). On a alors

$$\begin{aligned}\varphi_\mathrm{G}(x^p \otimes 1 + 1 \otimes x^p) &= \varphi_\mathrm{G}\big((x \otimes 1 + 1 \otimes x)^p\big)\\ &= \varphi_\mathrm{G}(x \otimes 1 + 1 \otimes x)^p = \Delta_\mathrm{G}(x)^p = \Delta_\mathrm{G}(x^p).\end{aligned}$$

4.2.1. — Réciproquement, toute p-algèbre de Lie $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{O}_k$ définit un k-foncteur en groupes. Désignons en effet par $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ le foncteur qui associe à tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ l'algèbre enveloppante restreinte $\mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ de la p-algèbre de Lie $\mathbf{L}(\mathrm{C})$ sur C ($\mathrm{VII_A}$ 5.3). D'après $\mathrm{VII_A}$ 5.4, $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ est une $\mathbf{O}_k$-bialgèbre et détermine donc, d'après 2.2, un k-foncteur en groupes $\mathrm{Spf}^*\,\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ que nous noterons désormais $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$.

Ainsi, $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$ est le groupe des éléments $z \in \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ d'augmentation 1 et tels que $\Delta_{\mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))}(z) = z \otimes z$.

4.2.2. — Supposons que $\mathbf{L}$ soit une p-algèbre de Lie *plate* sur $\mathbf{O}_k$. Alors, tenant compte de $\mathrm{VII_A}$ 5.3.3, on montre comme dans le point (i) de la proposition 2.6.2 que $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ est plate sur $\mathbf{O}_k$; donc $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$ est un k-groupe formel *topologiquement plat* qui a $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ pour $\mathbf{O}_k$-bialgèbre covariante.

[135] D'après la démonstration de 2.6.2 (iii), pour toute k-algèbre C de longueur finie, $\mathbf{Lie}(\mathscr{G}_p(\mathbf{L}))(\mathrm{C})$ est l'ensemble des éléments primitifs de $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C}) = \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ (voir aussi $\mathrm{VII_A}$ 3.2.3) ; de plus, d'après $\mathrm{VII_A}$ 5.5.3, le morphisme canonique $\mathbf{L} \to \mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ induit un isomorphisme de p-algèbres de Lie

$$\tau_{p,\mathbf{L}} : \mathbf{L} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Lie}(\mathscr{G}_p(\mathbf{L}))$$

(comparer avec 3.1 en caractéristique 0).

[135] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

Le groupe formel $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$ peut être caractérisé par une propriété universelle. En effet, tout morphisme h de $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$ dans un groupe formel G induit un morphisme $\mathbf{Lie}(h) : \mathbf{Lie}(\mathscr{G}_p(\mathbf{L})) \to \mathbf{Lie}(\mathrm{G})$. Composant celui-ci avec l'isomorphisme $\tau_{p,\mathbf{L}}$, on obtient un morphisme $h' : \mathbf{L} \to \mathbf{Lie}(\mathrm{G})$.

543 ***Proposition***. — *Si k est un anneau pseudocompact de caractéristique $p > 0$,* G *un k-groupe formel et* $\mathbf{L}$ *une p-algèbre de Lie* plate *sur* $\mathbf{O}_k$*, l'application $h \mapsto h'$ définie ci-dessus est une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathscr{G}_p(\mathbf{L}), \mathrm{G}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{p\text{-Lie}}(\mathbf{L}, \mathbf{Lie}(\mathrm{G}))$$

où le terme de droite désigne l'ensemble des morphismes de p-algèbres de Lie de $\mathbf{L}$ *dans* $\mathbf{Lie}(\mathrm{G})$*.*

[136] On se ramène en effet tout de suite au cas où k est artinien. Posons $\mathrm{L} = \mathbf{L}(k)$. D'après 2.3.1, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathscr{G}_p(\mathbf{L}), \mathrm{G})$ est en bijection avec l'ensemble des morphismes d'algèbres unitaires $h : \mathrm{U}_p(\mathrm{L}) \to \mathrm{H}(\mathrm{G})$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U}_p(\mathrm{L}) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\Delta_{\mathrm{U}_p(\mathrm{L})}"'] & \mathrm{H}(\mathrm{G}) \arrow[dr, "\delta_{\mathrm{G}}"] & \\
 & & \mathrm{H}(\mathrm{G}\times\mathrm{G}) \\
\mathrm{U}_p(\mathrm{L})\otimes\mathrm{U}_p(\mathrm{L}) \arrow[r, "h\otimes h"] & \mathrm{H}(\mathrm{G})\otimes\mathrm{H}(\mathrm{G}) \arrow[ur, "\varphi_{\mathrm{G}}"'] &
\end{tikzcd}.$$

Or h est défini par sa restriction à L, qui est un morphisme de p-algèbres de Lie de L dans la p-algèbre de Lie sous-jacente à H(G), et la commutativité du diagramme signifie que h applique L dans la partie de H(G) formée des x tels que $\delta_{\mathrm{G}}(x) = \varphi_{\mathrm{G}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$, qui n'est autre que Lie(G), cf. 2.6 (c).

4.3. Nous nous proposons maintenant d'étudier de façon plus détaillée le k-groupe formel $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$ lorsque $\mathbf{L}$ est une p-algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$.

544 Pour cela, nous considérons d'abord un anneau C de caractéristique p et une p-algèbre de Lie L sur C dont le module sous-jacent est libre de base $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Désignons en outre par P l'ensemble des familles $n = (n_i)_{i\in\mathrm{I}}$ formées d'entiers naturels tels que $0 \leqslant n_i < p$ et que les n_i soient nuls hormis peut-être un nombre fini d'entre eux. Si nous munissons I d'un ordre total et si nous appelons $i_1, i_2, \ldots, i_r$ ($i_1 < i_2 < \cdots < i_r$) les indices i tels que $n_i \neq 0$, nous pouvons donc poser $|n| = n_{i_1} + \cdots + n_{i_r}$ et

$$x^n = x_{i_1}^{n_{i_1}} \cdot x_{i_2}^{n_{i_2}} \cdots x_{i_r}^{n_{i_r}}, \qquad n! = (n_{i_1}!) \cdots (n_{i_r}!).$$

On sait que les monômes $x^n/n!$ forment une base de $\mathrm{U}_p(\mathrm{L})$ ($\mathrm{VII_A}$ 5.3.3) et il est clair qu'on a

$$(*) \qquad \Delta\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{m\leqslant n} \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$

[136] N.D.E. : La démonstration est identique à celle de 2.6.3.

la somme étant étendue à tous les $m \in \mathrm{P}$ tels qu'on ait $m \leqslant n$ (i.e. $m_i \leqslant n_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$).

La formule $(*)$ permet une détermination aisée de la filtration naturelle de $\mathrm{U}_p(\mathrm{L})$ (cf. 1.3.6). Posons $\mathrm{U} = \mathrm{U}_p(\mathrm{L})$, soit U^+ l'idéal bilatère engendré par L et soit $\mathrm{U}_0 = \mathrm{C}\cdot 1_{\mathrm{U}}$. Comme en 1.3.6, on définit une filtration de U (par des sous-C-coalgèbres) en posant, pour $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{U}_n = \{u \in \mathrm{U} \mid \Delta_{\mathrm{U}}(u) - u \otimes 1 \in \mathrm{U}_{n-1} \otimes \mathrm{U}^+\}.$$

La formule $(*)$ entraîne alors que U_n *est le* C*-module libre qui a pour base les monômes* x^m *tels que* $|m| \leqslant n$.

4.3.1. — Avec les notations de 4.3, déterminons les éléments ξ de $\mathrm{U} = \mathrm{U}_p(\mathrm{L})$ tels que $\varepsilon_{\mathrm{U}}(\xi) = 1$ et $\Delta_{\mathrm{U}}(\xi) = \xi \otimes \xi$. Tout élément ξ de U s'écrit $\xi = \sum_{n\in\mathrm{P}} \xi_n (x^n/n!)$, avec $\xi_n \in \mathrm{C}$. La condition $\varepsilon_{\mathrm{U}}(\xi) = 1$ entraîne l'égalité $\xi_0 = 1$, où 0 désigne l'élément de P dont toutes les composantes sont nulles. La condition $\Delta_{\mathrm{U}_p(\mathrm{L})}(\xi) = \xi \otimes \xi$ entraîne : 545

$$\sum_{m \leqslant n} \xi_n \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_{q,r} \xi_q \xi_r \frac{x^q}{q!} \otimes \frac{x^r}{r!}$$

c'est-à-dire

$$\xi_{q+r} = \xi_q \xi_r \quad \text{si} \quad q_i + r_i < p \quad \text{et} \quad \xi_q \xi_r = 0 \quad \text{sinon.}$$

Si l'on note ξ_i la valeur de ξ_n lorsque $n_i = 1$ et $n_j = 0$ pour $j \neq i$, ces conditions signifient que l'on a

$$\xi_n = \prod_i \xi_i^{n_i} \quad \text{si} \quad n \in \mathrm{P} \qquad \text{et} \quad \xi_i^p = 0 \quad \forall\, i \in \mathrm{I}.$$

On tire de là :

Proposition. — *Soient k un anneau pseudocompact local* [137] *de caractéristique $p > 0$,* $\mathbf{L}$ *une p-algèbre de Lie* plate *sur* $\mathbf{O}_k$, C *un objet de* $\mathbf{Alf}_{/k}$ *et* $\sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ *l'idéal* de C *formé des éléments x tels que $x^p = 0$. Il existe une bijection « fonctorielle en* C *» :*

$$\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$$

D'après la remarque 1.2.3.F, on peut en effet choisir une base $({}^{\mathrm{C}}x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de $\mathbf{L}(\mathrm{C})$ sur C de telle façon que, pour tout morphisme $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{L}(\varphi)$ applique ${}^{\mathrm{C}}x_i$ sur ${}^{\mathrm{D}}x_i$. D'après ce qui précède, l'application 546

$$\sum_i {}^{\mathrm{C}}x_i \otimes \xi_i \mapsto \sum_{n\in\mathrm{P}} \Big(\prod_i \xi_i^{n_i}\Big) \frac{{}^{\mathrm{C}}x^n}{n!}$$

est une bijection fonctorielle de $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ sur $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$.

[137] N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse que k soit local, afin que tout k-module pseudocompact topologiquement plat soit topologiquement libre, cf. la démonstration.

4.3.2. — « *Il n'y a pas de formule de Campbell-Hausdorff en caractéristique* $p > 0$ ». Expliquons-nous : l'isomorphisme fonctoriel de 4.3.1 dépend du choix des bases $({}^{\mathrm{C}}x_i)_{i\in \mathrm{I}}$. À la différence de ce qui se passe en 3.2 (cas de la caractéristique 0), il n'y a pas, en général, de bijection de $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ sur $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$ qui soit « fonctorielle à la fois en C et en $\mathbf{L}$ ». L'argument qui suit montre par exemple qu'un tel isomorphisme n'existe pas lorsque k est un corps contenant les racines (p^2-1)-ièmes de l'unité.

Choisissons en effet $\mathbf{L}$ de telle façon que, pour tout $\mathrm{C} \in \mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{L}(\mathrm{C})$ soit la p-algèbre de Lie abélienne sur C qui est engendrée par un élément x soumis à la relation $x^{(p^2)} = 0$. On a donc

$$\mathbf{L}(\mathrm{C}) = \mathrm{C}x \oplus \mathrm{C}x^{(p)}, \qquad \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C})) \cong k[x]/(x^{p^2}).$$

Nous allons montrer que le seul morphisme fonctoriel

$$\chi_{\mathrm{C}} : \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \longrightarrow \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$$

qui soit compatible avec les endomorphismes de $\mathbf{L}$ et qui applique $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ dans $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$, est le morphisme constant de valeur 1.

547 Soit en effet ψ_{C} la bijection de $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ sur $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C}) = \mathrm{Prim}\,\mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ donnée par 4.3.1, c.-à-d.,

$$x \otimes a + x^{(p)} \otimes b \mapsto \sum_{0 \leqslant i,j < p} a^i b^j \, x^{i+pj}.$$

En composant χ_{C} avec ψ_{C}^{-1}, on obtient un morphisme fonctoriel (en C) :

$$\begin{aligned} \theta_{\mathrm{C}} : \quad \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} &\to \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \\ x \otimes a + x^{(p)} \otimes b &\mapsto x \otimes \mathrm{P}(a,b) + x^{(p)} \otimes \mathrm{Q}(a,b). \end{aligned}$$

La fonctorialité en C implique que $\mathrm{P}(a,b)$ et $\mathrm{Q}(a,b)$ sont les valeurs en (a,b) de deux polynômes P, $\mathrm{Q} \in k[x,y]$ qu'on peut supposer de degré $< p$ en X ainsi qu'en Y. [138] Soit α un élément de k et ℓ_α l'endomorphisme de p-algèbre de Lie de $\mathbf{L}$ qui applique x sur αx (et donc $x^{(p)}$ sur $\alpha^p x^{(p)}$). Alors $\mathrm{U}_p(\ell_\alpha)$ est l'endomorphisme d'algèbre qui envoie x sur αx (et donc chaque x^i sur $\alpha^i x^i$, pour $i < p^2$), et l'on voit facilement que le carré ci-dessous

$$\begin{tikzcd} \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \arrow[r, "\psi_{\mathrm{C}}"] \arrow[d, "\ell_\alpha(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathrm{id}"] & \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C})) \arrow[d, "\mathrm{U}_p(\ell_\alpha)(\mathrm{C})"] \\ \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \arrow[r, "\psi_{\mathrm{C}}"] & \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C})) \end{tikzcd}$$

est commutatif. L'hypothèse $\chi_{\mathrm{C}} \circ (\ell_\alpha(\mathrm{C}) \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{U}_p(\ell_\alpha)(\mathrm{C}) \circ \chi_{\mathrm{C}}$ entraîne alors les égalités :

$$\mathrm{P}(\alpha a, \alpha^p b) = \alpha\, \mathrm{P}(a,b) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q}(\alpha a, \alpha^p b) = \alpha^p\, \mathrm{Q}(a,b).$$

Écrivant $\mathrm{P} = \sum_{i,j<p} \lambda_{ij} \mathrm{X}^i \mathrm{Y}^j$ et $\mathrm{Q} = \sum_{i,j<p} \mu_{ij} \mathrm{X}^i \mathrm{Y}^j$, et prenant pour C l'algèbre $k[\mathrm{X},\mathrm{Y}]/(\mathrm{X}^p, \mathrm{Y}^p)$, on en déduit que si $\lambda_{ij} \neq 0$ (resp. $\mu_{ij} \neq 0$) alors $\alpha^{i-1+pj} = 1$

[138] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

(resp. $\alpha^{i+p(j-1)}=1$). Donc, prenant pour α une racine primitive de l'unité d'ordre p^2-1, on en déduit que $\mathrm{P}=\lambda\mathrm{X}$ et $\mathrm{Q}=\mu\mathrm{Y}$, avec $\lambda,\mu\in k$. Par conséquent, on a :

$$\chi_{\mathrm{C}}(x\otimes a+x^{(p)}\otimes b)=\sum_{0\leqslant i,j<p}(\lambda a)^i(\mu b)^j x^{i+pj}.$$

(138) Considérons enfin l'endomorphisme f de $\mathbf{L}$ qui envoie x sur $x+x^{(p)}$; prenant $\mathrm{C}=k[a]/(a^3)$ et comparant les coefficients de x^p et x^{p+1} dans $(\chi_{\mathrm{C}}\circ f(\mathrm{C}))(x\otimes a)$ et dans $(\mathrm{U}_p(f)(\mathrm{C})\circ\chi_{\mathrm{C}})(x\otimes a)$, on obtient que $\lambda=\mu$ et $\lambda^2\,a^2=0$, d'où $\lambda=\mu=0$.

4.4. Théorème. — *Soient k un anneau pseudocompact de caractéristique $p>0$ et* G *un k-groupe formel. Les assertions suivantes sont équivalentes :* **548**

(i) *Il existe une p-algèbre de Lie* $\mathbf{L}$ plate *sur* $\mathbf{O}_k$ *telle que* G *soit isomorphe à* $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$ (*et dans ce cas* $\mathbf{L}=\mathbf{Lie}(\mathrm{G})$ *d'après* 4.2.2).

(ii) *Il existe un k-module pseudocompact* projectif ω *tel que l'algèbre affine de* G *soit isomorphe au quotient de $k[[\omega]]$ par l'idéal fermé engendré par les x^p, pour $x\in\omega$* (*et dans ce cas* $\omega\simeq\omega_{\mathrm{G}/k}$).

(iii) G *est de hauteur* $\leqslant 1$ *et* $\omega_{\mathrm{G}/k}$ *est un k-module pseudocompact* projectif.

(iv) G *est de hauteur* $\leqslant 1$ *et est* topologiquement plat *sur k.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Soient $\omega=\Gamma^*(\mathbf{L})$ (cf. 1.2.3.D) et A le quotient de $k[[\omega]]$ par l'idéal fermé engendré par les x^p, pour $x\in\omega$. Tout morphisme continu $h:\mathrm{A}\to\mathrm{C}$, où C est un objet de $\mathbf{Alf}_{/k}$, est déterminé par sa restriction h' à ω ; cette restriction h' envoie ω dans $\sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$. On obtient ainsi une bijection canonique de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{A},\mathrm{C})$ sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(\omega,\sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}})$ des applications k-linéaires continues de ω dans $\sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$. Ce dernier ensemble est canoniquement isomorphe à $\mathbf{L}(\mathrm{C})\otimes_{\mathrm{C}}\sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ (voir la démonstration de 3.3). L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte donc de la bijection fonctorielle $\mathbf{L}(\mathrm{C})\otimes_{\mathrm{C}}\sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}\xrightarrow{\sim}\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$ établie en 4.3.1.

Pour les autres implications, consulter les démonstrations des théorèmes 3.3 et $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 7.4.1, qui sont analogues.

Remarque 4.4.A. — (139) Soit G un k-groupe formel infinitésimal, d'algèbre affine A, tel que $\omega_{\mathrm{G}/k}=\mathrm{I}_{\mathrm{A}}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2}$ soit un k-module pseudocompact *projectif*. Alors il existe une section $\tau:\omega_{\mathrm{G}/k}\to\mathrm{I}_{\mathrm{A}}$ de la projection $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}\to\omega_{\mathrm{G}/k}$, et τ induit un morphisme continu d'algèbres $\psi:k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]\to\mathrm{A}$ qui est *surjectif*, cf. la démonstration de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) dans 3.3.

4.4.1 Corollaire. — *Si k est un corps de caractéristique $p>0$, le foncteur* $\mathrm{L}\mapsto\mathscr{G}_p(\mathrm{L})$ *est une équivalence de la catégorie des p-algèbres de Lie sur k sur celle des k-groupes* **549**
formels de hauteur $\leqslant 1$.

(139) N.D.E. : On a ajouté cette remarque, utilisée en 4.4.2.

En effet, quand G parcourt les groupes formels de hauteur $\leqslant 1$, le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathscr{G}_p(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G})$ est isomorphe au foncteur identique d'après le théorème 4.4 ; de même, nous avons vu en 4.2.2 que le foncteur $\mathrm{L} \mapsto \mathrm{Lie}\,\mathscr{G}_p(\mathrm{L})$ est isomorphe au foncteur identique (voir aussi $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$, 5.5.3). [140]

4.4.2. — Prenons toujours pour k un corps de caractéristique p. Soit G un k-groupe formel infinitésimal G, d'algèbre affine A. Comme G est infinitésimal, tout idéal ouvert de A contient $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^{\{p^n\}}$ pour n assez grand, donc G est la limite projective des algèbres affines $\mathrm{A}/\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^{\{p^n\}}$ des groupes ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}$ (cf. 4.1.2). *Tout k-groupe formel infinitésimal est donc une limite inductive de k-groupes formels de hauteur finie.*

Supposons G de hauteur $\leqslant n$ et notons $\mathrm{H} = \mathrm{G}/{}_{\mathrm{Fr}}\mathrm{G}$. [141] D'après 2.4 et 2.4.1, $\mathrm{Fr} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}^{(p)}$ se factorise en un épimorphisme $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ suivi d'un monomorphisme $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}^{(p)}$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mathrm{Fr}"'] & \mathrm{H} \arrow[r, "\mathrm{Fr}^{n-1}"] \arrow[d, "i"] & \mathrm{H}^{(p^{n-1})} \arrow[d, "i^{(p^{n-1})}"] \\
& \mathrm{G}^{(p)} \arrow[r, "\mathrm{Fr}^{n-1}"] & \mathrm{G}^{(p^n)}
\end{tikzcd}$$

et comme le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^{(p)}$ commute aux produits fibrés, $i^{(p^{n-1})}$ est encore un monomorphisme. Comme $\mathrm{Fr}^n(\mathrm{G}/k)$ est nul et comme π est un épimorphisme, alors $\mathrm{Fr}^{n-1}(\mathrm{G}^{(p)}/k) \circ i = i^{(p^{n-1})} \circ \mathrm{Fr}^{n-1}(\mathrm{H}/k)$ est nul et donc, puisque $i^{(p^{n-1})}$ est un monomorphisme, $\mathrm{Fr}^{n-1}(\mathrm{H}/k)$ est nul, donc H est de hauteur $\leqslant n-1$. On voit donc que : *tout k-groupe formel de hauteur finie possède une suite de composition dont les quotients sont de hauteur* $\leqslant 1$, donc peuvent être décrits par des p-algèbres de Lie sur k.

Enfin, l'algèbre affine A de G est un quotient de $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$, cf. 4.4.A, donc si $\omega_{\mathrm{G}/k}$ est de dimension finie sur k, alors toutes les algèbres $\mathrm{A}/\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^{\{p^n\}}$ sont des k-espaces vectoriels de dimension finie. On voit donc que : *tout groupe formel infinitésimal* G *sur un corps de caractéristique $p > 0$, tel que $\omega_{\mathrm{G}/k}$ soit de dimension finie sur k, est une limite inductive de groupes formels finis* (i.e. de longueur finie, cf. 1.2.6).

5. Espaces homogènes de groupes formels infinitésimaux sur un corps

550

5.0. [142] Supposons, pour simplifier, que k soit un corps. Soit G un k-groupe formel d'algèbre affine $\mathrm{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$. Soit A^+ l'idéal d'augmentation de A ; pour tout $a \in \mathrm{A}$ on notera $\overline{a} = a - \varepsilon_{\mathrm{A}}(a) 1_{\mathrm{A}}$ sa projection sur A^+. Soit F un sous-groupe formel de

---

[140] N.D.E. : Si k est un anneau artinien de caractéristique $p > 0$, la même démonstration donne une équivalence entre la catégorie des p-algèbres de Lie *plates* sur k et celle des k-groupes formels de hauteur $\leqslant 1$, *topologiquements plats* sur k.

[141] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[142] N.D.E. : On a ajouté la sous-section 5.0, pour exprimer dans le langage des algèbres de Hopf cocommutatives la proposition 5.1 qui va suivre, et citer les résultats obtenus depuis dans cette direction.

G, défini par l'idéal fermé J de A, et soit π (resp. $\overline{\pi}$) la projection $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{J}$ (resp. la composée des projections $\mathrm{A} \to \mathrm{A}^+ \to \mathrm{A}^+/\mathrm{J}$). Remarquons que, pour tout $a \in \mathrm{A}$, la projection de $\Delta_{\mathrm{A}}(\mathrm{A})$ sur $\mathrm{A} \widehat{\otimes} \mathrm{A}^+$ est $\Delta_{\mathrm{A}}(a) - a \widehat{\otimes} 1$.

D'après le théorème 2.4, on peut former la k-variété formelle quotient $\mathrm{X} = \mathrm{G}/\mathrm{F}$, son algèbre affine B est

$$\begin{aligned}
\mathrm{B} &= \operatorname{Ker}\Big(\mathrm{A} \underset{(\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \widehat{\otimes} \pi)\Delta_{\mathrm{A}}}{\overset{\tau_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k (\mathrm{A}/\mathrm{J}) \Big) \\
&= \big\{ a \in \mathrm{A} \mid (\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \widehat{\otimes} \pi)\Delta_{\mathrm{A}}(a) = a \widehat{\otimes} \pi(1) \big\} \\
&= \operatorname{Ker}\Big((\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \widehat{\otimes} \overline{\pi}\,)\Delta_{\mathrm{A}} \Big).
\end{aligned}$$

C'est aussi la sous-algèbre de A formée des éléments ϕ tels que, pour tout $\mathrm{C} \in \operatorname{Ob} \mathbf{Alf}_{/k}$ et $g \in \mathrm{G}(\mathrm{C})$, $h \in \mathrm{F}(\mathrm{C})$, on ait $\phi(gh) = \phi(g)$. Pour tout $g, g' \in \mathrm{G}(\mathrm{C})$ et $h \in \mathrm{F}(\mathrm{C})$, on a $\phi(gg'h) = \phi(gg')$, donc $\Delta(\phi)$ appartient au noyau de $\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \widehat{\otimes}_k (\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \widehat{\otimes} \overline{\pi})\Delta_{\mathrm{A}}$, qui égale $\mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{B}$ puisque A est topologiquement plate sur k. On a donc $\Delta_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{B}$, i.e. la sous-algèbre fermée B est aussi un *coidéal à gauche*.

D'autre part, B détermine F puisque, d'après le corollaire 2.4.1, on a $\mathrm{J} = \overline{\mathrm{AB}^+}$, i.e. J est l'idéal fermé engendré par $\mathrm{B}^+ = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}^+$. On obtient donc ainsi une application *injective* $\mathcal{Q}$ de l'ensemble $\mathscr{F}$ des sous-groupes formels de G dans l'ensemble $\mathscr{B}$ des sous-algèbres fermées B de A qui sont des coidéaux à gauche. Se pose alors la question de déterminer l'image de cette application, et la proposition 5.1 ci-dessous montre que $\mathcal{Q}$ est bijective lorsque G est *infinitésimal*. En fait, ceci est vrai pour *tout* k-groupe formel G.

En effet, rappelons (cf. 2.2.1) que le foncteur $\mathrm{G} \to \mathrm{H}(\mathrm{G})$ est une *équivalence* entre la catégorie des k-groupe formels et celle des k-algèbre de Hopf cocommutatives ; si F est un sous-groupe formel de G, défini par l'idéal fermé J de A, alors la sous-algèbre de Hopf H(F) de $\mathrm{H} = \mathrm{H}(\mathrm{G})$ est l'orthogonal de J pour la dualité entre $\mathrm{A} = \mathrm{H}^*$ et $\mathrm{H} = \mathrm{A}^\dagger$ (cf. 0.2.2). D'autre part, si B est une sous-algèbre fermée de A qui est aussi un coidéal à gauche, alors son orthogonal $\mathrm{I} = \mathrm{B}^\perp$ est un coidéal de H (i.e. $\Delta_{\mathrm{H}}(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I} \otimes \mathrm{H} + \mathrm{H} \otimes \mathrm{I}$ et $\varepsilon_{\mathrm{H}}(\mathrm{I}) = 0$) et un idéal à gauche. Notons $\mathscr{H}$ (resp. $\mathscr{I}$) l'ensemble des sous-algèbres de Hopf (resp. idéaux à gauche qui sont des coidéaux) de H. Pour tout $\mathrm{I} \in \mathscr{I}$, on notera π_{I} (resp. $\overline{\pi}_{\mathrm{I}}$) la projection $\mathrm{H} \to \mathrm{H}/\mathrm{I}$ (resp. la composée des projections $\mathrm{H} \to \mathrm{H}^+ \to \mathrm{H}^+/\mathrm{I}$), où H^+ est l'idéal d'augmentation de H.

Soient K une sous-algèbre de Hopf de H et $\mathrm{K}^+ = \mathrm{K} \cap \mathrm{H}^+$. Si F est le sous-groupe formel correspondant à K, alors $\mathrm{J} = \mathrm{K}^\perp$ et A^+/J s'identifie au dual de K^+, et comme $\mathrm{B} = \mathcal{Q}(\mathrm{F})$ est le noyau de l'application

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\Delta_{\mathrm{A}}} \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A} \xrightarrow{\mathrm{id} \widehat{\otimes} \overline{\pi}} \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k (\mathrm{A}^+/\mathrm{J})$$

on obtient que $\mathcal{Q}$ correspond par dualité à l'application Φ qui à K associe l'image de

$$\mathrm{H} \xleftarrow{m_{\mathrm{H}}} \mathrm{H} \otimes_k \mathrm{H} \xleftarrow{\mathrm{id} \widehat{\otimes} \mathrm{can.}} \mathrm{H} \otimes_k \mathrm{K}^+$$

i.e. l'idéal à gauche HK^+, qui est aussi un coidéal. On voit de même que l'application qui à $\mathrm{B} \in \mathscr{B}$ associe $\overline{\mathrm{AB}^+}$ correspond par dualité à l'application Ψ qui à tout $\mathrm{I} \in \mathscr{I}$

associe le noyau de $(\mathrm{id} \otimes_k \overline{\pi}_{\mathrm{I}}) \circ \Delta_{\mathrm{H}}$, i.e. on a

$$\Psi(\mathrm{I}) = \{x \in \mathrm{H} \mid (\mathrm{id} \otimes_k \pi_{\mathrm{I}})\Delta_{\mathrm{H}}(x) = x \otimes \pi_{\mathrm{I}}(1)\}.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 5.0.1. — *Soient k un corps et* H *une algèbre de Hopf cocommutative. Alors les applications* Φ *et* Ψ *ci-dessus sont des bijections réciproques entre l'ensemble des sous-algèbres de Hopf de* H *et celui des idéaux à gauche qui sont des coidéaux.*

Ce théorème a d'abord été démontré par K. Newman, cf. [**Ne75**], Th. 4.1 (où le mot « cocommutative » a été oublié). Sa démonstration utilise « le théorème de Cartier-Gabriel-Kostant » (cf. 2.9) pour se ramener au cas où H est connexe, puis l'existence dans ce cas d'une « base de Sweedler » (cf. [**Sw67**], Th. 3), un résultat dual du théorème de Dieudonné-Cartier 5.2.2 ci-dessous. Une autre démonstration, plus courte, a été donnée par H. J. Schneider [**Sch90**], Th. 4.15. Une généralisation a ensuite été obtenue par A. Masuoka lorsqu'on suppose seulement que le coradical H_0 de H (i.e. la somme des sous-cogèbres simples) est commutatif [**Ma91**], Th. 1.3 (3).

Signalons enfin que pour une k-algèbre de Hopf commutative, correspondant donc à un k-schéma en groupes affine G, on ne peut s'attendre à un analogue de 5.0.1 sans hypothèses additionnelles, puisque pour un k-sous-groupe F de G, le quotient G/F n'est pas nécessairement affine. Mais M. Takeuchi a établi dans [**Tak72**], Th. 4.3 (resp. [**Tak79**], Th. 3), une bijection analogue entre l'ensemble des k-sous-groupes F de G qui sont invariants (resp. tels que G/F soit affine), et celui des sous-algèbres B de $\mathscr{O}(\mathrm{G})$ telles que $\Delta(\mathrm{B}) \subset \mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ et qui sont stables par l'antipode (resp. et telles que $\mathrm{B} \to \mathrm{A}$ soit fidèlement plat).

5.1. Soit k un anneau pseudocompact. [143] Soient G un k-groupe formel infinitésimal topologiquement plat, A son algèbre affine, B une sous-algèbre fermée de A, $\mathrm{X} = \mathrm{Spf}(\mathrm{B})$ et $r : \mathrm{G} \to \mathrm{X}$ l'épimorphisme induit par l'inclusion de B dans A. On se propose de voir sous quelle condition r fait de X le quotient à droite de G par un sous-groupe H (cf. 2.4). [144]

Proposition. — *Soient* G *un k-groupe formel* infinitésimal topologiquement plat*,* A *son algèbre affine,* I_{A} *l'idéal d'augmentation de* A*,* B *une sous-algèbre fermée de* A*, et* $\mathrm{J}_{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}\mathrm{I}_{\mathrm{B}}}$*, où* $\mathrm{I}_{\mathrm{B}} = \mathrm{B} \cap \mathrm{I}_{\mathrm{A}}$*. On suppose que* A *est* topologiquement plate *sur k, ainsi que* $\overline{\mathrm{J}^n_{\mathrm{B}}}/\overline{\mathrm{J}^{n+1}_{\mathrm{B}}}$ *pour tout $n \geqslant 0$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout* $x \in \mathrm{B}$*,* $\Delta_{\mathrm{A}}(x) - x \widehat{\otimes} 1$ *appartient à* $\mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{J}_{\mathrm{B}}$.

(143) N.D.E. : Dans l'original, il est supposé en 5.1 que k est un corps. En fait, cette hypothèse peut être remplacée par des hypothèses de platitude ; on a modifié en conséquence les n$^{\mathrm{os}}$ 5.1 à 5.1.5.

(144) N.D.E. : On a remplacé « gauche » par « droite » et l'on a modifié l'énoncé de la proposition 5.1, afin de faire apparaître plus clairement, d'une part, les conditions équivalentes (i), (ii), et, d'autre part, la conclusion $\mathrm{Spf}(\mathrm{B}) \simeq \mathrm{G}/\mathrm{H}$.

(ii) *La suite ci-dessous* (*où* $\tau_1(a) = a \mathbin{\widehat{\otimes}} 1$ *et* π *est la projection* $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{J}_{\mathrm{B}}$) *est exacte :*

$$(*) \qquad \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{A} \underset{(\pi \widehat{\otimes} \mathrm{id}_{\mathrm{A}})\Delta_{\mathrm{A}}}{\overset{\tau_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k (\mathrm{A}/\mathrm{J}_{\mathrm{B}})$$

c.-à-d., B *est l'ensemble de* tous *les* $x \in \mathrm{A}$ *tels que* $\Delta_{\mathrm{A}}(x) - x \mathbin{\widehat{\otimes}} 1$ *appartienne à* $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{J}_{\mathrm{B}}$.

Dans ce cas, $\mathrm{H} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A}/\mathrm{J}_{\mathrm{B}})$ *est un sous-groupe formel de* G*, et la suite ci-dessous* (*où* λ *est la restriction à* $\mathrm{G} \times \mathrm{H}$ *de la multiplication de* G) *est exacte :*

$$(**) \qquad \mathrm{G} \times \mathrm{H} \underset{\lambda}{\overset{\mathrm{pr}_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Spf}(\mathrm{B})$$

c.-à-d., Spf(B) *est isomorphe à* G/H.

Posons $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}/\mathrm{J}_{\mathrm{B}}$ et $\mathrm{H} = \mathrm{Spf}(\overline{\mathrm{A}})$; alors H est une sous-variété formelle de G. Comme $\mathrm{J}_{\mathrm{B}} \subset \mathrm{I}_{\mathrm{A}}$, l'augmentation ε_{A} induit un morphisme continu de k-algèbres $\overline{\varepsilon} : \overline{\mathrm{A}} \to k$.

Si (i) est satisfaite, alors $\Delta_{\mathrm{A}}(\mathrm{I}_{\mathrm{B}}) \subset \mathrm{I}_{\mathrm{B}} \mathbin{\widehat{\otimes}} 1 + \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{J}_{\mathrm{B}}$, et donc Δ_{A} induit par passage au quotient un morphisme diagonal $\overline{\Delta}$. Alors $\overline{\Delta}$ et $\overline{\varepsilon}$ munissent H d'une structure de sous-monoïde formel de G. Comme G est infinitésimal, il en est de même de H ; donc, d'après la proposition 2.7, H est un sous-groupe formel de G. Il résulte alors de la définition de G/H (cf. 2.4), que (ii) entraîne la dernière assertion de la proposition.

D'autre part, il est clair que (ii) implique (i). La démonstration de la réciproque occupe les paragraphes 5.1.1 à 5.1.5.

5.1.1. — Considérons d'abord la catégorie $\mathscr{C}$ qui suit : un objet de $\mathscr{C}$ est un couple (A, J) formé d'une k-algèbre profinie A et d'un idéal fermé J de A ; un morphisme $\psi : (\mathrm{A},\mathrm{J}) \to (\mathrm{A}',\mathrm{J}')$ de $\mathscr{C}$ est un homomorphisme continu de k-algèbres $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ qui applique J dans J′. Si l'on associe à (A, J) le couple (Spf(A/J), Spf(A)), on obtient évidemment une anti-équivalence de $\mathscr{C}$ sur la catégorie des couples (Z, Y) formés d'une k-variété formelle Y et d'une sous-variété formelle Z, un morphisme $\phi : (\mathrm{Z},\mathrm{Y}) \to (\mathrm{Z}',\mathrm{Y}')$ étant un morphisme de k-variétés formelles $\mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ qui applique Z dans Z′. 551

Une structure de *cogroupe* sur un objet (A, J) de $\mathscr{C}$ consiste en la donnée d'une structure de groupe formel sur Spf(A) telle que les conditions suivantes soient réalisées (notations de 2.1) :

(1) $\Delta_{\mathrm{A}}(\mathrm{J}) \subset \mathrm{J} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{A} + \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{J}$;

(2) $\varepsilon_{\mathrm{A}}(\mathrm{J}) = 0$;

(3) $c_{\mathrm{A}}(\mathrm{J}) \subset \mathrm{J}$.

Ces conditions signifient aussi que $\mathrm{H} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A}/\mathrm{J})$ est un sous-groupe formel de $\mathrm{G} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$. [145]

[145] N.D.E. : Notons que si $(\mathrm{A}',\mathrm{J}')$ est un second cogroupe de $\mathscr{C}$, correspondant à un couple $\mathrm{H}' \subset \mathrm{G}'$ de k-groupes formels, alors se donner un morphisme de cogroupes $(\mathrm{A}',\mathrm{J}') \to (\mathrm{A},\mathrm{J})$ équivaut à se donner un morphisme de k-groupes formels $\mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ qui applique H dans H′.

Supposons de plus que A soit *locale*, i.e. que Spf(A) soit un groupe formel *infinitésimal.* Alors, si $J \neq A$, les conditions (2) et (3) sont conséquence de (1). En effet, si J est un idéal fermé distinct de A, il est contenu dans l'idéal d'augmentation I_A, donc (2) est vérifiée, et $M = \mathrm{Spf}(A/J)$ est un sous-monoïde formel de G. Comme G est infinitésimal, il résulte de 2.7 que M est un sous-groupe formel de G, i.e. la condition (3) est vérifiée.

5.1.2. — Désignons par $\mathbf{Alpg}_{/k}$ la catégorie des k-algèbres « *profinies graduées* » :
552 un objet de cette catégorie consiste en la donnée d'une suite $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ de k-modules pseudocompacts et d'une structure d'algèbre profinie sur le produit $\prod_{n\geqslant 0} A_n$ telle qu'on ait $A_n \cdot A_m \subset A_{m+n}$ (A_n est identifié à une partie de $\prod_{i\geqslant 0} A_i$ au moyen de l'injection canonique) ; un morphisme $\psi : (A_n) \to (B_n)$ est une suite d'applications linéaires continues $\psi_n : A_n \to B_n$ telles qu'on ait $\psi_{m+n}(a\cdot a') = \psi_m(a)\cdot\psi_n(a')$ si $a \in A_m$ et $a' \in A_n$.

Définitions. — Il est clair que deux k-algèbres profinies graduées (A_n) et (B_n) ont un *coproduit* [146] dans $\mathbf{Alpg}_{/k}$, qui a pour n-ième composante le produit $\prod_{i=0}^{n} A_i \mathbin{\widehat{\otimes}}_k B_{n-i}$ des k-modules pseudocompacts $A_i \mathbin{\widehat{\otimes}}_k B_{n-i}$. Ce coproduit sera noté $(A_n)\mathbin{\widehat{\otimes}}_k(B_n)$.

Alors, une structure de cogroupe sur un objet (A_n) de $\mathbf{Alpg}_{/k}$ est la donnée d'applications k-linéaires continues $\Delta_n : A_n \to \prod_{i=0}^{n} A_i \mathbin{\widehat{\otimes}}_k A_{n-i}$ et $\varepsilon : A_0 \to k$, qui induisent sur $\prod_{n\geqslant 0} A_n$ (posant $\varepsilon(A_i) = 0$ pour $i \geqslant 1$) une structure de cogroupe dans $\mathbf{Alp}_{/k}$.

Enfin, pour tout objet (A, J) de $\mathscr{C}$, on note $\mathrm{Gr}_J(A)$ l'algèbre profinie graduée associée à la filtration de A par les adhérences $\overline{J^n}$ des puissances de J ; on a donc $\mathrm{Gr}_J(A)_n = \overline{J^n}/\overline{J^{n+1}}$ et la multiplication de $\mathrm{Gr}_J(A)$ est induite par celle de A.

Lemme. — [147] *Soient* U, V *deux k-modules pseudocompacts, avec* U topologiquement plat*, et soient* $U = U_0 \supset U_1 \supset \cdots$ *et* $V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots$ *deux suites décroissantes de sous-k-modules fermés. Filtrons le produit tensoriel complété* $W = U \mathbin{\widehat{\otimes}}_k V$ *à l'aide des sous-modules fermés*

$$W_n = U_n \mathbin{\widehat{\otimes}}_k V_0 + U_{n-1} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k V_1 + \cdots + U_0 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k V_n\,.$$

On suppose que chaque U_i/U_{i+1} *est* topologiquement plat *sur* k *(de sorte que* U/U_n
553 *et donc* U_n *le sont aussi, pour tout* n*). Alors, pour tout* n*, on a un isomorphisme*

$$W_n/W_{n+1} \simeq \bigoplus_{i+j=n} (U_i/U_{i+1})\mathbin{\widehat{\otimes}}_k(V_j/V_{j+1}).$$

Démonstration. Posons $W_{i,j} = U_i \mathbin{\widehat{\otimes}} V_j$ et $\overline{W}_{i,j} = (U_i/U_{i+1})\mathbin{\widehat{\otimes}}_k(V_j/V_{j+1})$, pour tout $i, j \geqslant 0$. Montrons par récurrence sur n que l'application naturelle

$$\pi_n : W_n \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} \overline{W}_{i,j}$$

[146] N.D.E. : On a remplacé « *somme directe* » par « *coproduit* ».

[147] N.D.E. : Dans l'original, le lemme est énoncé lorsque k est un *corps*, la démonstration étant dans ce cas laissée au lecteur.

est surjective et que l'inclusion $\mathrm{W}_{n+1} \subset \mathrm{Ker}(\pi_n)$ est une égalité. Pour $n = 0$, la projection

$$\pi_0 : \mathrm{U}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_0 \longrightarrow (\mathrm{U}_0/\mathrm{U}_1) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k (\mathrm{V}_0/\mathrm{V}_1)$$

est surjective et, comme U_0, $\mathrm{U}_0/\mathrm{U}_1$ et donc U_1 sont topologiquement plats sur k, on voit que $\mathrm{Ker}(\pi_0) = \mathrm{U}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_1 + \mathrm{U}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_0$ et que, de plus, $\mathrm{U}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_1 \cap \mathrm{U}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_0 = \mathrm{U}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_1$.

Supposons donc $n > 0$ et le résultat établi pour $n-1$. Posons $\mathrm{M}_0 = \mathrm{U}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_n$ et $\mathrm{S}_0 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_{n-i}$. On a $\mathrm{S}_0 \subset \mathrm{U}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_0$ et donc, d'après ce qui précède appliqué à $\mathrm{V}_0 \supset \mathrm{V}_n$ au lieu de $\mathrm{V}_0 \supset \mathrm{V}_1$, on a

$$\mathrm{M}_0 \cap \mathrm{S}_0 \subset \mathrm{U}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_n \cap \mathrm{U}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V} = \mathrm{U}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_n$$

d'où l'on déduit que $\mathrm{M}_0 \cap \mathrm{S}_0 = \mathrm{U}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_n$. Comme $\mathrm{W}_n = \mathrm{M}_0 + \mathrm{S}_0$, on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes, où l'on a posé $\mathrm{U}'_i = \mathrm{U}_{i+1}$ et $\overline{\mathrm{W}}'_{i,n-1-i} = \overline{\mathrm{W}}_{i+1,n-1-i}$ pour $i = 0, \ldots, n-1$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{S}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_{n-1}"'] & \mathrm{W}_n \arrow[r] \arrow[d, "\pi_n"'] & (\mathrm{U}_0/\mathrm{U}_1) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_n \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=0}^{n-1} \overline{\mathrm{W}}'_{i,n-1-i} \arrow[r] & \bigoplus_{i=0}^{n} \overline{\mathrm{W}}_{i,n-1} \arrow[r] & \overline{\mathrm{W}}_{0,n} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Alors p est surjectif, de noyau $(\mathrm{U}_0/\mathrm{U}_1) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_{n+1}$. De plus, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à la suite (U'_i), π'_{n-1} est surjectif, de noyau égal à $\mathrm{W}'_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{W}_{i,n+1-i}$. Il en résulte que π_n est surjectif, et que l'inclusion $\mathrm{W}_{n+1} \subset \mathrm{Ker}(\pi_n)$ est une égalité. Ceci prouve le lemme.

Revenons à un objet (A, J) de $\mathscr{C}$ et notons que, d'après 0.2.G, l'hypothèse que chaque $\overline{\mathrm{J}^n}/\overline{\mathrm{J}^{n+1}}$ soit topologiquement plat sur k équivaut à dire que $\mathrm{Gr}_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ est topologiquement plate sur k.

Corollaire. — *Soit $\mathscr{P}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ formée des objets* (A, J) *tels que* A *et* $\mathrm{Gr}_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ *soient topologiquement plats sur k. Alors le foncteur $\mathscr{P} \to \mathbf{Alpg}_{/k}$,* $(\mathrm{A}, \mathrm{J}) \mapsto \mathrm{Gr}_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ *commute aux coproduits finis, donc transforme un cogroupe de $\mathscr{P}$ en un cogroupe de $\mathbf{Alpg}_{/k}$.*

En particulier, si k est un corps *alors, pour tout cogroupe* (A, J) *de $\mathscr{C}$,* $\mathrm{Gr}_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ *est un cogroupe de $\mathbf{Alpg}_{/k}$.* [148]

5.1.3. — Identifions toute k-algèbre profinie Γ à la k-algèbre profinie graduée $(\Gamma_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\Gamma_0 = \Gamma$ et $\Gamma_n = 0$ si $n > 0$. En particulier, si $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant 0}$ est une k-algèbre profinie graduée, nous considérerons indifféremment A_0 comme une k-algèbre profinie ou bien comme une k-algèbre profinie graduée. Nous désignerons alors par $\rho : (\mathrm{A}_n) \to$

[148] N.D.E. : À un couple $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ de k-groupes formels, on associe donc le « complété formel $\widehat{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}$ de G le long de H », qui est un k-groupe formel ; de plus on va voir en 5.1.3–5.1.4 que l'inclusion $\sigma : \mathrm{H} \hookrightarrow \widehat{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}$ possède une rétraction $\pi : \widehat{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}} \to \mathrm{H}$ et que le k-groupe formel $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}(\pi)$ s'identifie, comme variété formelle, au complété de l'espace homogène G/H le long de la section unité. Ceci sera utile en 5.2.2.

A_0 le morphisme de $\mathbf{Alpg}_{/k}$ tel que $\rho_0 = \mathrm{id}_{A_0}$ et $\rho_n = 0$ si $n > 0$. De même, $\tau : A_0 \to (A_n)$ désignera la section de ρ telle que $\tau_0 = \mathrm{id}_{A_0}$ et $\tau_n = 0$ si $n > 0$.

Toute structure de cogroupe sur $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induit une structure de cogroupe sur A_0 telle que ρ et τ soient des homomorphismes de cogroupes. Dans ce cas, notons I_0 l'idéal d'augmentation de A_0 et posons $A'_n = A_n/\overline{I_0A_n}$ pour tout $n \geqslant 0$ (de sorte que $A'_0 = k$).

Alors, $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un cogroupe dans $\mathbf{Alpg}_{/k}$ (noter que, comme $A_0 = I_0 \oplus k\cdot 1$, alors $I_0 \widehat{\otimes}_k A_n \simeq \overline{I_0A_n}$ est facteur direct de A_n, pour tout n). Puisque τ est une section de ρ alors, d'après 2.4.A, le cogroupe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le « coproduit semi-direct » de A_0 et du cogroupe $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De façon précise, $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est isomorphe, comme objet de $\mathbf{Alpg}_{/k}$, au noyau du couple :

$$(A_n) \overset{\tau_1}{\underset{(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\rho)\Delta}{\rightrightarrows}} (A_n)\,\widehat{\otimes}_k\, A_0$$

(où $\Delta : (A_n) \to (A_n)\,\widehat{\otimes}(A_n)$ est la comultiplication de (A_n) et $\tau_1(x) = x\,\widehat{\otimes}\,1$), et, identifiant A'_n à son image dans A_n, l'application

$$(A'_n\,\widehat{\otimes}_k\, A_0) \longrightarrow (A_n), \qquad a'_n\,\widehat{\otimes}\,a_0 \mapsto a'_n a_0$$

est un isomorphisme de $\mathbf{Alpg}_{/k}$. (N. B. Ce n'est pas un isomorphisme de cogroupes, mais $\Delta(A') \subset A\,\widehat{\otimes}\,A'$ et $(\gamma\rho'\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{id})\circ\Delta_{|A'} = \Delta'$, où Δ' est la comultiplication de A' et $\gamma\rho'$ la projection $A \to A'$, cf. 2.4.A.)

554 ***5.1.4***. — Soient (A, J) un objet de $\mathscr{C}$ et $(A_n) = \mathrm{Gr}_J(A)$ l'objet de $\mathbf{Alpg}_{/k}$ associé, i.e. $A_n = \overline{J^n}/\overline{J^{n+1}}$ pour tout $n \geqslant 0$. Il est clair que l'algèbre $\mathscr{A} = \prod_{n\geqslant 0} A_n$ est engendrée par A_0 et A_1, c'est-à-dire que, pour $n \geqslant 1$, l'application

$$A_1\,\widehat{\otimes}_{A_0}\,A_1\,\widehat{\otimes}_{A_0}\cdots\widehat{\otimes}_{A_0}\,A_1 \longrightarrow A_n \tag{1}$$

définie par la multiplication est surjective.

Supposons de plus que (A, J) soit un cogroupe de $\mathscr{C}$ et que A et les quotients $\overline{J^n}/\overline{J^{n+1}}$ soient plats sur k. Alors, d'après le corollaire 5.1.2, $\mathrm{Gr}_J(A)$ est un cogroupe de $\mathbf{Alpg}_{/k}$. Donc, d'après 5.1.3, si l'on pose

$$A'_n = \Big\{x \in \overline{J^n}/\overline{J^{n+1}} \mid \Delta(x) - x\,\widehat{\otimes}\,1 \in \bigoplus_{i=1}^{n}(\overline{J^{n-i}}/\overline{J^{n-i+1}})\,\widehat{\otimes}(\overline{J^i}/\overline{J^{i+1}})\Big\}, \tag{2}$$

alors l'application $(A'_n\,\widehat{\otimes}\,A_0) \to (A_n)$, $a'_n\,\widehat{\otimes}\,a'_n \mapsto a'_n a_0$ est un isomorphisme de $\mathbf{Alpg}_{/k}$. [149]

[149] N.D.E. : Soient G, H et $\widehat{G}_H$ les k-groupes formels correspondant à A, $A_0 = A/J$ et $\mathrm{Gr}_J(A)$; alors $\tau : A_0 \hookrightarrow \mathrm{Gr}_J(A)$ correspond à une rétraction $\pi : \widehat{G}_H \to H$ de l'inclusion $H \hookrightarrow \widehat{G}_H$, et ce qui précède signifie que $\widehat{G}_H$ est le produit semi-direct de $N = \mathrm{Ker}(\pi)$ par H.

Notant I_0 l'idéal d'augmentation de A_0, on déduit de (1) et du diagramme commutatif ci-dessous, où $\mathrm{A}_1'^{\widehat{\otimes}\, n}$ désigne $\mathrm{A}_1' \widehat{\otimes}_k \cdots \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}_1'$ (n facteurs) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}_1 \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}_0} \cdots \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}_0} \mathrm{A}_1 \arrow[d, "m"'] & \mathrm{A}_1'^{\widehat{\otimes}\, n} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}_0 \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "m' \widehat{\otimes} \mathrm{id}"] & (\mathrm{A}_1'^{\widehat{\otimes}\, n} \widehat{\otimes}_k \mathrm{I}_0) \bigoplus \mathrm{A}_1'^{\widehat{\otimes}\, n} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "m' \widehat{\otimes} \mathrm{id} \,\oplus m'"] \\
\mathrm{A}_n & \mathrm{A}_n' \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}_0 \arrow[l, "\sim"'] & (\mathrm{A}_n' \widehat{\otimes}_k \mathrm{I}_0) \bigoplus \mathrm{A}_n' \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

que l'application

$$m' : \mathrm{A}_1' \widehat{\otimes}_k \ldots \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}_1' \longrightarrow \mathrm{A}_n' \tag{3}$$

induite par la multiplication est surjective ; autrement dit, la k-algèbre profinie $\mathscr{A}' = \prod_{n\geqslant 0} \mathrm{A}_n'$ est engendrée par ses termes de degré 1.

[150] Revenons maintenant à l'hypothèse (i) de la proposition 5.1 : soient G un k-groupe formel infinitésimal topologiquement plat, A son algèbre affine, I_A l'idéal d'augmentation de A, B une sous-algèbre fermée de A, et $\mathrm{J} = \overline{\mathrm{AI}_\mathrm{B}}$, où $\mathrm{I}_\mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{I}_\mathrm{A}$. On note H le sous-groupe formel $\mathrm{Spf}(\mathrm{A}/\mathrm{J})$ et π la projection $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{J}$. On suppose que $\mathrm{A}/\overline{\mathrm{J}^n}$ est topologiquement plat sur k, pour tout $n \geqslant 1$, et que B est contenue dans le noyau $\widetilde{\mathrm{B}}$ du couple :

$$\mathrm{A} \underset{(\mathrm{id}_\mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \pi)\Delta_\mathrm{A}}{\overset{\tau_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k (\mathrm{A}/\mathrm{J}) \ .$$

Soit $(\mathrm{A}_n) = \mathrm{Gr}_\mathrm{J}(\mathrm{A})$, soit $\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_\mathrm{A}/\mathrm{J}$ l'idéal d'augmentation de $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}/\mathrm{J}$, et définissons $(\mathrm{A}_n')_{n\in\mathbb{N}}$ comme en (2) plus haut. On note $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\widetilde{\mathrm{B}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) l'objet de $\mathbf{Alpg}_{/k}$ associé à la filtration de B (resp. $\widetilde{\mathrm{B}}$) induite par celle de A, i.e. définie par les idéaux $\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{J}^n}$ (resp. $\widetilde{\mathrm{B}} \cap \overline{\mathrm{J}^n}$). Alors, il est clair que $\mathrm{B}_n \subset \widetilde{\mathrm{B}}_n \subset \mathrm{A}_n'$ pour tout n, et que

$$\mathscr{B} = \prod_{n\geqslant 0} \mathrm{B}_n \subset \widetilde{\mathscr{B}} = \prod_{n\geqslant 0} \widetilde{\mathrm{B}}_n$$

sont des sous-algèbres de $\mathscr{A}' = \prod_{n\geqslant 0} \mathrm{A}_n'$.

D'autre part, J (resp. $\overline{\mathrm{J}^2}$) est l'image dans A de $\mathrm{I}_\mathrm{B} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}$ (resp. de $\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}$). Par conséquent, l'application

$$(\mathrm{I}_\mathrm{B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2}) \widehat{\otimes}_k \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{J}/\overline{\mathrm{J}^2} = \mathrm{A}_1 \simeq \mathrm{A}_1' \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}_0$$

[150] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, et l'on a mis à la fin le « supplément » $\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^n} = \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{J}^n}$ (qui n'est pas nécessaire pour établir la proposition 5.1).

est surjective, et elle se factorise par $(\mathrm{I_B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2})\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{A}_0$. Comme $\mathrm{A}_0 = k\cdot 1 \oplus \mathrm{I}_0$, on déduit du diagramme commutatif et exact :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{I_B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2})\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{A}_0 \arrow[d] & (\mathrm{I_B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2})\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{I}_0 \bigoplus (\mathrm{I_B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2}) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d] \\
\mathrm{J}/\overline{\mathrm{J}^2} \arrow[d] & \mathrm{A}'_1\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{I}_0 \bigoplus \mathrm{A}'_1 \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

que A'_1 est l'image de $\mathrm{I_B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2}$, de sorte qu'on a $\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}'_1$. Comme $\mathscr{A}'$ est engendrée par A'_1, il en résulte que, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\mathrm{A}'_n \subset \mathrm{B}_n \subset \widetilde{\mathrm{B}}_n \subset \mathrm{A}'_n,$$

555 d'où $\mathrm{B}_n = \widetilde{\mathrm{B}}_n = \mathrm{A}'_n$. [151]

Enfin, comme le groupe formel G est *infinitésimal*, on a $\mathfrak{r}(\mathrm{A}) = \mathrm{I_A}$ et donc les idéaux $\overline{\mathrm{I}_\mathrm{A}^n}$ tendent vers 0 (cf. 0.1.2) ; a fortiori, les idéaux $\overline{\mathrm{J}^n}$ tendent vers 0, et donc les filtrations induites sur $\widetilde{\mathrm{B}}$ et B sont séparées. De plus, comme B est une sous-algèbre *fermée* de A, elle est complète pour la topologie définie par les idéaux $\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{J}^n}$. Par conséquent, il résulte de [**CA**], § V.7, Lemme 1 (voir aussi 5.1.5 ci-dessous) que $\mathrm{B} = \widetilde{\mathrm{B}}$. Ceci achève la démonstration de la proposition 5.1.

On a de plus le supplément suivant. Pour tout n, $\overline{\mathrm{J}^n} = \overline{\mathrm{AI}_\mathrm{B}^n}$ est l'image dans A de $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_\mathrm{B}\,\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^n}$ et aussi de $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_\mathrm{B}(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{J}^n})$. Or, d'après hypothèse, l'algèbre affine A/J du sous-groupe formel H est topologiquement plate sur k. Donc, d'après le théorème 2.4, le morphisme $\mathrm{G} = \mathrm{Spf(A)} \to \mathrm{G/H} = \mathrm{Spf(B)}$ est *surjectif et topologiquement plat* ; on a donc

$$\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_\mathrm{B}\,\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^n} = \overline{\mathrm{J}^n} = \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_\mathrm{B}(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{J}^n}),$$

et ceci entraîne que $\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^n} = \mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{J}^n}$ pour tout n. Ceci découle aussi du fait que les applications

$$\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^n}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^{n+1}} \longrightarrow \mathrm{A}'_i = (\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{J}^n})/(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{J}^{n+1}})$$

sont surjectives, et de 5.1.5 (ii) ci-dessous, appliqué à $\mathrm{B}'_n = \overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^n}$ et $\mathrm{B}_n = \mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{J}^n}$.

5.1.5. Lemme. — [152] (i) *Soient* M *et* N *deux groupes abéliens filtrés par des suites décroissantes de sous-groupes* $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *et* $(\mathrm{N}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. *On suppose que la réunion des* M_n *(resp.* N_n*) égale* M *(resp.* N*), que l'intersection des* M_n *(resp.* N_n*) est nulle, et que* M *est* complet *pour la topologie définie par les* M_n. *Soit* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *un morphisme de groupes filtrés.*

[151] N.D.E. : Avec les notations de la N.D.E. (149), ceci entraîne que le complété formel de G/H le long de la section unité (qui a $\prod_n \mathrm{B}_n$ pour algèbre affine) est isomorphe, comme variété formelle, au k-groupe formel N.

[152] N.D.E. : L'original énonçait uniquement le point (ii) ; pour la commodité du lecteur, on a énoncé en (i) le lemme 1 de [**CA**], § V.7.

a) *Si* f *induit une surjection des gradués associés, alors* f *est une surjection et* N *est complet pour la topologie définie par les* N_n.

b) *Si* f *induit une injection des gradués associés, alors* f *est une injection.*

(ii) *Soient* B *un groupe abélien,* $\mathrm{B} = \mathrm{B}'_0 \supset \mathrm{B}'_1 \supset \cdots$ *et* $\mathrm{B} = \mathrm{B}_0 \supset \mathrm{B}_1 \supset \cdots$ *deux filtrations séparées de* B *par des sous-groupes tels que* $\mathrm{B}'_n \subset \mathrm{B}_n$ *pour tout* n. *On suppose* B complet *pour la topologie définie par la filtration* (B'_n).

Si l'application $\mathrm{B}'_i/\mathrm{B}'_{i+1} \to \mathrm{B}_i/\mathrm{B}_{i+1}$ *est* surjective *pour tout* i, *alors* $\mathrm{B}'_n = \mathrm{B}_n$ *pour tout* n.

En effet, (i) est le lemme 1 de [**CA**], § V.7 (voir aussi [**BAC**], III, § 2.8), et (ii) en découle en prenant $\mathrm{M} = \mathrm{B}'_n \supset \mathrm{B}'_{n+1} \supset \cdots$ et $\mathrm{N} = \mathrm{B}_n \supset \mathrm{B}_{n+1} \supset \cdots$.

5.2. *Dans toute la suite de la Section 5,* k *désigne un corps parfait de caractéristique* $p > 0$.

Nous posons $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si B est une k-algèbre profinie et si $r \in \mathbb{N}$, nous notons $((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$ l'idéal fermé de B qui est engendré par les éléments x^{p^r}, où x parcourt le radical $\mathfrak{r}(\mathrm{B})$ de B. Si $r = \infty$, nous utilisons la même notation en convenant que $((x^{p^\infty}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$ est l'idéal nul. Dans les deux cas, B_r désigne le quotient $\mathrm{B}/((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$.

Nous disons que B *est de hauteur* $\leqslant r$ si $((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$ est l'idéal nul ; si cela a lieu et si r est fini, nous disons que B est *de hauteur finie*.

Considérons en particulier le cas où B est de la forme $k[[\omega]]$, ω étant un k-espace vectoriel pseudocompact (cf. 1.2.5). [153] Nous disons alors que B est une *algèbre de* **556**
séries formelles et que B_r est une *algèbre de séries formelles tronquée* ($r \in \overline{\mathbb{N}}$; nous convenons donc de dire que $\mathrm{B} = \mathrm{B}_\infty$ est également « tronquée »). Si $\mathrm{B} = k[[\omega]]$, nous écrivons aussi $((x^{p^r}))_{x\in\omega}$ au lieu de $((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$.

Notations. — Soit ω un k-espace vectoriel pseudocompact filtré par une suite croissante de sous-espaces vectoriels fermés

$$0 = \omega_0 \subset \omega_1 \subset \omega_2 \subset \omega_3 \subset \cdots$$

(a) L'idéal fermé de $k[[\omega]]$ qui est engendré par les éléments x^{p^r}, où r parcourt $\mathbb{N}$ et x parcourt ω_r, sera noté $((x^{p^r}))_{r\in\omega_r}$.

(b) D'autre part, nous désignerons par ${}_r\omega$ l'espace vectoriel pseudocompact filtré tel que

$${}_r\omega_i = \omega_i \quad \text{si} \quad i < r \quad \text{et} \quad {}_r\omega_i = \omega \quad \text{si} \quad i \geqslant r.$$

Théorème (Dieudonné-Cartier). — *Soit* $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de groupes formels* infinitésimaux *sur un* corps parfait k *de caractéristique* $p > 0$. *Soit* B *l'algèbre affine de l'espace homogène* G/H *et supposons vérifiée l'une des trois conditions suivantes :* [154]

---

[153] N.D.E. : Dans l'original, l'auteur utilise « espace vectoriel *linéairement compact* », ce qui équivaut à « espace vectoriel pseudocompact » (cf. [**BAC**], § III.2, Exercices 15 a), 19 a) et 20 d)). On a préféré conserver la terminologie « pseudocompact », utilisée jusqu'ici.

[154] N.D.E. : D'une part, on a remplacé $\mathrm{H}\backslash\mathrm{G}$ par G/H, et de même dans la démonstration ; d'autre part, on a ajouté la condition (iii).

(i) B *est de* hauteur finie (*ceci a lieu en particulier si* G *est de hauteur finie*).

(ii) B *est un anneau local* noethérien complet.

(iii) B *est un anneau* réduit.

Alors B *est isomorphe au produit tensoriel complété d'une famille finie d'algèbres de séries formelles tronquées.*

557 La démonstration de ce théorème occupe les paragraphes 5.2.1 à 5.2.5.

5.2.1. — Soient A l'algèbre affine de G, $\mathrm{I_A}$ son idéal d'augmentation, et $\mathrm{I} = \mathrm{B} \cap \mathrm{I_A}$. D'après 2.4, on a $\mathrm{H} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{AI}})$ et $\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{A} \mid \Delta(x) - 1 \widehat{\otimes} x \in \mathrm{A} \widehat{\otimes} \overline{\mathrm{AI}}\}$. Posons $\omega = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$. On désigne par I_r le sous-idéal fermé de I formé des x tels $x^{p^r} = 0$, par ω_r l'image canonique de I_r dans ω. Nous allons démontrer :

Proposition. — *S'il existe une section continue* $\sigma : \omega \to \mathrm{I}$ *de la projection* $\mathrm{I} \to \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$, *telle que* $\sigma(\omega_r) \subset \mathrm{I}_r$ *pour tout* r, *alors* B *est isomorphe à* $k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r}$.

Une telle section se prolonge en effet en un morphisme continu $k[[\omega]] \to \mathrm{B}$, qui se factorise à travers $\mathrm{B}' = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r}$. Nous prouvons de 5.2.2 à 5.2.5 que le morphisme
$$\phi :\ \mathrm{B}' = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r} \longrightarrow \mathrm{B}$$
ainsi obtenu est un isomorphisme.

5.2.1.A. — [155] Pour chaque $r \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{I}_r = \overline{\mathrm{I}^2} + \mathrm{I}_r$, de sorte que $\mathcal{I}_r/\overline{\mathrm{I}^2} \simeq \omega_r$; on a alors un diagramme commutatif à lignes exactes
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{r-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}_r \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}_r/\mathcal{I}_{r-1} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \omega_{r-1} \arrow[r] & \omega_r \arrow[r] & \omega_r/\omega_{r-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
et puisque k est un corps, les lignes sont scindées : on peut compléter une pseudobase $\mathscr{B}_{r-1}$ de $\mathcal{I}_{r-1}$ en une pseudobase $\mathscr{B}_{r-1} \cup \mathscr{B}'_r$ de $\mathcal{I}_r$, et alors le sous-espace fermé S_r de pseudobase $\mathscr{B}'_r$ est un supplémentaire de $\mathcal{I}_{r-1}$ dans $\mathcal{I}_r$, et la projection $\pi : \mathrm{I} \to \omega$ induit un isomorphisme de S_r sur un supplémentaire ω'_r de ω_{r-1} dans ω_r. Notons $\mathcal{I}_\infty$ l'idéal fermé $\overline{\bigcup_r \mathcal{I}_r}$, il admet de même un supplémentaire S_∞ dans I, et π induit un isomorphisme de $\mathcal{I}_\infty/\overline{\mathrm{I}^2}$ (resp. de S_∞) sur l'adhérence ω_∞ de la réunion des ω_r (resp. sur un supplémentaire ω'_∞ de ω_∞ dans ω). Notons η l'isomorphisme $\mathrm{S}_\infty \xrightarrow{\sim} \omega'_\infty$. On obtient alors des applications linéaires continues :
$$\begin{tikzcd} \overline{\mathrm{I}^2} \times \mathrm{S}_\infty \times \widehat{\bigoplus}_r \mathrm{S}_r \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\eta"', "\times\theta"] & \mathrm{I} \\ \omega = \omega'_\infty \times \omega_\infty & \end{tikzcd}$$

[155] N.D.E. : On a ajouté les paragraphes 5.2.1.A et 5.2.1.B.

où $\widehat{\bigoplus}_r \mathrm{S}_r$ est la somme directe des S_r dans $\mathbf{PC}(k)$, i.e. $(\prod_r \mathrm{S}_r^\dagger)^*$ (cf. N.D.E. (16) de 0.2.2) et où $\theta : \widehat{\bigoplus}_r \mathrm{S}_r \to \omega_\infty$ est induite par les applications $\mathrm{S}_r \xrightarrow{\sim} \omega'_r \hookrightarrow \omega_\infty$. On voit donc qu'une condition *suffisante* (mais non nécessaire, voir ci-dessous) pour obtenir une section $\sigma : \omega \to \mathrm{I}$ comme désiré, est que θ soit un *isomorphisme*. Par dualité (cf. 0.2.2), ceci équivaut à dire que l'application linéaire $\omega_\infty^\dagger \to \prod_r \mathrm{S}_r^\dagger$ est *bijective*.

5.2.1.B. — Notons comme précédemment $\omega_\infty = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \omega_n}$. Un second cas où une section $\sigma : \omega \to \mathrm{I}$ comme désiré existe, est le cas où ω_∞ possède une pseudobase $\mathscr{B}_\infty$ qui est réunion de pseudobases des ω_n/ω_{n-1}, pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on peut alors la compléter par une pseudobase $\mathscr{B}'_\infty$ de ω/ω_∞ pour obtenir une pseudobase de ω compatible avec la filtration). Posant $\mathrm{V} = \omega_\infty^\dagger$ et notant V_n l'orthogonal dans V de ω_n, ceci équivaut à dire que, dans la catégorie des k-espaces vectoriels « ordinaires », la filtration décroissante séparée

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 \supset \mathrm{V}_1 \supset \mathrm{V}_2 \supset \cdots$$

est scindée, i.e. que V est la somme directe, pour $n \in \mathbb{N}$, de sous-espaces F_n tels que $\mathrm{F}_n \simeq \mathrm{V}_n/\mathrm{V}_{n+1}$. Ceci n'est pas nécessairement le cas : par exemple si V est l'espace $\mathscr{S} = k^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de k et $\mathscr{S}_n$ le sous-espace des suites (u_i) telles que $u_i = 0$ pour $i < n$, de sorte que $\dim \mathscr{S}_n/\mathscr{S}_{n+1} = 1$, alors $\mathscr{S}$ n'est pas isomorphe à la somme directe des $\mathscr{S}_n/\mathscr{S}_{n+1}$ puisque $\mathscr{S}$ n'est pas de dimension dénombrable (par contre, $\mathscr{S}$ est ici le *produit* des $\mathscr{S}_n/\mathscr{S}_{n+1}$, cf. 5.2.1.A). C'est cependant le cas si V est de dimension dénombrable. [156] En effet, soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de V, on va construire par récurrence sur n une fonction croissante $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et des sous-espaces F_i, pour $i = 0, \dots, g(n)$, tels que $\mathrm{F}_i \simeq \mathrm{V}_i/\mathrm{V}_{i+1}$ et que $\mathrm{F}_{\leqslant g(n)} = \bigoplus_{i=0}^{g(n)} \mathrm{F}_i$ soit un supplémentaire de $\mathrm{V}_{g(n)+1}$ contenant $e_0, \dots, e_n$; on aura alors $\mathrm{V} = \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathrm{F}_i$. Soit $n+1 \in \mathbb{N}$, on peut supposer l'assertion établie pour n (l'assertion étant vide pour $n = -1$). Si $e_{n+1} \in \mathrm{F}_{\leqslant g(n)}$, on pose $g(n+1) = g(n)$, sinon on écrit $e_{n+1} = f + x$ avec $f \in \mathrm{F}_{\leqslant g(n)}$ et $x \in \mathrm{V}_{g(n)+1}$ non nul. Soit alors j le plus petit entier tel que $x \in \mathrm{V}_j - \mathrm{V}_{j+1}$; pour $i = g(n)+1, \dots, j$, choisissons un supplémentaire F_i de V_{i+1} dans V_i, de sorte que $e_{n+1} \in \mathrm{F}_j$, on pose alors $g(n+1) = j$.

5.2.1.C. — [157] En particulier, les deux conditions précédentes (5.2.1.A et B) sont vérifiées quand la filtration de ω est *stationnaire*, i.e. quand il existe un entier n_0 tel que $\omega_n = \omega_{n_0}$ pour $n_0 \leqslant n < +\infty$. Dans ce cas, on obtient un isomorphisme de $k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r}$ sur le produit tensoriel complété :

$$\frac{k[[\omega_1]]}{((x^p))_{x\in\omega_1}} \,\widehat{\otimes}\, \frac{k[[\omega'_2]]}{((x^{p^2}))_{x\in\omega'_2}} \,\widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes}\, \frac{k[[\omega'_{n_0}]]}{((x^{p^{n_0}}))_{x\in\omega'_{n_0}}} \,\widehat{\otimes}\, k[[\omega'_\infty]]$$

où ω'_n (resp. ω'_∞) est un supplémentaire de ω_{n-1} dans ω_n (resp. de $\omega_\infty = \omega_{n_0}$ dans ω). La filtration de ω est évidemment stationnaire dans le cas (i), i.e. si $\omega_r = \omega$ pour r assez grand, et dans le cas (ii), i.e. si ω est de dimension finie, et aussi dans le cas (iii), i.e. si $\mathrm{I}_r = 0$ pour tout r (et dans ce cas B sera isomorphe à l'algèbre de séries

[156] N.D.E. : Ce paragraphe est le fruit de discussions avec J.-M. Fontaine et E. Bouscaren ; en particulier Bouscaren nous a indiqué la démonstration qui suit.

[157] N.D.E. : On revient ici à l'original, qu'on a raccourci en tenant compte des ajouts précédents.

formelles $k[[\omega]]$). Les remarques ci-dessus impliquent donc notre théorème, modulo les points 5.2.2–5.2.5 ci-dessous.

558 ***5.2.2***. — *Supposons d'abord* B *de hauteur* $\leqslant 1$, c.-à-d., que $x^p = 0$ si $x \in \mathrm{I}$. D'après 5.1.4, le gradué $\mathrm{Gr_I(B)}$ associé à B pour la filtration $\mathrm{I} \supset \overline{\mathrm{I}^2} \supset \overline{\mathrm{I}^3} \supset \cdots$ est muni d'une structure de cogroupe dans la catégorie $\mathbf{Alpg}_{/k}$, i.e. l'algèbre profinie $\mathrm{C} = \prod_{n\geqslant 0} \mathrm{Gr_I(B)}_n$ est l'algèbre affine d'un k-groupe formel N. Il est clair qu'on a $\omega_{\mathrm{N}/k} = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ et que N est infinitésimal de hauteur $\leqslant 1$. D'après 4.4, l'application identique de $\omega_{\mathrm{N}/k}$ induit donc un isomorphisme de $\mathrm{B}' = k[[\omega_{\mathrm{N}/k}]]/((x^p))_{x\in\omega_{\mathrm{N}/k}}$ sur C. Ceci implique en particulier que l'application ϕ de 5.2.1 induit un isomorphisme des gradués associés à B′ et B lorsqu'on filtre B′ et B par les puissances de l'idéal d'augmentation. Donc ϕ est un isomorphisme, d'après [**CA**], § V.7, Lemme 1 (voir aussi 5.1.5).

5.2.3. — *Supposons maintenant* B *de hauteur finie* $\leqslant r$. Soit π l'isomorphisme $x \mapsto x^p$ de k sur k. L'application linéaire de $\mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi k$ dans B qui envoie $b \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi x$ sur $b^p x = (bx^{1/p})^p$ a une image fermée qui n'est autre que la sous-algèbre fermée $\mathrm{B}^p = \{b^p \mid b \in \mathrm{B}\}$ de B. Posons $\mathrm{J} = \mathrm{B}^p \cap \mathrm{I} = \mathrm{B}^p \cap \mathrm{I_A}$.

(158) Notons G_1 le noyau du morphisme de Frobenius $\mathrm{Fr} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}^{(p)}$ et HG_1 le sous-groupe formel de G image réciproque du sous-groupe formel $\mathrm{H}^{(p)}$ de $\mathrm{G}^{(p)}$. Alors HG_1 est défini par l'idéal fermé engendré par les puissances p-ièmes d'éléments de $\overline{\mathrm{AI}}$, qui égale $\overline{\mathrm{AJ}}$. D'autre part, comme la formation de G/H commute au changement de base (puisque G/H représente le *faisceau-quotient* pour la topologie plate, cf. 2.4), alors $(\mathrm{G/H})^{(p)} = \mathrm{G}^{(p)}/\mathrm{H}^{(p)}$ et l'on a donc des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{Fr}"] \arrow[d] & \mathrm{G}^{(p)} \arrow[d] \\ \mathrm{G/H} \arrow[r, "\mathrm{Fr}"] & \mathrm{G}^{(p)}/\mathrm{H}^{(p)} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{A} & \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi k \arrow[l, "a \widehat{\otimes} 1 \mapsto a^p"'] \\ \mathrm{B} \arrow[u] & \mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi k \arrow[l, "b \widehat{\otimes} 1 \mapsto b^p"'] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

dont on déduit que B^p est l'algèbre affine du quotient $\mathrm{G/HG_1}$. (159) Notons provisoirement C l'algèbre affine du quotient $\mathrm{HG_1/H}$. Comme la formation de G/H commute au changement de base, on a un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{HG}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G} \arrow[d] \\ \mathrm{HG}_1/\mathrm{H} \arrow[r] & \mathrm{G/H} \end{tikzcd}$$

d'où un isomorphisme $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_\mathrm{B} \mathrm{C} \simeq \mathrm{A}/\overline{\mathrm{AJ}} = \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_\mathrm{B} (\mathrm{B}/\overline{\mathrm{BJ}})$, et comme A est topologiquement libre sur B (d'après 2.4, puisque A et B sont locales), il en résulte que le

(158) N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

morphisme naturel $B/\overline{BJ} \to C$ est un isomorphisme, donc $B/\overline{BJ}$ est l'algèbre affine de HG_1/H [159] et bien sûr $B/\overline{BJ} = B_1$ est de hauteur $\leqslant 1$ puisque $J = ((x^p))_{x \in \mathfrak{r}(B)}$.

Soient $B' = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r}$, $\phi : B' \to B$ le morphisme introduit en 5.2.1, B'^p la sous-algèbre $\{x^p \mid x \in B'\}$, et J' l'idéal d'augmentation de B'^p. Alors, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ B'_1 = B'/\overline{B'J'} \arrow[r, "\phi_1"] & B_1 = B/\overline{BJ} \end{tikzcd}$$

et, d'après 5.2.2, ϕ_1 est un isomorphisme. 559

D'autre part, d'après 2.4, A est topologiquement plat sur $B = \mathscr{A}(G/H)$ et sur $B^p = \mathscr{A}(G/HG_1)$ donc, d'après 1.3.3, B est topologiquement plat sur B^p. De plus, d'après 5.2.4 ci-dessous, le morphisme $B'^p \to B^p$ induit par ϕ est un isomorphisme. On peut alors appliquer 0.3.4 à l'anneau pseudocompact $B'^p = B^p$ et aux B^p-modules pseudocompacts $M = B'$, $N = B$: d'après ce qui précède, $\phi_1 = \phi \mathbin{\widehat{\otimes}}_{B^p} k$ est un isomorphisme, et il en résulte que ϕ est un isomorphisme. Ceci prouve 5.2 lorsque B est de hauteur finie, modulo le point 5.2.4 ci-dessous.

5.2.4. — Pour tout espace vectoriel pseudocompact V sur k, nous notons ${}_\pi V$ l'espace $V \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi k$ déduit de V par l'extension $x \mapsto x^p$ du corps des scalaires. [160] On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & {}_\pi\overline{I^2} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & {}_\pi I \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "v"'] & {}_\pi\omega \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \overline{J^2} \arrow[r, "\gamma"] & J \arrow[r, "\delta"] & \overline{\omega} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} ,$$

où l'on a posé $\overline{\omega} = J/\overline{J^2}$ et où les applications u, v, w sont induites par l'application linéaire $x \mathbin{\widehat{\otimes}} a \mapsto x^p a$ de ${}_\pi B$ dans B^p. Comme u et v sont des surjections, w est une surjection et a pour noyau l'image ${}_\pi\omega_1$ de ${}_\pi I_1 = \mathrm{Ker}(v)$.

Alors, posant $J_n = \{x \in J \mid x^{p^n} = 0\}$ et $\overline{\omega}_n = \delta(I_n)$, on a $J_n = v({}_\pi I_{n+1})$ et $\overline{\omega}_n = w({}_\pi\omega_{n+1})$, pour tout $n \geqslant 0$. La section ${}_\pi\sigma : {}_\pi\omega \to {}_\pi I$, qui est induite par la section σ de 5.2.1, définit donc par passage au quotient une section $\tau : \overline{\omega} \to J$ qui est compatible avec les filtrations de J et $\overline{\omega}$. Comme B^p est de hauteur $\leqslant r-1$, cette section induit, par hypothèse de récurrence, un isomorphisme

$$\psi : \quad B'' = k[[\overline{\omega}]]/((x^{p^n}))_{x\in\overline{\omega}_n} \xrightarrow{\ \sim\ } B^p.$$

Or B'' s'identifie à B'^p et ψ au morphisme $B'^p \to B^p$ induit par ϕ, et donc *notre* 560

---

[159] N.D.E. : Comme indiqué dans l'original, ceci se déduit aussi de la proposition 5.1, mais on a préféré indiquer l'argument ci-dessus, qui n'utilise pas l'implication (i) ⇒ (ii) de *loc. cit.*.

[160] N.D.E. : Comme k est parfait, on peut identifier ${}_\pi V$ au groupe abélien V sur lequel k agit par $\lambda \cdot v = \lambda^{1/p} v$.

théorème est démontré quand B *est de hauteur finie.*

Remarque 5.2.4.A. — [161] Supposons B de hauteur $\leqslant r+1$ (avec $r \in \mathbb{N}^*$), alors $\mathrm{I}_{r+1} = \mathrm{I}$ et l'on a un isomorphisme

$$\mathrm{B} \simeq \frac{k[[\mathrm{S}_1]]}{((x_1^p))_{x_1\in \mathrm{S}_1}} \widehat{\otimes}_k \cdots \widehat{\otimes}_k \frac{k[[\mathrm{S}_r]]}{((x_r^{p^r}))_{x_r\in \mathrm{S}_r}} \widehat{\otimes}_k \frac{k[[\mathrm{S}_{r+1}]]}{((x_{r+1}^{p^{r+1}}))_{x_{r+1}\in \mathrm{S}_{r+1}}} \tag{1}$$

où chaque S_n est un supplémentaire de $\overline{\mathrm{I}^2}+\mathrm{I}_{n-1}$ dans $\overline{\mathrm{I}^2}+\mathrm{I}_n$. Alors $\omega = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ s'identifie à $\prod_{i=1}^{r+1}\mathrm{S}_i$, et l'on voit facilement que, pour $n = 1,\dots,r+1$, l'image ω_n de I_n dans ω s'identifie à $\prod_{i=1}^{n}\mathrm{S}_i$.

Ceci a la conséquence suivante. Soit $\mathrm{B}_r = \mathrm{B}/\mathrm{J}_r$, où $\mathrm{J}_r = ((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$, et soit $\mathfrak{m} = \mathrm{I}/\mathrm{J}_r$ l'idéal d'augmentation de B_r ; comme $\mathrm{J}_r \subset \overline{\mathrm{I}^2}$, alors $\omega(r) = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ s'identifie à ω. Pour $n = 1,\dots,r$, notons $\omega(r)_n$ l'image dans $\omega(r)$ de $\mathfrak{m}_n$; c'est aussi l'image dans ω de $\{x \in \mathrm{I} \mid x^{p^n} \in \mathrm{J}_r\}$, donc $\omega(r)_n$ contient ω_n. D'autre part, il résulte de l'isomorphisme (1) que l'on a $\mathrm{J}_r = ((x_{r+1}^{p^r}))_{x_{r+1}\in\mathrm{S}_{r+1}}$, d'où

$$\mathrm{B}_r \simeq \frac{k[[\mathrm{S}_1]]}{((x_1^p))_{x_1\in \mathrm{S}_1}} \widehat{\otimes}_k \cdots \widehat{\otimes}_k \frac{k[[\mathrm{S}_r]]}{((x_r^{p^r}))_{x_r\in \mathrm{S}_r}} \widehat{\otimes}_k \frac{k[[\mathrm{S}_{r+1}]]}{((x_{r+1}^{p^{r}}))_{x_{r+1}\in \mathrm{S}_{r+1}}} \tag{2}$$

et donc, d'après ce qui précède, $\omega(r)_n$ s'identifie à $\prod_{i=1}^{n}\mathrm{S}_i$ pour $n = 1,\dots,r-1$. On obtient donc que l'inclusion $\omega_n \subset \omega(r)_n$ est une *égalité*, pour $n = 1,\dots,r-1$.

5.2.5. — *Il reste à considérer le cas où* B *est de hauteur infinie*, et où la projection $\mathrm{I} \to \omega$ possède une section σ compatible avec les filtrations de ω et I. Considérons le morphisme

$$\phi : \quad \mathrm{B}' = k[[\omega]]/((x^{p^n}))_{x\in\omega_n} \longrightarrow \mathrm{B}$$

induit par σ ; il suffit de montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'application $\phi_r : \mathrm{B}'_r \to \mathrm{B}_r$ induite par ϕ est inversible. [162]

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, notons G_r le noyau du morphisme de Frobenius itéré $\mathrm{G} \to \mathrm{G}^{(p^r)}$ et HG_r le sous-groupe formel de G image réciproque du sous-groupe formel $\mathrm{H}^{(p^r)}$ de $\mathrm{G}^{(p^r)}$, de sorte que HG_r est défini par l'idéal fermé engendré par les puissances p^r-ièmes d'éléments de $\overline{\mathrm{AI}}$, qui égale $\overline{\mathrm{AJ}_r}$, où $\mathrm{J}_r = \{x^{p^r} \mid x \in \mathrm{I}\}$. On obtient alors, exactement comme en 5.2.3, que $\mathrm{B}_r = \mathrm{B}/\overline{\mathrm{BJ}_r}$ est l'algèbre affine de HG_r/H (et est bien sûr de hauteur $\leqslant r$).

Notons $\mathfrak{m}(r) = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{BJ}_r}$ l'idéal d'augmentation de B_r ; la projection canonique de B sur B_r induit évidemment un isomorphisme de $\omega = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ sur $\omega(r) = \mathfrak{m}(r)/\overline{\mathfrak{m}(r)^2}$, qui nous permet d'identifier ces deux espaces. Soit $\omega(r)_n$ l'image dans $\omega(r)$ de l'idéal fermé $\mathfrak{m}(r)_n = \{y \in \mathfrak{m}(r) \mid y^{p^n} = 0\}$; c'est aussi l'image dans ω de l'idéal fermé

[161] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, utilisée en 5.2.5.

[162] N.D.E. : En effet, B' (resp. B) est la limite projective des B'_r (resp. B_r). D'autre part, on a modifié l'original dans ce qui suit, en tenant compte de l'ajout fait dans 5.2.3.

$\mathrm{I}(r)_n = \{x \in \mathrm{I} \mid x^{p^n} \in \overline{\mathrm{BJ}_r}\}$. [163] Il est clair que $\omega_n(r) = \omega$ si $n \geqslant r$; montrons que $\omega_n(r) = \omega_n$ si $n < r$. Pour tout r, n, la suite ci-dessous est exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{I}(r)_n \cap \overline{\mathrm{I}^2} \longrightarrow \mathrm{I}(r)_n \longrightarrow \omega(r)_n \longrightarrow 0.$$

De plus, pour n fixé, on a $\bigcap_r \mathrm{I}(r)_n = \mathrm{I}_n$, puisque $\bigcap_r \overline{\mathrm{BJ}_r} = 0$. Comme dans $\mathbf{PC}(k)$ les limites projectives filtrantes sont exactes (cf. 0.2), il en résulte que, pour tout n, on a

$$(*) \qquad \omega_n = \bigcap_r \omega(r)_n.$$

D'autre part, d'après la remarque 5.2.4.A, on a $\omega(r)_n = \omega(r+1)_n$ si $n < r$. Combiné avec $(*)$, ceci entraîne que $\omega(r)_n = \omega_n$ si $n < r$.

Par conséquent, l'espace vectoriel ω filtré par les sous-espaces $(\omega(r)_n)_{n\geqslant 0}$ n'est autre que ${}_r\omega$ (Notations 5.2). A fortiori, l'application $\sigma(r)$ composée de $\sigma : \omega \to \mathrm{I}$ et de la projection $\mathrm{I} \to \mathfrak{m}(r)$ est compatible avec les filtrations $(\omega(r)_n)$ et $(\mathfrak{m}(r)_n)$ de ω et $\mathfrak{m}(r)$. Comme $k[[{}_r\omega]]/((x^{p^n}))_{x\in {}_r\omega_n}$ n'est autre que B'_r et que $\phi_r : \mathrm{B}'_r \to \mathrm{B}_r$ est le morphisme induit par $\sigma(r)$, le résultat déja établi pour les algèbres de hauteur finie montre que ϕ_r est un isomorphisme. 561

5.2.6. Définition. — [164] Soit $(\mathrm{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de k-algèbres profinies, chacune munie d'une augmentation $\varepsilon_\lambda : \mathrm{A}_\lambda \to k$ (c'est le cas, en particulier, si chaque A_λ est locale de corps résiduel k). On définit alors le produit tensoriel complété infini $\mathscr{A} = \widehat{\bigotimes}_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{A}_\lambda$ comme la limite projective dans $\mathbf{Alp}_{/k}$ des $\mathrm{A}_\mathrm{F} = \widehat{\bigotimes}_{\lambda\in\mathrm{F}}\mathrm{A}_\lambda$, pour F parcourant les partie finies de Λ, les morphismes de transition $\mathrm{A}_{\mathrm{F}'} \to \mathrm{A}_\mathrm{F}$, pour $\mathrm{F}' = \mathrm{F}\cup\{\lambda\}$, étant $\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\varepsilon_\lambda$. En particulier, si $\Lambda = \mathbb{N}^*$ et si l'on note X_n la k-variété formelle $\mathrm{Spf}(\mathrm{A}_n)$, alors $\mathrm{Spf}(\mathscr{A})$ représente le foncteur qui à tout $\mathrm{C} \in \mathbf{Alf}_{/k}$ associe l'ensemble des suites « finies » d'éléments de $\prod_{n\geqslant 1}\mathrm{X}_n(\mathrm{C})$, i.e. des suites

$$(x_1, x_2, \ldots) \in \prod_{n\geqslant 1}\mathrm{X}_n(\mathrm{C})$$

telles que $x_n = \varepsilon_n$ pour n assez grand, où ε_n désigne par abus de notation la composée de $\varepsilon_n : \mathrm{A}_n \to k$ et du morphisme structural $k \to \mathrm{C}$. (Si de plus chaque A_n est un quotient d'une algèbre $k[[\omega'_n]]$, on peut noter 0 l'unique morphisme $\mathrm{A}_n \to \mathrm{C}$ qui s'annule sur ω'_n, et l'on obtient donc l'ensemble des suites telles que « $x_n = 0$ » pour n assez grand.)

5.3. Remarques. — (a) Appelons stationnaire toute k-algèbre profinie qui est le produit tensoriel complété d'une famille d'algèbres de séries formelles tronquées. [165]

---

[163] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[164] N.D.E. : On a ajouté cet numéro, afin de définir les produits tensoriels infinis utilisés en 5.3 (a).

[165] N.D.E. : L'auteur pensait sans doute à un produit tensoriel $\mathrm{A} = \widehat{\bigotimes}_{n\in\mathbb{N}^*} k[[\omega'_n]]/((x^{p^n}))_{x\in\omega'_n}$, où les ω'_n sont des k-espaces vectoriels pseudocompacts arbitraires. Dans ce cas, on voit sans difficultés que $\omega = \omega_{\mathrm{A}/k}$ s'identifie au *produit* des ω'_n, et la filtration $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donnée par $\omega_n = \prod_{i=1}^n \omega'_i$, i.e. on est dans le cas 5.2.1.B. Pour cette raison, il serait préférable de nommer ces algèbres *stables* (plutôt que « stationnaires »), cf. [**Di73**], II §2.9, p.75. Si par exemple $\dim\omega'_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors A représente le foncteur qui à tout $\mathrm{C} \in \mathbf{Alf}_{/k}$ associe l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Si G est un k-groupe formel infinitésimal et B l'algèbre affine d'un espace homogène de G, il résulte du théorème 5.2 que l'algèbre $\mathrm{B}/((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$ est stationnaire pour tout entier $r \in \mathbb{N}$. Cela implique en particulier que B est une limite projective d'algèbres stationnaires. [166]

(b) Je ne sais pas si, avec les notations de 5.2.1, on peut choisir A et B de telle façon qu'il n'existe pas de section $\sigma : \omega \to \mathrm{I}$ compatible avec les filtrations. [167] On remarquera cependant qu'on peut avoir pour ω n'importe quel espace vectoriel pseudocompact filtré par une suite croissante de sous-espaces fermés. En effet, si $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \cdots \subset \omega$ est un tel espace filtré, on peut définir dans l'algèbre $\mathrm{B} = \mathrm{A} = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r}$ un morphisme diagonal $\Delta_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{A}$ vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) de 2.1 ; il suffit de poser $\Delta_{\mathrm{A}}(y) = y\,\widehat{\otimes}\,1 + 1\,\widehat{\otimes}\,y$ lorsque y est l'image dans A d'un élément de ω.

562 ***5.4. Corollaire***. — *Soient* G *un groupe algébrique sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$,* H *un sous-groupe algébrique de* G*, e l'image de l'élément neutre de* G *dans* G/H *et* A *l'algèbre locale de* G/H *en e. Alors* $\widehat{\mathrm{A}}$ *est isomorphe à une algèbre de la forme*

$$k[[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_r,\ldots\mathrm{X}_s]]/(\mathrm{X}_1^{p^{n_1}},\ldots,\mathrm{X}_r^{p^{n_r}}).$$

En effet, considérons les groupes formels infinitésimaux $\widehat{\mathrm{G}} = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{G},e})$ et $\widehat{\mathrm{H}} = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{H},e})$; d'après 1.3.4, le complété $\widehat{\mathrm{A}}$ de $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{G/H},e}$ est isomorphe à $\mathscr{A}(\widehat{\mathrm{G}}/\widehat{\mathrm{H}})$, et le corollaire découle donc du théorème 5.2 (ii). [168]

5.5. Compléments. — [169] Rappelons les définitions suivantes. D'une part, on dit qu'un anneau local noethérien A est *intersection complète* si le complété $\widehat{\mathrm{A}}$ est quotient d'un anneau local noethérien complet *régulier* B par un idéal I engendré par une suite régulière d'éléments de B (cf. EGA IV_4, 19.3.1). D'autre part, soit $\tau : \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{X}$ une immersion fermée de schémas. Si $y \in \mathrm{Y}$, on dit que τ est une *immersion régulière au point y* si le noyau de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},y} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$ est engendré par une suite régulière ; si de plus X est localement noethérien et si τ est une immersion régulière en tout point, on dit que τ est une immersion régulière (cf. *loc. cit.*, Prop. 16.9.10 et Déf. 16.9.2).

---

d'éléments de C tels que $x_n^{p^n} = 0$, et $x_n = 0$ pour n assez grand. Notons enfin que ce cas (i.e. le cas où $\omega = \prod_{n\in\mathbb{N}^*} \omega'_n$) correspond au cas étudié, dans la situation duale des algèbres de Hopf cocommutatives connexes, par M. E. Sweedler, cf. [**Sw67**], Th. 3.

(166) N.D.E. : Mais une telle limite projective n'est pas nécessairement une k-algèbre profinie *stable* (au sens de la N.D.E. précédente). Par exemple, soit $\mathscr{S}$ le k-espace vectoriel « ordinaire » des suites $(u_1, u_2, \ldots)$ d'éléments de k et soit $\omega = \mathscr{S}^*$, alors ω est la somme directe dans $\mathbf{PC}(k)$ de copies k_n de k, pour $n \in \mathbb{N}^*$, i.e. on est dans le cas 5.2.1.A. Si l'on note x_n l'élément de ω défini par $x_n(\mathbf{u}) = u_n$, pour toute suite $\mathbf{u} = (u_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, alors la k-algèbre $\mathrm{A} = k[[\omega]]/((x_n^{p^n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est telle que $\omega_{\mathrm{A}/k} = \omega$ et $\omega_n = \prod_{i=1}^n kx_i$, mais n'est pas stable : Spf(A) représente le foncteur qui à tout $\mathrm{C} \in \mathbf{Alf}_{/k}$ associe l'ensemble des suites « infinies » $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de C tels que $x_n^{p^n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(167) N.D.E. : Les éditeurs ne le savent pas non plus, en dehors des cas considérés en 5.2.1.A et B.

(168) N.D.E. : Voir aussi [**DG70**], § III.3, Th. 6.1.

(169) N.D.E. : On a ajouté cette sous-section, pour donner quelques conséquences de 5.4, mentionnées dans les exposés III et $\mathrm{VI_A}$.

Corollaire 5.5.1. — *Si* G *est un groupe algébrique sur un corps k, l'anneau local* $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e}$ *est* intersection complète.

En effet, d'après EGA IV_4, 19.3.4, on peut supposer k algébriquement clos. Si $\mathrm{car}(k) = 0$, on sait déjà que G est lisse (cf. 3.3.1 ou VI_{B}, 1.6.1) et donc $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e}$ est une k-algèbre de séries formelles, d'après EGA IV_4, 17.5.3 (d″). Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, il résulte de 5.4, appliqué à $\mathrm{H} = \{e\}$, que $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e}$ est intersection complète.

Remarques 5.5.2. — Soient k un corps, G un k-groupe algébrique *lisse*, et H un sous-groupe fermé de G.

a) On a vu dans l'Exp. III, 4.15, que l'immersion $\mathrm{H} \hookrightarrow \mathrm{G}$ est régulière ; ceci peut aussi se déduire de 5.4, comme suit. Comme dans *loc. cit.*, on peut supposer k algébriquement clos, et il suffit de montrer que le noyau I de $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e} \to \mathscr{O}_{\mathrm{H},e}$ est engendré par une suite régulière. Posons $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{G},e}$, $\widehat{\mathrm{G}} = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathrm{A}})$ et $\widehat{\mathrm{H}} = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{H},e})$. Comme A est noethérien, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{I} \otimes_{\mathrm{A}} \widehat{\mathrm{A}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{A}} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathscr{A}(\mathrm{H}) \to 0$$

et $\widehat{\mathrm{A}}$ est fidèlement plat sur A. Donc, d'après EGA IV_4, 16.9.10 (ii) et 19.1.5 (ii), il suffit de montrer que le noyau $\widehat{\mathrm{I}} = \mathrm{I} \otimes_{\mathrm{A}} \widehat{\mathrm{A}}$ de π est engendré par une suite régulière d'éléments de $\widehat{\mathrm{A}}$.

Or, comme G est lisse, $\widehat{\mathrm{A}}$ est réduit ; d'après 5.4, la sous-algèbre $\mathrm{B} = \mathscr{A}(\widehat{\mathrm{G}}/\widehat{\mathrm{H}})$ est donc isomorphe à une algèbre de séries formelles $k[[x_1, \dots, x_n]]$, et donc la section unité de $\widehat{\mathrm{G}}/\widehat{\mathrm{H}}$ est définie dans B par la suite régulière $(x_1, \dots, x_n)$. Comme $\widehat{\mathrm{A}}$ est noethérien, l'idéal J de $\widehat{\mathrm{A}}$ engendré par $x_1, \dots, x_n$ est fermé donc égal à $\widehat{\mathrm{I}}$, d'après le corollaire 1.4. De plus, comme $\widehat{\mathrm{A}}$ est topologiquement plat, donc plat sur B (cf. 0.3.8), alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une suite régulière dans $\widehat{\mathrm{A}}$, d'après EGA IV_4, 19.1.5 (ii).

b) On peut aussi déduire de 5.2 (ii) le résultat plus précis suivant. Supposons k parfait. D'après 5.2 (ii) appliqué à l'algèbre $\mathrm{C} = \mathscr{A}(\mathrm{H})$, il existe une base $(y_1, \dots, y_{r+s})$ de ω_{H} et des entiers $1 \leqslant n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_r$ tels que $\mathscr{A}(\mathrm{H})$ soit isomorphe au quotient de $k[[y_1, \dots, y_{r+s}]]$ par l'idéal engendré par les $y_i^{p^{n_i}}$ pour $i = 1, \dots, r$. Relevons les y_i en des éléments x_i de ω_{G} et complétons $(x_1, \dots, x_{r+s})$ en une base $(x_1, \dots, x_n)$ de ω_{G}. Puisque $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est réduit, le morphisme $k[[x_1, \dots, x_n]] \to \mathscr{A}(\mathrm{G})$ est un isomorphisme, d'après 5.2 (iii). On obtient donc : *il existe un « système de coordonnées »* $(x_1, \dots, x_n)$ *de* G (i.e. un isomorphisme $\mathscr{A}(\mathrm{G}) \simeq k[[x_1, \dots, x_n]]$) *tel que* H *soit défini par les équations* $x_i^{p^{n_i}} = 0$ *pour* $i = 1, \dots, r$ *et* $x_i = 0$ *pour* $i > r + s$ (« théorème de Dieudonné », comparer avec [**Di55**], § 19, Th. 6 et [**Di73**], II § 3.2, Prop. 3 et ce qui la précède).

Bibliographie

[CA] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323-448. (170)

(170) N.D.E. : On a ajouté à cette référence, figurant dans l'original, les références qui suivent.

[Ab80] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge Univ. Press, 1980.

[Br00] C. Breuil, *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Ann. of Math. **152** (2000), n°2, 489-549.

[BAlg] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. I-III et IV-VII, Hermann, 1970, et Masson, 1981.

[BAC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap. I-IV, Masson, 1985.

[BEns] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Chap. I-IV, Hermann, 1970.

[BLie] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. II-III, Hermann, 1970.

[Ca62] P. Cartier, *Groupes algébriques et groupes formels*, pp. 87–111 *in :* Colloque sur la théorie des groupes algébriques (Bruxelles, 1962), Gauthier-Villars, 1962.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[De72] M. Demazure, *Lectures on p-divisible groups*, Lect. Notes Math. **302**, Springer-Verlag, 1972.

[Di55] J. Dieudonné, *Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique* $p > 0$, Comm. Math. Helv. **28** (1955), 87-118.

[Di73] J. Dieudonné, *Introduction to the theory of formal groups*, Marcel Dekker, 1973.

[Fo77] J.-M. Fontaine, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Astérisque **47-48**, Soc. Math. France, 1977.

[Gr57] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. **9** (1957), 119-221.

[Gr74] A. Grothendieck, *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Presses Univ. Montréal, 1974.

[HS69] R. G. Heyneman, M. E. Sweedler, *Affine Hopf Algebras* I, J. Algebra **13** (1969), 194-241.

[Il85] L. Illusie, *Déformations de groupes de Barsotti-Tate, d'après A. Grothendieck*, pp. 151-198 *in* : Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque **127**, Soc. Math. France, 1985.

[Ja65] I. M. James, analyse de [**MM65**] dans Math. Reviews, MR0174052.

[La75] M. Lazard, *Commutative formal groups*, Lect. Notes Math. **443**, Springer-Verlag, 1975.

[LT65] J. Lubin, J. Tate, *Formal complex multiplication in local fields*, Ann. of Math. **81** (1965), 380-387.

[LT66] J. Lubin, J. Tate, *Formal moduli for one-parameter formal Lie groups*, Bull. Soc. Math. France **94** (1966), 49-60.

[Ma91] A. Masuoka, *On Hopf algebras with cocommutative coradicals*, J. Algebra **144** (1991), 451-466.

[Me72] W. Messing, *The crystals associated with Barsotti-Tate Groups : with applications to abelian schemes*, Lect. Notes Math. **264**, Springer-Verlag, 1972.

[MM65] J. W. Milnor, J.. C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. **81** (1965), 211-264.

[Mi65] B. Mitchell, *Theory of categories*, Academic Press, 1965.

[Ne75] K. Newman, *A correspondence between bi-ideals and sub-Hopf algebras in cocommutative Hopf algebras*, J. Algebra **36** (1975), 1-15.

[Po73] N. Popescu, *Abelian categories with applications to rings and modules*, Academic Press, 1973.

[Sch90] H. J. Schneider, *Principal homogeneous spaces for arbitrary Hopf algebras*, Israel J. Math. **72** (1990), n^{os} 1-2, 167-195.

[Sw67] M. Sweedler, *Hopf algebras with one grouplike element*, Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967), n°3, 515-526.

[Sw69] M. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, 1969.

[Tak72] M. Takeuchi, *A correspondence between Hopf ideals and sub-Hopf algebras*, Manuscripta Math. **7** (1972), 251-270.

[Tak79] M. Takeuchi, *Relative Hopf modules–Equivalence and freeness criteria*, J. Algebra **60** (1979), 452-471.

[Ta67] J. Tate, *p-divisible groups*, pp. 158-183 *in* : Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) (éd. T. A. Springer), Springer-Verlag, 1967.

[We95] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Univ. Press, 1995.

INDEX