Proceedings of Symposia in Pure Mathematics
Volume 55 (1994), Part 1

Autour des conjectures de Bloch et Kato: cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L

JEAN-MARC FONTAINE ET BERNADETTE PERRIN-RIOU

Introduction

Ce texte comprend trois chapitres: le premier (resp. le second) concerne la cohomologie galoisienne des représentations ℓ-adiques du groupe de Galois d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (resp. $\mathbb{Q}$)et le troisième, de nature presqu'entièrement spéculative, les valeurs des fonctions L des motifs sur un corps de nombres.

Commençons par expliquer l'objectif du troisième. Soit F une extension finie de $\mathbb{Q}$. Soient X une variété projective lisse sur F, $i \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$. Des travaux de Deligne, Beilinson, et Bloch ([**De79, Be85, Be87, Bl84**],...) ont permis de donner l'ordre conjectural r en $s = m$ du zéro (ou pôle) éventuel de la fonctions $L(h^i(X), s)$ ainsi que la valeur, à multiplication par un nombre rationnel non nul près, de

$$L^*(h^i(X), m) = \lim_{s \to m} (s-m)^r . L(h^i(X), s).$$

Ces travaux étaient inspirés par les conjectures de Birch et Swinnerton-Dyer qui donnent la valeur *exacte* de $L^*(h^1(X), 1)$ lorsque X est une variété abélienne. Il était tentant de généraliser ces conjectures pour obtenir une valeur exacte de $L^*(h^i(X), m)$ pour X, i et m arbitraires. C'est ce qu'ont réussi à faire Bloch et Kato [**BK90**].

Dans les conjectures de Birch et Swinnerton-Dyer, un point essentiel est que, si ℓ est un nombre premier, $T_\ell(X)$ le module de Tate de X et $V_\ell(X) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(X)$, la variété abélienne X permet de fabriquer un sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $H^1_f(F, V_\ell(X))$ de $H^1(F, V_\ell(X))$: c'est celui qui est engendré par l'image de $X(F)$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11G40, 11R34, 11S25; Secondary 14F, 14G10, 19F27, 32S35.

This paper is in final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

©1994 American Mathematical Society
0082-0717/94 $1.00 + $.25 per page

Dans le cas général, si $V_\ell(X)$ est remplacé par $h^i(X)_\ell(m) = H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell(m))$ (où $\overline{F}$ est une clôture algébrique de F), Bloch et Kato définissent le sous-groupe $H^1_f(F, h^i(X)_\ell(m))$ de $H^1(F, h^i(X)_\ell(m))$ par des conditions locales (cf. I, n°3.3 et II, n°1.3 ; par exemple si $\mathfrak{p}$ est une place de bonne réduction, i.e. telle que $h^i(X)_\ell(m)$ est non ramifiée (resp. cristalline) en $\mathfrak{p}$ si $\mathfrak{p}$ ne divise pas (resp. divise) ℓ, on demande que l'extension de $\mathbb{Q}_\ell$ par $h^i(X)_\ell(m)$ correspondante ait encore bonne réduction).

Le but essentiel du chapitre III est d'énoncer des variantes des conjectures de Bloch et Kato (et donc aussi de celles de Deligne et Beilinson). Par rapport au point de vue initial de Bloch et Kato, il y a deux changements importants (largement inspirés des travaux de Bloch sur les conjectures de Birch et Swinnerton-Dyer [Bl80] et de certaines idées de Deligne **[De85]**, Scholl **[Sc91]** et Lichtenbaum [Li72]). La philosophie de ces changements est la suivante.

a) Les groupes de K-théorie algébrique qui interviennent dans le point de vue "classique" doivent pouvoir s'interpréter comme certains Ext^i de la catégorie des "motifs mixtes sur F"; on y gagne de ne plus avoir besoin de K-théorie et de pouvoir travailler avec des motifs mixtes arbitraires; on y perd d'avoir à travailler avec une catégorie dont on n'est même pas sûr de connaître la bonne définition!

b) Les formules compliquées faisant intervenir des nombres de Tamagawa, des ordres de groupes de Shafarevich, ne sont que le résultat du calcul explicite d'une formule "intrinsèque" faisant intervenir certaines caractéristiques d'Euler-Poincaré; on y gagne une grande simplification de la formulation des conjectures, une plus grande sécurité aussi (on craint moins d'oublier une puissance de $2, \ldots$), une plus grande généralité également, la formule gardant un sens dans tous les cas, la possibilité de vérifier relativement facilement différentes compatibilités; cela ne dispense pas, dans les cas particuliers auxquels on s'intéresse, de faire des calculs si l'on veut une formule "explicite".

Dans un souci de simplification, nous n'avons parlé ici que de motifs sur F à coefficients dans $\mathbb{Q}$, mais ce genre de conjectures s'étend aux motifs à coefficients dans un corps de nombres arbitraire (cf. **[Fo92]**).

Nous n'avons pas non plus:

i) explicité comment, modulo des interprétations convenables des groupes de K-théorie, des régulateurs et des hauteurs qui interviennent, ces conjectures redonnent les conjectures de Deligne-Beilinson et Bloch-Kato;

ii) donné d'exemples;

iii) expliqué quels sont les résultats connus.

Pour ces trois points, voir **[FP91, Fo92]** et les textes de Nekovar et Scholl dans ce volume; nous conseillons vivement au lecteur de regarder lui-même ce que donne la théorie développée ici appliquée à ses motifs "préférés".

Disons quelques mots des deux premiers chapitres: on y introduit toute une hiérarchie des représentations ℓ-adiques du groupe de Galois d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (chap. I) et de $\mathbb{Q}$ (chap. II) et on étudie quelques propriétés de la cohomologie de ces représentations. Les développements qu'on y trouvera sont plus importants que ce qui est strictement nécessaire pour le chapitre III. Nous avons trouvé que certains d'entre eux donnent des indications sur les propriétés que semble avoir la catégorie des motifs mixtes sur un corps de nombres et nous espérons qu'une partie d'entre eux devrait se révéler utile dans certains des travaux qui ne manqueront pas de se développer autour des conjectures de Bloch et Kato. Nous avons adopté un point de vue résolument élémentaire, i.e., nous avons travaillé avec la cohomologie galoisienne, bien que l'utilisation de la topologie étale simplifie certaines descriptions (cf. **[Fo92]**).

On aura compris que cet article reprend beaucoup des idées et résultats de l'article original de Bloch et Kato et nous avons renoncé à les citer à chaque fois que nous reprenons ce qu'ils ont fait.[1] De même nous avons renoncé à citer Deligne, Jannsen, et Scholl quand nous utilisons certaines de leurs idées dans le chapitre III. Signalons aussi qu'il y a une intersection importante des chapitres I et II avec des travaux de Niziol **[Ni]** et de Kato **[Ka]**. Enfin, les notes **[FP91]** peuvent être considérées comme une introduction ou comme un résumé du présent texte.

Plan

Outils, conventions et notations
- 0.1. Catégorie tannakiennes et représentations ℓ-adiques
- 0.2. Représentations $\mathbb{Z}_\ell$-adiques et cohomologie continue
- 0.3. Torsion à la Tate
- 0.4. Déterminants: le cas des espaces vectoriels
- 0.5. Déterminants: le cas des modules sur les anneaux principaux
- 0.6. Diagrammes rectangulaires tordus

Chapitre I: Représentations ℓ-adiques des corps p-adiques

§1. Autour du groupe de Weil-Deligne
- 1.1. Représentations du groupe de Weil-Deligne
- 1.2. Facteurs locaux et ε, questions de rationalité et de compatibilité
- 1.3. Modules de Dieudonné-Weil-Deligne
- 1.4. Cohomologie des DWD-modules

§2. La hiérarchie des représentations ℓ-adiques
- 2.1. Les anneaux $B_{st,\ell}$
- 2.2. Représentations potentiellement semi-stables

§3. Cohomologie galoisienne
- 3.1. Quelques suites exactes

[1] Nous nous sommes efforcés d'utiliser des notations compatibles avec celles de Bloch et Kato, voir toutefois les remarques des n°I, 3.3.3 et II, 1.3.1.

3.2. La cohomologie galoisienne classique
3.3. Les H_e^i, H_f^i, H_g^i et H_h^i
§4. Nombres de Tamagawa locaux
4.1. Généralités
4.2. Calculs de nombres de Tamagawa
4.3. Comportement par induction
Chapitre II: Représentations ℓ-adiques des corps de nombres
§1. Cohomologie galoisienne
1.1. Généralités
1.2. Théorèmes de dualité globale
1.3. Les groupes $H^1_{f,\Sigma}(F, V)$ et $H^1_f(F, V)$
1.4. L'application de connexion
§2. Représentations pseudo-géométriques
2.1. Généralités
2.2. Deux suites exactes
§3. Représentations géométriques
3.1. Généralités
3.2. Représentations strictement géométriques
3.3. Encore des suites exactes
3.4. La fonction L d'une représentation géométrique
§4. Caractéristique d'Euler-Poincaré
4.1. Droite d'Euler-Poincaré
4.2. La droite normée fondamentale $\Delta_f(V)$
§5. Compléments
5.1. Multiplicativité
5.2. Comportement par induction
5.3. Groupes de Shafarevich-Tate et nombres de Tamagawa
5.4. La dualité entre Ш(T) et Ш(T*(1))
Chapitre III: Structures motiviques
§1. Structures de Hodge mixtes sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$
1.1. Structures de Hodge mixtes sur $\mathbb{C}$
1.2. Structures de Hodge mixtes sur $\mathbb{R}$
§2. Structures pré-motiviques sur un corps de nombres
2.1. La catégorie des structures pré-motiviques
2.2. La fonction L d'une structure pré-motivique
§3. Catégories pré-motiviques admissibles
3.1. Généralités
3.2. Catégories pré-motiviques f-admissibles
3.3. Catégories pré-motiviques S-admissibles
§4. Structures motiviques et valeurs de fonctions L
4.1. Généralités
4.2. L'ordre du zéro de la fonction L en $s = 0$
4.3. L'équation fonctionnelle
4.4. La valeur de $L^*(M, 0)$ à un nombre rationnel près

4.5. La valeur exacte de $L^*(M, 0)$
Principales notations
Références

Outils, conventions et notations

Le lecteur est invité à ne lire ce paragraphe qu'en cas de besoin.

0.1. Catégories tannakiennes et représentations ℓ-adiques. On renvoit à **[DM82]** pour les généralités sur les catégories tannakiennes (dont le rôle ici est essentiellement figuratif). Dans ce texte, sauf mention explicite du contraire, les *catégories tannakiennes* que l'on considère sont des catégories tannakiennes *neutres* sur un corps E. Si $\mathscr{C}$ est une telle catégorie, le choix d'un foncteur fibre permet d'identifier $\mathscr{C}$ à la catégorie des représentations E-linéaires de dimension finie d'un groupe pro-algébrique G défini sur E. *L'objet-unité* $\mathbb{1}_{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}$ est E muni de l'action triviale de G.

Pour tout objet V de $\mathscr{C}$, on pose $H^0(\mathscr{C}, V) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{1}_{\mathscr{C}}, V)$ et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $H^i(\mathscr{C}, -)$ le i-ième foncteur dérivé de $H^0(\mathscr{C}, -)$ (on a $H^i(\mathscr{C}, V) = 0$ si $i < 0$).

Une *sous-catégorie tannakienne* de $\mathscr{C}$ est une sous-catégorie pleine, contenant $\mathbb{1}_{\mathscr{C}}$, stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel et dual (et s'identifie à la catégorie des représentations E-linéaires de dimension finie d'un quotient de G).

Si $\mathscr{D}$ est une sous-catégorie tannakienne de $\mathscr{C}$, l'inclusion $j^*: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ admet un adjoint à gauche $j_*: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ($j_*(V)$ est le plus grand sous-objet de V qui est dans $\mathscr{D}$) et, pour tout i, on dispose d'une application naturelle

$$H^i(\mathscr{D}, j_*V) \to H^i(\mathscr{C}, V)$$

(qui est un isomorphisme pour $i = 0$ et est injective pour $i = 1$).

Soient G un groupe profini et ℓ un nombre premier. Une *représentation ℓ-adique de G* est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action linéaire et continue de G. Ces représentations forment de manière naturelle une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{Q}_\ell$, que l'on note $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G)$ (le groupe pro-algébrique correspondant est la limite projective de la clôture zariskienne de l'image de G dans chacune de ces représentations). Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et toute représentation ℓ-adique V de G, on pose $H^i(G, V) = H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G), V)$.

0.2. Représentations $\mathbb{Z}_\ell$-adiques et cohomologie continue ([Ta76]). Soient G un groupe profini et ℓ un nombre premier. On appelle *représentation $\mathbb{Z}_\ell$-adique de G* la donnée d'un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini muni d'une action linéaire et continue de G.

Plus généralement, si T est un $\mathbb{Z}_\ell$-module topologique muni d'une action linéaire et continue de G, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note $C(G, T)$ *le complexe des cochaînes continues de G à valeurs dans T*. On a donc $C^i(G, T) = 0$

pour i entier < 0, tandis que si $i \in \mathbb{N}$, $C^i(G, T)$ est le $\mathbb{Z}_\ell$-module des applications continues de G^i dans T, le cobord

$$\delta: C^{i-1}(G, T) \to C^i(G, T)$$

étant défini par la formule usuelle

$$\begin{aligned}\delta f(g_1, g_2, \cdots, g_i) = {} & g_1(f(g_2, g_3, \cdots, g_i)) \\ & + \sum_{1 \le r < i} f(g_1, \cdots, g_{r-1}, g_r g_{r+1}, g_{r+2}, \cdots, g_i) \\ & + (-1)^i \cdot f(g_1, g_2, \cdots, g_{i-1}).\end{aligned}$$

On note $Z^i(G, T)$ (resp. $B^i(G, T)$) le groupe des i-cocycles (resp. i-cobords) et $H^i_{\text{cont}}(G, T) = Z^i(G, T)/B^i(G, T)$ de i-ième groupe de cohomologie continue.

Toute suite exacte courte

$$0 \to T' \to T \to T'' \to 0$$

de $\mathbb{Z}_\ell$-modules topologiques munis d'une action linéaire et continue de G *telle que la projection de T sur T'' admet une section continue* (c'est le cas si T est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini ou un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie) induit une suite exacte longue de cohomologie

$$\cdots \to H^i_{\text{cont}}(G, T') \to H^i_{\text{cont}}(G, T) \to H^i_{\text{cont}}(G, T'') \to \cdots.$$

0.3. Torsion à la Tate. Soient E un corps quelconque, $\overline{E}$ une clôture séparable de E, $G_E = \text{Gal}(\overline{E}/E)$ et ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de E. Comme d'habitude, $\mathbb{Z}_\ell(1) = \text{lim.proj.}\, \mu_{\ell^n}(\overline{E})$ désigne le module de Tate du groupe multiplicatif; pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_\ell(i)$ est sa puissance tensorielle i-ième et $\mathbb{Z}_\ell(-i)$ son dual; pour tout $\mathbb{Z}_\ell$-module M sur lequel G_E opère et tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $M(i) = M \otimes \mathbb{Z}_\ell(i)$.

0.4. Déterminants: le cas des espaces vectoriels. Soit E un corps. Pour tout E-espace vectoriel V de dimension finie d, on pose $\det_E V = \bigwedge^d_E(V)$ (en particulier, $\det(\{0\}) = E$). Si L est une droite et si $i \in \mathbb{N}$, on note L^i sa puissance symétrique i-ième et L^{-i} la droite duale.

Soit

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

une suite exacte courte d'espaces vectoriels de dimension finie. On dispose d'un isomorphisme canonique

$$(\det_E V') \otimes (\det_E V'') \to \det_E V;$$

c'est celui qui, à $(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r) \otimes (w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_s)$ associe $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge \hat{w}_1 \wedge \hat{w}_2 \wedge \cdots \wedge \hat{w}_s$ (où l'on a noté encore v_i l'image de $v_i \in V'$ dans V et $\hat{w}_j$ un relèvement arbitraire de $w_j \in V''$ dans V).

Soit

$$\text{(C)} \qquad \cdots \to C^{i-1} \to C^i \to C^{i+1} \to \cdots$$

un complexe de E-espaces vectoriels tel que les $H^i(C)$ sont de dimension finie, presque tous nuls. On pose $\det_E C = \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}(\det_E H^i(C))^{(-1)^i}$. Si les C^i sont eux mêmes de dimension finie et presque tous nuls, on voit que $\det_E C$ s'identifie à $\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}(\det_E C^i)^{(-1)^i}$. En particulier, toute suite exacte

$$\cdots \to C^{i-1} \to C^i \to C^{i+1} \to \cdots$$

de E-espaces vectoriels de dimension finie et presque tous nuls définit un isomorphisme canonique $\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}(\det_E C^i)^{(-1)^i} \to E$.

Si l'on s'est donné une décomposition

$$V = \bigoplus_{i\in I} V_i$$

d'un espace vectoriel de dimension finie en somme directe de sous-espaces vectoriels, l'isomorphisme naturel $\det_E V \to \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \det_E V_i$ dépend par un signe (du moins si tous les V_i ne sont pas de dimension paire) de l'ordre dans lequel on a rangé les V_i. Comme ces problèmes de signe n'ont pas d'importance pour ce que nous allons faire, nous appelons *s-isomorphisme* entre deux droites un isomorphisme qui n'est défini qu'à la multiplication par -1 près.

0.5. Déterminants: le cas des modules sur les anneaux principaux. Les considérations qui précèdent s'étendent aux modules de type fini sur un anneau principal A (et même aux modules de tor-dimension finie sur un anneau commutatif arbitraire, mais nous n'en aurons pas besoin).

Si M est un A-module libre de rang fini d, on pose $\det_A M = \bigwedge_A^d(M)$. Si $d = 1$, on pose $M^1 = M$ et on note M^{-1} son dual. Tout complexe borné à gauche

$$\text{(C)} \qquad \cdots \to C^{i-1} \to C^i \to C^{i+1} \to \cdots$$

de A-modules tel que les $H^i(C)$ sont de type fini et presque tous nuls est quasi-isomorphe à un complexe parfait, i.e. un complexe

$$\text{(D)} \qquad \cdots \to D^{i-1} \to D^i \to D^{i+1} \to \cdots$$

où les D^i sont des A-modules libres de type fini presque tous nuls. Si, pour un tel complexe, on pose $\det_A D = \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}(\det_A D^i)^{(-1)^i}$, tout quasi-isomorphisme entre D et un autre complexe parfait D' induit un isomorphisme canonique entre $\det_A D$ et $\det_A D'$. On peut donc définir $\det_A C$ comme étant le A-module (libre de rang 1) $\det_A D$, pour n'importe quel D parfait quasi-isomorphe à C.

En particulier, on peut parler de $\det_A M$ pour tout A-module de type fini (voir M comme un complexe concentré en degré 0). Si

$$0 \to L_{-1} \to L_0 \to M \to 0$$

est une résolution de M par des A-modules libres de rang fini, $\det_A M = \det_A L_0 \otimes (\det_A L_{-1})^{-1}$.

Si dans le complexe C, les C^i sont des A-modules de type fini et presque tous nuls, on a $\det_A C = \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} (\det_A C^i)^{(-1)^i}$. Ici encore, toute suite exacte

$$\cdots \to C^{i-1} \to C^i \to C^{i+1} \to \cdots$$

de A-modules de type fini et presque tous nuls définit un isomorphisme canonique $\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} (\det_A C^i)^{(-1)^i} \to A$.

Enfin, si $E = \operatorname{Frac} A$, si C est comme au début de ce paragraphe et si C_E est le complexe déduit de C par extension des scalaires, $\det_A C$ s'identifie à un réseau de $\det_E C_E$.

0.6. Diagrammes rectangulaires tordus. Le groupe $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ est le produit direct du groupe $L = \{(m, 0) | m \in \mathbb{Z}\}$ par le groupe $C = \{(0, n) | n \in \mathbb{Z}\}$. Se donner une action de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ sur un ensemble Λ revient à se donner deux permutations ℓ, c de Λ vérifiant $c\circ\ell = \ell\circ c$ (il suffit de poser $\ell(\lambda) = (1, 0) + \lambda$ et $c(\lambda) = (0, 1) + \lambda$).

Un *diagramme rectangulaire tordu* dans une catégorie abélienne $\mathscr{C}$ est la donnée

i) d'un ensemble Λ sur lequel $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ opère transitivement, le noyau de l'action étant engendré par $(r, -s)$ où r et s sont deux entiers ≥ 1;

ii) pour chaque $\lambda \in \Lambda$ d'un objet M^λ et de deux flèches

$$f_\lambda : M^\lambda \to M^{c(\lambda)} \quad \text{et} \quad g_\lambda : M^\lambda \to M^{\ell(\lambda)}$$

de $\mathscr{C}$.

On dit qu'un tel diagramme est *commutatif* si $f_{\ell(\lambda)} \circ g_\lambda = g_{c(\lambda)} \circ f_\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. On dit qu'il est *exact* si, pour tout $\lambda \in \Lambda$, les suites

$$M^{c^{-1}(\lambda)} \to M^\lambda \to M^{c(\lambda)} \quad \text{et} \quad M^{\ell^{-1}(\lambda)} \to M^\lambda \to M^{\ell(\lambda)}$$

sont exactes.

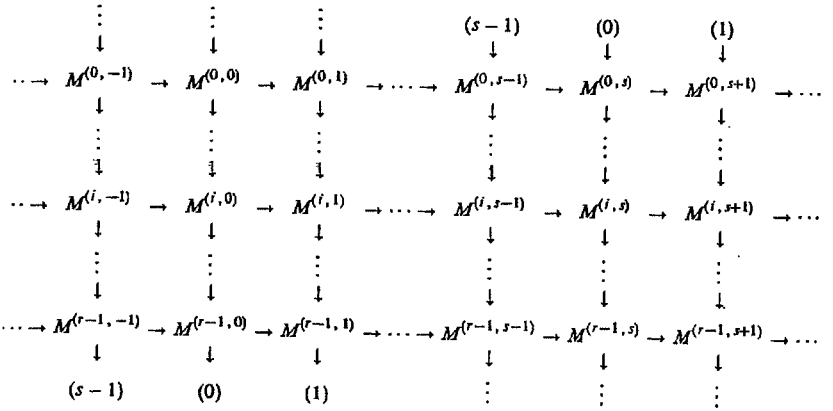
A chaque orbite de Λ sous l'action de C correspond une *ligne* du diagramme

$$\cdots \to M^{c^{i-1}(\lambda)} \to M^{c^i(\lambda)} \to M^{c^{i+1}(\lambda)} \to \cdots,$$

tandis qu'à chaque orbite sous l'action de L correspond une *colonne*

$$\cdots \to M^{\ell^{i-1}(\lambda)} \to M^{\ell^i(\lambda)} \to M^{\ell^{i+1}(\lambda)} \to \cdots.$$

Un tel diagramme a r lignes et s colonnes. Si l'on choisit une origine $\lambda_0 \in \Lambda$ et si l'on pose $M^{(i,j)} = M^{(i+j)+\lambda_0}$, un tel diagramme peut se représenter schématiquement sous la forme



Dire que le diagramme est exact revient à dire que ses lignes et ses colonnes sont exactes.

On vérifie facilement que, si dans un diagramme rectangulaire tordu commutatif toutes les lignes et toutes les colonnes, sauf peut-être une, sont exactes, et si cette dernière est un complexe borné à gauche, alors elle est exacte.

CHAPITRE I

REPRÉSENTATIONS ℓ-ADIQUES DES CORPS p-ADIQUES

Dans tout ce chapitre, K est un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, dont le corps résiduel k est supposé fini de caractéristique $p > 0$. On choisit une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et on pose $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. On désigne par $\overline{k}$ le corps résiduel de $\overline{K}$, on pose $G_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et on note I_K le groupe d'inertie. On a donc une suite exacte

$$1 \to I_K \to G_K \to G_k \to 1 .$$

On note $\mathbb{Q}_p^{nr}$ l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans $\overline{K}$, K_0 (resp. $\mathbb{Q}_p'$) le corps des fractions de l'anneau $W(k)$ (resp. $W(\overline{k})$) des vecteurs de Witt à coefficients dans k (resp. $\overline{k}$). On a donc $K_0 = K \cap \mathbb{Q}_p^{nr}$ et $\mathbb{Q}_p'$ est le complété de $\mathbb{Q}_p^{nr}$. On pose $e = [K : K_0]$ et on note σ le Frobenius absolu agissant sur k (par $x \mapsto x^p$), K_0, $\mathbb{Q}_p^{nr}$, et $\mathbb{Q}_p'$. On note $q = p^h$ le cardinal de k et f_k le Frobenius géométrique relatif à k (i.e., le générateur topologique de G_k vérifiant $f_k(x) = x^{q^{-1}}$, pour tout $x \in \overline{k}$).

Enfin ℓ est un nombre premier (égal ou non à p).

1. Autour du groupe de Weil-Deligne

Dans tout ce paragraphe, E est un corps de caractéristique 0.

1.1. Représentations du groupe de Weil-Deligne (cf. [De73, Ta79]).

1.1.1. Soit W_K le groupe de Weil de K, i.e. le sous-groupe de G_K formé des w dont l'image dans G_k est de la forme $f_k^{\nu(w)}$, avec $\nu(w) \in \mathbb{Z}$. On note $\mathbf{Rep}_E(W_K)$ la catégorie des E-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action de W_K dont la restriction à I_K est continue (le E-espace vectoriel étant muni de la topologie discrète). Un objet de $\mathbf{Rep}_E(W_K)$ est donc un couple formé d'un E-espace vectoriel Δ et d'un homomorphisme $\rho = \rho_\Delta : W_K \to \mathrm{Aut}_E(\Delta)$ tel que $I_K \cap \mathrm{Ker}\,\rho$ soit ouvert dans I_K ; un morphisme de $\mathbf{Rep}_E(W_K)$ est une application E-linéaire W_K-équivariante.

La catégorie $\mathbf{Rep}_E(W_K)$ est, de façon évidente, une catégorie tannakienne neutre sur E (n°01). L'objet-unité $\mathbb{1}$ est E muni de l'action triviale de W_K.

1.1.2. On dit qu'on objet Δ de $\mathbf{Rep}_E(W_K)$ est *non ramifié* si I_K opère trivialement, i.e. si ρ se factorise à travers un homomorphisme $\overline{\rho}$ du groupe cyclique engendré par f_k dans $\mathrm{Aut}_E(\Delta)$. Se donner un tel objet revient donc à se donner $\overline{\rho}(f_k)$ qui peut être n'importe quel élément de $\mathrm{Aut}_E(\Delta)$.

Appelons *objet de Tate* tout objet Ta de $\mathbf{Rep}_E(W_K)$ non ramifié et de dimension 1 tel que $\overline{\rho}(f_k) = q^{-1}$. Un tel objet est unique à isomorphisme non unique près.

1.1.3. On *choisit* un objet de Tate Ta et on note Ta^{-1} son dual. Pour tout objet Δ de $\mathbf{Rep}_E(W_K)$, on pose $\Delta\{-1\} = \Delta \otimes Ta^{-1}$. *Une représentation de* ${}'W_K$ ou *représentation du groupe de Weil-Deligne de* K (à coefficients dans E et relativement au choix de Ta) est un triplet (Δ, ρ, N), où (Δ, ρ) est un objet de $\mathbf{Rep}_E(W_K)$ et où $N = N_\Delta : \Delta \to \Delta\{-1\}$ est un morphisme de $\mathbf{Rep}_E(W_K)$.

Les représentations de ${}'W_K$ forment, de manière évidente, une catégorie abélienne $\mathbf{Rep}_{E,Ta}({}'W_K)$ (un morphisme est un morphisme des objets de $\mathbf{Rep}_E(W_K)$ sous-jacents qui commute à N) et même une catégorie tannakienne neutre sur E (attention que, avec les conventions que l'on imagine, $N_{\Delta_1 \otimes \Delta_2} = \mathrm{id}_{\Delta_1} \otimes N_{\Delta_2} + N_{\Delta_1} \otimes \mathrm{id}_{\Delta_2}$). La catégorie $\mathbf{Rep}_E(W_K)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{E,Ta}({}'W_K)$ dont les objets sont ceux pour lesquels $N = 0$.

1.1.4. Remarques. a) Si Ta_0 désigne l'objet de Tate dont le E-espace vectoriel sous-jacent est E lui-même, on voit qu'un objet de $\mathbf{Rep}_{E,Ta_0}({}'W_K)$ est un triplet (Δ, ρ, N_0) où (Δ, ρ) est un objet de $\mathbf{Rep}_E(W_K)$ et $N_0 : \Delta \to \Delta$ une application E-linéaire telle que

$$N_0 \circ \rho(w) = q^{\nu(w)} \cdot \rho(w) \circ N_0 \quad \text{pour tout } w \in W_K.$$

Le choix d'une base t de Ta définit une $\otimes$-équivalence ι_t entre $\mathbf{Rep}_{E,Ta}({}'W_K)$ et $\mathbf{Rep}_{E,Ta_0}({}'W_K)$: c'est celle qui, à (Δ, ρ, N) associe (Δ, ρ, N_0) où N_0 est défini par $Nd = N_0 d \otimes t^{-1}$, pour tout $d \in \Delta$; si t et t' sont deux bases de Ta, les deux $\otimes$-foncteurs ι_t et $\iota_{t'}$ sont isomorphes. Si Ta et Ta' sont deux objets de Tate, le choix d'une base de $Ta' \otimes Ta^{-1}$ permet de définir une $\otimes$-équivalence entre $\mathbf{Rep}_{E,Ta}({}'W_K)$ et $\mathbf{Rep}_{E,Ta'}({}'W_K)$.

b) L'action de N sur un objet de $\mathbf{Rep}_{E,Ta}({}'W_K)$ est nilpotente (i.e. le E-endomorphisme N_0 de tout objet de $\mathbf{Rep}_{E,Ta_0}({}'W_K)$ est nilpotent).

1.1.5. Dans ce qui suit, on suppose choisi un objet de Tate Ta et on pose $\mathbf{Rep}_E({}'W_K) = \mathbf{Rep}_{E,Ta}({}'W_K)$. On se donne un objet $\Delta = (\Delta, \rho, N)$ de $\mathbf{Rep}_E({}'W_K)$.

On dit que Δ est *F-semi-simple* si la représentation ρ de W_K sous-jacente est semi-simple. Si l'on choisit un élément $w \in W_K$ qui n'est pas dans I_K, il revient au même de demander que $\rho(w)$ soit semi-simple.

On dit que Δ est *semi-stable* si le noyau de ρ contient I_K et on note $\mathbf{Rep}_{E,g}({}'W_K)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_E({}'W_K)$ dont les objets sont ceux qui sont semi-stables. On note $\mathbf{Rep}_{E,h}({}'W_K)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{E,f}({}'W_K)$, resp. $\mathbf{Rep}_{E,e}({}'W_K)$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{E,g}({}'W_K)$ formée des objets qui sont F-semi-simples (resp. pour lesquels $N = 0$, resp. qui sont F-semi-simples et pour lesquels $N = 0$).

1.1.6. Si L est une extension finie de K contenue dans $\overline{K}$, le groupe de Weil W_L s'identifie à un sous-groupe de W_K et on peut restreindre ρ à W_L, ce qui permet de considérer également Δ comme un objet de $\mathbf{Rep}_E({}'W_L)$. Pour $\nu \in \{e, f, h, g\}$, on note $\mathbf{Rep}_{E,p\nu}({}'W_K)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_E({}'W_K)$ formée des Δ pour lesquels on peut trouver une extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$ telle que Δ vu comme objet de $\mathbf{Rep}_E({}'W_L)$ soit dans $\mathbf{Rep}_{E,\nu}({}'W_L)$.

Pour $\nu \in \{e, f, h, g, pe, pf, ph, pg\}$, $\mathbf{Rep}_{E,\nu}({}'W_K)$ est une sous-catégorie tannakienne de $\mathbf{Rep}_E({}'W_K)$. On a $\mathbf{Rep}_{E,pg}({}'W_K) = \mathbf{Rep}_E({}'W_K)$, $\mathbf{Rep}_{E,pf}({}'W_K) = \mathbf{Rep}_E(W_K)$ et $\mathbf{Rep}_{E,ph}({}'W_K)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_E({}'W_K)$ dont les objets sont ceux qui sont F-semi-simples; on laisse au lecteur le soin de décrire les différentes inclusions qui existent entre ces différentes catégories.

1.2. Facteurs locaux et ε, questions de rationalité et de compatibilité (cf. [De73, Ta79]).

1.2.1. On conserve les hypothèses et notations du n°1.1.5. Pour tout $w \in W_K$, on peut écrire, de manière unique, $\rho(w) = \rho^{ss}(w) \circ \rho^u(w)$ où $\rho^{ss}(w)$ et $\rho^u(w)$ sont des automorphismes du E-espace vectoriel Δ qui commutent entre eux, le premier étant semi-simple et le second unipotent. Le triplet

(Δ, ρ^{ss}, N) est alors un objet de $\mathbf{Rep}_{E,ph}({}'W_K)$ que nous notons Δ^{ss} et appelons le *F-semi-simplifié de* Δ. On note Δ_g (resp. Δ_f) le plus grand sous-objet de Δ qui est dans $\mathbf{Rep}_{E,g}({}'W_K)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{E,f}({}'W_K)$) ; on a donc $\Delta_g = \Delta^{I_K}$ tandis que Δ_f est le noyau de la restriction de N à Δ_g. Le Frobenius f_k opère sur Δ_g et Δ_f et on pose

$$P_K(\Delta, u) = \det(1 - f_k u | \Delta_f) \in E[u].$$

Remarquons que $P_K(\Delta, u) = P_K(\Delta^{ss}, u)$.

1.2.2. Choïsissons un corps algébriquement clos E' contenant E et un homomorphisme non trivial $\psi: K \to E'^*$ dont le noyau contient une puissance de l'idéal maximal de l'anneau des entiers de K et une mesure de Haar μ sur le groupe additif K à valeurs dans E'.

Si l'on oublie l'action de N,

$$\rho: W_K \to \mathrm{Aut}_E(\Delta)$$

définit une représentation E-linéaire de dimension finie de W_K et on sait lui associer un entier $a(\rho)$, *son conducteur d'Artin*, et un élément non nul $\varepsilon(\rho, \psi, \mu) \in E'^*$, *son facteur* ε (cf. **[De73]**, §3). On sait que $a(\rho)$ et $\varepsilon(\rho, \psi, \mu)$ ne dépendent en fait que du semi-simplifié ρ^{ss} de ρ.

Rappelons que le *conducteur* $a(\Delta)$ est alors l'entier

$$a(\Delta) = a(\rho) + \dim_E(\Delta_g/\Delta_f),$$

tandis que son *facteur* ε est

$$\varepsilon(\Delta, \psi, \mu) = \varepsilon(\rho, \psi, \mu) \cdot \det(-f_k | \Delta_g/\Delta_f).$$

On voit que $a(\Delta) = a(\Delta^{ss})$ et $\varepsilon(\Delta, \psi, \mu) = \varepsilon(\Delta^{ss}, \psi, \mu)$.

1.2.3. Soient

$$(\beta) \qquad 0 \to \Delta' \to \Delta \to \Delta'' \to 0$$

une suite exacte courte de $\mathbf{Rep}_E({}'W_K)$ et

$$(\beta^*(Ta)) \qquad 0 \to \Delta''^*(Ta) \to \Delta^*(Ta) \to \Delta'^*(Ta) \to 0$$

la suite exacte que l'on obtient en tordant par Ta la suite exacte duale. Posons

$$P_K(\beta, u) = P_K(\Delta, u)/P_K(\Delta', u) \cdot P_K(\Delta'', u),$$

$$P_K(\beta^*(Ta), u) = P_K(\Delta^*(Ta), u)/P_K(\Delta''^*(Ta), u) \cdot P_K(\Delta'^*(Ta), u),$$

$$a(\beta) = a(\Delta) - a(\Delta') - a(\Delta'') \quad \text{et} \quad \varepsilon(\beta) = \varepsilon(\Delta, \psi, \mu)/\varepsilon(\Delta', \psi, \mu) \cdot \varepsilon(\Delta'', \psi, \mu)$$

(cette dernière quantité est indépendante du choix de ψ et μ).

PROPOSITION. *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$P_K(\beta^*(Ta), u^{-1}) = \varepsilon(\beta) \cdot u^{a(\beta)} \cdot P_K(\beta, u).$$

PREUVE. Avec des notations évidentes (cf. n°1.2.1), on a le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Delta' g & \longrightarrow & \Delta_g & \longrightarrow & \Delta''_g & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow N & & \downarrow N & & \downarrow N & & \\ 0 & \longrightarrow & \Delta'_g\{-1\} & \longrightarrow & \Delta_g\{-1\} & \longrightarrow & \Delta''_g\{-1\} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On en déduit par le lemme du serpent la suite exacte

$$0 \to \Delta'_f \to \Delta_f \to \Delta''_f \to \Delta'_g\{-1\}/N\Delta'_g \to \Delta_g\{-1\}/N\Delta_g \to \Delta''_g\{-1\}/N\Delta''_g \to 0.$$

Remarquons que le dual de $\Delta_g\{-1\}/N\Delta_g$ (en tant que E-espace vectoriel) est $\Delta^*(Ta)_f$. La suite exacte précédente devient

$$0 \to \Delta'_f \to \Delta_f \to \Delta''_f \to (\Delta'^*(Ta)_f)^* \to (\Delta^*(Ta)_f)^* \to (\Delta''^*(Ta)_f)^* \to 0.$$

Comme

$$\begin{aligned} P_K(\beta^*(Ta), u^{-1}) = \det(1 - f_k \cdot u^{-1} | \Delta^*(Ta)_f) \cdot \det(1 - f_k \cdot u^{-1} | \Delta'^*(Ta)_f)^{-1} \\ \cdot \det(1 - f_k \cdot u^{-1} | \Delta''^*(Ta)_f)^{-1}, \end{aligned}$$

la suite exacte précédente implique

$$\begin{aligned} P(\beta^*(Ta), u^{-1}) &= \det(1 - f_k \cdot u^{-1} | (\Delta_f)^*) \cdot \det(1 - f_k \cdot u^{-1} | (\Delta'_f)^*)^{-1} \\ &\quad \cdot \det(1 - f_k \cdot u^{-1} | (\Delta''_f)^*)^{-1} \\ &= \det(1 - f_k^{-1} \cdot u^{-1} | \Delta_f) \cdot \det(1 - f_k^{-1} \cdot u^{-1} | \Delta'_f)^{-1} \\ &\quad \cdot \det(1 - f_k^{-1} \cdot u^{-1} | \Delta''_f)^{-1} \\ &= u^{a(\beta)} \cdot \det(-f_k | \Delta'_f) \cdot \det(-f_k | \Delta''_f) \\ &\quad \cdot \det(-f_k | \Delta_f)^{-1} \cdot P_K(\beta, u) \\ &= u^{a(\beta)} \cdot \varepsilon(\beta) \cdot P_K(\beta, u) \end{aligned}$$

(on a en effet $a(\beta) = \dim \Delta'_f + \dim \Delta''_f - \dim \Delta_f$).

1.2.4. Soient maintenant E_0 un sous-corps de E et E' un corps algébriquement clos contenant E_0 tel qu'il existe un E_0-plongement $\tau: E \to E'$. Pour un tel τ, notons Δ_τ l'objet de $\mathbf{Rep}_{E'}(W_K)$ déduit de Δ par l'extension des scalaires τ. On dit que Δ est *rationnelle sur* E_0 si, quelque soient τ et τ' E_0-plongements de E dans E', il existe un isomorphisme de Δ_τ sur $\Delta_{\tau'}$. Cette définition est indépendante du choix de E'.

Si Δ est rationnelle sur E_0, on vérifie que $P_K(\Delta, u) \in E_0[u]$ et que $\varepsilon(\Delta, \tau \circ \psi, \tau \circ \mu) = \varepsilon(\Delta, \psi, \mu)$ pour tout automorphisme τ de E laissant stable E_0.

1.2.5. Soient E_0 un corps, E_1 et E_2 deux extensions de E_0 et, pour $i \in \{1, 2\}$, Δ_i un objet de $\mathbf{Rep}_{E_i}({}'W_K)$. On dit que Δ_1 et Δ_2 sont E_0-*compatibles* si elles sont rationnelles sur E_0 et s'il existe une extension E' de E_0, des E_0-plongements $\tau_1 : E_1 \to E'$ et $\tau_2 : E_2 \to E'$ tels que les objets de $\mathbf{Rep}_{E'}({}'W_K)$ déduits de Δ_1 par τ_1 et de Δ_2 par τ_2 soient isomorphes.

Si Δ_1 et Δ_2 sont E_0-compatibles, on a $P_K(\Delta_1, u) = P_K(\Delta_2, u)$ et $\varepsilon(\Delta_1, \psi, \mu) = \varepsilon(\Delta_2, \psi, \mu)$.

Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille de corps contenant E_0 et, si pour tout $i \in I$, on s'est donné un objet Δ_i de $\mathbf{Rep}_{E_i}({}'W_K)$, on dit que la famille des Δ_i est E_0-*compatible* si les Δ_i sont deux à deux E_0-compatibles.

1.3. Modules de Dieudonné-Weil-Deligne.

1.3.1. Appelons $\mathbb{Q}_p$-*DWD-module sur* K (DWD = Dieudonné-Weil-Deligne) la donnée d'un $\mathbb{Q}_p^{nr}$-space vectoriel Δ de dimension finie muni

- d'une action semi-linéaire de W_K, i.e. d'un homomorphisme

$$\rho_{sl} : W_K \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(\Delta)$$

vérifiant $\rho_{sl}(w)(\lambda x) = f_k^{v(w)}(\lambda) \cdot \rho_{sl}(w)(x)$ pour $w \in W_K$, $\lambda \in \mathbb{Q}_p^{nr}$, $x \in \Delta$, (remarquer que l'action de I_K est donc linéaire) telle que le noyau de la restriction à I_K est un sous-groupe ouvert,

- d'une application $\varphi : \Delta \to \Delta$, σ-linéaire, i.e. additive et vérifiant $\varphi(\lambda x) = \sigma(\lambda) \cdot \varphi(x)$, commutant à l'action de W_K,
- d'un endomorphisme N commutant à l'action de W_K et vérifiant

$$N\varphi = p\varphi N .$$

Les $\mathbb{Q}_p$-DWD-modules sur K forment, de manière évidente, une catégorie abélienne $\mathbb{Q}_p$-linéaire (les morphismes sont les applications $\mathbb{Q}_p^{nr}$-linéaires qui commutent à l'action de W_K et à φ et N) que nous notons $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(D'W_K)$.

On laisse au lecteur le soin de définir le produit tensoriel de deux objets de cette catégorie et de vérifier que l'on obtient ainsi une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_p$, *qui n'est pas neutre.*

1.3.2. Soit Δ un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(D'W_K)$. On peut munir Δ d'une action *linéaire* de W_K en posant (rappelons que $\sigma = f_k^{-h}$)

$$\rho(w) = \rho_{sl}(w) \circ \varphi^{hv(w)} .$$

On peut alors considérer $N : \Delta \to \Delta$ comme un morphisme

$$\Delta \to \Delta(Ta_0^{-1})$$

dans la catégorie des représentations $\mathbb{Q}_p^{nr}$-linéaires de ${}'W_K$, autrement dit on a muni Δ d'une structure d'objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p^{nr}}({}'W_K) := \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p^{nr}, Ta_0}({}'W_K)$.

On peut considérer cette construction comme un foncteur $\mathbb{Q}_p$-linéaire de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(D'W_K)$ dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p^{nr}}('W_K)$. Il n'est pas difficile de vérifier (cf. [**Bu**, Exp. VIII]) que c'est un $\otimes$-foncteur exact et fidèle et que, si Δ_1 et Δ_2 sont deux objets de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(D'W_K)$, l'application naturelle

$$\mathbb{Q}_p^{nr} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(D'W_K)}(\Delta_1, \Delta_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p^{nr}}('W_K)}(\Delta_1, \Delta_2)$$

est un isomorphisme.

1.3.3. REMARQUES. i) Soit Δ un $\mathbb{Q}_p^{nr}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour se donner une structure d'objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(D'W_K)$, il faut se donner ρ_{sl}, N et φ. On voit qu'il revient au même de se donner ρ, N et φ, ce qui fait que l'on peut voir un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(D'W_K)$ comme un objet Δ de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p^{nr}}('W_K)$ muni d'une application $\varphi\colon \Delta \to \Delta$, σ-semi-linéaire et commutant à l'action de ρ et de N.

ii) Il n'est pas difficile de voir que, si Δ est un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(D'W_K)$, alors l'objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p^{nr}}('W_K)$ sous-jacent est $\mathbb{Q}_p$-rationnel (cf. 1.2.4): on peut observer qu'il existe une extension finie galoisienne L de $\mathbb{Q}_p$ et un sous L-espace vectoriel Δ_L de Δ stable par N, φ et par $\rho(w)$ pour tout $w \in W_K$, tels que l'application naturelle $\mathbb{Q}_p^{nr} \otimes_L \Delta_L \to \Delta$ soit un isomorphisme; il suffit alors de vérifier que Δ_L est $\mathbb{Q}_p$-rationnel, ce qui résulte de ce que, pour tout $\tau \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$, il existe un entier r tel que φ^r définit un isomorphisme de $L \otimes_{L,\tau} \Delta_L$ sur Δ_L dans $\mathbf{Rep}_L('W_K)$). En particulier (cf. 1.2.4), $P_K(\Delta, u) \in \mathbb{Q}_p[u]$.

1.3.4. Soit maintenant ℓ un nombre premier $\neq p$. Le groupe $W_K \subset G_K$ opère sur $\mathbb{Q}_\ell(1)$ qui devient ainsi un objet de Tate de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(W_K)$. Il est commode de poser $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K) = \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\mathbb{Q}_\ell(1)}('W_K)$, d'appeler *$\mathbb{Q}_\ell$-DWD-modules sur K* les objets de cette catégorie et de convenir que $\rho_{sl} = \rho$.

1.3.5. Soient ℓ un nombre premier et $\nu \in \{e, f, h, g, pe, pf, ph, pg\}$. Si $\ell \neq p$, on pose $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(D'W_K) = \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}('W_K)$. Si $\ell = p$, on note $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p,\nu}(D'W_K)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(D'W_K)$ dont les objets sont ceux dont le module de Weil-Deligne sous-jacent est un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p^{nr},\nu}('W_K)$. En particulier, $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,pg}(D'W_K) = \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K)$.

1.3.6. Nous notons $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'G_K)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K)$ formée des objets Δ tels que l'action ρ_{sl} de W_K se prolonge en une action *continue* de G_K (ce prolongement est nécessairement unique). On voit que c'est une sous-catégorie tannakienne stable par extensions. Pour tout ν, on note aussi $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(D'G_K)$ "l'intersection" de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(D'W_K)$ et $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'G_K)$.

1.4. Cohomologie des DWD-modules. Dans ce n°, ℓ est un nombre premier arbitraire et Δ est un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K)$.

1.4.1. Soit $\nu \in \{e, f, h, g, pe, pf, ph, pg\}$. Si $j_{\nu^*}: \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K) \to \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(D'W_K)$ désigne l'adjoint à gauche de l'inclusion de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(D'W_K)$ dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K)$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose (n°01)

$$H^i_\nu(K, \Delta) = H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(D'W_K), j_{\nu^*}(\Delta)).$$

En particulier, $H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K), \Delta) = H^i_{pg}(K, \Delta)$.

1.4.2. PROPOSITION. *Pour $\nu \in \{e, f, h, g\}$ et pour tout i, la flèche naturelle*

$$H^i_\nu(K, \Delta) \to H^i_{p\nu}(K, \Delta)$$

est un isomorphisme. En particulier, $H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K), \Delta) = H^i_g(K, \Delta)$.

PREUVE. Soit L une extension finie galoisienne de K contenue dans $\overline{K}$ et soit J le groupe d'inertie de l'extension L/K. Si l'on note $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu,L}(D'W_K)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,p\nu}(D'W_K)$ formée des objets qui "deviennent ν" sur L, on voit qu'il suffit de vérifier que, si Δ est dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu,L}(D'W_K)$ et si Δ_0 désigne le plus grand sous-objet de Δ qui est dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(D'W_K)$, alors la flèche naturelle

$$H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(D'W_K), \Delta_0) \to H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,p\nu}(D'W_K)), \Delta)$$

est un isomorphisme. Mais $\Delta_0 = \Delta^J$ et cela résulte immédiatement de ce que, comme $\mathbb{Q}_\ell$ est de caractéristique 0 et J est un groupe fini, le foncteur $\Delta \mapsto \Delta_0$ est exact.

1.4.3. Dans la suite, Ta désigne *l'objet de Tate* choisi de la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K)$:

- si $\ell \neq p$, on a donc $Ta = \mathbb{Q}_\ell(1)$, W_K agissant via l'inclusion de W_K dans G_K et $N = 0$;
- si $\ell = p$, on a $Ta = \mathbb{Q}_p^{nr}$, W_K agissant également via l'inclusion de W_K dans G_K, φ étant $p\sigma$ et $N = 0$.

Si $\ell \neq p$, notons Δ_{st} (resp. $\Delta_{st}\{-1\}$) le sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de Δ (resp. $\Delta\{1\}$) fixe par I_K (agissant via ρ et l'inclusion de I_K dans W_K). On voit que $\Delta_{st}\{-1\}$ s'identifie à $\Delta_{st}(-1)$. On note φ l'endomorphisme de Δ qui est l'action de $f_k \in W_K/I_K$ sur Δ_{st} et sur $\Delta_{st}\{-1\}$. On dispose d'une application $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire $N: \Delta_{st} \to \Delta_{st}\{-1\}$ qui commute à l'action de φ.

Si $\ell = p$, notons Δ_{st} (resp. $\Delta_{st}\{-1\}$) le sous-K_0-espace vectoriel de Δ (resp. $\Delta\{-1\}$) fixe par W_K (agissant via ρ_{st}). Ce sont des K_0-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une action σ-semi-linéaire de φ; le K_0-espace vectoriel sous-jacent à $\Delta_{st}\{-1\}$ s'identifie à Δ_{st}, l'action de

φ étant tordue par p^{-1}. On dispose encore d'une application K_0-linéaire $N: \Delta_{st} \to \Delta_{st}\{-1\}$ qui commute à l'action de φ.

Considérons les complexes suivants de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie (où le premier terme écrit est en degré 0)

$C_e(K, \Delta) : \Delta_{st, \varphi=1, N=0} \to 0 \to 0 \to 0 \to \cdots$;

$C_f(K, \Delta) : \Delta_{st, N=0} \to \Delta_{st, N=0} \to 0 \to 0 \to \cdots$ (défini par $d \mapsto (\varphi - 1)(d)$);

$C_h(K, \Delta) : \Delta_{st, \varphi=1} \to \Delta_{st}\{-1\}_{\varphi=1} \to 0 \to 0 \to \cdots$ (défini par $d \mapsto Nd$);

$C_g(K, \Delta) : \Delta_{st} \to \Delta_{st} \oplus \Delta_{st}\{-1\} \to \Delta_{st}\{-1\} \to 0 \to \cdots$

(défini par $d \mapsto ((\varphi - 1)(d), Nd)$ et $(d_1, d_2) \mapsto Nd_1 - (\varphi - 1)(d_2)$).

1.4.4. Pour tout objet Δ de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D^t W_K)$, notons Δ^* son dual et posons $\Delta^*(Ta) = \Delta^* \otimes Ta$.

PROPOSITION. *Le complexe $C_g(K, \Delta^*(Ta))$ s'identifie au dual du complexe $C_g(K, \Delta)$.*

PREUVE. C'est immédiat une fois observé que $(\Delta^*(Ta))_{st}$ s'identifie au dual de $\Delta_{st}\{-1\}$ et $(\Delta^*(Ta))_{st}(-1)$ à celui de Δ_{st} (dans le cas $\ell = p$, utiliser que, pour tout K_0-espace vectoriel D, l'application naturelle du K_0-dual de D dans le $\mathbb{Q}_p$-dual induite par la trace de K_0 à $\mathbb{Q}_p$ est un isomorphisme de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels).

1.4.5. PROPOSITION. *Pour $\nu \in \{e, f, h, g\}$, $H^i_\nu(K, \Delta)$ s'identifie canoniquement et fonctoriellement à la cohomologie du complexe $C_\nu(K, \Delta)$.*

PREUVE. On commence par remarquer que, si Δ_ν désigne le plus grand sous-objet de Δ qui est dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, \nu}(D^t W_K)$, alors $C_\nu(K, \Delta) = C_\nu(K, \Delta_\nu)$. On observe alors que toute suite exacte courte

$$0 \to \Delta_1 \to \Delta_2 \to \Delta_3 \to 0$$

de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, \nu}(D^t W_K)$ induit une suite exacte de complexes

$$0 \to C_\nu(K, \Delta_1) \to C_\nu(K, \Delta_2) \to C_\nu(K, \Delta_3) \to 0$$

ce qui fait de $H^*(C_\nu(K, -))$ un foncteur cohomologique. Il est clair que, si Δ est dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, \nu}(D^t W_K)$, alors $H^0(C_\nu(K, \Delta))$ s'identifie à $H^0_\nu(K, \Delta)$; il est facile de vérifier directement que $H^1(C_\nu(K, \Delta))$ s'identifie à $H^1_\nu(K, \Delta)$; par exemple, si $\nu = g$ et si $\ell = p$, on a $\Delta_{st} = \Delta$ et $H^1_\nu(K, \Delta)$ classifie les extensions de l'objet-unité $\mathbb{Q}_\ell$ par Δ; se donner une telle extension revient à se donner une suite exacte courte

$$0 \to \Delta \to D \to \mathbb{Q}_\ell \to 0$$

de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels et à se donner l'action de φ et de N sur un relèvement $\hat{1}$ de 1; on doit avoir $\varphi\hat{1} = \hat{1} + d_1$ avec $d_1 \in \Delta$ et $N\hat{1} = d_2$ avec $d_2 \in \Delta\{-1\}$; en écrivant que $(\varphi N)(\hat{1}) = (N\varphi)(\hat{1})$, on trouve que (d_1, d_2)

doit être un 1-cocycle de $C_g(K, \Delta)$; enfin $\hat{1}$ est défini à l'addition d'un élément de Δ près et cette addition change (d_1, d_2) par un cobord.

Ceci termine la démonstration pour $\nu = e, f$, et h. Cela montre aussi que $H^i_g(K, \Delta) = H^i(C_g(K, \Delta))$ pour $i \neq 2$, que l'application naturelle $H^2_g(K, \Delta) \to H^2(C_g(K, \Delta))$ est injective et que le foncteur $\Delta \mapsto H^2(C_g(K, \Delta))/H^2_g(K, \Delta)$ est exact. Comme le foncteur contravariant $\Delta \mapsto \Delta^*(Ta)$ est aussi exact, on voit, en utilisant la proposition précédente que, si $H^2_g(K, -) \neq H^2(C_g(K, -))$, il existerait un sous-foncteur exact, non réduit à 0, du foncteur $H^0_g(K, -)$. Pour voir que ce n'est pas le cas, il suffit de vérifier que, pour tout objet Δ de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, g}(D^t W_K)$ et tout $x \in H^0_g(K, \Delta)$, il existe un épimorphisme $D \to \Delta$ de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, g}(D^t W_K)$ tel que x n'est pas dans l'image de $H^0_g(K, D)$, exercice que nous laissons au lecteur.

1.4.6. Corollaire. *Pour Δ et ν comme ci-dessus, les $H^i_\nu(K, \Delta)$ sont des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie, nuls si $i \neq 0, 1, 2$. On a aussi $H^2_\nu(K, \Delta) = 0$ si $\nu \neq g$ et $H^1_e(K, \Delta) = 0$. En outre*

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \cdot \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i_g(K, \Delta) = 0, \qquad \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^0_f(K, \Delta) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^1_f(K, \Delta),$$

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^0_h(K, \Delta) - \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^1_h(K, \Delta) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} \Delta_{st, \varphi=1} - \dim_{\mathbb{Q}_\ell} \Delta_{st}\{-1\}_{\varphi=1}.$$

Cela résulte immédiatement de la structure des complexes $C_\nu(K, \Delta)$ pour $\nu \in \{e, f, h, g\}$.

1.4.7. Si $\ell \neq p$, $H^*_g(K, Ta)$ est la cohomologie du complexe

$$\mathbb{Q}_\ell(1) \to \mathbb{Q}_\ell(1) \oplus \mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{Q}_\ell \to 0 \to 0 \to \cdots$$

où la flèche $\mathbb{Q}_\ell(1) \oplus \mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{Q}_\ell$ est la flèche nulle et $H^2_g(K, Ta)$ s'identifie à $\mathbb{Q}_\ell$.

Si $\ell = p$, $H^*_g(K, Ta)$ est la cohomologie du complexe

$$K_0 \to K_0 \oplus K_0 \to K_0 \to 0 \to 0 \to \cdots$$

où la flèche $K_0 \oplus K_0 \to K_0$ est la flèche $(a, b) \mapsto \sigma b - b$ et la trace de K_0 à $\mathbb{Q}_p$ identifie $H^2_g(K, Ta)$ à $\mathbb{Q}_\ell$.

Proposition. i) *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le cup-produit*

$$H^i_g(K, \Delta) \times H^{2-i}_g(K, \Delta^*(Ta)) \to H^2_g(K, Ta) = \mathbb{Q}_\ell$$

n'est autre que l'accouplement fourni par la Proposition 1.4.4 *(en particulier, c'est un accouplement parfait)*;

ii) *dans la dualité*

$$H^1_g(K, \Delta) \times H^1_g(K, \Delta^*(Ta)) \to \mathbb{Q}_\ell,$$

l'orthogonal de $H^1_f(K, \Delta)$ *s'identifie à* $H^1_f(K, \Delta^*(Ta))$ *et celui de* $H^1_h(K, \Delta)$ *à* $H^1_h(K, \Delta^*(Ta))$;

iii) *si* Δ *est F-semi-simple, i.e. si c'est un objet de* $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, ph}(D'W_K)$, *l'application naturelle* $H^1_f(K, \Delta) \oplus H^1_h(K, \Delta) \to H^1_g(K, \Delta)$ *est un isomorphisme.*

PREUVE. Montrons (i). Les propriétés fonctorielles des deux accouplements impliquent que, pour chacun d'entre eux et pour toute extension $0 \to \Delta \to \Delta_1 \to \mathbb{1} \to 0$ (où $\mathbb{1}$ est l'objet-unité), on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^0_g(K, \mathbb{1}) & \times & H^2_g(K, Ta)) & \to & H^2_g(K, Ta) = \mathbb{Q}_\ell \\ \downarrow & & \uparrow & & \| \\ H^1_g(K, \Delta) & \times & H^1_g(K, \Delta^*(Ta)) & \to & H^2_g(K, Ta) = \mathbb{Q}_\ell . \end{array}$$

En remarquant que pour tout élément x de $H^1_g(K, \Delta)$, il existe une telle extension pour laquelle x appartient à l'image de $H^0_g(K, \mathbb{1})$, on en déduit qu'il suffit de montrer que les deux accouplements $H^0_g(K, \mathbb{1}) \times H^2_g(K, Ta)) \to H^2_g(K, Ta)$ coïncident, ce qui est clair car dans les deux cas, il s'agit de $(a, b) \mapsto a \cdot b$ (multiplication par le scalaire a).

Montrons iii). Si l'on pose $\Delta^*(Ta) = \Delta'$, on a

$$\begin{aligned} \dim H^1_f(K, \Delta) + \dim H^1_f(K, \Delta') &= \dim H^0_g(K, \Delta) + \dim H^0_g(K, \Delta') \\ &= \dim H^0_g(K, \Delta) + \dim H^2_g(K, \Delta) \\ &= \dim H^1_g(K, \Delta). \end{aligned}$$

En outre, le dual de $\Delta_{st}\{-1\}_{\varphi=1}$ (resp. $\Delta_{st, \varphi=1}$) s'identifie à $\Delta'_{st}/(\varphi - 1)(\Delta'_{st})$ (resp. $\Delta'_{st}\{-1)/(\varphi - 1)\Delta'_{st}\{-1)$) et a la même dimension que $\Delta'_{st, \varphi=1}$ (resp. $\Delta'_{st}\{-1)_{\varphi=1}$) d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned} \dim H^1_h(K, \Delta) - \dim H^0_h(K, \Delta) &= \dim_{\mathbb{Q}_\ell} \Delta_{st, \varphi=1} - \dim_{\mathbb{Q}_\ell} \Delta_{st}\{-1\}_{\varphi=1} \\ &= \dim_{\mathbb{Q}_\ell} \Delta'_{st}\{-1)_{\varphi=1} - \dim_{\mathbb{Q}_\ell} \Delta'_{st, \varphi=1} \\ &= -\dim H^1_h(K, \Delta') + \dim H^0_h(K, \Delta') \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \dim H^1_h(K, \Delta) + \dim H^1_h(K, \Delta') &= \dim H^0_h(K, \Delta) + \dim H^0_h(K, \Delta') \\ &= \dim H^1_g(K, \Delta). \end{aligned}$$

Si maintenant $x \in H^1_g(K, \Delta)$ et $y \in H^1_g(K, \Delta')$, on voit que $\langle x, y \rangle = 0$ si $x \in H^1_f(K, \Delta)$ et $y \in H^1_f(K, \Delta')$ ou si $x \in H^1_h(K, \Delta)$ et $y \in H^1_h(K, \Delta')$. Compte-tenu des dimensions des différents espaces vectoriels, (ii) est clair.

Pour montrer iii), commençons par vérifier que $\dim H^1_h(K, \Delta) + \dim H^1_f(K, \Delta) = \dim H^1_g(K, \Delta)$ ou encore compte-tenu de ce qui précède

que $\dim H^1_h(K,\Delta) = \dim H^1_f(K,\Delta')$. Le dual de $\Delta_{st}\{-1\}_{\varphi=1}/N\Delta_{st}\{-1\}_{\varphi=1}$ s'identifie à $\Delta'_{st,N=0}/(\varphi-1)(\Delta'_{st,N=0})$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\dim H^1_h(K,\Delta) &= \dim \Delta_{st}\{-1\}_{\varphi=1}/N \\ &= \dim \Delta'_{st,N=0}/(\varphi-1)(\Delta'_{st,N=0}) = \dim H^1_f(K,\Delta').\end{aligned}$$

Il reste à montrer que lorsque Δ est F-semi-simple, l'intersection de $H^1_h(K,\Delta)$ et de $H^1_f(K,\Delta)$ dans $H^1_g(K,\Delta)$ est nulle. Soit x un élément de l'intersection: comme $x \in H^1_f(K,\Delta)$, il est représenté dans $\Delta_{st}\oplus\Delta_{st}\{-1\}$ par $(a,0)$ avec $a \in \Delta_{st,N=0}$; comme $x \in H^1_h(K,\Delta)$, il existe $b \in \Delta_{st}\{-1\}_{\varphi=1}$ et $d \in \Delta_{st}$ tels que $a = (\varphi-1)d$, $b = Nd$. On a donc $N(1-\varphi)d = 0$. La F-semi-simplicité de Δ implique que $d \in \Delta_{st,\varphi=1} + \Delta_{st,N=0}$. On a donc $a \in (\varphi-1)\Delta_{st,N=0}$, ce qui signifie que $x = 0$.

1.4.8. REMARQUES. a) Les résultats de ce paragraphe et leurs démonstrations restent les mêmes si l'on remplace les catégories $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(D'W_K)$ par $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(D'G_K)$. En particulier, si Δ est un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'G_K)$, $j_{\nu^*}(\Delta)$ est un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(D'G_K)$ et

$$H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(D'G_K), j_{\nu^*}(\Delta)) = H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(D'G_K), j_{\nu^*}(\Delta)).$$

b) Pour $\ell \neq p$, $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,pg}(D'W_K) = \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\mathbb{Q}_\ell(1)}('W_K)$. Les résultats de ce paragraphe et leurs démonstrations restent les mêmes si l'on remplace les catégories $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\mathbb{Q}_\ell(1)}('W_K)$ par $\mathbf{Rep}_{E,Ta}('W_K)$ où E est un corps de caractéristique 0 et Ta un objet de Tate.

2. La hiérarchie des représentations ℓ-adiques

2.1. Les anneaux $B_{st,\ell}$.

2.1.1. Nous ne refaisons pas ici la théorie des représentations p-adiques de Hodge–Tate, de de Rham ou cristallines de G_K : voir [FI] pour un "précis" ou **[Bu,** exp. II et III] pour une étude détaillée de cette théorie qui a son origine (Barsotti, Grothendieck, **[Se67, Ta67]**) dans la notion de représentation de Hodge–Tate et dans l'étude des groupes de Barsotti–Tate.

Rappelons cependant qu'à l'extension $\overline{K}/K$ sont associées toutes sortes d'anneaux topologiques contenant $\mathbb{Q}_p$, sur lesquels G_K opère continûment, munis éventuellement de structures supplémentaires. Tensorisant chacun de ces anneaux avec une représentation p-adique V de G_K et prenant les éléments fixes sous G_K, on obtient un objet "algébrique" associé à V qui reflète une partie des propriétés de V et qui permet même dans certains cas de reconstruire V.

2.1.2. Rappelons succinctement ce que sont ces anneaux et les faits les concernant que nous allons utiliser.

Le premier de ces anneaux est le corps $\mathbb{C}_p$, complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique usuelle.

Pour tout monoïde associatif et commutatif U noté multiplicativement, notons $V_p(U)$ le monoïde $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[1/p], U)$; un élément de ce monoïde peut se voir comme une suite $u = (u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec les $u^{(n)} \in U$ vérifiant $(u^{(n+1)})^p = u^{(n)}$ pour tout n. On pose $R = V_p(\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})$ (où $\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$), qui est muni d'une structure naturelle d'anneau local parfait de caractéristique p. Si $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ désigne l'anneau des entiers de $\overline{K}$, l'anneau $W(R)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans R s'identifie aussi à la limite projective des $W_n(\mathscr{O}_{\overline{K}}/p)$, l'application de transition de $W_{n+1}(\mathscr{O}_{\overline{K}}/p)$ dans $W_n(\mathscr{O}_{\overline{K}}/p)$ étant $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \mapsto (a_0^p, a_1^p, \ldots, a_{n-1}^p)$; on munit $W(R)$ de la topologie de la limite projective, avec la topologie discrète sur chaque $W_n(\mathscr{O}_{\overline{K}}/p)$. Le corps résiduel de R s'identifie à $\overline{k}$ et $W(R)$ est une $W(\overline{k})$-algèbre. On pose $W_{K_0}(R) = \mathbb{Q}_p' \otimes_{W(\overline{k})} W(R) = K_0 \otimes_{W(k)} W(R) = W(R)[1/p]$. Comme $W(R)$ est sans p-torsion, il s'injecte dans $W_{K_0}(R)$. L'application

$$\theta\colon W(R) \to \mathscr{O}_{\mathbb{C}_p},$$

qui envoie $(u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ sur $\sum p^n u_n^{(n)}$ est un homomorphisme continu surjectif de $W(\overline{k})$-algèbres topologiques dont le noyau est un idéal principal. Si ξ est un générateur de cet idéal, on note A_{cris} le séparé complété pour la topologie p-adique de la sous-$W(R)$-algèbre A_{cris}^0 de $W_{K_0}(R)$ engendrée par les $\xi^m/m!$, pour $m \in \mathbb{N}$. On pose $B_{\mathrm{cris}}^+ = K_0 \otimes_{W(k)} A_{\mathrm{cris}} = A_{\mathrm{cris}}[1/p]$. L'anneau A_{cris}^0 est stable sous les actions naturelles de G_K et du Frobenius φ sur $W_{K_0}(R)$ et ces actions s'étendent à A_{cris} et B_{cris}^+.

On note encore $\theta\colon W_{K_0}(R) \to \mathbb{C}_p$ l'homomorphisme de K_0-algèbres qui prolonge l'application définie plus haut. Son noyau est un idéal maximal. On note B_{dR}^+ le séparé complété de $W_{K_0}(R)$ pour la topologie $(\mathrm{Ker}\,\theta)$-adique; c'est donc un anneau de valuation discrète de corps résiduel $\mathbb{C}_p$. La *topologie naturelle* de B_{dR}^+ est celle de la limite projective, la topologie sur $W_{K_0}(R)/(\mathrm{Ker}\,\theta)^i$ étant la topologie induite par celle de $W_{K_0}(R)$ (celle-ci est donc moins fine que la topologie définie par la valuation).

On note encore θ son prolongement à B_{dR}^+. On identifie B_{cris}^+ à un sous-anneau de B_{dR}^+ (via l'homomorphisme continu qui prolonge l'inclusion de A_{cris}^0 dans $W_{K_0}(R)$). L'anneau B_{cris}^+ est dense dans B_{dR}^+ muni de sa topologie d'anneau de valuation discrète (et donc a fortiori pour la topologie naturelle).

2.1.3. Soient $\mathscr{M}_p$ l'idéal maximal de l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$ et $U_p = 1 + \mathscr{M}_p$. Alors $V_p(U_p)$ est de manière naturelle un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel muni d'une action de G_K et l'application $u \mapsto \log(u^{(0)})$ induit une suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_p(1) \to V_p(U_p) \to \mathbb{C}_p \to 0.$$

On voit que $V_p(U_p)$ s'identifie au groupe des unités congrues à 1 modulo l'idéal maximal de R et s'envoie dans le groupe des unités de $W(R)$ via

l'application $x \mapsto [x] = (x, 0, 0, \dots, 0, \dots)$. Pour tout $x \in V_p(U_p)$, la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}([x]-1)^n/n$ converge vers un élément $\log([x]) \in B^+_{\text{cris}}$ et on a $\theta(\log([x])) = \log(x^{(0)})$. On sait (cf. **[Bu, exp. II, n°3.1]**) que l'application $x \mapsto \log([x])$ identifie $V_p(U_p)$ au sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $B^+_{\text{cris},\varphi=p}$ de B^+_{cris} sur lequel φ opère par la multiplication par p.

Choisissons un élément $t = \log([\varepsilon])$, avec $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(1)} \neq 1$. On voit que t peut être considéré comme un générateur du $\mathbb{Z}_p$-module $\mathbb{Z}_p(1) \subset \mathbb{Q}_p(1)$. C'est aussi un générateur de l'idéal maximal de B^+_{dR}, ce qui fait que le corps des fractions B_{dR} de B^+_{dR} s'identifie à $B^+_{\text{dR}}[t^{-1}]$. Il est muni d'une filtration naturelle par les puissances de l'idéal maximal de B^+_{dR} : on a donc $\text{Fil}^i B_{\text{dR}} = B^+_{\text{dR}} \cdot t^i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. L'anneau gradué associé est la $\mathbb{C}_p$-algèbre $B_{\text{HT}} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}_p(i)$.

On pose aussi $B_{\text{cris}} = B^+_{\text{cris}}[t^{-1}]$. C'est un sous-anneau de B_{dR} stable par G_K. L'action de φ sur B^+_{cris} se prolonge sur B_{cris} en posant $\varphi(t^{-1}) = p^{-1}t^{-1}$. L'application

$$\varphi - 1 : B_{\text{cris}} \to B_{\text{cris}}$$

est surjective et son noyau $B_{\text{cris},\varphi=1}$ est une sous-$\mathbb{Q}_p$-algèbre de B_{cris}, stable par G_K. On a $\mathbb{Q}_p = B^+_{\text{dR}} \cap B_{\text{cris},\varphi=1}$.

2.1.4. Pour tout groupe abélien Γ, notons, pour tout entier $n \geq 1$, Γ_n le noyau de la multiplication par n et, pour tout nombre premier ℓ, $V^0_\ell(\Gamma) = \mathbb{Q}_\ell \otimes \lim.\text{proj.}_{r\in\mathbb{N}} \Gamma_{\ell^n}$. Si $K^*_\ell = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} (\lim.\text{proj.}_{r\in\mathbb{N}} K^*/(K^*)^{\ell^r})$, on a une suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_\ell(1) \to V^0_\ell(\overline{K}^*/K^*) \to K^*_\ell \to 0$$

qui fait de $V^0_\ell(\overline{K}^*/K^*)$ une représentation ℓ-adique de G_K extension de la représentation triviale K^*_ℓ (de dimension 1 si $\ell \neq p$ et $[K : \mathbb{Q}_p] + 1$ si $\ell = p$) par $\mathbb{Q}_\ell(1)$. (On remarque que la représentation $V^0_\ell(\overline{K}^*/K^*)$ peut être caractérisée comme solution d'un problème universel: si V est une représentation ℓ-adique de G_K extension d'une représentation V' sur laquelle G_K opère trivialement par $\mathbb{Q}_\ell(1)$, il existe une et une seule application linéaire G_K-équivariante de V dans $V^0_\ell(\overline{K}^*/K^*)$ qui induit l'identité sur $\mathbb{Q}_\ell(1)$).

2.1.5. La représentation $V^0_\ell(\overline{K}^*/K^*)(-1)$ contient $\mathbb{Q}_\ell$. Notons B_ℓ la $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre qui est le quotient de $\text{Sym}_{\mathbb{Q}_\ell}(V^0_\ell(\overline{K}^*/K^*)(-1))$ obtenu en identifiant $1 \in \mathbb{Q}_\ell = \text{Sym}^0_{\mathbb{Q}_\ell}(V^0_\ell(\overline{K}^*/K^*)(-1))$ à $1 \in \mathbb{Q}_\ell \subset V^0_\ell(\overline{K}^*/K^*)(-1) = \text{Sym}^1_{\mathbb{Q}_\ell}(V^0_\ell(\overline{K}^*/K^*)(-1))$. Si $\ell \neq p$ et si b_0 est un élément de $V^0_\ell(\overline{K}^*/K^*)(-1)$ qui n'est pas dans $\mathbb{Q}_\ell$, B_ℓ est l'algèbre des polynômes en b_0 à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$.

Si $\ell = p$, $V_p^0(U_p/U_p \cap K^*)$ est un hyperplan de $V_p^0(\overline{K}^*/K^*)$; notons $B_{p,f}$ la sous-$\mathbb{Q}_p$-algèbre de B_p engendrée par $V_p^0(U_p/U_p \cap K^*)(-1)$. Choisissons $b_0, b_1, \ldots, b_d \in V_p^0(\overline{K}^*/K^*)(-1)$, avec $b_i \in V_p^0(U_p/U_p \cap K^*)(-1)$ si et seulement si $i \neq 0$, de manière que leurs images dans $K_p^*(-1)$ forment une base de ce $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel. Alors $B_{p,f}$ est l'algèbre des polynômes en $b_1, b_2, \ldots, b_d$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ tandis que B_p est l'algèbre des polynômes en b_0 à coefficients dans $B_{p,f}$.

Par ailleurs, $V_p^0(U_p/U_p \cap K^*)$ s'identifie à un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de $V_p(U_p) = B_{\mathrm{cris},\varphi=p}^+$ et la multiplication par t^{-1} permet d'identifier $V_p^0(U_p/U_p \cap K^*)(-1)$ à un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de $B_{\mathrm{cris},\varphi=1}$. Comme cette identification envoie 1 sur 1, elle se prolonge de manière unique en un homomorphisme (de $\mathbb{Q}_p$-algèbres) de $B_{p,f}$ dans $B_{\mathrm{cris},\varphi=1}$ et celui-ci commute à l'action de G_K.

2.1.6. Lemme. *L'homomorphisme défini ci-dessus est injectif.*

Preuve. Soient $b_1, b_2, \ldots, b_d$ comme ci-dessus. Il s'agit de vérifier que l'on ne peut pas trouver $P \in \mathbb{Q}_p[X_1, X_2, \ldots, X_d]$ non nul tel que $P(b_1, b_2, \ldots, b_d) = 0$. Il suffit de vérifier que, pour $1 \leq i \leq d$, s'il existe un tel $P \in \mathbb{Q}_p[X_1, X_2, \ldots, X_i]$ de degré $r \geq 1$ en b_i, il en existe un autre de degré $r-1$ en b_i. Mais il est facile de voir que l'on peut trouver $g \in G_K$ tel que $g(b_i) = b_i + 1$ et $g(b_j) = b_j$ si $j \neq i$. Mais $g(P(b_1, b_2, \ldots, b_i)) - P(b_1, b_2, \ldots, b_i) = 0$ et le polynôme

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_i + 1) - P(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_i)$$

convient.

2.1.7. Dans la suite, on utilise cet homomorphisme pour identifer $B_{p,f}$ à un sous-anneau de $B_{\mathrm{cris},\varphi=1}$. On pose $B_{st,p} = B_{\mathrm{cris}} \otimes_{B_{p,f}} B_p$ (c'est l'anneau noté B_{st} dans [FI]) et on prolonge φ à $B_{st,p}$ en convenant que $\varphi b = b$ pour tout $b \in B_p$.

Avec des conventions évidentes, $B_{st,p}$ est engendrée en tant que $\mathbb{Q}_p$-algèbre par les $x \otimes t^{-1}$, pour $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, avec $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ et $x^{(0)} \in K^*$. Un tel $x \otimes t^{-1}$ est dans $B_{p,f}$ si et seulement si $x^{(0)} \in U_K$, groupe des unités de l'anneau des entiers de K, auquel cas son image dans B_{dR} est

$$t^{-1}\left(\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}([x]-1)^n/n\right)$$
$$= t^{-1}\left(\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}(([x]/x^{(0)})-1)^n/n + \log(x^{(0)})\right).$$

On voit que, même si $x^{(0)} \notin U_K$, la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}(([x]/x^{(0)})-1)^n/n$ converge dans B_{dR}. Si l'on *choisit* un prolongement à K^*,

$$\log: K^* \to K$$

du logarithme p-adique usuel, il existe alors un et seul homomorphisme de B_{cris}-algèbres qui envoie $x \otimes t^{-1}$ sur

$$t^{-1}\left(\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}(([x]/x^{(0)})-1)^n/n + \log(x^{(0)})\right).$$

Cette application est G_K-équivariante et on montre ([Bu, exp. II, n° 4.2.4 et n°4.3]) qu'elle est injective; nous l'utilisons dans la suite pour identifier $B_{st,p}$ à un sous-anneau de B_{dR} (prendre garde que cette identification *dépend du choix* du prolongement du logarithme). L'homomorphisme de $\overline{K}$-algèbres $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p^{ur}} B_{st,p} \to B_{\mathrm{dR}}$ que l'on en déduit par extension des scalaires est encore injectif (loc.cit.).

On a $(B_{\mathrm{dR}})^{G_K} = K$ tandis que $(B_{\mathrm{dR}})^{I_K}$ est le complété de l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$. En outre $(B_{\mathrm{cris}})^{G_K} = (B_{st,p})^{G_K} = K_0$ tandis que, pour tout sous-groupe ouvert H de I_K, $(B_{\mathrm{cris}})^H = (B_{st,p})^H = \mathbb{Q}_p^r$.

Pour $\ell \neq p$, on écrit aussi $B_{st,\ell} = B_\ell$. Si b_0 est comme en 2.1.5, $B_{st,\ell}$ est l'anneau des polynômes en b_0 à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$ (resp. B_{cris}) si $\ell \neq p$ (resp. $\ell = p$). Pour $\ell \neq p$ et tout sous-groupe H de G_K tel que $H \cap I_K$ est ouvert dans I_K, $(B_{st,\ell})^H = \mathbb{Q}_\ell$.

2.1.8. Soit v_K la valuation de K normalisée par $v_K(K^*) = \mathbb{Z}$. Elle se prolonge par continuité en un homomorphisme de K_ℓ^* dans $\mathbb{Z}_\ell \subset \mathbb{Q}_\ell$. Si $\ell = p$ (resp. $\neq p$), on note

$$N = N_K: B_{st,\ell} \to B_{st,\ell}(-1)$$

l'unique $\mathbb{Q}_\ell$-dérivation (resp. B_{cris}-dérivation) de $B_{st,\ell}$ telle que, si $t \in \mathbb{Q}_\ell(1)$ est non nul, si $u \in V_p^0(\overline{K}^*/K^*)$ et si $\overline{u}$ est son image dans K_ℓ^*, alors $N(u \otimes t^{-1}) = v_K(\overline{u}) \otimes t^{-1}$. On voit que N commute à l'action de G_K, est surjective et que son noyau est $\mathbb{Q}_\ell$ (resp. B_{cris}) si $\ell \neq p$ (resp. $\ell = p$). Si $\ell = p$, N commute à l'action de φ (agissant sur $B_{st,p}(-1) = B_{st,p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(-1)$ par $\varphi(b \otimes t^{-1}) = \varphi b \otimes t^{-1}$). Attention que, si l'on utilise l'application $b \otimes t^{-1} \mapsto bt^{-1}$ pour identifier $B_{st,p}(-1)$ à $B_{st,p}$, alors $N\varphi = p\varphi N$.

2.2. Représentations potentiellement semi-stables. Dans tout le n°2.2, V est une représentation ℓ-adique de G_K. On pose $b(V) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} V$.

2.2.1. Si $\ell = p$, rappelons [Se67] que le K-espace vectoriel gradué

$$D_{\mathrm{HT}}(V) = (B_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{gr}^i D_{\mathrm{HT}}(V), \text{ avec } \mathrm{gr}^i D_{\mathrm{HT}}(V) = (\mathbb{C}_p(i) \otimes V)^{G_K}$$

est de dimension finie $\leq b(V)$. On introduit les K-espaces vectoriels

$$D_{\mathrm{dR}}(V) = (B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \quad \text{et} \quad t_V = ((B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

Ils sont munis d'une filtration décroissante naturelle

$$\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z},$$

et

$$\mathrm{Fil}^i t_V = ((\mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \quad \text{pour } i \text{ entier } \leq 0.$$

On a des injections naturelles

$$\mathrm{gr}(D_{\mathrm{dR}}(V)) \to \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{gr}^i D_{\mathrm{HT}}(V), \qquad \mathrm{gr}(\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(V)) \to \bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{gr}^i D_{\mathrm{HT}}(V),$$

et

$$\mathrm{gr}(D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(V)) \to \mathrm{gr}(t_V) \to \bigoplus_{i<0} \mathrm{gr}^i D_{\mathrm{HT}}(V).$$

On en déduit que $\dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) \leq b(V)$ et on dit que V *est de de Rham* si l'on a l'égalité. On voit qu'alors toutes ces injections sont des isomorphismes et la proposition suivante est immédiate.

2.2.2. Proposition. i) *On a* $\dim_K t_V \leq b(V)$.

ii) *Si V est de de Rham, l'application $D_{\mathrm{dR}}(V) \to t_V$ induite par la projection $B_{\mathrm{dR}} \to B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+$ est surjective et de noyau égal à* $\mathrm{Fil}^0 D(V)$.

iii) *Si*

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

est une suite exacte de représentations p-adiques et si V est de de Rham, il en est de même de V' et V'' et les suites

$$0 \to D_{\mathrm{dR}}(V') \to D_{\mathrm{dR}}(V) \to D_{\mathrm{dR}}(V'') \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to t_{V'} \to t_V \to t_{V''} \to 0$$

sont exactes.

Remarque. On appelle t_V *l'espace tangent de* V. Il est parfois commode de le voir comme un groupe vectoriel sur K, autrement dit, de poser, pour toute K-algèbre R, $t_V(R) = R \otimes_K t_V$.

2.2.3. Notons $\mathcal{J}_K$ l'ensemble des sous-groupes ouverts de I_K. Rappelons que l'on a noté $\mathbb{Q}_p'$ le complété de $\mathbb{Q}_p^{nr}$; si $\ell \neq p$, posons $\mathbb{Q}_\ell' = \mathbb{Q}_\ell$. Remarquons que, pour tout ℓ (y compris $\ell = p$) et tout $H \in \mathcal{J}_K$, $(B_{st,\ell})^H = \mathbb{Q}_\ell'$.

On pose

$$\widehat{D}_{pst}(V) = \text{lim.ind.}_{H\in\mathcal{J}_K}(B_{st,\ell}\otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V)^H.$$

On montre facilement ([**Bu**, Exp. VIII]) que $\widehat{D}_{pst}(V)$ est un $\mathbb{Q}'_\ell$-espace vectoriel de dimension finie $\leq b(V)$, avec l'égalité si et seulement si l'application naturelle

$$B_{st,\ell}\otimes_{\mathbb{Q}'_\ell}\widehat{D}_{pst}(V)\to B_{st,\ell}\otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V$$

est un isomorphisme.

On voit aussi que $\widehat{D}_{pst}(V)$ est muni d'une action semi-linéaire de G_K, l'action de I_K étant linéaire et discrète, i.e., le noyau de l'action de I_K est ouvert dans I_K. Si t est encore un générateur de $\mathbb{Q}_\ell(1)$, et si l'on pose $Nb = N_t b\otimes t^{-1}$ pour tout $b\in B_{st,\ell}$, on étend l'opérateur de monodromie en un opérateur

$$N: B_{st,\ell}\otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V\to B_{st,\ell}\otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V(-1)$$

en posant $N(b\otimes v) = N_t b\otimes(v\otimes t^{-1})$. Le résultat est indépendent du choix de t et induit un opérateur $\mathbb{Q}'_\ell$-linéaire, G_K-équivariant

$$N:\widehat{D}_{pst}(V)\to\widehat{D}_{pst}(V(-1)).$$

Introduisons les sous-$\mathbb{Q}'_\ell$-espaces vectoriels de $\widehat{D}_{pst}(V)$:

$$\widehat{D}_{st}(V) = (\widehat{D}_{pst}(V))^{I_K} = (B_{st,\ell}\otimes V)^{I_K},\qquad \widehat{D}_{pbr}(V) = (\widehat{D}_{pst}(V))_{N=0},$$

et

$$\widehat{D}_{br}(V) = \widehat{D}_{st}(V)\cap\widehat{D}_{pbr}(V) = (\widehat{D}_{st}(V))_{N=0}.$$

On dit que V est *potentiellement semi-stable* (resp. est *semi-stable*, resp. a *potentiellement bonne réduction*, resp. a *bonne réduction*) si la dimension de $\widehat{D}_{pst}(V)$ (resp. $\widehat{D}_{st}(V)$, resp. $\widehat{D}_{pbr}(V)$, resp. $\widehat{D}_{br}(V)$) est $b(V)$.

2.2.4. Supposons $\ell\neq p$. Il résulte facilement du théorème de monodromie ℓ-adique de Grothendieck [**ST68**, App.] que V est toujours potentiellement semi-stable. On voit que V est semi-stable si et seulement si l'action de I_K est unipotente. On a $\widehat{D}_{br}(V) = V^{I_K}$, ce qui fait que V a bonne réduction si et seulement si V est non ramifiée. Enfin $\widehat{D}_{pbr}(V) = \text{lim.ind.}_{H\in\mathcal{J}_K} V^H$ et V a potentiellement bonne réduction si et seulement si I_K opère à travers un quotient fini (auquel cas $\widehat{D}_{pbr}(V) = V$).

2.2.5. Supposons $\ell = p$. Notons $\mathcal{G}_K$ l'ensemble des sous-groupes ouverts de G_K, et posons

$$D_{pst}(V) = \text{lim.ind.}_{H\in\mathcal{G}_K}(B_{st,p}\otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^H\quad\text{et}\quad D_{st}(V) = (B_{st,p}\otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

Il est facile de voir que les applications naturelles $\mathbb{Q}_p' \otimes_{\mathbb{Q}_p^{nr}} D_{pst}(V) \to \widehat{D}_{pst}(V)$ et $\mathbb{Q}_p' \otimes_{K_0} D_{st}(V) \to \widehat{D}_{st}(V)$ sont des isomorphismes. En particulier, la notion de représentation p-adique (potentiellement) semi-stable coïncide avec celle qui est donnée dans [**Bu,** Exp. III, §5].

Rappelons (op.cit.) que la dimension du K-espace vectoriel $D_{pst,K}(V) = (\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p^{nr}} \widehat{D}_{pst}(V))^{G_K} = (\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p^{nr}} D_{pst}(V))^{G_K}$ est égale à la $\mathbb{Q}_p'$-dimension de $\widehat{D}_{pst}(V)$ et l'inclusion de $\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p^{nr}} B_{st,p}$ dans B_{dR} identifie $D_{pst,K}(V)$ à un sous-K-espace vectoriel de $D_{\mathrm{dR}}(V)$. En particuler, si V est potentiellement semi-stable, V est de de Rham.[2]

Rappelons (op.cit.) par ailleurs que l'on note $D_{\mathrm{cris}}(V)$ le K_0-espace vectoriel $(B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. L'application naturelle $\mathbb{Q}_p' \otimes_{K_0} D_{\mathrm{cris}}(V) \to \widehat{D}_{br}(V)$ est un isomorphisme; en particulier, $\dim_{K_0} D_{\mathrm{cris}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p'} \widehat{D}_{br}(V)$ et dire que V a bonne réduction signifie qu'elle est *cristalline.*

2.2.6. Si $\ell \neq p$, posons aussi $D_{pst}(V) = \widehat{D}_{pst}(V)$. Dans tous les cas ($\ell =$ ou $\neq p$), $D_{pst}(V)$ a une structure naturelle d'objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D^{\prime}W_K)$: si $\Delta = D_{pst}(V)$, alors

i) le sous-$\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel Δ de $B_{st,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V$ est stable par G_K et $\rho_{sl}\colon W_K \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Delta)$ est la restriction de l'action naturelle de G_K;
ii) l'opérateur $N\colon \Delta \to \Delta\{-1\}$ est induit par l'opérateur du même nom défini au n°2.2.3 une fois que l'on a remarqué que $\Delta\{-1\}$ s'identifie à $D_{pst}(V(-1))$;
iii) enfin, si $\ell = p$, l'action de φ sur Δ est la restriction de $\varphi \otimes \mathrm{id}$ sur $B_{st,p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$.

2.2.7. Utilisant la "hiérarchie des représentations du groupe de Weil–Deligne" (n°1.2), on peut raffiner celle des représentations ℓ-adiques de G_K. Pour $\nu \in \{e, f, h, g, pe, pf, ph, pg\}$, on peut définir la sous-catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(G_K)$ comme étant la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)$ dont les objets sont les représentations V qui sont potentiellement semi-stables et telles que $\widehat{D}_{st}(V)$ vu comme un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell'}(^{\prime}W_K)$ est en fait dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell',\nu}(^{\prime}W_K)$.

Ce sont des sous-catégories tannakiennes de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)$. La catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,pg}(G_K)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,g}(G_K)$, resp. $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,pf}(G_K)$, resp. $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,f}(G_K)$) est celle des représentations potentiellement semi-stables (resp. semi-stables, resp. ayant potentiellement bonne réduction, resp. ayant bonne réduction).

2.2.8. Remarques (cf. [**Bu,** exp. VIII)]. a) Supposons $\ell \neq p$. La façon dont nous avons associé à la représentation V l'objet $D_{pst}(V)$ de

[2]On peut se demander s'il existe un théorème de monodromie p-adique arithmétique, i.e. s'il est vrai que toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable.

$\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K)$ diffère de la construction usuelle: choisissons un 1-cocycle non trivial $c: G_K \to \mathbb{Q}_\ell(1)$ (on peut par example choisir un relèvement f_K de f_k dans G_K ainsi qu'un homomorphisme non trivial, G_K-équivariant, $\pi: I_K \to \mathbb{Q}_\ell(1)$, poser $g = \alpha(g) \cdot f_K^{\nu(g)}$, avec $\nu(g) \in \hat{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(g) \in I_K$ et prendre $c = \pi \circ \alpha$). Il existe alors une unique structure (V, ρ, N) d'objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K)$ sur le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel sous-jacent à V telle que, si, pour tout $g \in G$, on note N_g l'endomorphisme nilpotent de V défini par $N_g(v) = Nv \otimes c(g)$, on ait

$$g(v) = (\rho(g) \circ \exp(N_g))(v) \text{ si } v \in V \text{ et } g \in W_K.$$

On obtient ainsi un $\otimes$-foncteur $D_{pst,c}: \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K) \to \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K)$. Il n'est pas difficile de voir que les foncteurs $D_{pst,c}$ et D_{pst} sont naturellement équivalents.

b) Encore pour $\ell \neq p$, on voit que le foncteur D_{pst} induit une $\otimes$-équivalence entre $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K) = \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,pg}(G_K)$ et la sous-catégorie pleine $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'G_K)$ de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K)$. En particulier, les résultats du n°1.4 permettent de calculer la cohomologie galoisienne de V.

c) Lorsque $\ell = p$, on peut considérer D_{pst} comme un foncteur additif $\mathbb{Q}_p$-linéaire de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(D'W_K)$; sa restriction à $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,pg}(G_K)$ est un $\otimes$-foncteur exact et fidèle, dont l'image essentielle est contenue (et vraisemblablement égale à $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(D'G_K)$).

d) Si Δ est un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(D'W_K)$, $\Delta_K = (\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p^{nr}} \Delta)^{W_K}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur K égale à la dimension de Δ sur $\mathbb{Q}_p^{nr}$. Appelons *DWD-module filtré* la donnée d'un couple formé un objet Δ de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(D'W_K)$ et d'une filtration décroissante $(\mathrm{Fil}^i\Delta_K)_{i\in\mathbb{Z}}$ de Δ_K par des sous-K-espaces vectoriels vérifiant $\mathrm{Fil}^i\Delta_K = \Delta_K$ si $i \ll 0$ et $= 0$ si $i \gg 0$. Les DWD-filtrés forment de manière évidente une catégorie $\mathbb{Q}_p$-linéaire, qui n'est pas abélienne. Si $\ell \neq p$ et si la représentation V est potentiellement semi-stable, $D_{pst}(V)_K$ s'identifie à $D_{\mathrm{dR}}(V)$ et $D_{pst}(V)$ a donc une structure naturelle de DWD-module filtré. On en déduit que D_{pst} induit un foncteur $\mathbb{Q}_p$-linéaire de la catégorie des représentations p-adiques potentiellement semi-stables de G_K dans celle des DWD-modules filtrés et on montre que ce foncteur est pleinement fidèle.

3. Cohomologie galoisienne

3.1. Quelques suites exactes. Dans la suite, on prendra garde que, comme on l'a déjà remarqué, l'application $b \otimes t^{-1} \mapsto bt^{-1}$ permet d'identifier $B_{st,p}(-1)$ à $B_{st,p}$ mais ne commute pas à φ (elle envoie $\varphi b \otimes t^{-1}$ sur $p\varphi(bt^{-1})$).

3.1.1. PROPOSITION. *Soit* $\lambda: B_{st,p} \to B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+$ *le composé de l'inclusion de* $B_{st,p}$ *dans* B_{dR} *avec la projection de* B_{dR} *sur* $B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+$. *Les suites*

$$(S_e) \qquad 0 \to \mathbb{Q}_p \to B_{\mathrm{cris},\varphi=1} \to B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+ \to 0$$
$$(\textit{avec } a \mapsto a;\ b \mapsto \lambda(b)),$$

$$(S_f) \qquad 0 \to \mathbb{Q}_p \to B_{\mathrm{cris}} \to B_{\mathrm{cris}} \oplus B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+ \to 0$$
$$(\textit{avec } a \mapsto a;\ b \mapsto (\varphi b - b, \lambda(b))),$$

$$(S_h) \qquad 0 \to \mathbb{Q}_p \to B_{st,p,\varphi=1} \to B_{st,p}(-1)_{\varphi=1} \oplus B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+ \to 0$$
$$(\textit{avec } a \mapsto a;\ b \mapsto (Nb, \lambda(b))),$$

$$(S_g) \quad 0 \to \mathbb{Q}_p \to B_{st,p} \to B_{st,p} \oplus B_{st,p}(-1) \oplus B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+ \to B_{st,p}(-1) \to 0$$
$$(\textit{avec } a \mapsto a;\ b \mapsto (\varphi b - b, Nb, \lambda(b));\ (b_1, b_2, c) \mapsto (Nb_1 - \varphi b_2 + b_2))$$

sont exactes. Elles sont scindées en tant que suites exactes de $\mathbb{Q}_p$*-espaces vectoriels topologiques.*

3.1.2. PREUVE DE L'EXACTITUDE. L'exactitude en $\mathbb{Q}_p$ de chacune de ces quatre suites est claire. L'exactitude en le second terme résulte, pour (S_e) et (S_f), de ce que $\mathbb{Q}_p = B_{\mathrm{cris},\varphi=1} \cap B_{\mathrm{dR}}^+$ (n° 2.1.3) et, pour (S_g) et (S_h), de ce qu'en outre, $B_{\mathrm{cris}} = B_{st,p,N=0}$ (n°2.1.8).

Pour achever la preuve de *l'exactitude de* (S_e), il reste donc à vérifier que $B_{\mathrm{dR}} = B_{\mathrm{cris},\varphi=1} + B_{\mathrm{dR}}^+$. Soit t un générateur de $\mathbb{Q}_p(1)$; c'est un élément de $B_{\mathrm{cris},\varphi=p}^+$ vérifiant $\varphi(t) = pt$ et c'est aussi un générateur de l'idéal maximal de B_{dR}^+. Comme, pour tout $c \in B_{\mathrm{dR}}$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $t^r c \in B_{\mathrm{dR}}^+$, il suffit de vérifier que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $B_{\mathrm{dR}}^+ \subset B_{\mathrm{cris},\varphi=p^r}^+ + \mathrm{Fil}^r B_{\mathrm{dR}}$. De proche en proche, il suffit de s'assurer que $B_{\mathrm{dR}}^+ \subset B_{\mathrm{cris},\varphi=p^r}^+ + \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$. Or on sait (cf. n°2.1.3) que la suite

$$0 \to \mathbb{Q}_p(1) \to B_{\mathrm{cris},\varphi=p}^+ \to \mathbb{C}_p \to 0$$

est exacte. On peut donc, si $b \in B_{\mathrm{dR}}^+$, trouver $b_1, b_2, \ldots, b_r \in B_{\mathrm{cris},\varphi=p}^+$ tels que $\theta(b_1, b_2 \cdots b_r) = \theta(b_1) \cdot \theta(b_2) \cdots \theta(b_r) = \theta(b)$. On a bien $b_1 b_2 \cdots b_r \in B_{\mathrm{cris},\varphi=p^r}^+$, tandis que $b - b_1 b_2 \cdots b_r \in \mathrm{Fil}^1 B_{\mathrm{dR}}$.

Pour achever la preuve de l'*exactitude de* (S_f), il reste à vérifier que, si $b \in B_{\mathrm{cris}}$ et $c \in B_{\mathrm{dR}}$, alors il existe $x \in B_{\mathrm{cris}}$ et $y \in B_{\mathrm{dR}}^+$ tels que $b = \varphi x - x$ et $c = b + y$. Comme $\varphi - 1$ est surjectif sur B_{cris} (n°2.1.3), il existe $x_0 \in B_{\mathrm{cris}}$ tel que $\varphi x_0 - x_0 = b$; il suffit alors de prendre $x = x_0 + x_1$ où $x_1 \in B_{\mathrm{cris},\varphi=1}$ et $y \in B_{\mathrm{dR}}^+$ sont tels que $c = x_1 + y$, ce qui est possible d'après l'exactitude de (S_e).

Pour *l'exactitude de* (S_h), il reste à vérifier la surjectivité de $B_{st,p,\varphi=1} \to B_{st,p}(-1)_{\varphi=1} \oplus B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+$: elle résulte de ce que $N: B_{st,p} \to B_{st,p}(-1)$ est

surjective et envoie $B_{st,p,\varphi=1}$ sur $B_{st,p}(-1)_{\varphi=1}$ et de ce que le noyau de N sur $B_{st,p,\varphi=1}$ est $B_{\mathrm{cris},\varphi=1}$ qui s'envoie surjectivement sur $B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+$.

Enfin pour *l'exactitude de* (S_g), il reste à vérifier

a) l'exactitude en $X = B_{st,p} \oplus B_{st,p}(-1) \oplus B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+$: il est clair que l'application composée $B_{st,p} \to X \to B_{st,p}(-1)$ est nulle; comme $N: B_{st,p} \to B_{st,p}(-1)$ est surjective, il suffit de vérifier que si $(b_1, 0, c) \in X$ s'envoie sur 0 dans $B_{st,p}(-1)$, i.e., si $b_1 \in B_{\mathrm{cris}}$, alors $(b_1, 0, c)$ est dans l'image de $B_{st,p}$, ce qui est l'exactitude de (S_f) en $B_{\mathrm{cris}} \oplus B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+$;

b) la surjectivité de $X \to B_{st,p}(-1)$ qui est immédiate puisque $N: B_{st,p} \to B_{st,p}(-1)$ est déjà surjective.

3.1.3. Il est clair que les applications qui interviennent dans les suites exactes ci-dessus sont continues. *Prouvons l'existence de sections $\mathbb{Q}_p$-linéaires continues.* On vérifie facilement qu'il suffit de prouver que l'application $B_{\mathrm{cris},\varphi=1} \to B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+$ admet une section continue s_1, que $\varphi - 1: B_{\mathrm{cris}} \to B_{\mathrm{cris}}$ admet une section continue s_2 à valeurs dans B_{cris}^+ et que $N: B_{st,p} \to B_{st,p}$ admet une section continue s_3 à valeurs dans $B_{st,p}$ commutant à φ. Il résulte de 2.1.7 que l'on peut trouver $y = x \otimes t^{-1} \in B_{st,p,\varphi=1}$ tel que $B_{st,p}$ est une algèbre de polynômes en y à coefficients dans B_{cris} ; si $b = \sum b_n \cdot y^n$ avec $b_n \in B_{\mathrm{cris}}$, on prend $s_3(b) = \sum b_n \cdot y^{n+1}/(n+1)$.

On déduit l'existence de s_2 des suites exactes de [**Bu**, Exp. II, n°5.3.7].

Montrons rapidement l'existence de s_1 [**BK90**, 1.18]: Soit

$$W_n = \{\log[w_1] \cdots \log[w_n] \text{ avec } w_i \in V_p(U_p)\} \subset B_{\mathrm{cris},\varphi=p^n}.$$

On vient de voir que l'application $W_n \to B_{\mathrm{dR}}^+/t^n B_{\mathrm{dR}}^+$ est surjective. Comme le noyau de la projection de $B_{\mathrm{cris},\varphi=p^n}$ sur $B_{\mathrm{dR}}^+/t^n B_{\mathrm{dR}}^+$ est $\mathbb{Q}_p \cdot t^n \subset W_n$, on a $W_n = B_{\mathrm{cris},\varphi=p^n}$. On sait que, pour tout $n \geq 1$, la suite

$$0 \to W_{n-1} \cdot t \to W_n \to \mathbb{C}_p \to 0$$

est exacte. Posons

$$\mathscr{W}_n = \{\log[w_1] \cdots \log[w_n] \quad \text{avec } w_i \in V_p(1 + p\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p})\} \subset W_n$$

où $\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$. On vérifie que la flèche naturelle $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{W}_n \to W_n$ est un isomorphisme et que $\mathscr{W}_n$ est contenu dans A_{cris}. On en déduit que $\mathscr{W}_n$ est séparé et complet pour la topologie p-adique et que la topologie de W_n est la topologie induite. Comme l'image de $\mathscr{W}_n$ par la projection de W_n sur $\mathbb{C}_p$ est fermée dans $\mathscr{O}_{\mathbb{C}_p}$, cette projection admet une section continue $\sigma_n: \mathbb{C}_p \to W_n$. On peut donc écrire $W_n = W_{n-1} \cdot t \oplus S_n$ avec $S_n = \sigma_n(\mathbb{C}_p)$. Posons aussi $S_0 = \mathbb{Q}_p = W_0$. On a $B_{\mathrm{cris},\varphi=1} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n t^{-n} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S_n \cdot t^{-n}$ tandis que $B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+$ s'identifie à $B_{\mathrm{cris},\varphi=1}/\mathbb{Q}_p = B_{\mathrm{cris},\varphi=1}/S_0$ et, si $a \in B_{\mathrm{cris},\varphi=1}/\mathbb{Q}_p$ est l'image de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n t^{-n}$, avec $a_n \in S_n$, il suffit de prendre $s_1(a) = \sum_{n\geq 1} a_n t^{-n}$.

3.2. La cohomologie galoisienne classique.

3.2.1. Soient T une représentation $\mathbb{Z}_\ell$-adique de G_K et $i \in \mathbb{Z}$. Si T est un groupe fini, on a $H^i(K, T) = H^i(G_K, T) = H^i_{\text{cont}}(G_K, T)$. Dans le cas général, on pose

$$H^i(K, T) = \text{lim.proj.}_{n\in\mathbb{N}} H^i(G_K, T/\ell^n T).$$

Les $H^i(K, -)$ forment de manière naturelle un foncteur cohomologique et, pour tout T et tout i, la flèche canonique

$$H^i(K, T) \to H^i_{\text{cont}}(G_K, T)$$

est un isomorphisme. Nous l'utilisons pour identifier ces deux $\mathbb{Z}_\ell$-modules de type fini.

3.2.2. Soit V une représentation ℓ-adique de G_K. On peut toujours trouver une représentation $\mathbb{Z}_\ell$-adique T de G_K munie d'un isomorphisme de $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T$ sur V (par exemple un réseau de V stable par G_K) et, pour tout i, le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^i(K, T)$ est indépendant de T et on le note $H^i(K, V)$.

Les $H^i(K, -)$ forment un foncteur cohomologique. Pour tout V et tout i, la flèche canonique $H^i(K, V) \to H^i_{\text{cont}}(G_K, V)$ est un isomorphisme et nous l'utilisons pour identifier ces deux $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie.

Pour tout i et tout V, on dispose aussi d'une application naturelle

$$H^i(K, V) \to H^i(G_K, V) = H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K), V)$$

(n°01). On vérifie que c'est un isomorphisme et nous l'utilisons pour identifier ces deux $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels.

3.2.3. Soit T un groupe abélien fini d'ordre une puissance de ℓ. Rappelons (cf., par exemple, **[Mi86, chap. I]**) que les $H^i(K, T)$ sont des groupes finis, nuls si $i \neq 0, 1, 2$ et que l'on a

$$\prod_{i\in\mathbb{Z}} \#(H^i(K, T))^{(-1)^i} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell \neq p, \\ p^{-[K:\mathbb{Q}_p]} & \text{si } \ell = p. \end{cases}$$

Rappelons aussi (loc. cit.) que $H^2(K, \mathbb{Q}_\ell(1)/\mathbb{Z}_\ell(1))$ s'identifie à $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ et que, si $T^\frown = \text{Hom}(T, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$, le cup-produit

$$H^i(K, T) \times H^{2-i}(K, T^\frown(1)) \to \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$$

est un accouplement parfait.

3.2.4. De même, si V est une représentation ℓ-adique de G_K, les $H^i(K, V)$ sont des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie, nuls si $i \neq 0, 1, 2$; on a

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(K, V) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq p, \\ -[K:\mathbb{Q}_p] \cdot \dim_{\mathbb{Q}_\ell} V & \text{si } \ell = p. \end{cases}$$

En outre, $H^2(K, \mathbb{Q}_\ell(1))$ s'identifie à $\mathbb{Q}_\ell$ et le cup-produit

$$H^i(K, V) \times H^{2-i}(K, V^*(1)) \to \mathbb{Q}_\ell$$

(où V^* désigne le dual de V) est un accouplement parfait.

REMARQUE. Lorsque $\ell \neq p$, ces résultats classiques peuvent aussi se déduire des techniques développées au n°1.4 (cf. remarque (b) du n°2.2.8).

3.3. Les H^i_e, H^i_f, H^i_g et H^i_h. Dans tout le n°3.3, V est une représentation ℓ-adique de G_K.

3.3.1. Rappelons que $D_{pst}(V)$ est un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_t}(D'W_K)$.

Si $\ell \neq p$ et si $\nu \in \{e, f, h, g\}$, on note $C_\nu(K, V)$ le complexe $C_\nu(K, D_{pst}(V))$ (cf. n°1.4).

Si $\ell = p$, l'inclusion de $B_{st,p}$ dans B_{dR} induit une inclusion de $D_{st}(V) = (D_{pst}(V))^{G_K}$ dans $D_{\mathrm{dR}}(V)$ et on note $\lambda_V : D_{st}(V) \to t_V$ le composé de cette inclusion avec la projection de $D_{\mathrm{dR}}(V)$ dans t_V. Pour $\nu \in \{e, f, h, g\}$, $C^0_\nu(K, D_{pst}(V)) \subset D_{st}(V)$ et λ_V induit un morphisme du complexe $C_\nu(K, D_{pst}(V))$ dans $t_V[0]$; on note $C_\nu(K, V)$ le décalé de 1 vers la droite du cône de ce morphisme, de sorte que l'on a une suite exacte de complexes

$$0 \to C_\nu(K, V) \to C_\nu(K, D_{pst}(V)) \to t_V[0] \to 0.$$

3.3.2. Pour $\nu \in \{e, f, h, g\}$, définissons $D_\nu(V)$ ainsi:

- si $\ell \neq p$,

$$D_e(V) = V^{G_K}, \quad D_f(V) = V^{I_K},$$

$$D_h(V) = (B_{st,\ell} \otimes V)^{G_K} \quad \text{et} \quad D_g(V) = (B_{st,\ell} \otimes V)^{I_K};$$

- si $\ell = p$, $D_\nu(V) = (B_\nu \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$, avec

$$B_e = B_{\mathrm{cris},\varphi=1}, \quad B_f = B_{\mathrm{cris}}, \quad B_h = (B_{st,p})_{\varphi=1}, \quad \text{et} \quad B_g = B_{st,p}.$$

Si l'on pose $t_V = 0$ lorsque $\ell \neq p$, on voit que les complexes $C_\nu(K, V)$ s'écrivent (on renvoie au n°1.4 pour la définition des flèches autre que λ_V):

$$C_e(K, V) : D_e(V) \to t_V \to 0 \to 0 \to \cdots;$$
$$C_f(K, V) : D_f(V) \to D_f(V) \oplus t_V \to 0 \to 0 \to \cdots,$$
$$C_h(K, V) : D_h(V) \to D_h(V(-1)) \oplus t_V \to 0 \to 0 \to \cdots,$$
$$C_g(K, V) : D_g(V) \to D_g(V) \oplus D_g(V(-1)) \oplus t_V \to D_g(V(-1)) \to 0 \to \cdots.$$

3.3.3. Pour $\nu \in \{e, f, h, g\}$, on note $H^i_\nu(K, V)$ les groupes de cohomologie de $C_\nu(K, V)$. Remarquons que ce sont des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie, que $H^i_\nu(K, V) = 0$ pour $i \notin \{0, 1, 2\}$, que $H^2_\nu(K, V) = 0$ pour $\nu = e, f, h$. On a $H^i_\nu(K, V) = H^i_\nu(K, D_{pst}(V))$ si $i \neq 0, 1$ et l'on dispose de suites exactes

$$0 \to H^0_\nu(K, V) \to H^0_\nu(K, D_{pst}(V)) \to t_V \to H^1_\nu(K, V) \to H^1_\nu(K, D_{pst}(V)) \to 0$$

et

$$0 \to H^1_e(K, V) \to H^1_\nu(K, V) \to H^1_\nu(K, D_{pst}(V)) \to 0.$$

Si $\ell \neq p$, on a aussi $H^1_e(K, V) = 0$ et $H^1_\nu(K, V) = H^i_\nu(K, D_{pst}(V))$ pour tout i et tout ν.

REMARQUE. Dans **[BK90]**, Bloch et Kato définissent aussi des groupes $H^1_\nu(K, V)$, pour $\nu \in \{e, f, g\}$. Pour $\ell \neq p$, nos définitions redonnent les leurs. Pour $\ell = p$, ils ne définissent ces groupes que lorsque V est de de Rham; pour $\nu = e$ ou f, nos définitions redonnent les leurs, ainsi que pour $\nu = g$ si V est potentiellement semi-stable (cf. *infra*, remarque (i) du n°3.3.10). Pour une représentation p-adique V qui serait de de Rham sans être potentiellement semi-stable, le $H^1_g(K, V)$ de Bloch et Kato pourrait être différent du nôtre. Nous ne savons pas si une telle représentation existe mais on s'attend à ce que ce ne soit jamais le cas pour la réalisation p-adique d'un motif. C'est pourquoi nous avons fait le choix, discutable, de ne pas introduire une notation nouvelle.

3.3.4. Compte-tenu de la remarque (b) du n°2.2.8, la proposition 1.4.5 implique que:

PROPOSITION. *Supposons $\ell \neq p$. Pour $\nu \in \{e, f, h, g\}$ et $i \in \mathbb{Z}$, soit V_ν (resp. $V_{p\nu}$) la plus grande sous-représentation de V qui est dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, \nu}(G_K)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, p\nu}(G_K)$). Alors $H^i_\nu(K, V)$ s'identifie canoniquement et fonctoriellement à $H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, \nu}(G_K), V_\nu)$ et à $H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, p\nu}(G_K), V_{p\nu})$. En particulier, $H^i(K, V) = H^i_g(K, V)$.*

3.3.5. Si maintenant $\ell = p$, en tensorisant la suite exacte S_ν de la proposition 3.1.1 avec V, on obtient une résolution $S_\nu(V)$ de V par des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels topologiques avec action linéaire et continue de G_K (et existence de sections continues si l'on oublie l'action de G_K). Le complexe que l'on obtient en prenant les invariants sous G_K n'est autre que $C_\nu(K, V)$ et on obtient donc encore une application canonique

$$H^i_\nu(K, V) \to H^i(K, V).$$

3.3.6. Revenons au cas général. Remarquons que, pour $\nu \in \{e, f, h, g\}$, D_ν, vu comme foncteur additif de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)$ dans la catégorie des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels si $\ell \neq p$ (resp. K_0-espaces vectoriels si $\ell = p$), est exact à gauche et que $D_\nu(\mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell$ (resp. K_0).

Disons qu'une suite exacte courte de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)$ de la forme

$$0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$$

est une *ν-suite exacte* si la suite

$$0 \to D_\nu(V_1) \to D_\nu(V_2) \to D_\nu(V_3) \to 0$$

est exacte. Remarquons que, lorsque V_1 et V_3 sont des objets de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, \nu}(G_K)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, p\nu}(G_K)$), cela revient à demander que V_2 aussi.

3.3.7 PROPOSITION. *Soit* $v \in \{e, f, h, g\}$.

i) *L'application* $H^0_v(K, V) \to H^0(K, V)$ *est bijective.*

ii) *L'application* $H^1_v(K, V) \to H^1(K, V)$ *est injective et identifie* $H^1_v(K, V)$ *au sous-*$\mathbb{Q}_\ell$*-espace vectoriel de* $H^1(K, V)$ *classifiant les extensions* W *de* $\mathbb{Q}_\ell$ *par* V *telles que la suite*

$$0 \to V \to W \to \mathbb{Q}_\ell \to 0$$

soit une v*-suite exacte.*

iii) *Si* V *est un objet de* $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, v}(G_K)$ *(resp.* $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pv}(G_K)$*),* $H^1_v(K, V)$ *s'identifie à* $H^1(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, v}(G_K), V)$ *(resp.* $H^1(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pv}(G_K), V)$*).*

PREUVE. Lorsque $\ell \neq p$, c'est une conséquence immédiate de la proposition 3.3.4.

Lorsque $\ell = p$, commençons par observer que, si

$$(\beta) \qquad 0 \to V \to W \to \mathbb{Q}_p \to 0$$

est une suite exacte courte et si X désigne la somme amalgamée de $B_v \otimes V$ et de W au dessus de V (V étant identifiée à un sous-module de $B_v \otimes V$ via l'application $v \mapsto 1 \otimes v$), on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & B_v \otimes V & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B_v \otimes V & \longrightarrow & B_v \otimes W & \longrightarrow & B_v & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes et toutes les flèches verticales sont injectives. Si (β) correspond à un élément $x \in H^1(K, V)$, on voit alors que dire que (β) est une v-suite exacte revient à dire que x appartient au noyau $N_v H^1(K, V)$ de l'application $H^1(K, V) \to H^1(K, B_v \otimes V)$ induite par l'inclusion de V dans $B_v \otimes V$.

Mais le complexe $S_v(V)$ (n°3.3.5) fournit une suite exacte courte

$$0 \to V \to B_v \otimes V \to C_v \otimes V \to 0,$$

où B_v est comme au n°3.3.2 et C_v est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel topologique avec action linéaire et continue de G_K convenable, l'application $B_v \otimes V \to C_v \otimes V$ admettant une section continue. On a $(B_v \otimes V)^{G_K} = D_v(V) = C^0_v(K, V)$ tandis que $(C_v \otimes V)^{G_K}$ s'identifie à $Z^1_v(K, V)$. En prenant les éléments fixes par G_K, on obtient une suite exacte

$$0 \to H^0(K, V) \to C^0_v(K, V) \to Z^1_v(K, V) \to H^1(K, V) \to H^1(K, B_v \otimes V)$$

ou encore

$$0 \to H^0(K, V) \to C_\nu^0(K, V) \to Z_\nu^1(K, V) \to N_\nu H^1(K, V) \to 0$$

d'où (i) et (ii). L'assertion (iii) est maintenant immédiate.

3.3.8. Rappelons que $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg}(G_K)$ est la catégorie des représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables (et que c'est aussi $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)$ si $\ell \neq p$).

PROPOSITION. *Si V est potentiellement semi-stable, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,*

$$H_g^i(K, V) = H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg}(G_K), V).$$

PREUVE. Pour $\ell \neq p$, ce résultat est contenu dans la proposition 3.3.4. Supposons donc $\ell = p$. Toute suite exacte courte de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg}(G_K)$ induit une suite exacte courte des complexes $C_g(K, -)$ correspondant et $H_g^*(K, -)$ est donc un foncteur cohomologique. Comme $H^0(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg}(G_K), -)$ s'identifie à $H_g^0(K, -)$, on a des flèches naturelles $H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg}(G_K), -) \to H_g^i(K, -)$. D'après la proposition précédente, ce sont des isomorphismes pour $i = 0$ et 1. Comme $H_g^i(K, V) = 0$ pour $i \geq 3$, on en déduit que $H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg}(G_K), -) \to H_g^i(K, -)$ est un isomorphisme pour $i \neq 2$ et est injective pour $i = 2$. En raisonnant comme à la fin de la preuve de la proposition 1.4.5, on se ramène à vérifier que, pour toute représentation potentiellement semi-stable V et tout $x \in D_e(V)$, il existe une représentation potentiellement semi-stable W et un épimorphisme de W sur V tels que x n'est pas dans l'image de $D_e(W)$. On se ramène facilement au cas où V est semi-stable. C'est alors un exercice sur les représentations semi-stables que nous laissons au lecteur (utiliser la suite exacte (S_g)).

3.3.9. Si V_1 et V_2 sont deux représentations ℓ-adiques de G_K, la structure d'anneau sur $B_{st,\ell}$ induit une application bilinéaire

$$D_{pst}(V_1) \times D_{pst}(V_2) \to D_{pst}(V_1 \otimes V_2).$$

Lorsque l'on prend $V_1 = V^*(1)$ et $V_2 = V$, si l'on compose avec $D_{pst}(\eta)$ où $\eta : V^*(1) \otimes V \to \mathbb{Q}_\ell(1)$ est la projection canonique, on en déduit en particulier une application bilinéaire

$$D_{pst}(V^*(1)) \times D_{pst}(V) \to D_{pst}(\mathbb{Q}_\ell(1)) = Ta$$

(où Ta est l'objet de Tate de la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K)$, cf. n°1.4.3). On en déduit un morphisme de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K)$,

$$D_{pst}(V^*(1)) \to D_{pst}(V)^*(Ta)$$

qui est un isomorphisme lorsque V est potentiellement semi-stable.

Par ailleurs, on sait que $H_g^2(K, \mathbb{Q}_\ell(1)) = H_g^2(K, Ta)$ et $H^2(K, \mathbb{Q}_\ell(1))$ sont tous deux naturellement isomorphes à $\mathbb{Q}_\ell$ (n°1.4.7 et 3.2.4).

PROPOSITION. i) *Pour tout* $i \in \mathbb{Z}$, *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} H_g^i(K, V^*(1)) \times H_g^{2-i}(K, V) & \longrightarrow & H^i(K, V^*(1)) \times H^{2-i}(K, V) \\ \downarrow & & \\ H_g^i(K, D_{pst}(V^*(1))) \times H_g^{2-i}(K, D_{pst}(V)) & & \downarrow \\ \downarrow & & \\ H_g^i(K, D_{pst}(V)^*(Ta)) \times H_g^{2-i}(K, D_{pst}(V)) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_\ell \end{array}$$

(*où les flèches sont soient les flèches naturelles soient les flèches induites par le cup-produit*) *est commutatif.*

ii) *Soient* $x \in H^1(K, V^*(1))$ *et* $y \in H^1(K, V)$; *si* $x \in H_e^1(K, V^*(1))$ (*resp.* $H_f^1(K, V^*(1))$, $H_h^1(K, V^*(1))$, $H_g^1(K, V^*(1))$) *tandis que* $y \in H_g^1(K, V)$ (*resp.* $H_f^1(K, V)$, $H_h^1(K, V)$, $H_e^1(K, V)$), *alors l'image dans* $\mathbb{Q}_\ell$ *du cup-produit de* x *avec* y *est nulle.*

iii) *Si* V *est potentiellement semi-stable* (*en particuler, si* $\ell \neq p$), *dans la dualité entre* $H^1(K, V^*(1))$ *et* $H^1(K, V)$ *l'orthogonal de* $H_e^1(K, V^*(1))$ *est* $H_g^1(K, V)$, *celui de* $H_f^1(K, V^*(1))$ *est* $H_f^1(K, V)$, *celui de* $H_h^1(K, V^*(1))$ *est* $H_h^1(K, V)$ *et celui de* $H_g^1(K, V^*(1))$ *est* $H_e^1(K, V)$.

iv) *Lorsque l'action de* f_k *sur* $D_f(V)$ *est semi-simple, on a*

$$H_f^1(K, V)/H_e^1(K, V) \simeq H_g^1(K, V)/H_h^1(K, V).$$

PREUVE. Pour vérifier (i), on commence par vérifier la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_g^2(K, Ta) & \longrightarrow & H^2(K, \mathbb{Q}_\ell(1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q}_\ell & = & \mathbb{Q}_\ell, \end{array}$$

ce qui se fait en calculant explicitement l'image inverse de 1 dans $H_g^2(K, Ta)$ et dans $H^2(K, \mathbb{Q}_\ell(1))$. On termine alors comme pour la preuve de l'assertion (i) de la Proposition 1.4.7.

On montre (ii) par un calcul explicite (laissé au lecteur) de la forme bilinéaire à l'aide du complexe $C_g(K, V)$. On démontre (iii) par un argument de dimensions: on a en utilisant les suites exactes du n°3.3.3

$$\dim H_e^1(K, V) = \dim t_V - \dim H_g^0(K, D_{pst}(V)) + \dim H^0(K, V),$$

$$\begin{aligned} \dim H_g^1(K, V^*(1)) = {} & \dim t_{V^*(1)} - \dim H_g^0(K, D_{pst}(V^*(1))) \\ & + \dim H^0(K, V^*(1)) + \dim H_g^1(K, D_{pst}(V^*(1))); \end{aligned}$$

d'où, puisque $\dim H^0_g(K, D_{pst}(V^*(1))) = \dim H^2_g(K, D_{pst}(V))$ (on utilise ici le fait que V est potentiellement semi-stable) et en utilisant le n°3.2.4,

$$\dim H^1_e(K, V) + \dim H^1_g(K, V^*(1)) = \dim H^1(K, V).$$

On a de même pour $\nu \in \{f, h\}$

$$\begin{aligned}\dim H^1_\nu(K, V) &+ \dim H^1_\nu(K, V^*(1)) \\ &= \dim t_V + \dim t_{V^*(1)} + \dim H^0(K, V) + \dim H^0(K, V^*(1)) \\ &= \dim H^1(K, V),\end{aligned}$$

d'où iii).

On déduit aussi des suites exactes du n°3.3.3 que $H^1_f(K, V)/H^1_e(K, V) = H^1_f(K, D_{pst}(V))$ et $H^1_g(K, V)/H^1_h(K, V) = H^1_g(K, D_{pst}(V))/H^1_h(K, D_{pst}(V))$. L'assertion iv) se déduit alors de la proposition 1.4.7, iii).

3.3.10. Remarques. i) Supposons $\ell = p$ et V de de Rham. L'argument de dimension est encore valable pour $\nu \in \{f, h\}$. On en déduit que l'orthogonal de $H^1_f(K, V)$ (resp. $H^1_h(K, V)$) est encore égal à $H^1_f(K, V^*(1))$ (resp. $H^1_h(K, V^*(1))$). Pour $\nu = e$, il est montré dans **[BK90]** que l'orthogonal du noyau de l'application $H^1(K, V) \to H^1(K, B_{\mathrm{dR}} \otimes V)$ est $H^1_e(K, V^*(1))$. En particulier, on en déduit lorsque V est potentiellement semi-stable l'égalité de ce noyau avec $H^1_g(K, V)$ (voir **[H, N]**).

ii) Lorsque l'action de f_k sur $D_f(V)$ est semi-simple, on voit que $H^1_f(K, V) + H^1_h(K, V) = H^1_g(K, V)$ tandis que $H^1_f(K, V) \cap H^1_h(K, V) = H^1_e(K, V)$.

3.3.11. Il est commode de poser $H^i_{/f}(K, V) = H^i(K, V)/H^i_f(K, V)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$; en particulier, $H^2_{/f}(K, V) = H^2(K, V)$ et $H^i_{/f}(K, V) = 0$ si $i \neq 1, 2$.

Il résulte de la définition des H^i_f que

$$\sum (-1)^i \cdot \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i_f(K, V) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq p, \\ -[K : \mathbb{Q}_p] \cdot \dim_K t_V & \text{si } \ell = p. \end{cases}$$

Compte-tenu des résultats rappelés au n°3.2.4, on a

$$\sum (-1)^i \cdot \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i_{/f}(K, V) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq p, \\ -[K : \mathbb{Q}_p] \cdot (\dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K t_V) & \text{si } \ell = p. \end{cases}$$

Lorsque V est de de Rham, cette somme est aussi égale à

$$-[K : \mathbb{Q}_p] \cdot \dim_K \mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(V) = -[K : \mathbb{Q}_p] \cdot \dim_K t_{V^*(1)}.$$

4. Nombres de Tamagawa locaux

Dans tout ce paragraphe, T est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini muni d'une action linéaire et continue de G_K et $V = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T$.

4.1. Généralités.

4.1.1. Rappelons (n°3.3.2) que $t_V = 0$ et $D_f(V) = V^{I_K}$ si $\ell \neq p$, tandis que $t_V = ((B_{\mathrm{dR}}/B_{\mathrm{dR}}^+) \otimes V)^{G_K}$ et $D_f(V) = D_{\mathrm{cris}}(V) = (B_{\mathrm{cris}} \otimes V)^{G_K}$ si $\ell = p$.

Considérons la $\mathbb{Q}_\ell$-droite

$$L_f(K, V) = \det_{\mathbb{Q}_\ell} H^0(K, V) \otimes (\det_{\mathbb{Q}_\ell} H^1_f(K, V))^{-1}.$$

Le complexe $C_f(K, V)$ induit une suite exacte

$$(s_{f,K}(V)) \quad 0 \to H^0(K, V) \to D_f(V) \xrightarrow{\varphi - 1} D_f(V) \oplus t_V \to H^1_f(K, V) \to 0,$$

qui nous fournit un isomorphisme

$$\iota_V : L_f(K, V) \to (\det_{\mathbb{Q}_\ell} t_V)^{-1}$$

(si $\ell \neq p$, ι_V est donc un isomorphisme de $L_f(K, V)$ sur $\mathbb{Q}_\ell$).

4.1.2. On définit $H^1_f(K, T)$ comme l'image inverse dans $H^1(K, T)$ de $H^1_f(K, V) \subset H^1(K, V)$. Posons

$$L_f(K, T) = \det_{\mathbb{Z}_\ell} H^0(K, T) \otimes (\det_{\mathbb{Z}_\ell} H^1_f(K, T))^{-1}$$

(cf. 05). C'est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang 1 qui s'identifie à un réseau de $L_f(K, V)$. Si ω est un élément non nul de $\det_{\mathbb{Q}_\ell} t_V$, on appelle *nombre de Tamagawa de* T relatif à ω, et on note $\mathrm{Tam}^0_{K,\omega}(T)$ l'unique puissance de ℓ telle que

$$\iota_V(L_f(K, T)) = \mathbb{Z}_\ell \cdot \mathrm{Tam}^0_{K,\omega}(T) \cdot \omega^{-1}.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}_\ell^*$, on a $\mathrm{Tam}^0_{K,\alpha\omega}(T) = (|\alpha|_\ell)^{-1} \mathrm{Tam}^0_{K,\omega}(T)$.

Lorsque $\ell \neq p$, ou, plus généralement lorsque $t_V = 0$, on pose aussi $\mathrm{Tam}^0_K(T) = \mathrm{Tam}^0_{K,1}(T)$. On a alors

$$\iota_V(L_f(K, T)) = \mathbb{Z}_\ell \cdot \mathrm{Tam}^0_K(T).$$

4.2. Calculs de nombres de Tamagawa.

4.2.1. PROPOSITION. *Si T est de torsion (autrement dit, si $V = 0$, auquel cas $t_V = 0$), alors*

$$\mathrm{Tam}^0_{K,1}(T) = \#H^1(K, T)/\#H^0(K, T).$$

PREUVE. C'est clair puisqu'alors $H^1_f(K, T) = H^1(K, T)$.

4.2.2. PROPOSITION. *Supposons $\ell \neq p$, et T sans torsion. Alors,*

i) *si V est non ramifiée, on a*

$$\mathrm{Tam}^0_{K,1}(T) = 1;$$

ii) *dans le cas général,*

$$\mathrm{Tam}^0_{K,1}(T) = \#(H^1(I_K, T)^{G_K})_{\mathrm{tor}}.$$

PREUVE. Montrons (i): Si V est non ramifiée, $H^0(K, V) = H^0(k, V)$ tandis que $H^1_f(K, V) = H^1(k, V)$ classifie les représentations extensions de $\mathbb{Q}_\ell$ par V qui sont non ramifiées. On voit que T est aussi non ramifiée, en particulier $H^0(K, T) = H^0(k, T)$, et qu'une extension E de $\mathbb{Z}_\ell$ par T est telle que $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} E$ est encore non ramifiée si et seulement si E l'est; autrement dit, $H^1_f(K, T) = H^1(k, T)$. Mais on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(k, T) & \longrightarrow & T & \xrightarrow{f_k - 1} & T & \longrightarrow & H^1(k, T) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^0(k, V) & \longrightarrow & V & \xrightarrow{f_k - 1} & V & \longrightarrow & H^1(k, V) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & H^0(K, V) & \longrightarrow & V^{I_K} & \xrightarrow{\varphi - 1} & V^{I_K} & \longrightarrow & H^1_f(K, V) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Par conséquent, l'isomorphisme ι_V provient par extension des scalaires de l'isomorphisme de $L_f(K, T)$ sur $\mathbb{Z}_\ell$ fourni par la première ligne de ce diagramme, ce qui signifie que $\mathrm{Tam}^0_{K,1}(T) = 1$.

Montrons (ii): Comme $H^2(k, T^{I_K}) = H^2(k, V^{I_K}) = 0$, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1(k, T^{I_K}) & \longrightarrow & H^1(K, T) & \longrightarrow & H^1(I_K, T)^{G_K} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^1(k, V^{I_K}) & \longrightarrow & H^1(K, V) & \longrightarrow & H^1(I_K, V)^{G_K} & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

les lignes sont exactes. Comme $H^1(I_K, V)^{G_K} = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1(I_K, T)^{G_K}$, le noyau de $H^1(I_K, T)^{G_K} \to H^1(I_K, V)^{G_K}$ est son sous-groupe de torsion; comme $H^1_f(K, T) = H^1(k, V^{I_K}) \times_{H^1(K,V)} H^1(K, T)$, on a une suite exacte

$$0 \to H^1(k, T^{I_K}) \to H^1_f(K, T) \to ((H^1(I_K, T)^{G_K})_{\mathrm{tor}} \to 0.$$

En raisonnant comme dans (i), mais en remplaçant T par T^{I_K} et V par V^{I_K}, on voit que $\iota_V(L_f(K, T)) = \#((H^1(I_K, T)^{I_K})_{\mathrm{tor}} \cdot \mathbb{Z}_\ell$, et on a bien $\mathrm{Tam}^0_{K,1}(T) = \#((H^1(I_K, T)^{I_K})_{\mathrm{tor}}$.

4.2.3. Notons t un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$. Rappelons (n°2.1.3) que $\mathbb{Z}_p(1)$ se plonge dans $A_{\mathrm{cris}} \subset B_{\mathrm{cris}}$ et que t est inversible dans B_{cris}. On peut alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, identifier $A_{\mathrm{cris}}(n) = A_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(n)$ au sous-A_{cris}-module libre de rang 1 de B_{cris} engendré par t^n en posant $a \otimes t^n = at^n$ (attention toutefois que, si $a \in A_{\mathrm{cris}}$, $\varphi(at^n) = p^n \varphi a \cdot t^n$).

PROPOSITION. *Supposons $K/\mathbb{Q}_p$ non ramifiée, $\ell = p$, T sans torsion et V cristalline (de sorte que $D_{\mathrm{dR}}(V) = D_{\mathrm{cris}}(V) = D(V)$ et que t_V est un quotient de $D(V)$). Supposons aussi qu'il existe un entier r tel que $0 \leq r < p-1$ tel que $\mathrm{Fil}^{-r} D_{\mathrm{dR}}(V) = D(V)$, $\mathrm{Fil}^{-r+p} D_{\mathrm{dR}}(V) = 0$ et que V n'a pas de sous-objet V' non trivial tel que $\mathrm{Fil}^{-r+p-1} D_{\mathrm{dR}}(V') = D_{\mathrm{dR}}(V')$. Alors $M = (A_{\mathrm{cris}}(-r) \otimes_{\mathbb{Z}_p} T)^{G_K}$ est un réseau de $D(V)$; si $\overline{M}$ désigne le réseau de t_V qui est l'image de M et si ω est un élément non nul de $\det_{\mathbb{Q}_\ell} t_V$, alors*

$$\det_{\mathbb{Z}_\ell} \overline{M} = \mathbb{Z}_\ell \cdot \mathrm{Tam}^0_{K,\omega}(T)^{-1} \cdot \omega.$$

PREUVE. Il suffit de montrer que l'on a une suite exacte

$$0 \to H^0(K, T) \to M \to M \oplus \overline{M} \to H^1_f(K, T) \to 0,$$

où la flèche $M \to M \oplus \overline{M}$ est donnée par $x \mapsto ((\varphi - 1)(x)$, projection de $x)$.

Pour cela, si a et b sont des entiers vérifiant $a < b$, notons $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p, \mathrm{cris}, [a,b[}(G_K)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des représentations cristallines de G_K dont les objets sont les U tels que $\mathrm{Fil}^a D_{\mathrm{dR}}(V) = D(V)$, $\mathrm{Fil}^{b+1} D_{\mathrm{dR}}(V) = 0$ et que U n'a pas de sous-objet U' non trivial tel que $\mathrm{Fil}^b D_{\mathrm{dR}}(U') = D_{\mathrm{dR}}(U')$. Notons $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p, \mathrm{cris}, [a,b[}(G_K)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des représentations $\mathbb{Z}_p$-adiques de G_K dont les objets sont les T qui sont isomorphes à un sous-quotient d'un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p, \mathrm{cris}, [a,b[}(G_K)$.

Soit W l'anneau des entiers de $K = K_0$ (c'est aussi l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k). Appelons φ-module filtré faiblement admissible sur W la donnée d'un W-module de type fini M muni

i) d'une filtration décroissante $(\mathrm{Fil}^i M)_{i \in \mathbb{Z}}$ par des sous-W-modules facteurs directs de M, telle que $\mathrm{Fil}^i M = M$ si $i \ll 0$ et $= 0$ si $i \gg 0$,

ii) d'une famille $(\varphi^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ d'applications σ-semi-linéaires $\varphi^i : \mathrm{Fil}^i M \to M$ telles que $\varphi^i(x) = p\varphi^{i+1}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{Fil}^{i+1} M$ et que $M = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Im}\, \varphi^i$.

Ces φ-modules filtrés faiblement admissibles forment de manière évidente une catégorie additive $\mathbb{Z}_p$-linéaire et on démontre **[FL82]** qu'elle est abélienne. Notons $MF_{W[a,b[}$ la sous-catégorie pleine de celle-ci formée des objets M tels que $\mathrm{Fil}^a M = M$, $\mathrm{Fil}^{b+1} M = 0$, et M n'a pas de sous-objet M' non trivial tel que $\mathrm{Fil}^b M' = M'$.

Pour $0 \leq i \leq p-1$, si $x \in \mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{cris}} = A_{\mathrm{cris}} \cap \mathrm{Fil}^i B_{\mathrm{dR}}$, on a $\varphi(x) \in p^i A_{\mathrm{cris}}$, ce qui permet de définir $\varphi^i : \mathrm{Fil}^i A_{\mathrm{cris}} \to A_{\mathrm{cris}}$ par $\varphi^i(x) = p^{-i}\varphi(x)$. Ceci permet, si Λ est un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p, \mathrm{cris}, [0,p-1[}(G_K)$, de munir $M_{\mathrm{cris}}(\Lambda) = (A_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda)^{G_K}$ d'une structure d'objet de $MF_{W,[0,p-1[}$. On démontre **[FL82, Fo83]** que le foncteur M_{cris} induit une équivalence entre ces deux catégories.

En tordant par $\mathbb{Z}_p(-r)$, on en déduit un foncteur $M_{\mathrm{cris},r}$ qui est une équivalence entre $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p,\mathrm{cris},[-r,-r+p-1[}(G_K)$ et $MF_{W,[-r,-r+p-1[}$.

Si maintenant T est comme dans la proposition, T et $\mathbb{Z}_p$ sont tous deux des objets de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p,\mathrm{cris},[-r,-r+p-1[}(G_K)$ et on voit que $H^1_f(K,T)$ classifie les extensions de $\mathbb{Z}_p$ par T qui sont encore dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p,\mathrm{cris},[-r,-r+p-1[}(G_K)$. Alors le W-module sous-jacent à $M_{\mathrm{cris},r}(\mathbb{Z}_p)$ (resp. $M_{\mathrm{cris},r}(T)$) s'identifie à W (resp. M). Avec des notations évidentes, la proposition résulte alors facilement du calcul explicite de $\mathrm{Ext}^1_{MF_{W,[-r,-r+p-1[}}(W,M)$.

4.3. Comportement par induction. Dans ce numéro, on se donne une extension finie K' de K contenue dans $\overline{K}$ et un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini T', muni d'une action linéaire et continue de G_K. On suppose que $T=\mathbb{Z}_\ell[G_K]\otimes_{\mathbb{Z}_\ell[G_{K'}]}T'$ est la représentation de G_K induite par T'. Si $V'=\mathbb{Q}_\ell\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}T'$, il est immédiat que t_V s'identifie au K-espace vectoriel sous-jacent au K'-espace vectoriel $t_{V'}$. En particulier $\det_{\mathbb{Q}_\ell} t_V=\det_{\mathbb{Q}_\ell} t_{V'}$.

PROPOSITION. *Avec les hypothèses et les notations qui précèdent, si ω est une base de $\det_{\mathbb{Q}_\ell} t_{V'}$, on a*

$$\mathrm{Tam}^0_{K',\omega}(T')=\mathrm{Tam}^0_{K,\omega}(T).$$

PREUVE. On dispose d'isomorphismes canoniques

$$H^0(K',V')\simeq H^0(K,V),\qquad H^1(K',V')\simeq H^1(K,V),$$
$$H^1_f(K',V')\simeq H^1_f(K,V):$$

lorsque $\ell\neq p$, le troisième isomorphisme se déduit des égalités $H^1_f(K,V)=H^1(k,V^{I_K})$, $H^1_f(K',V')=H^1(k',V'^{I_{K'}})$ et de l'isomorphisme naturel $V^{I_K}=\mathbb{Z}_\ell[G_k]\otimes_{\mathbb{Z}_\ell[G_{k'}]}(V'^{I_{K'}})$; lorsque $\ell=p$, on remarque que le complexe $C_f(K,V)$ s'identifie au complexe $C_f(K',V')$.

Comme d'autre part les deux premiers isomorphismes proviennent par extension des scalaires de $\mathbb{Z}_\ell$ à $\mathbb{Q}_\ell$ d'isomorphismes $H^0(K',T')\simeq H^0(K,T)$ et $H^1(K',T')\simeq H^1(K,T)$, il est clair que $H^1_f(K',V')\simeq H^1_f(K,V)$ provient par extension des scalaires d'un isomorphisme $H^1_f(K',T')\simeq H^1_f(K,T)$. D'où la proposition.

CHAPITRE II

REPRÉSENTATIONS ℓ-ADIQUES DES CORPS DE NOMBRES

1. Cohomologie galoisienne

1.1. Généralités.

1.1.1. Dans tout ce chapitre, F est une extension finie de $\mathbb{Q}$. Pour fixer les idées (plus exactement pour pouvoir parler en termes de cohomologie galoisienne plutôt qu'en termes de cohomologie étale), on choisit une clôture algébrique $\overline{F}$ de F et, pour chaque place $\mathfrak{p}$ de F, une clôture algébrique $\overline{F}_{\mathfrak{p}}$ de $F_{\mathfrak{p}}$ et un plongement de $\overline{F}$ dans $\overline{F}_{\mathfrak{p}}$; on pose $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ et $G_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Gal}(\overline{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}) \subset G_F$.

On note $S(F)$ (resp. $S_f(F)$) l'ensemble des places (resp. places finies) de F. Si P est l'ensemble des nombres premiers, on identifie $S(\mathbb{Q})$ à $P \cup \{\infty\}$. Pour tout $p \in S(\mathbb{Q})$, on note $S_p(F)$ l'ensembles des places de F au-dessus de p. Si Σ est un ensemble de places de F, on pose $\Sigma_f = \Sigma \cap S_f(F)$ et, pour tout $p \in S(\mathbb{Q})$, $\Sigma_p = \Sigma \cap S_p(F)$.

1.1.2. Dans toute la suite, on fixe un nombre premier ℓ. On fixe aussi un ensemble fini S de places de F tel que $S_\infty = S_\infty(F)$ (on sera parfois amené à regarder ce qui se passe lorsque l'on remplace S par un ensemble fini plus grand S'). Dans les paragraphes 1, 2, et 4, on suppose que S contient $S_\ell(F)$.

On note F_S la plus grande extension galoisienne de F, contenue dans $\overline{F}$, non ramifiée en dehors de S et on pose $G_{F,S} = \mathrm{Gal}(F_S/F)$. Lorsque S contient $S_\ell(F)$, on note $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,S}(G_F)$ la catégorie des représentations ℓ-adiques de $G_{F,S}$. C'est une sous-catégorie tannakienne de la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_F)$ des représentations ℓ-adiques de G_F qui contient $\mathbb{Q}_\ell(1)$.

1.1.3. Pour tout groupe abélien fini M muni d'une action linéaire continue de $G_{F,S}$ et pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $H^i(U_S, M) = H^i(G_{F,S}, M)$ (cette notation est suggérée par le fait que, si $\mathscr{O}_F$ désigne l'anneau des entiers de F et U_S l'ouvert de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}_F$ compémentaire de S_f, et que si l'on note encore M l'unique faisceau localement constant sur $(U_S)_{\text{ét}}$ qui prolonge M, on a $H^i(U_S, M) = H^i((U_S)_{\text{ét}}, M)$).

De même, si T est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini muni d'une action linéaire continue de $G_{F,S}$, on pose $H^i(U_S, T) = \varprojlim H^i(U_S, T/\ell^n T)$; si V est une représentation ℓ-adique de $G_{F,S}$, et si l'on choisit T tel que $V = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T$, $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^i(U_S, T)$ ne dépend pas du choix de T et on le note $H^i(U_S, V)$. Rappelons (cf. par exemple **[Mi86]** par passage à la limite de 1.4.20) que les $H^i(U_S, V)$ sont des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie, nuls si $i \neq 0, 1, 2$.

1.1.4. Rappelons (cf. **[Ta76]**) que le complexe des cochaînes continues calcule les $H^i(U_S, V)$. Autrement dit, si pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $C^i(U_S, V)$ (resp. $Z^i(U_S, V)$, $B^i(U_S, V)$) le groupe des i-cochaînes (resp. cocycles, cobords) continu(e)s de $G_{F,S}$ à valeurs dans V (on convient que ces groupes sont nuls pour $i < 0$), $H^i(U_S, V)$ s'identifie à $Z^i(U_S, V)/B^i(U_S, V)$. On vérifie facilement en outre que, pour tout i et tout V, la flèche naturelle de $H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,S}(G_F), V)$ dans $H^i(U_S, V)$ est un isomorphisme.

Pour toute place $\mathfrak{p}$ de F, il en est de même de la cohomologie de V vue comme représentation de $G_\mathfrak{p}$. Autrement dit, si l'on note $C^i(F_\mathfrak{p}, V)$ (resp. $Z^i(F_\mathfrak{p}, V)$, $B^i(F_\mathfrak{p}, V)$) le groupe des i-cochaînes (resp. cocycles, cobords) continu(e)s de $G_\mathfrak{p}$ à valeurs dans V, $H^i(F_\mathfrak{p}, V)$ s'identifie à $Z^i(F_\mathfrak{p}, V)/B^i(F_\mathfrak{p}, V)$ et aussi à $H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_\mathfrak{p}), V)$.

1.1.5. Nous faisons la convention suivante qui est abusive mais commode: une *représentation ℓ-adiques de G_F* est une représentation ℓ-adique V non ramifiée en dehors d'un nombre fini de places (autrement dit telle que l'on peut trouver un S fini tel que V est un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,S}(G_F)$. Pour une telle représentation V, et pour $i \in \mathbb{Z}$, on note $H^i(F, V)$ la limite inductive des $H^i(U_S, V)$ pour S parcourant tous les ensembles finis de places de F contenant $S_\infty(F)$, $S_\ell(F)$ et toutes les places où V est ramifiée.

1.2. Théorèmes de dualité globale. Commençons par quelques rappels et quelques conséquences faciles des théorèmes de dualité globale de Poitou–Tate **[Ta62, Po67, Mi86]**.

1.2.1. Pour tout objet V de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_{F,S})$, et pour $i \in \mathbb{Z}$, notons $H^i_0(U_S, V)$ le noyau de l'homomorphisme de restriction

$$H^i(U_S, V) \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} H^i(F_\mathfrak{p}, V),$$

qui est donc nul si $i \neq 1, 2$. Rappelons **[Mi86,** 1.4] que, pour $i \in \{0, 1, 2\}$, dans la dualité

$$\bigoplus_{\mathfrak{p} \in S_f} H^i(F_\mathfrak{p}, V) \times \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S_f} H^{2-i}(F_\mathfrak{p}, V^*(1)) \to \mathbb{Q}_\ell,$$

l'orthogonal de l'image de $H^i(U_S, V)$ est l'image de $H^{2-i}(U_S, V^*(1))$. En particulier, on a une suite exacte

(1.1)

$$0 \to H^i_0(U_S, V) \to H^i(U_S, V) \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S_f} H^i(F_\mathfrak{p}, V) \to (H^{2-i}(U_S, V^*(1)))^* \to (H^{2-i}_0(U_S, V^*(1)))^* \to 0.$$

1.2.2. Si V et W sont deux objets de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_\ell,S}(G_F)$, on dispose d'un homomorphisme canonique et fonctoriel

$$H_0^1(U_S, V) \times H_0^2(U_S, W) \to (((V \otimes W)^*(1))^{G_F})^*,$$

que nous notons $(a, b) \mapsto [a, b]$. Il s'obtient ainsi (pour tout $\rho \in C^i(U_S, -)$, on note $\rho_\mathfrak{p}$ sa restriction à $C^i(F_\mathfrak{p}, -)$): On choisit $\alpha \in Z^1(U_S, V)$ représentant $a \in H_0^1(U_S, V)$ et $\beta \in Z^2(U_S, W)$ représentant $b \in H_0^2(U_S, W)$; le cup-produit $\alpha \cup \beta \in Z^3(U_S, V) = B^3(U_S, V)$ et on choisit $\varepsilon \in C^2(U_S, V \otimes W)$ tel que $d\varepsilon = \alpha \cup \beta$. Pour tout $\mathfrak{p} \in S_f$, on a $\beta_\mathfrak{p} \in B^2(F_\mathfrak{p}, W)$ et on choisit $\gamma_\mathfrak{p} \in C^1(F_\mathfrak{p}, W)$ tel que $d\gamma_\mathfrak{p} = \beta_\mathfrak{p}$; alors $\varepsilon_\mathfrak{p} + \alpha_\mathfrak{p} \cup \gamma_\mathfrak{p} \in Z^2(F_\mathfrak{p}, V \otimes W)$ et définit un élément $c_\mathfrak{p} \in H^2(F_\mathfrak{p}, V \otimes W)$; on vérifie que, si l'on change les choix faits, $(c_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in S_f} \in \prod_{\mathfrak{p} \in S_f} H^2(F_\mathfrak{p}, V \otimes W)$ ne change que par un élément qui est dans l'image de $H^2(U_S, V \otimes W)$; en appliquant (1.1) à $V \otimes W$, on voit alors que l'image $[a, b]$ de $(c_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in S_f}$ dans $H^0(U_S, (V \otimes W)^*(1))^* = (((V \otimes W)^*(1))^{G_F})^*$ ne dépend que de a et b.

Dans le cas particulier où $W = V^*(1)$, on a $((V \otimes W)^*(1))^{G_F} = \mathrm{End}_{G_F}(V)$; si l'on compose alors $[\cdot, \cdot]$ avec la transposée de l'injection canonique de $\mathbf{Q}_\ell$ dans $\mathrm{End}_{G_F}(V)$, on obtient un accouplement

$$H_0^1(U_S, V) \times H_0^2(U_S, W) \to \mathbf{Q}_\ell.$$

qui est une *dualité parfaite* [**Mi86**, 1.4, Theorem 4.10].

REMARQUE. Dans la construction qui précède, on peut échanger les rôles de α et β: si l'on choisit $\delta_\mathfrak{p} \in C^0(F_\mathfrak{p}, W)$ tel que $d\delta_\mathfrak{p} = \alpha_\mathfrak{p}$, on a $d(\delta_\mathfrak{p} \cup \gamma_\mathfrak{p}) = \alpha_\mathfrak{p} \cup \gamma_\mathfrak{p} + \delta_\mathfrak{p} \cup \beta_\mathfrak{p}$; alors $\varepsilon_\mathfrak{p} + \alpha_\mathfrak{p} \cup \gamma_\mathfrak{p}$ et $\varepsilon_\mathfrak{p} - \delta_\mathfrak{p} \cup \beta_\mathfrak{p}$ définissent le même élément $c_\mathfrak{p}$ dans $H^2(F_\mathfrak{p}, V \otimes W)$.

1.2.3. L'énoncé suivant est alors évident:

THÉORÈME. *Soit V une représentation ℓ-adique de $G_{F,S}$. La suite*

$$(1.2) \qquad \cdots \to H^i(U_S, V) \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S_f} H^i(F_\mathfrak{p}, V) \to (H^{2-i}(U_S, V^*(1)))^* \to \cdots$$

(où les flèches sont les flèches évidentes, compte-tenu des dualités que l'on vient de rappeler) est exacte et fonctorielle en V. La suite exacte transposée s'identifie à la suite exacte associée à $V^*(1)$.

1.2.4. REMARQUE. Soit V une représentation ℓ-adique de $G_{F,S}$. On a alors

$$\begin{aligned}\sum (-1)^i \dim_{\mathbf{Q}_\ell}(H^i(U_S, V)) &= \sum_{\mathfrak{p} \in S_\infty} \dim_{\mathbf{Q}_\ell} V^{G_{F_\mathfrak{p}}} - [F : \mathbf{Q}] \dim_{\mathbf{Q}_\ell} V \\ &= -\sum_{\mathfrak{p} \in S_\infty} \dim_{\mathbf{Q}_\ell} V^*(1)^{G_{F_\mathfrak{p}}}\end{aligned}$$

(cela peut se déduire par passage à la limite des formules de caractéristique d'Euler–Poincaré pour les modules finis, ([**Mi86,** 1.5, Theorem 5.1] par exemple)).

1.3. Les groupes $H^1_{f,\Sigma}(F, V)$ et $H^1_f(F, V)$.

1.3.1. Soit V une représentation ℓ-adique de G_F. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, toute place $\mathfrak{p}$ de F et tout $x \in H^i(F, V)$, notons $x_\mathfrak{p}$ l'image de x dans $H^i(F_\mathfrak{p}, V)$. On pose

$$H^1_g(F, V) = \{x \in H^1(F, V) \mid x_\mathfrak{p} \in H^1_g(F_\mathfrak{p}, V) \text{ si } \mathfrak{p} \in S_\ell(F)\}.$$

Remarquons que le théorème de monodromie ℓ-adique implique que, si p est un nombre premier $\neq \ell$ et si $\mathfrak{p} \in S_p(F)$, alors pour tout $x \in H^1(F, V)$, $x_\mathfrak{p} \in H^1_g(F_\mathfrak{p}, V)$, ce qui fait que $H^1_g(F, V)$ est en fait formé des $x \in H^1(F, V)$ tels que $x_\mathfrak{p} \in H^1_g(F_\mathfrak{p}, V)$ pour tout $\mathfrak{p} \in S_f(F)$.

Si Σ est un ensemble fini de places de F contenant les places à l'infini, on pose

$$H^1_{f,\Sigma}(F, V) = \{x \in H^1_g(F, V) \mid x_\mathfrak{p} \in H^1_f(F_\mathfrak{p}, V) \text{ si } \mathfrak{p} \notin \Sigma\}.$$

On pose aussi $H^1_f(F, V) = H^1_{f,S_\infty(F)}(F, V)$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on définit $\widetilde{H}^i_f(F, V)$ par

$$\widetilde{H}^0_f(F, V) = H^0(F, V), \qquad \widetilde{H}^1_f(F, V) = H^1_f(F, V),$$
$$\widetilde{H}^2_f(F, V) = (\widetilde{H}^1_f(F, V^*(1)))^*,$$
$$\widetilde{H}^3_f(F, V) = (H^0(F, V^*(1)))^* \quad \text{et} \quad \widetilde{H}^i_f(F, V) = 0 \text{ si } i \notin \{0, 1, 2, 3\}.$$

REMARQUE. C'est sans doute Jannsen **[Ja89]** qui le premier a compris l'intérêt des groupes de ce genre. Le groupe $H^1_{f,\Sigma}(F, V)$ a été introduit, pour les représentations que nous appelons pseudo-géométriques (cf. infra 2.1), par Bloch et Kato **[BK90,** def. 5.1] qui le notent $H^1_{f,U}(F, V)$, où $U = U_\Sigma$.

1.3.2. Si V est non ramifiée en dehors de S et si $\Sigma \subset S$, $H^1_{f,\Sigma}(F, V)$ est le noyau de

$$H^1(U_S, V) \to \left(\bigoplus_{\mathfrak{p} \in S - \Sigma} H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, V)\right) \oplus \left(\bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Sigma_\ell} H^1_{/g}(F_\mathfrak{p}, V)\right)$$

(où $H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, V) = H^1(F_\mathfrak{p}, V)/H^1_f(F_\mathfrak{p}, V)$ et $H^1_{/g}(F_\mathfrak{p}, V) = H^1(F_\mathfrak{p}, V)/H^1_g(F_\mathfrak{p}, V)$).

En particulier, $H^1_f(F, V)$ est le noyau de

$$H^1(U_S, V) \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S_f} H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, V).$$

1.3.3. Soient

$$(\beta) \qquad 0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

une suite exacte courte de représentations ℓ-adiques de $G_{F,S}$ et $u_V \in \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,S}(G_F)}(V'', V') = H^1(U_S, V''^* \otimes V')$ la classe de cette extension. Si $\mathfrak{p}$ est une place finie de F, on dit que *la suite exacte* (β) *a bonne réduction en* $\mathfrak{p}$ si l'image de u_V dans $H^1(F_\mathfrak{p}, V''^* \otimes V')$ appartient à $H^1_f(F_\mathfrak{p}, V''^* \otimes V')$. C'est bien sûr le cas si $\mathfrak{p} \notin S$. Remarquons que la représentation V elle-même a bonne réduction en $\mathfrak{p}$ si et seulement si V', V'' et la suite exacte (β) ont toutes les trois bonne réduction en $\mathfrak{p}$.

On appelle *f-suite exacte courte de représentations ℓ-adiques de* $G_{F,S}$ toute suite exacte courte (β) qui a bonne réduction en toutes les places finies de F ; cela revient donc à dire que $u_V \in H^1_f(F, V''^* \otimes V')$.

1.4. L'application de connexion.

1.4.1. Soit

$$(\beta) \qquad 0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

une f-suite exacte de représentations ℓ-adiques de $G_{F,S}$. Le but de ce paragraphe est de construire un homomorphisme de connexion

$$\delta = \delta_{u_V} : H^1_f(F, V'') \to H^1_f(V'^*(1))^*.$$

1.4.2. Pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de F et pour toute représentation ℓ-adique V de $G_\mathfrak{p}$, notons $Z^1_f(F_\mathfrak{p}, V)$ l'image inverse de $H^1_f(F_\mathfrak{p}, V)$ dans $Z^1(F_\mathfrak{p}, V)$. Dans le diagramme commutatif rectangulaire tordu

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & H^0(F_\mathfrak{p}, V') & \to & H^0(F_\mathfrak{p}, V) & \to & H^0(F_\mathfrak{p}, V'') & \to & \cdots (1) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & V' & \to & V & \to & V'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Z^1_f(F_\mathfrak{p}, V') & \to & Z^1_f(F_\mathfrak{p}, V) & \to & Z^1_f(F_\mathfrak{p}, V'') & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(1)\cdots & \to & H^1_f(F_\mathfrak{p}, V') & \to & H^1_f(F_\mathfrak{p}, V) & \to & H^1_f(F_\mathfrak{p}, V'') & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

toutes les colonnes et toutes les lignes, sauf peut-être la troisième, sont exactes. Comme cette dernière est un complexe, elle est encore exacte (n°06).

1.4.3. Si H est un sous-groupe fermé de $G_{F,S}$, si $\lambda \in Z^i(H, V')$ et $\mu \in Z^j(H, V'^*(1))$, on note $\lambda \cup \mu \in Z^{i+j}(H, \mathbb{Q}_\ell(1))$ l'image du cup-produit. Soient $x \in H^1_f(F, V'')$ et $y \in H^1_f(F, V'^*(1))$. Choisissons $\alpha \in Z^1(U_S, V'')$

représentant x et $\beta \in Z^1(U_S, V'^*(1))$ représentant y. Soit $\alpha_1 \in C^1(U_S, V)$ relevant α. Alors $d\alpha_1 \in Z^2(U_S, V')$ (sa classe dans $H^2(U_S, V')$ est l'image de x par l'homomorphisme de connexion). Comme $H^3(U_S, \mathbb{Q}_\ell(1)) = 0$, il existe $\varepsilon \in C^2(U_S, \mathbb{Q}_\ell(1))$ tel que $d\alpha_1 \cup \beta = d\varepsilon$. Pour tout $\mathfrak{p} \in S_f$, l'image $\alpha_\mathfrak{p}$ de α dans $Z^1(F_\mathfrak{p}, V'')$ appartient à $Z^1_f(F_\mathfrak{p}, V'')$. D'après 1.4.2, il existe donc $\alpha_{\mathfrak{p},1} \in Z^1_f(F_\mathfrak{p}, V)$ dont l'image dans V'' est $\alpha_\mathfrak{p}$. Donc, $\alpha_{\mathfrak{p},1} - \alpha_{1,\mathfrak{p}} \in C^1(F_\mathfrak{p}, V')$. On vérifie facilement que

$$(\alpha_{1,\mathfrak{p}} - \alpha_{\mathfrak{p},1}) \cup \beta_\mathfrak{p} - \varepsilon_\mathfrak{p} \in Z^1(F_\mathfrak{p}, \mathbb{Q}_\ell(1)).$$

Si $\mathrm{inv}_\mathfrak{p} : H^2(F_\mathfrak{p}, \mathbb{Q}_\ell(1)) \to \mathbb{Q}_\ell$ désigne l'isomorphisme canonique et si l'on note $[\gamma]$ l'image dans $H^1(F_\mathfrak{p}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ de $\gamma \in Z^1(F_\mathfrak{p}, \mathbb{Q}_\ell(1))$, on définit alors

$$[x, y]_{u_V} = \sum_{\mathfrak{p} \in S_f} \mathrm{inv}_\mathfrak{p}[(\alpha_{1,\mathfrak{p}} - \alpha_{\mathfrak{p},1}) \cup \beta_\mathfrak{p} - \varepsilon_\mathfrak{p}].$$

C'est un élément de $\mathbb{Q}_\ell$ indépendant des choix faits. On a ainsi obtenu une forme bilinéaire, d'où une application linéaire

$$H^1_f(F, V'') \to (H^1_f(F, V'^*(1)))^*,$$

qui, avec les notations du n°1.3.1, peut se voir comme une application

$$\tilde{H}^1_f(F, V'') \to \tilde{H}^2_f(F, V').$$

1.4.4. Remarque. Supposons que $x \in H^1_f(F, V'')$ soit l'image d'un élément $\hat{x} \in H^1(U_S, V)$. Le calcul de $[x, y]_{u_V}$ est alors plus facile: remarquons que, pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de F, on dispose d'une suite exacte courte

$$0 \to H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, V') \to H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, V) \to H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, V'') \to 0.$$

Si l'on désigne par $\hat{x}_\mathfrak{p}$ l'image de $\hat{x}$ dans $H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, V)$, $\hat{x}_\mathfrak{p}$ s'identifie à un élément de $H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, V')$, espace vectoriel qui est en dualité avec $H^1_f(F_\mathfrak{p}, V'^*(1))$. Si $y_\mathfrak{p}$ est l'image de y dans $H^1_f(F_\mathfrak{p}, V'^*(1))$, on vérifie que

$$[x, y]_{u_V} = \sum_{\mathfrak{p} \in S_f} \langle \hat{x}_\mathfrak{p}, y_\mathfrak{p} \rangle.$$

1.4.5. Proposition. *Soient* $x \in H^1_f(F, V'')$ *et* $y \in H^1_f(F, V'^*(1))$. *Alors*

$$[x, y]_{u_V} = [y, x]_{u_{V'^*(1)}}.$$

Preuve. Avec des notations évidentes, les classes dans $H^2(F_\mathfrak{p}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ de

$$(\alpha_{1,\mathfrak{p}} - \alpha_{\mathfrak{p},1}) \cup \beta \quad \text{et} \quad (\alpha_{1,\mathfrak{p}} - \alpha_{\mathfrak{p},1}) \cup \beta_{\mathfrak{p},1}$$

sont égales. Comme $\alpha_{p,1}$ (resp. $\beta_{p,1}$) est un élément de $Z^1_f(F_p, V)$ (resp. $Z^1_f(F_p, V^*(1))$, le cup-produit de $\alpha_{p,1}$ et de $\beta_{p,1}$ est un cobord. On peut donc écrire

$$(\alpha_{1,p} - \alpha_{p,1}) \cup \beta_{p,1} - \varepsilon_p \equiv \alpha_{1,p} \cup \beta_{p,1} - \varepsilon_p \quad \text{dans } H^2(F_p, \mathbb{Q}_\ell(1)).$$

On a d'autre part

$$d(\alpha_1 \cup \beta_1) = d\alpha_1 \cup \beta_1 - \alpha_1 \cup d\beta_1 = d\alpha_1 \cup \beta_1 - d\beta_1 \cup \alpha_1.$$

On a donc $d\beta_1 \cup \alpha = d\beta_1 \cup \alpha_1 = d(-\alpha_1 \cup \beta_1 + \varepsilon) = d\varepsilon'$ avec $\varepsilon' = -\alpha_1 \cup \beta_1 + \varepsilon$. Donc,

$$\begin{aligned} \alpha_{1,p} \cup \beta_{p,1} - \varepsilon_p &= \alpha_{1,p} \cup \beta_{p,1} - \varepsilon'_p - \alpha_{1,p} \cup \beta_{1,p} \\ &= (\beta_{1,p} - \beta_{p,1}) \cup \alpha_{1,p} - \varepsilon'_p. \end{aligned}$$

Enfin, comme $\alpha_{1,p} - \alpha_{p,1}$ appartient à $C^1(F_p, V')$ et que $\beta_{1,p} - \beta_{p,1}$ appartient à $C^1(F_p, V''^*(1))$, la classe de $(\beta_{1,p} - \beta_{p,1}) \cup \alpha_{1,p}$ dans $H^2(F_p, \mathbb{Q}_\ell(1))$ est égale à celle de $(\beta_{1,p} - \beta_{p,1}) \cup \alpha_{p,1}$. On en déduit la proposition.

1.4.6. Remarque. On peut se demander si la suite

$$\cdots \to \tilde{H}^i_f(F, V') \to \tilde{H}^i_f(F, V) \to \tilde{H}^i_f(F, V'') \to \cdots$$

est exacte. Nous verrons au paragraphe suivant que c'est le cas lorsque la représentation V est "pseudo-géométrique". Sans hypothèse, on vérifie que:

i) *la suite ci-dessus est exacte, sauf peut-être en* $\tilde{H}^1_f(F,V'')$ *et* $\tilde{H}^2_f(F,V')$;

ii) *le composé* $\tilde{H}^1_f(F, V) \to \tilde{H}^1_f(F, V'') \to \tilde{H}^2_f(F, V')$ *est nul*;

iii) *le composé* $\tilde{H}^1_f(F, V'') \to \tilde{H}^2_f(F, V') \to \tilde{H}^2_f(F, V)$ *est nul.*

En effet, (i) est facile. Il suffit ensuite de démontrer (ii) car (iii) est l'énoncé analogue pour la suite exacte "duale tordue". Soient $x \in H^1_f(F, V)$ et y son image dans $H^1_f(F, V'')$. Dans la définition de l'image de y dans $\tilde{H}^2_f(F, V') = H^1_f(F, V'^*(1))^*$, l'élément ε de $Z^2(U_S, \mathbb{Q}_\ell(1))$ peut être pris nul et α'_p peut être pris égal à x_p. On a alors pour $z \in H^1_f(F, V'^*(1))$

$$[y, z]_{u_V} = \pm \sum_{p \in S_f} \mathrm{inv}_p(x_p \cup z'_p)$$

où z' est un relèvement de z de $H^1(U_S, V^*(1))$, ce qui est nul comme somme d'invariants d'un élément global.

2. Représentations pseudo-géométriques

2.1. Généralités.

2.1.1. Nous disons qu'une représentation ℓ-adique V de G_F est *pseudo-géométrique* si elle est non ramifiée en dehors d'un nombre fini de places et de de Rham en toutes les places divisant ℓ. Ces représentations forment

une sous-catégorie tannakienne, contenant $\mathbb{Q}_\ell(1)$, de la catégorie de toutes les représentations ℓ-adiques de G_F.

Remarquons que, si V est pseudo-géométrique et si Σ un ensemble fini de places de F contenant $S_\infty(F)$, le groupe $H^1_{f,\Sigma}(F, V)$ classifie les extensions U de $\mathbb{Q}_\ell$ par V qui sont pseudo-géométriques et telles que la suite exacte

$$0 \to V \to U \to \mathbb{Q}_\ell \to 0$$

a bonne réduction en dehors de Σ.

2.1.2. Si V est une représentation ℓ-adique pseudo-géométrique, pour toute place $\mathfrak{p}$ divisant ℓ, on note $t_{V,\mathfrak{p}}$ (resp. $t'_{V,\mathfrak{p}}$) l'espace tangent de la restriction de V (resp. $V^*(1)$) à $G_\mathfrak{p}$ (cf. I, 2.2.1). Avec des notations évidentes, le $F_\mathfrak{p}$-espace vectoriel $D_{\mathrm{dR},\mathfrak{p}}(V^*(1))$ s'identifie au dual de $D_{\mathrm{dR},\mathfrak{p}}(V)$, $\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR},\mathfrak{p}}(V^*(1))$ étant l'orthogonal de $\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR},\mathfrak{p}}(V)$. Donc $t'_{V,\mathfrak{p}}$ s'identifie au dual de $\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR},\mathfrak{p}}(V)$ et $\dim_{F_\mathfrak{p}} t_{V,\mathfrak{p}} + \dim_{F_\mathfrak{p}} t'_{V,\mathfrak{p}} = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} V$.

On pose $t_V = \bigoplus_{\mathfrak{p}|\ell} t_{V,\mathfrak{p}}$ et $t'_V = \bigoplus_{\mathfrak{p}|\ell} t'_{V,\mathfrak{p}}$. On voit que

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} t_V + \dim_{\mathbb{Q}_\ell} t'_V = [F : \mathbb{Q}] \cdot \dim_{\mathbb{Q}_\ell} V.$$

2.2. Deux suites exactes.

2.2.1. Soit V une représentation non ramifiée en dehors de S. Pour $i \in \{2, 3\}$, $\tilde{H}^i_f(F, V)$ a été défini comme le dual de $H^{3-i}_f(F, V^*(1))$; la dualité locale entre $H^{3-i}(F_\mathfrak{p}, V)$ et $H^{i-1}(F_\mathfrak{p}, V^*(1))$ induit une dualité entre $H^{3-i}_f(F_\mathfrak{p}, V)$ et $H^{i-1}_{/f}(F_\mathfrak{p}, V^*(1))$ (cf. I, n°3.3.9 et n°3.3.10) et la transposée de l'application naturelle de $H^{3-i}_f(F, V^*(1))$ dans

$$\bigoplus_{\mathfrak{p} \in S_f} H^{3-i}_f(F_\mathfrak{p}, V^*(1))$$

peut être considérée comme une application de $\bigoplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^{i-1}_{/f}(F_\mathfrak{p}, V^*(1))$ dans $\tilde{H}^i_f(F, V)$.

Par ailleurs, la dualité de Poitou–Tate permet d'identifier $H^1_0(U_S, V^*(1))^*$ à $H^2_0(U_S, V)$ (cf. n°1.2.2) et le composé de la projection de $H^1_f(F, V^*(1))^*$ sur $H^1_0(U_S, V^*(1))^*$ avec l'inclusion de $H^2_0(U_S, V)$ dans $H^2(U_S, V)$ fournit une application de $H^1_f(F, V^*(1))^*$ dans $H^2(U_S, V)$.

PROPOSITION. *Soit V une représentation ℓ-adique pseudo-géométrique non ramifiée en dehors de S. La suite*

$$(s_{f,S}(V)) \qquad \cdots \to \tilde{H}^i_f(F, V) \to H^i(U_S, V) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V) \to \cdots$$

(où toutes les flèches, autre que celles que l'on vient de décrire, sont évidentes) est exacte.

PREUVE. Il s'agit de vérifier l'exactitude de la suite

$$0 \to H^1_f(F, V) \to H^1(U_S, V) \to \bigoplus_{p \in S_f} H^1_{/f}(F_p, V) \to H^1_f(F, V^*(1))^* \\ \to H^2(U_S, V) \to \bigoplus_{p \in S_f} H^2(F_p, V) \to (V^*(1))^{G_F})^* \to 0.$$

L'exactitude en $H^1_f(F, V)$, $H^1(U_S, V)$, $H^2(U_S, V)$ et $(V^*(1)^{G_F})^*$ est immédiate. L'exactitude en $\oplus_{p \in S_f} H^2(F_p, V)$ résulte du n°1.2.1. L'exactitude en $\oplus_{p \in S_f} H^1_{/f}(F_p, V)$ et $H^1_f(F, V^*(1))^*$ enfin résulte de ce que, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & \bigoplus_{p \in S_f} H^1_f(F_p, V) & \cong & \bigoplus_{p \in S_f} H^1_{/f}(F_p, V^*(1))^* & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H^1(U_S, V) & \to & \bigoplus_{p \in S_f} H^1(F_p, V) & \to & H^1(U_S, V^*(1))^* & \to & H^2(U_S, V) \\ \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ H^1(U_S, V) & \to & \bigoplus_{p \in S_f} H^1_{/f}(F_p, V) & \to & H^1_f(F, V^*(1))^* & \to & H^2(U_S, V) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

la deuxième ligne (cf. 1.2.3) et les colonnes sont exactes.

2.2.2. REMARQUE. On déduit de cette proposition, de la remarque 1.2.4 et de I, n°3.3.11 que

$$\sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}_\ell}(\tilde{H}^i_f(F, V)) = -\dim_{\mathbb{Q}_\ell} t_V + \sum_{p \in S_\infty} \dim_{\mathbb{Q}_\ell}(H^0(F_p, V)).$$

2.2.3. PROPOSITION. *Soit*

$$(\beta) \qquad 0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

une f-suite exacte courte de représentations ℓ-adiques pseudo-géométriques de $G_{F,S}$. Alors

i) *la suite*

$$(s_f(\beta)) \qquad \cdots \to \tilde{H}^i_f(F, V') \to \tilde{H}^i_f(F, V) \to \tilde{H}^i_f(F, V'') \to \cdots$$

est exacte;

ii) *le diagramme rectangulaire tordu*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdot & \to & \widetilde{H}^i_f(F, V') & \to & H^i(U_S, V') & \to & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V') & \to & \cdot \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdot & \to & \widetilde{H}^i_f(F, V) & \to & H^i(U_S, V) & \to & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V) & \to & \cdot \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdot & \to & \widetilde{H}^i_f(f, V'') & \to & H^i(U_S, V'') & \to & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V'') & \to & \cdot \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & &
\end{array}$$

est commutatif et ses trois lignes et ses trois colonnes sont exactes.

PREUVE. On commence par vérifier la commutativité du diagramme. Le seul point délicat est la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc}
H^1_f(F, V'') & \longrightarrow & H^1(U_S, V'') \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^1_f(F, V'^*(1))^* & \longrightarrow & H^2(U_S, V').
\end{array}$$

Remarquons que l'image des flèches dans $H^2(U_S, V')$ est en fait contenue dans $H^2_0(U_S, V')$. Il s'agit donc de vérifier la compatibilité de la flèche $H^1_f(F, V'') \to H^1_f(F, V'^*(1))^*$ avec l'isomorphisme de $H^2_0(U_S, V')$ sur $H^1_0(U_S, V'^*(1))^*$ c'est-à-dire la commutativité du triangle

$$\begin{array}{ccc}
H^1_f(F, V'^*(1)) \times H^1_f(F, V'') & & \\
 & \searrow & \\
\downarrow & & \mathbb{Q}_\ell \\
 & \nearrow & \\
H^1_0(U_S, V'^*(1)) \times H^2_0(U_S, V') & &
\end{array}$$

ce qui se voit en comparant la définition des deux accouplements.

L'exactitude des lignes et des colonnes du diagramme sauf peut-être la première colonne (qui est en fait la suite $s_f(\beta)$) est claire. Comme la suite $s_f(\beta)$ est un complexe (n°1.4.6), elle est exacte (n°06).

3. Représentations géométriques

On ne suppose plus dans ce paragraphe que S contient les places divisant ℓ.

3.1. Généralités.

3.1.1. Une représentation ℓ-adique V de G_F est dite *S-géométrique* si

i) elle a bonne réduction en dehors de S;

ii) elle est potentiellement semi-stable en toutes les places finies de F (condition qui, d'après le théorème de monodromie ℓ-adique, est automatiquement réalisée en les places ne divisant pas ℓ).

Une *représentation géométrique* est une représentation qui est S-géométrique pour un S convenable.

On note $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg}(G_F)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg, S}(G_F)$) la sous-catégorie tannakienne de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_F)$ formée des représentations géométriques (resp. S-géométriques). C'est donc la catégorie des représentations ℓ-adiques de G_F formée des V qui, pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de F, sont dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg}(G_\mathfrak{p})$ (resp. et dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, f}(G_\mathfrak{p})$ si $\mathfrak{p} \notin S$). La catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg}(G_F)$ est donc la limite inductive, sur tous les S, des $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg, S}(G_F)$.

3.1.2. Pour tout objet V de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg, S}(G_F)$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose

$$H^i_g(U_S, V) = H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg, S}(G_F), V)$$

et

$$H^i_g(F, V) = H^i(\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg}(G_F), V) = \text{lim.ind.}_S H^i_g(U_S, V).$$

On a donc $H^0_g(U_S, V) = H^0_g(F, V) = H^0(F, V)$ et, si $\widetilde{S} = S \cup S_\ell(F)$,

$$H^1_g(U_S, V) = \{x \in H^1(U_{\widetilde{S}}, V) \mid x_\mathfrak{p} \in H^1_f(F_\mathfrak{p}, V) \text{ si } \mathfrak{p} \in \widetilde{S} - S,\ x_\mathfrak{p} \in H^1_g(F_\mathfrak{p}, V) \text{ si } \mathfrak{p} \in S_f\}$$

et

$$H^1_g(F, V) = \{x \in H^1(F, V) \mid x_\mathfrak{p} \in H^1_g(F_\mathfrak{p}, V) \text{ pour tout } \mathfrak{p} \in S_f(F),\ x_\mathfrak{p} \in H^1_f(F_\mathfrak{p}, V) \text{ pour presque tout } \mathfrak{p} \in S_f(F)\}.$$

3.1.3. Soit V une représentation ℓ-adique S-géométrique de G_F. Si Σ est un ensemble fini de places vérifiant $S_\infty \subset \Sigma \subset S$, le groupe $H^1_{f,\Sigma}(F, V)$ classifie les extensions U de $\mathbb{Q}_\ell$ par V dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg, S}(G_F)$ telles que

$$0 \to V \to U \to \mathbb{Q}_\ell \to 0$$

a bonne réduction en dehors de Σ; la suite

$$0 \to H^1_{f,\Sigma}(F, V) \to H^1_g(U_S, V) \to \prod_{\mathfrak{p} \in S - \Sigma} H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V)$$

est exacte. En particulier, $H^1_{f,S}(F, V) = H^1_g(U_S, V)$.

Plus généralement, si Σ et Σ' sont deux ensembles finis de places de F vérifiant $S_\infty \subset \Sigma \subset \Sigma'$, la suite

$$0 \to H^1_{f,\Sigma}(F, V) \to H^1_{f,\Sigma'}(F, V) \to \prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma' - \Sigma} H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V)$$

est exacte.

3.2. Représentations strictement géométriques.

3.2.1. Si V est une représentation ℓ-adique géométrique de G_F et $\mathfrak{p}$ une place finie de F, on note $D_{pst,\mathfrak{p}}(V)$ l'objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_{F_\mathfrak{p}})$ associé à la restriction de V à $G_\mathfrak{p}$ (cf. I, 2.2.5 et 2.2.6).

DÉFINITION. On dit qu'une représentation ℓ-adique géométrique V de G_F est *F-semi-simple* si, pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de F, $D_{pst,\mathfrak{p}}(V)$ est F-semi-simple (I, 1.1.5).

3.2.2. CONJECTURE $C_{S,sg}(V)$. *Soit V une représentation S-géométrique. Alors,*

i) *pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de F, $D_{pst,\mathfrak{p}}(V)$ est F-semi-simple;*

ii) *pour tout quotient V'' de V, l'application naturelle*

$$H^1_g(U_S, V) \to H^1_g(U_S, V'')$$

est surjective.

La seconde propriété signifie que la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg, S}(G_F)$ est de dimension cohomologique 1.

3.2.3. Faute de savoir prouver cette conjecture, il est commode d'introduire la catégorie des *représentations ℓ-adiques strictement S-géométriques de G_F*: c'est la plus grande sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg, S}(G_F)$, telle que

- tout objet V satisfait $C_{S,sg}(V)$,
- si V est strictement S-géométrique, $V^*(1)$ l'est aussi,
- si W, extension de $\mathbb{Q}_\ell$ par une représentation strictement S-géométrique, est S-géométrique, alors W est strictement S-géométrique.

Comme sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg, S}(G_F)$, cette catégorie est stable par sous-objet, quotient, somme directe et est donc abélienne.

EXEMPLES. On conjecture [**Li72, Li73, Sc79, Ja89**] que, pour tout entier $i \neq 1$, $H^2(U_S, \mathbb{Q}_\ell(i)) = 0$ (on le sait grâce à Soulé [**So79**] lorsque $i \geq 2$). Si cette conjecture est vraie pour tout corps de nombres, on vérifie facilement que toute représentation S-géométrique dont tous les sous-quotients simples sont de dimension 1 est strictement S-géométrique. De même, si X est une variété abélienne ayant bonne réduction en dehors de S dont la ℓ-composante du groupe de Shafarevich–Tate est finie et si $T_\ell(X)$ est son module de Tate, alors $V = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(X)$ est strictement S-géométrique.

3.3. Encore des suites exactes.

3.3.1. On munit l'ensemble $\{e, f, g, h\}$ de la relation d'ordre partielle définie par $e \leq f \leq g$ et $e \leq h \leq g$. Si $\nu, \nu' \in \{e, f, g, h\}$ vérifient $\nu \leq \nu'$, on pose

$$H^1_{\nu'/\nu}(F_\mathfrak{p}, V) = H^1_{\nu'}(F_\mathfrak{p}, V)/H^1_\nu(F_\mathfrak{p}, V)$$

et

$$H^1_{/\nu}(F_\mathfrak{p}, V) = H^1(F_\mathfrak{p}, V)/H^1_\nu(F_\mathfrak{p}, V).$$

PROPOSITION. *Soient V une représentation ℓ-adique strictement S-géométrique de G_F, et Σ et Σ' des ensembles finis de places de F vérifiant $S_\infty(F) \subset \Sigma \subset \Sigma' \subset S$; alors les suites*

$$\text{(a)}\quad 0 \to H^1_{f,\Sigma}(F, V) \to H^1_{f,\Sigma'}(F, V) \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Sigma' - \Sigma} H^1_{g/e}(F_\mathfrak{p}, V) \to H^1_{f,\Sigma'}(F, V^*(1))^* \to H^1_{f,\Sigma}(F, V^*(1))^* \to 0$$

et

$$\text{(b)}\qquad 0 \to H^1_{f,\Sigma}(F, V) \to H^1_{f,\Sigma'}(F, V) \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Sigma' - \Sigma} H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V) \to 0$$

sont exactes.

PREUVE. Pour toute représentation ℓ-adique W de G_F, posons

$$H^1_{f,e,\Sigma}(F, W) = \{x \in H^1_f(F, W) \mid x_\mathfrak{p} \in H^1_e(F_\mathfrak{p}, W) \text{ si } \mathfrak{p} \in \Sigma_f\}.$$

En procédant comme au n°2.2.1 (en utilisant la dualité entre $H^1_{/g}(F_\mathfrak{p}, V)$ et $H^1_e(F_\mathfrak{p}, V^*(1))$, cf. I, n°3.3.9), le fait que V soit pseudo-géométrique permet déjà de lui associer une suite exacte

$$0 \to H^1_{f,\Sigma}(F, V) \to H^1(U_S, V) \to \left(\bigoplus_{\mathfrak{p} \in S - \Sigma} H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, V)\right) \oplus \left(\bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Sigma_f} H^1_{/g}(F_\mathfrak{p}, V)\right) \to H^1_{f,e,\Sigma}(F, V^*(1))^* \to H^2(U_S, V)$$

et on a une suite exacte analogue lorsque l'on remplace Σ par Σ'.

Comme $V^*(1)$ est strictement géométrique, si $x \in H^1_{f,\Sigma}(F, V^*(1))$, pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de F, $x_\mathfrak{p} \in H^1_f(F_\mathfrak{p}, V^*(1))$ équivaut à $x_\mathfrak{p} \in H^1_e(F_\mathfrak{p}, V^*(1))$. On en déduit que $H^1_{f,e,\Sigma}(F, V^*(1)) = H^1_f(F, V^*(1))$. De même, $H^1_{f,e,\Sigma'}(F, V^*(1)) = H^1_f(F, V^*(1))$.

La suite exacte (b) résulte alors de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \bigoplus_{\Sigma'-\Sigma} H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
H^1(U_S, V) & \to & \left(\bigoplus_{S-\Sigma} H^1_{f/f}(F_\mathfrak{p}, V)\right) \oplus \left(\bigoplus_{\Sigma_f} H^1_{f/g}(F_\mathfrak{p}, V\right) & \to & H^1_{f,e,\Sigma}(F, V^*(1))^* & \to & H^2(U_S, V) \\
\| & & \downarrow & & \| & & \| \\
H^1(U_S, V) & \to & \left(\bigoplus_{S-\Sigma'} H^1_{f/f}(F_\mathfrak{p}, V\right) \oplus \left(\bigoplus_{\Sigma'_f} H^1_{f/g}(F_\mathfrak{p}, V)\right) & \to & H^1_{f,e,\Sigma'}(F, V^*(1))^* & \to & H^2(U_S, V) \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
\end{array}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes.

Rappelons (I, n°3.3.9) que, pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de F, le fait que $D_{pst,\mathfrak{p}}(V)$ soit F-semi-simple implique que l'application naturelle de $H^1_{h/e}(F_\mathfrak{p}, V)$ dans $H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V)$ est un isomorphisme. De plus, dans la dualité

$$H^1_{g/e}(F_\mathfrak{p}, V) \times H^1_{g/e}(F_\mathfrak{p}, V^*(1)) \to \mathbb{Q}_\ell,$$

l'orthogonal de $H^1_{h/e}(F_\mathfrak{p}, V)$ est $H^1_{h/e}(F_\mathfrak{p}, V^*(1))$ (cf. I, n°3.3.9). D'où des isomorphismes

$$H^1_{g/h}(F_\mathfrak{p}, V) \simeq H^1_{h/e}(F_\mathfrak{p}, V^*(1))^* \simeq H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V^*(1))^*.$$

En utilisant tous ces isomorphismes, la suite exacte

$$0 \to H^1_{h/e}(F_\mathfrak{p}, V) \to H^1_{g/e}(F_\mathfrak{p}, V) \to H^1_{g/h}(F_\mathfrak{p}, V) \to 0$$

devient la suite exacte

$$0 \to H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V) \to H^1_{g/e}(F_\mathfrak{p}, V) \to H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V^*(1))^* \to 0.$$

En la combinant avec la suite exacte (b) et avec la transposée de l'analogue de (b) pour $V^*(1)$, on obtient (a).

REMARQUE. Le lecteur soigneux vérifiera que la proposition est vraie sous des hypothèses plus faibles. On n'utilise en effet que le fait que la représentation V est géométrique et que, pour toute représentation S-géométrique U, extension de $\mathbb{Q}_\ell$ par V, l'action de F sur $D_{pst,\mathfrak{p}}(U)$ est semi-simple en 1.

3.3.2. PROPOSITION. *Soient Σ un sous-ensemble de S contenant S_∞ et*

$$(\beta) \qquad 0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

une suite exacte courte de représentations ℓ-adiques de $G_{F,S}$. Si V est strictement S-géométrique et si (β) a bonne réduction en dehors de Σ, la suite exacte de cohomologie associée à (β) induit une suite exacte

$$\begin{aligned}(S_{g,\Sigma}(\beta)) \qquad & 0 \to H^0(F, V') \to H^0(F, V) \to H^0(F, V'') \\ & \to H^1_{f,\Sigma}(F, V') \to H^1_{f,\Sigma}(F, V) \to H^1_{f,\Sigma}(F, V'') \to 0.\end{aligned}$$

PREUVE. En toute place $\mathfrak{p}$ n'appartenant pas à Σ, on a la suite exacte

$$0 \to H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V') \to H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V) \to H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V'');$$

en fait la dernière flèche est surjective, puisque l'on peut partout remplacer g/f par h/e et que, comme V en tant que représentation de $G_\mathfrak{p}$ est dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, ph}(G_\mathfrak{p})$, l'application $H^1_h(F_\mathfrak{p}, V) \to H^1_h(F_\mathfrak{p}, V'')$ est surjective (I, n°3.3). On a donc le diagramme commutatif dont les lignes et les deux colonnes de droite sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
0 \to & H^1_{f,\Sigma}(F, V') & \to & H^1_g(U_S, V') & \to & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S-\Sigma} H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V') & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & H^1_{f,\Sigma}(F, V) & \to & H^1_g(U_S, V) & \to & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S-\Sigma} H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V) & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & H^1_{f,\Sigma}(F, V'') & \to & H^1_g(U_S, V'') & \to & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S-\Sigma} H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V'') & \to 0 \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

On en déduit la suite exacte

$$H^1_{f,\Sigma}(F, V') \to H^1_{f,\Sigma}(F, V) \to H^1_{f,\Sigma}(F, V'') \to 0.$$

L'image de $H^0(F, V'')$ étant clairement dans $H^1_{f,\Sigma}(F, V')$, l'exactitude de la suite $s_{g,\Sigma}(\beta)$ ne pose plus de problèmes.

REMARQUE. De nouveau, le lecteur soigneux vérifiera que la proposition est vraie sous des hypothèses plus faibles: on n'utilise que la F-simplicité en 1 et la surjectivité de l'application $H^1_g(U_S, V) \to H^1_g(U_S, V'')$.

3.4. La fonction L d'une représentation géométrique.

3.4.1. De façon à simplifier l'exposition, on suppose choisi un plongement de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $\mathbb{C}$. Dans les applications que l'on a en vue, on s'attend à ce que les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$ que l'on va rencontrer soient en fait à coefficients algébriques sur $\mathbb{Q}$, et on ne devrait avoir besoin de plonger dans $\mathbb{C}$ que la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}_\ell$, ce qui est quand même plus raisonnable!

3.4.2. Pour toute représentation ℓ-adique V de G_F et toute place finie $\mathfrak{p}$ de F, on sait définir le facteur local

$$L_\mathfrak{p}(V, s) = P(D_{pst,\mathfrak{p}}(V), (q_\mathfrak{p})^s)^{-1}$$

(cf. I, n°1.2.1, ici $q_\mathfrak{p}$ désigne le nombre d'éléments du corps résiduel de $F_\mathfrak{p}$; si $\mathfrak{p}$ divise ℓ, $P(D_{pst,\mathfrak{p}}(V), u) \in \mathbb{Q}_\ell[u]$, d'après la remarque (ii) de I, 1.3.3). Cette notion est surtout raisonnable lorsque V est géométrique, auquel cas la dimension de $D_{pst,\mathfrak{p}}(V)$ est égale à celle de V sur $\mathbb{Q}_\ell$.

Pour tout ensemble fini Σ de places de F contenant $S_\infty(F)$, on pose

$$L_\Sigma(V, s) = \prod_{p \notin \Sigma} L_p(V, s);$$

on pose aussi $L(V, s) = L_{S_\infty(F)}(V, s)$.

3.4.3. CONJECTURE $C_{\text{gal},L}(V)$ ([**Bu**, exp. VIII]). *Soit V une représentation ℓ-adique géométrique de G_F. La série $L(V, s)$ converge pour* $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ *et admet un prolongement analytique méromorphe dans tout le plan complexe.*

3.4.4. REMARQUES. i) Si Σ est un ensemble fini de places de F contenant $S_\infty(F)$, $C_{\text{gal},L}$ est vraie pour V si et seulement si la conjecture obtenue en remplaçant $L(V, s)$ par $L_\Sigma(V, s)$ est vraie.

ii) Si

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

est une suite exacte courte de représentations géométriques et si la conjecture est vraie pour deux de ces trois représentations, elle l'est aussi pour la troisième: en effet, si l'on choisit Σ tel que V, et donc aussi V' et V'', ont bonne réduction en dehors de Σ, on a $L_\Sigma(V, s) = L_\Sigma(V', s) \cdot L_\Sigma(V'', s)$.

En particulier, il "suffit" de vérifier cette conjecture pour les représentations géométriques simples. Nous renvoyons à l'exposé VIII de [**Bu**] pour des formes plus précises de cette conjecture.

iii) Dans les applications, on peut rencontrer une représentation ℓ-adique V dont on ne sait peut-être pas qu'elle est géométrique et encore moins qu'elle satisfait $C_{\text{gal},L}$. Nous dirons que *la fonction L d'une représentation ℓ-adique V de G_F existe en* 0 (sous-entendu relativement au plongement de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $\mathbb{C}$ choisi!) si la série $L(V, s)$ converge pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ et admet un prolongement analytique méromorphe dans un ouvert connexe contenant 0. S'il en est ainsi, on peut alors parler de *l'ordre de $L(V, s)$ en* 0 noté $\mathrm{ord}_{s=0} L(V, s)$ et on note $L^*(V, 0)$ le coefficient dominant de son développement de Laurent en $s = 0$.

3.4.5. Nous allons maintenant préciser l'ordre conjectural ($\in \mathbb{Z}$) du zéro éventuel en $s = 0$ de ces fonctions L.

CONJECTURES. *Soit V une représentation ℓ-adique géométrique de G_F dont la fonction L existe en* 0.

i) $C_{\text{ord}}(S_\infty(F), V)$: *On a*

$$\mathrm{ord}_{s=0} L(V, s) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^1_f(F, V^*(1)) - \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^0(F, V^*(1));$$

ii) $C_{\text{ord}}(\Sigma, V)$: *Pour tout ensemble fini Σ de places de F contenant $S_\infty(F)$,*

$$\mathrm{ord}_{s=0} L_\Sigma(V, s) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^1_{f,\Sigma}(F, V^*(1)) - \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^0(F, V^*(1)).$$

3.4.6. PROPOSITION. *Soit V une représentation strictement S-géométrique, ayant bonne réduction en dehors de S et dont la fonction L existe en 0. Soit Σ vérifiant $S_\infty(F) \subset \Sigma \subset S$.*

i) *Les conjectures $C_{\mathrm{ord}}(S_\infty(F), V)$ et $C_{\mathrm{ord}}(\Sigma, V)$ sont équivalentes.*

ii) *Soit V' une sous-représentation de V dont la fonction L existe en 0 et posons $V'' = V/V'$. Alors si deux des trois conjectures $C_{\mathrm{ord}}(\Sigma, V')$, $C_{\mathrm{ord}}(\Sigma, V)$, $C_{\mathrm{ord}}(\Sigma, V'')$ sont vraies, la troisième l'est aussi.*

PREUVE. Remarquons que, comme la flèche naturelle

$$H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V^*(1)) \to H^1_g(F_\mathfrak{p}, (D_{pst,\mathfrak{p}}(V))^*(Ta))/H^1_f(F_\mathfrak{p}, (D_{pst,\mathfrak{p}}(V))^*(Ta))$$

est un isomorphisme, il résulte de la F-semi-simplicité de $D_{pst,\mathfrak{p}}(V)$ et de la proposition 3.3.9 que

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, V^*(1)) = \mathrm{ord}_{u=1} P_\mathfrak{p}(V, u) = -\mathrm{ord}_{s=0} L_\mathfrak{p}(V, s).$$

L'assertion (i) résulte alors de l'exactitude de la suite exacte (b) du n°3.3.1 pour $V^*(1)$.

Pour prouver (ii), remarquons que (i) nous permet de se ramener au cas où Σ contient l'ensemble des places de mauvaise réduction de l'extension. On a alors $L_\Sigma(V, s) = L_\Sigma(V', s) L_\Sigma(V'', s)$. Il suffit donc de montrer que

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^1_{f,\Sigma}(F, V^*(1)) - \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^0(F, V^*(1)) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^1_{f,\Sigma}(F, V'^*(1))$$
$$- \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^0(F, V'^*(1)) + \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^1_{f,\Sigma}(F, V''^*(1)) - \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^0(F, V''^*(1)),$$

ce qui résulte de la proposition 3.3.2.

4. Caractéristique d'Euler-Poincaré

Sauf mention explicite, nous ne supposerons pas dans ce paragraphe les conjectures du paragraphe 3 vérifiées. On suppose de nouveau que S est un ensemble fini de places de F contenant $S_\infty(F)$ et $S_\ell(F)$.

4.1. Droite d'Euler-Poincaré.

4.1.1. Pour toute représentation ℓ-adique V de $G_{F,S}$, on pose

$$\Delta_\mathfrak{p}(V) = \bigotimes_{0 \le i \le 2} (\det_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(F_\mathfrak{p}, V))^{(-1)^i} \text{ pour toute place } \mathfrak{p} \text{ de } F,$$

$$\Delta_{S,\mathrm{glob}}(V) = \bigotimes_{0 \le i \le 2} (\det_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(G_S, V))^{(-1)^i}$$

et

$$\Delta_S(V) = \Delta_{S,\mathrm{glob}}(V) \otimes \left(\bigotimes_{\mathfrak{p} \in S} \Delta_\mathfrak{p}(V) \right)^{-1}$$

4.1.2. De même, si T est une représentation $\mathbb{Z}_\ell$-adique de G_F, on pose

$$\Delta_{\mathfrak{p}}(T) = \bigotimes_{0\le i\le 2} (\det_{\mathbb{Z}_\ell} H^i(F_{\mathfrak{p}}, T))^{(-1)^i} \quad \text{pour toute place } \mathfrak{p} \text{ de}$$

$$\Delta_{S,\mathrm{glob}}(T) = \bigotimes_{0\le i\le 2} (\det_{\mathbb{Z}_\ell} H^i(U_S, T))^{(-1)^i}$$

et

$$\Delta_S(T) = \Delta_{S,\mathrm{glob}}(T) \otimes \left(\bigotimes_{\mathfrak{p}\in S} \Delta_{\mathfrak{p}}(T)\right)^{-1}.$$

Si $\ell = 2$, pour $\mathfrak{p}$ place archimédienne, il ne faut pas oublier de c groupes finis $H^1(F_{\mathfrak{p}}, T)$ et $H^2(F_{\mathfrak{p}}, T)$.

Si $V = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T$, le $\mathbb{Z}_\ell$-module $\Delta_S(T)$ est libre de rang un et à un réseau de $\Delta_S(V)$.

4.1.3. Soit

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

une suite exacte courte de représentations ℓ-adiques de $G_{F,S}$. exactes de cohomologie

$$\cdots \to H^i(U_S, V') \to H^i(U_S, V) \to H^i(U_S, V'') \to \cdots$$

et

$$\cdots \to H^i(F_{\mathfrak{p}}, V') \to H^i(F_{\mathfrak{p}}, V) \to H^i(F_{\mathfrak{p}}, V'') \to \cdots$$

induisent un isomorphisme naturel

$$\Delta_S(V') \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \Delta_S(V'') \simeq \Delta_S(V).$$

Le résultat suivant est évident:

PROPOSITION. *Soit*

$$0 \to T' \to T \to T'' \to 0$$

une suite exacte courte de représentations $\mathbb{Z}_\ell$-adiques de $G_{F,S}$. Po $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T'$, $V = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T$, et $V'' = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T''$. Dans l'isomorphisme l'image de $\Delta_S(T') \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \Delta_S(T'')$ est $\Delta_S(T)$.

4.1.4. PROPOSITION. *Soient T_1 et T_2 deux représentations $\mathbb{Z}_\ell$- $G_{F,S}$ telles que $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_1 = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_2 = V$. Alors, dans $\Delta_S(V)$, $\Delta_S(T_2)$.*

PREUVE. Par dévissage, on se ramène au cas où l'ison $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_1 \cong \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_2$ est induit par un morphisme de T_1 dan l'on peut supposer injectif ou surjectif.

Dans le premier cas, on a donc une suite exacte

$$0 \to T_1 \to T_2 \to T'' \to 0,$$

où T'' est un groupe fini d'ordre une puissance de ℓ. On peut appliquer la proposition ci-dessus avec $T' = T_1$, $T = T_2$, $V' = V$, $V'' = 0$ et on a

$$\Delta_S(T_2) = \Delta_S(T_1) \cdot \chi(T''),$$

où

$$\chi(T'') = \prod_{0 \le i \le 2} \#(H^i(U_S, T''))^{(-1)^i} / \prod_{\mathfrak{p} \in S} \left(\prod_{0 \le i \le 2} \#(H^i(F_\mathfrak{p}, T''))^{(-1)^i} \right) = 1$$

car [**Mi86,** 1.5.1]

$$\prod_{0 \le i \le 2} \#(H^i(U_S, T''))^{(-1)^i} = \#(T'')^{-[F:\mathbb{Q}]} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \in S_\infty} \#(H^0(F_\mathfrak{p}, T'')),$$

tandis que [**Mi86,** 1.2.8]

$$\prod_{\mathfrak{p} \in S_f} \left(\prod_{0 \le i \le 2} \#(H^i(F_\mathfrak{p}, T''))^{(-1)^i} \right) = \#(T'')^{-[F:\mathbb{Q}]},$$

et que, pour $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, comme $G_\mathfrak{p}$ est cyclique, $\#(H^1(F_\mathfrak{p}, T'') = \#(H^2(F_\mathfrak{p}, T''))$.

Le second cas se traite de la même manière.

4.1.5. Si V est une représentation ℓ-adique de $G_{F,S}$, le sous-$\mathbb{Z}_\ell$-module $\Delta_S(T)$ de $\Delta_S(V)$ est donc le même pour n'importe quel réseau T de V stable par $G_{F,S}$. *On le note* $\Delta_{S,\mathbb{Z}_\ell}(V)$. On appelle *norme canonique* sur $\Delta_S(V)$ l'unique norme $|\cdot|_{\mathrm{can},S}$ telle que, si ω est une base de $\Delta_{S,\mathbb{Z}_\ell}(V)$, alors $|\omega|_{\mathrm{can},S} = 1$.

La proposition 4.1.3 nous dit alors que, avec des conventions évidentes,

$$\Delta_{S,\mathbb{Z}_\ell}(V) \simeq \Delta_{S,\mathbb{Z}_\ell}(V') \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \Delta_{S,\mathbb{Z}_\ell}(V''),$$

ou encore que l'isomorphisme $\Delta_S(V') \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \Delta_S(V'') \simeq \Delta_S(V)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés.

4.1.6. Lemme. *Soit V une représentation ℓ-adique de $G_{F,S}$ et soit S' un ensemble fini de places de F contenant S. Alors, la suite*

$$(s_{S,S'}(V)) \qquad \cdots \to H^i(U_S, V) \to H^i(U_{S'}, V) \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S' - S} H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V) \to \cdots$$

(où les applications sont définies comme pour $s_{f,S}(V)$, cf. n°2.2.1*) est exacte.*

Preuve. On peut montrer l'exactitude de cette suite directement en raisonnant comme pour la suite $s_{f,S}(V)$. On peut aussi la déduire de l'exactitude de $s_{f,S}(V)$ en remarquant que, dans le diagramme commutatif rectangulaire

tordu

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\cdots \to \widetilde{H}^i_f(F, V) \to & H^i(U_S, V) & \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V) & \to \widetilde{H}^{i+1}_f(F, V) \to \cdots \\
 & \| & \downarrow & \| & \\
\cdots \to \widetilde{H}^i_f(F, V) \to & H^i(U_{S'}, V) & \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S'_f} H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V) & \to \widetilde{H}^{i+1}_f(F, V) \to \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & 0 \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S'-S} H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V) & \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S'-S} H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V) \to & 0 & \\
 & & \downarrow & \downarrow & \\
 & & \cdots & 0 &
\end{array}$$

toutes les lignes et les colonnes, sauf peut-être la deuxième colonne, exactes et que cette dernière est un complexe; et que, par conséquent, elle exacte aussi.

4.1.7. On dispose alors d'un s-isomorphisme (i.e. un isomorphisme c au signe près) naturel

$$i_{S,S'}(V)\colon \Delta_{S'}(V) \to \Delta_S(V).$$

La suite exacte précédente fournit en effet un s-isomorphisme

$$\begin{aligned}
\Delta_{S',\mathrm{glob}}(V) &\simeq \Delta_{S,\mathrm{glob}}(V) \otimes \left(\bigotimes_{i,\,\mathfrak{p}\in S'-S} (\det_{\mathbb{Q}_\ell} H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V))^{(-1)^i} \right) \\
&\simeq \Delta_{S,\mathrm{glob}}(V) \otimes \left(\bigotimes_{i,\,\mathfrak{p}\in S'-S} \det_{\mathbb{Q}_\ell}(H^i(F_\mathfrak{p}, V))^{(-1)^i} \right) \\
&\quad \otimes \left(\bigotimes_{\mathfrak{p}\in S'-S} L_f(F_\mathfrak{p}, V)^{-1} \right)
\end{aligned}$$

(cf. I, 4.1.1 pour la définition de $L_f(F_\mathfrak{p}, V)$), ou encore

$$\Delta_{S'}(V) \simeq \Delta_S(V) \otimes \left(\bigotimes_{\mathfrak{p}\in S'-S} L_f(F_\mathfrak{p}, V) \right)^{-1}.$$

Comme $\mathfrak{p} \in S' - S$ implique que $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ, $L_f(F_\mathfrak{p}, V)$ s'ide à $\mathbb{Q}_\ell$ (cf. I, 4.1.1) et on obtient l'isomorphisme cherché. On utilise $i_{S,}$ pour identifier $\Delta_{S'}(V)$ et $\Delta_S(V)$.

PROPOSITION. *Dans l'identification précédente on a* $\Delta_{S',\mathbb{Z}_\ell}(V) \simeq \Delta_{S,}$ *et* $|\cdot|_{\mathrm{can},S'} = |\cdot|_{\mathrm{can},S}$.

PREUVE. Choisissons un réseau T de V stable par $G_{F,S}$. Pour i posons aussi $H^i_f(F_\mathfrak{p}, T) = 0$ si $i \neq 0, 1$ et

$$H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, T) = H^i(F_\mathfrak{p}, T)/H^i_f(F_\mathfrak{p}, T)$$

pour tout i. Avec des conventions évidentes, on a

$$L(F_p, T) = L_f(F_p, T) \otimes L_{/f}(F_p, T)$$

et on voit que, lorsque l'on identifie $L_f(F_p, V)$ à $\mathbb{Q}_\ell$, $L_f(F_p, T)$ s'identifie à $\mathbb{Z}_\ell$ (I, 4.1.2 et 4.2.1). La proposition résulte alors du lemme suivant:

4.1.8 LEMME. *La suite exacte $s_{S,S'}(V)$ provient, par extension des scalaires, d'une suite exacte de la forme*

$$(s_{S,S'}(T)) \quad \cdots \to H^i(U_S, T) \to H^i(U_{S'}, T) \to \prod_{p \in S'-S} H^i_{/f}(F_p, T) \to \cdots.$$

Ce lemme se démontre par des techniques analogues à celles utilisées au n°2.2.1 et nous en laissons la vérification au lecteur.

4.1.9. Ceci nous permet de définir (au signe près) la droite $\Delta_{EP}(V)$ comme étant la droite $\Delta_S(V)$ pour n'importe quel ensemble fini S assez grand. On l'appelle *la droite d'Euler–Poincaré de V*. Elle est munie d'une *norme canonique* $|\cdot|_{can}(= |\cdot|_{can,S}$, pour S assez grand) ou, ce qui revient au même, d'un sous-$\mathbb{Z}_\ell$-module canonique $\Delta_{EP,\mathbb{Z}_\ell}(V)$: on a $|\omega|_{can} = 1$ si ω est une base de $\Delta_{EP,\mathbb{Z}_\ell}(V)$.

4.2. La droite fondamentale normée $\Delta_f(V)$.

4.2.1. A toute représentation ℓ-adique pseudo-géométrique V de G_F, on associe la $\mathbb{Q}_\ell$-droite

$$\Delta_f(V) = \left(\bigotimes_{0 \le i \le 3} (\det_{\mathbb{Q}_\ell} \tilde{H}^i_f(F, V))^{(-1)^i}\right) \otimes \left(\bigotimes_{p \in S_\infty(F)} \det_{\mathbb{Q}_\ell} H^0(F_p, V)\right)^{-1} \otimes \det_{\mathbb{Q}_\ell} t_V.$$

4.2.2. Supposons que V soit en outre non ramifiée en dehors de S. La suite exacte $s_{f,S}(V)$ du n°2.2.1 nous fournit un s-isomorphisme

$$\begin{aligned}\Delta_{S,\mathrm{glob}}(V) &\simeq \left(\bigotimes_i (\det_{\mathbb{Q}_\ell} \tilde{H}^i_f(F, V))^{(-1)^i}\right) \otimes \left(\bigotimes_{i, p \in S_f} (\det_{\mathbb{Q}_\ell} H^i_{/f}(F_p, V))^{(-1)^i}\right) \\ &\simeq \left(\bigotimes_i (\det_{\mathbb{Q}_\ell} \tilde{H}^i_f(F, V))^{(-1)^i}\right) \otimes \left(\bigotimes_{i, p \in S_f} \det_{\mathbb{Q}_\ell} (H^i(F_p, V))^{(-1)^i}\right) \\ &\qquad \otimes \left(\bigotimes_{p \in S_f} L_f(F_p, V)\right)^{-1},\end{aligned}$$

ou encore, puisque $H^i(F_p, V) = 0$ si $p \in S_\infty$ et $i \neq 0$ et puisque $L_f(F_p, V) \simeq \mathbb{Q}_\ell$ si p ne devise pas ℓ tandis que $L_f(F_p, V) \simeq$

$(\det_{\mathbb{Q}_\ell} t_{V,\mathfrak{p}})^{-1}$ si $\mathfrak{p}$ divise ℓ,

$$\Delta_S(V) \simeq \left(\bigotimes_i \det_{\mathbb{Q}_\ell}(\tilde{H}^i_f(F, V))^{(-1)^i}\right) \otimes \left(\bigotimes_{\mathfrak{p}\in S_\infty} \det_{\mathbb{Q}_\ell}(H^0(F_\mathfrak{p}, V))^{-1}\right) \otimes \left(\bigotimes_{\mathfrak{p}\in S_\ell} \det_{\mathbb{Q}_\ell} t_{V,\mathfrak{p}}\right)$$

$$= \Delta_f(V).$$

D'où un isomorphisme $i_S(V)\colon \Delta_f(V) \simeq \Delta_S(V)$. Il est immédiat que, lorsque l'on identifie $\Delta_S(V)$ à $\Delta(V)$, $i_S(V)$ est indépendant (au signe près) de S; on obtient ainsi un s-isomorphisme

$$i(V)\colon \Delta_f(V) \to \Delta_{\mathrm{EP}}(V).$$

Nous notons $|\cdot|_{\mathrm{EP},V}$ la norme sur $\Delta_f(V)$ déduite de $|\cdot|_{\mathrm{can}}$ via $i(V)$ (on a donc $|\omega|_{\mathrm{EP},V} = |i(V)(\omega)|_{\mathrm{can}}$, si $\omega \in \Delta_f(V)$); nous notons $\Delta_{f,\mathbb{Z}_\ell}(V)$ le sous-$\mathbb{Z}_\ell$-module de $\Delta_f(V)$ déduit de $\Delta_{\mathrm{EP},\mathbb{Z}_\ell}(V)$ via $i(V)$ (on a donc $|\omega|_{\mathrm{EP},V} = 1$ si et seulement si ω est une base du $\mathbb{Z}_\ell$-module $\Delta_{f,\mathbb{Z}_\ell}(V)$.

5. Compléments

Ici encore, S contient $S_\infty(F)$ et $S_\ell(F)$.

5.1. Multiplicativité.

5.1.1. Soit

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

une f-suite exacte courte de représentations ℓ-adiques pseudo-géométriques de $G_{F,S}$. Les suites exactes

$$\cdots \to \tilde{H}^i_f(F, V') \to \tilde{H}^i_f(F, V) \to \tilde{H}^i_f(F, V'') \to \cdots,$$

$$0 \to H^0(F_\mathfrak{p}, V') \to H^0(F_\mathfrak{p}, V) \to H^0(F_\mathfrak{p}, V'') \to 0 \quad \text{pour } \mathfrak{p} \in S_\infty,$$

et

$$0 \to t_{V',\mathfrak{p}} \to t_{V,\mathfrak{p}} \to t_{V'',\mathfrak{p}} \to 0 \quad \text{pour } \mathfrak{p} \in S_\ell$$

permettent de définir un isomorphisme

$$\Delta_f(V') \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \Delta_f(V'') \simeq \Delta_f(V).$$

5.1.2. Proposition. *L'isomorphisme ci-dessus est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés, autrement dit, il induit un isomorphisme*

$$\Delta_{f,\mathbb{Z}_\ell}(V') \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \Delta_{f,\mathbb{Z}_\ell}(V'') \simeq \Delta_{f,\mathbb{Z}_\ell}(V).$$

Preuve. On dispose (cf. n°4.1.3) d'un isomorphisme canonique $\Delta_S(V') \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \Delta_S(V'') \simeq \Delta_S(V)$ d'espaces vectoriels normés. Il suffit alors de vérifier la

commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_f(V') \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \Delta_f(V'') & \longrightarrow & \Delta_f(V) \\ \downarrow{\scriptstyle i_S(V') \otimes i_S(V'')} & & \downarrow{\scriptstyle i_S(V)} \\ \Delta_S(V') \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \Delta_S(V'') & \longrightarrow & \Delta_S(V). \end{array}$$

Cela résulte formellement de la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \to & H^i_f(F_\mathfrak{p}, V') & \to & H^i(F_\mathfrak{p}, V') & \to & H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V') & \to & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \to & H^i_f(F_\mathfrak{p}, V) & \to & H^i(F_\mathfrak{p}, V) & \to & H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V) & \to & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \to & H^i_f(F_\mathfrak{p}, V'') & \to & H^i(F_\mathfrak{p}, V'') & \to & H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V'') & \to & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdot & \to & \widetilde{H}^i_f(F, V') & \to & H^i(U_S, V') & \to & \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V') & \to & \cdot \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdot & \to & \widetilde{H}^i_f(F, V) & \to & H^i(U_S, V) & \to & \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V) & \to & \cdot \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdot & \to & \widetilde{H}^i_f(F, V'') & \to & H^i(U_S, V'') & \to & \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, V'') & \to & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \end{array}$$

5.2. Comportement par induction.

5.2.1. Soient F' une extension finie de F contenue dans $\overline{F}$, V' une représentation ℓ-adique de $G_{F'}$ et $V = \mathrm{Ind}_{F'/F} V'$ la représentation de G_F induite par V. Soit $S_{F'}$ l'ensemble des places de F' qui sont au dessus d'une place de S. On suppose que V est non ramifiée en dehors de S, ce qui implique que V' est non ramifiée en dehors de $S_{F'}$.

Avec des conventions évidentes, on a des isomorphismes canoniques

$$H^i(U_S, V) \simeq H^i(U_{S_{F'}}, V') \quad \text{et} \quad H^i(F_\mathfrak{p}, V) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}} H^i(F'_{\mathfrak{p}'}, V'),$$

d'où un isomorphisme $\Delta_S(V) \simeq \Delta_{S_{F'}}(V')$. On a aussi des isomorphismes canoniques

$$H^i_f(F_\mathfrak{p}, V) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}} H^i_f(F'_{\mathfrak{p}'}, V') \quad \text{et, pour } \mathfrak{p} \in S_\ell(F), \quad t_{V,\mathfrak{p}} \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}} t_{V',\mathfrak{p}'}.$$

Des premiers on déduit des isomorphismes $\widetilde{H}^i_f(F, V) \simeq \widetilde{H}^i_f(F', V')$ pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Joints aux derniers, ils fournissent un isomorphisme

$$\Delta_f(V') \simeq \Delta_f(V).$$

5.2.2. PROPOSITION. *Les isomorphismes* $\Delta_S(V) \simeq \Delta_{S_{F'}}(V')$ *et* $\Delta_f(V) \simeq \Delta_f(V')$ *définis ci-dessus sont des isomorphismes d'espaces vectoriels normés.*

PREUVE. Laissée au lecteur.

5.3. Groupes de Shafarevich–Tate et nombres de Tamagawa.

5.3.1. Dans tout le n°5.3, V est une représentation ℓ-adique pseudo-géométrique de $G_{F,S}$ et T est un réseau de V stable par $G_{F,S}$. On choisit une base ω de $\det_{\mathbb{Q}_\ell} t_V$.

Rappelons que si W est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini (resp. un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie), on pose $W^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(W, \mathbb{Z}_\ell)$ (resp. $W^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}(W, \mathbb{Q}_\ell)$). Si W est un $\mathbb{Z}_\ell$-module, on note $W\hat{} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(W, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ son dual de Pontryagin.

On voit que $T\hat{}(1)$ s'identifie à $V^*(1)/T^*(1)$ et $T^*(1)\hat{}(1)$ à V/T.

5.3.2. Posons

$$\Delta'_f(V) = \left(\bigotimes_{0\le i\le 3} (\det_{\mathbb{Q}_\ell} \widetilde{H}^i_f(F, V))^{(-1)^i}\right) \otimes \left(\bigotimes_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)} (\det_{\mathbb{Q}_\ell} H^0(F_\mathfrak{p}, V))^{-1}\right),$$

de sorte que $\Delta_f(V) = \Delta'_f(V) \otimes \det_{\mathbb{Q}_\ell} t_V$.

Posons $H^0_f(F, T) = H^0(F, T)$, notons $H^1_f(F, T)$ l'image inverse de $H^1_f(F, V)$ dans $H^1(F, T)$ et définissons de la même manière $H^i_f(F, T^*(1))$ pour $i = 0, 1$.

On obtient un réseau $\Delta'_f(T)$ de $\Delta'_f(V)$ en posant

$$\Delta'_f(T) = \left(\bigotimes_{0\le i\le 1} (\det_{\mathbb{Z}_\ell} H^i_f(F, T))^{(-1)^i}\right) \otimes \left(\bigotimes_{0\le i\le 1} (\det_{\mathbb{Z}_\ell} H^i_f(F, T^*(1)))^{(-1)^i}\right) \otimes \left(\bigotimes_{\mathfrak{p}\in S_\infty} \det_{\mathbb{Z}_\ell} H^0(F_\mathfrak{p}, T)\right)^{-1}.$$

Si l'on choisit une base ω'_T de $\Delta'_f(T)$, $\omega'_T \otimes \omega$ est une base de $\Delta_f(V)$ et l'objet essentiel de ce paragraphe est de calculer $|\omega'_T \otimes \omega|_{\mathrm{EP},V}$ (qui ne dépend que de T et du réseau de $\det_{\mathbb{Q}_\ell} t_V$ engendré par ω, mais pas du choix des bases ω'_T et ω). Ce calcul fait intervenir le *nombre de Tamagawa* et le *groupe de Shafarevich–Tate de* T, que nous allons définir maintenant.

5.3.3. Choisissons, pour chaque $\mathfrak{p} \in S_\ell(F)$, une base $\omega_\mathfrak{p}$ de $\det_{\mathbb{Q}_\ell} t_{V,\mathfrak{p}}$ de manière que, "au signe près", $\omega = \bigotimes_{\mathfrak{p}|\ell} \omega_\mathfrak{p}$. Pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de

F, on pose $\mathrm{Tam}_{\mathfrak{p}}^0(T) = \mathrm{Tam}_{F_{\mathfrak{p}}}^0(T)$ (resp. $\mathrm{Tam}_{\mathfrak{p},\omega_{\mathfrak{p}}}^0(T) = \mathrm{Tam}_{F_{\mathfrak{p}},\omega_{\mathfrak{p}}}^0(T)$) si $\mathfrak{p} \notin S_\ell(F)$ (resp. $\mathfrak{p} \in S_\ell(F)$) (cf. I, 4.1.2). Si $\mathfrak{p}$ est une place infinie, on pose

$$\mathrm{Tam}_{\mathfrak{p}}^0(T) = \#(H^1(F_{\mathfrak{p}}, T)).$$

On pose

$$\mathrm{Tam}_{\omega}^0(T) = \prod_{\mathfrak{p}\in S-S_\ell} \mathrm{Tam}_{\mathfrak{p}}^0(T) \times \prod_{\mathfrak{p}\in S_\ell} \mathrm{Tam}_{\mathfrak{p},\omega_{\mathfrak{p}}}^0(T).$$

C'est une puissance de ℓ (positive, négative, ou nulle) qui dépend de T et du réseau de $\det_{\mathbb{Q}_\ell} t_V$ engendré par ω mais qui ne dépend pas des autres choix. Comme $\mathrm{Tam}_{\mathfrak{p}}^0(T) = 1$ si $\mathfrak{p} \notin S$, $\mathrm{Tam}_{\omega}^0(T)$ ne change pas non plus si l'on remplace S par un ensemble fini de places plus grand. Nous l'appelons *le nombre de Tamagawa de T relatif à ω*.

5.3.4. Soit $\mathfrak{p}$ une place de F. Si $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, on pose $H_f^1(F_{\mathfrak{p}}, V) = 0$; dans tous les cas, on note $H_f^1(F_{\mathfrak{p}}, V/T)$ l'image de $H_f^1(F_{\mathfrak{p}}, V)$ dans $H^1(F_{\mathfrak{p}}, V/T)$. Appelons *groupe de Selmer de T* le sous-groupe $H_f^1(F, V/T)$ de $H^1(F, V/T)$ formé des x tels que, pour toute place $\mathfrak{p}$ de F, l'image de x dans $H^1(F_{\mathfrak{p}}, V/T)$ appartient à $H_f^1(F_{\mathfrak{p}}, V/T)$. On définit alors le *groupe de Shafarevich–Tate* $Ш(T)$ de T comme le quotient du groupe de Selmer par l'image de $H_f^1(F, V)$. Par exemple, si T est le module de Tate d'une variété abélienne X sur F, $Ш(T)$ est le quotient de la partie ℓ-primaire du groupe de Shafarevich–Tate de X par sa partie ℓ-divisible.

5.3.5. PROPOSITION. *Le groupe $Ш(T)$ est fini.*

PREUVE. Remarquons d'abord que, comme $H_{/f}^1(F_{\mathfrak{p}}, T)$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module sans torsion, on a $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H_f^1(F_{\mathfrak{p}}, T) = H_f^1(F_{\mathfrak{p}}, V/T)$. D'autre part, $H_f^1(F, V/T)$ est contenu dans $H^1(U_S, V/T)$: en effet, $H^1(U_S, V/T)$ est l'ensemble des éléments de $H^1(F, V/T)$ dont l'image dans $H^1(F_{\mathfrak{p}}, V/T)$ pour $\mathfrak{p}$ n'appartenant pas à S appartient à $H^1(k_{\mathfrak{p}}, V/T)$ où $k_{\mathfrak{p}}$ désigne le corps résiduel de $F_{\mathfrak{p}}$ et pour un tel $\mathfrak{p}$,

$$\begin{aligned} H^1(k_{\mathfrak{p}}, V/T) &= \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1(k_{\mathfrak{p}}, T) \\ &= \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H_f^1(F_{\mathfrak{p}}, T) = H_f^1(F_{\mathfrak{p}}, V/T). \end{aligned}$$

Ainsi, $H_f^1(F, V/T)$ peut être défini comme l'ensemble des éléments x de $H^1(U_S, V/T)$ tels que, pour toute place $\mathfrak{p}$ de S, l'image de x dans $H^1(F_{\mathfrak{p}}, V/T)$ appartient à $H_f^1(F_{\mathfrak{p}}, V/T)$.

Le quotient de $H^1(U_S, V/T)$ par l'image de $H^1(U_S, V)$ est fini car il s'identifie au sous-groupe de torsion du $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini $H^2(U_S, T)$.

On a d'autre part le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 0 \\ & & & & \downarrow \\ & & H^1(U_S, T) & \to & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, T) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & H^1_f(F, V) & \to H^1(U_S, V) & \to & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, V) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & H^1_f(F, V/T) & \to H^1(U_S, V/T) & \to & \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^1(F_\mathfrak{p}, V/T)/H^1_f(F_\mathfrak{p}, V/T) \end{array}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes (l'injectivité de $H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, T)$ dans $H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, V)$ vient de ce que $H^1_f(F_\mathfrak{p}, T)$ est défini comme l'image réciproque de $H^1_f(F_\mathfrak{p}, V)$ dans $H^1(F_\mathfrak{p}, T)$). On en déduit par le lemme du serpent une injection

$$\begin{aligned}(H^1_f(F, V/T) \cap \operatorname{Im} H^1(U_S, V))/\operatorname{Im} H^1_f(F, V) \\ \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, T)/\operatorname{Im} H^1(U_S, T).\end{aligned}$$

Le second module étant de type fini, le premier qui est de torsion est fini. La proposition s'en déduit.

5.3.6. THÉORÈME. *Avec les hypothèses et les notations qui précèdent, on a*

$$(|\omega'_T \otimes \omega|_{\mathrm{EP}, V})^{-1} = \mathrm{Tam}^0_\omega(T) \cdot \#Ш(T^*(1)).$$

En vue de *prouver* ce théorème, définissons les $\mathbb{Z}_\ell$-modules $\tilde{H}^i_f(F, T)$, pour $i \in \mathbb{Z}$, en posant

$$\tilde{H}^0_f(F, T) = H^0(F, T), \qquad \tilde{H}^1_f(F, T) = H^1_f(F, T),$$
$$\tilde{H}^2_f(F, T) = H^1_f(F, (V^*/T^*)(1))\hat{},$$
$$\tilde{H}^3_f(F, T) = H^0(F, (V^*/T^*)(1))\hat{} \quad \text{et} \quad \tilde{H}^i_f(F, T) = 0 \quad \text{si } i \neq 0, 1, 2, 3.$$

Si $V = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T$, on voit que, pour tout i, $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{H}^i_f(F, T)$ s'identifie à $\tilde{H}^i_f(F, V)$ ce qui fait que

$$\tilde{\Delta}'_f(T) = \left(\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} (\det_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{H}^i_f(F, T))^{(-1)^i}\right) \otimes \left(\bigotimes_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)} \det_{\mathbb{Z}_\ell} H^0(F_\mathfrak{p}, T)\right)^{-1}$$

est encore un réseau de $\Delta'_f(V)$.

5.3.7. Si $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, on pose $H^1_f(F_\mathfrak{p}, T) = H^1(F_\mathfrak{p}, T)$. Pour toute place $\mathfrak{p}$ de F, on pose toujours $H^0_f(F_\mathfrak{p}, T) = H^0(F_\mathfrak{p}, T)$ et $H^i_f(F_\mathfrak{p}, T) = 0$ pour $i \neq 0, 1$; pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, T) = H^i(F_\mathfrak{p}, T)/H^i_f(F_\mathfrak{p}, T)$.

PROPOSITION. *Il existe une suite exacte*

$$(s_{f,S}(T)) \qquad \cdots \to \tilde{H}^i_f(F, T) \to H^i(U_S, T) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S} H^i_{/f}(F_\mathfrak{p}, T) \to \cdots$$

induisant, par extension des scalaires de $\mathbb{Z}_\ell$ *à* $\mathbb{Q}_\ell$, *la suite exacte* $s_{f,S}(V)$.

PREUVE. La construction des flèches et la démonstration de cette proposition est très similaire à celle de la proposition 2.2.1 et nous en laissons les détails au lecteur (utiliser le fait que $H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, T) = H^1_f(F_\mathfrak{p}, T\hat{}(1))\hat{}$ et la suite exacte de Poitou–Tate

$$\cdots \to H^i(U_S, T) \to \prod_{\mathfrak{p}\in S} \hat{H}^i(F_\mathfrak{p}, T) \to H^{2-i}(U_S, T\hat{}(1))\hat{} \to \cdots$$

(cf. [Mi, I, Theorem 4.10]; ici $\hat{H}^i(F_\mathfrak{p}, T) = H^i(F_\mathfrak{p}, T)$, sauf si $i = 0$ et $\mathfrak{p} \in S_\infty$, auquel cas $\hat{H}^0(F_\mathfrak{p}, T) = 0$ si $\mathfrak{p}$ est complexe et $\hat{H}^0(\mathbb{R}, T) = T^\tau/(1+\tau)T$ si τ est la conjugaison complexe).

5.3.8. Le théorème 5.3.6 résulte alors de la proposition suivante:

PROPOSITION. *Si* $\tilde{\omega}'_T$ *est une base de* $\tilde{\Delta}'_f(T)$, *on a*

i)
$$(|\tilde{\omega}'_T \otimes \omega|_{\mathrm{EP},V})^{-1} = \mathrm{Tam}^0_\omega(T);$$

ii)
$$\Delta'_f(T) = \#Ш(T^*(1)) \cdot \tilde{\Delta}'_f(T).$$

PREUVE. L'isomorphisme de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels $i_S(V)$: $\Delta_f(V) \simeq \Delta_S(V)$ se factorise de la manière suivante

$$\Delta_f(V) = \tilde{\Delta}'_f(V) \otimes \bigotimes_{\mathfrak{p}\in S_f} \det_{\mathbb{Q}_\ell} t_{V,\mathfrak{p}} \simeq \tilde{\Delta}'_f(V) \otimes \bigotimes_{\mathfrak{p}\in S_f} L_f(F_\mathfrak{p}, V)^{-1} \simeq \Delta_S(V).$$

La suite exacte $s_{f,S}(T)$ implique que le deuxième isomorphisme provient d'un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell$-modules

$$\tilde{\Delta}'_f(T) \otimes \left(\bigotimes_{\mathfrak{p}\in S_f} L_f(F_\mathfrak{p}, T)^{-1}\right) \otimes \left(\bigotimes_{\mathfrak{p}\in S_\infty} H^1(F_\mathfrak{p}, T)\right) \simeq \Delta_S(T).$$

Par définition de $\mathrm{Tam}^0_\omega(T)$, i) s'en déduit. Pour montrer ii), on remarque que l'exactitude des deux suites suivantes

$$0 \to (H^1_f(F, T^*(1))_{\mathrm{tor}})\hat{} \to \tilde{H}^2_f(F, T) \to H^0(F, T^*(1))^* \to 0$$

(son dual de Pontryagin est

$$0 \to \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^0(F, T^*(1)) \to H^0(F, V^*/T^*(1)) \to H^1_f(F, T^*(1))_{\mathrm{tor}} \to 0);$$

$$0 \to Ш(T^*(1))\hat{} \to \tilde{H}^2_f(F, T) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(H^1_f(F, T^*(1)), \mathbb{Z}_\ell) \to 0$$

(son dual de Pontryagin est

$$0 \to \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} H^1_f(F, T^*(1)) \to H^1_f(F, (V^*/T^*)(1)) \to Ш(T^*(1)) \to 0).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}'_f(T) &\simeq (\#Ш(T^*(1)))^{-1} \cdot \left(\bigotimes_{0\le i\le 1} (\det_{\mathbb{Z}_\ell} H^i_f(F, T))^{(-1)^i}\right) \\ &\otimes \left(\bigotimes_{0\le i\le 1} (\det_{\mathbb{Z}_\ell} H^i_f(F, T^*(1)))^{(-1)^i}\right) \otimes \left(\bigotimes_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)} \det_{\mathbb{Z}_\ell} H^0(F_\mathfrak{p}, T)\right)^{-1} \\ &= (\#Ш(T^*(1)))^{-1} \Delta'_f(T).\end{aligned}$$

5.4. La dualité entre $Ш(T)$ et $Ш(T^*(1))$. On conserve les hypothèses et notations du numéro précédent.

5.4.1. On se propose de construire une application $\delta_T : H^1_f(F, V/T) \to H^1_f(F, (V^*/T^*)(1))\widehat{\ }$. Soient $x \in H^1_f(F, V/T)$ et $y \in H^1_f(F, (V^*/T^*)(1))$. Choisissons $\alpha \in Z^1(U_S, V/T)$ et $\beta \in Z^1(U_S, (V^*/T^*)(1))$ représentant x et y respectivement. Choisissons $\alpha_1 \in C^1(U_S, V)$ relevant α. Alors $d\alpha_1$ appartient à $Z^2(U_S, T)$ (sa classe dans $H^2(U_S, V/T)$ est l'image de x par l'homomorphisme de connexion). Notons $d\alpha_1 \cup \beta$ l'image du cup-produit de $d\alpha_1$ et de β dans $Z^3(U_S, (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)(1))$. Le groupe $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)(1)$ se plonge dans le groupe $\mathscr{E}_S$ des S-unités de F_S. Comme $H^3(U_S, \mathscr{E}_S) = 0$ [**Mi86, I**, Corollary 4.18], il existe $\varepsilon \in C^2(U_S, \mathscr{E}_S)$ tel que $d\alpha_1 \cup \beta = d\varepsilon$. Pour tout $\mathfrak{p} \in S$, soit $\alpha_{\mathfrak{p},1}$ un relèvement dans $Z^1_f(F_\mathfrak{p}, V)$ de la restriction $\alpha_\mathfrak{p}$ de α à $Z^1(F_\mathfrak{p}, V/T)$ (cela existe puisque l'image $x_\mathfrak{p}$ de x dans $H^1(F_\mathfrak{p}, V/T)$ appartient à l'image de $H^1_f(F_\mathfrak{p}, V)$. Si $\alpha_{1,\mathfrak{p}}$ désigne la restriction de α_1 à $C^1(F_\mathfrak{p}, V)$, $\alpha_{\mathfrak{p},1} - \alpha_{1,\mathfrak{p}}$ appartient à $Z^1(F_\mathfrak{p}, T)$. On vérifie que, avec des notations évidentes, $(\alpha_{1,\mathfrak{p}} - \alpha_{\mathfrak{p},1}) \cup \beta_\mathfrak{p} - \varepsilon_\mathfrak{p} \in Z^2(F_\mathfrak{p}, \overline{F}^*_\mathfrak{p})$. En utilisant l'isomorphisme canonique $\mathrm{inv}_\mathfrak{p} : H^2(F_\mathfrak{p}, \overline{F}^*_\mathfrak{p}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on définit ainsi un élément de $\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$

$$\sum_{\mathfrak{p}\in S} \mathrm{inv}_\mathfrak{p}[(\alpha_{1,\mathfrak{p}} - \alpha_{\mathfrak{p},1}) \cup \beta_\mathfrak{p} - \varepsilon_\mathfrak{p}]$$

qui ne dépend pas des choix faits. L'homomorphisme

$$y \mapsto \sum_{\mathfrak{p}\in S} \mathrm{inv}_\mathfrak{p}[(\alpha_{1,\mathfrak{p}} - \alpha_{\mathfrak{p},1}) \cup \beta_\mathfrak{p} - \varepsilon_\mathfrak{p}]$$

définit donc un élément de $H^1_f(F, (V^*/T^*)(1))\widehat{\ }$ que l'on note $\delta_T(x)$.

5.4.2. PROPOSITION [Fl90]. *Soient V une représentation ℓ-adique pseudo-géométrique et T un $\mathbb{Z}_\ell$-réseau de V. La suite*

$$H^1_f(F, T) \to H^1_f(F, V) \to H^1_f(F, V/T) \xrightarrow{\delta_T} H^1_f(F, (V^*/T^*)(1))\hat{} \to H^1_f(F, V^*(1))^* \to H^1_f(F, T^*(1))^*$$

est exacte. L'homomorphisme δ_T induit un isomorphisme entre $Ш(T)$ et $Ш(T^*(1))\hat{}$, c'est-à-dire une dualité parfaite

$$C_T : Ш(T) \times Ш(T^*(1)) \to \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell .$$

En particulier, $Ш(T)$ et $Ш(T^*(1))$ ont même cardinal.

PREUVE. La deuxième affirmation résulte de la première. Prouvons celle-ci: On montre comme en 1.4.6 et 2.2.3 que l'image de $H^1_f(F, V)$ dans $H^1_f(F, V/T)$ est égale au noyau de δ_T et que l'image de $H^1_f(F, V/T)$ est contenue dans le noyau de $H^1_f(F, (V^*/T^*)(1))\hat{} \to H^1_f(F, V^*(1))^*$. On en déduit un homomorphisme injectif de $Ш(T)$ dans $Ш(T^*(1))$. En échangeant le rôle de T et de $T^*(1)$, on en déduit que $Ш(T)$ et $Ш(T^*(1))$ ont même cardinal et donc que l'application de $Ш(T)$ dans $Ш(T^*(1))$ induite par δ_T est un isomorphisme.

5.4.3. La forme bilinéaire C_T est une généralisation de la forme de Cassels–Tate pour les variétés abéliennes [Ca62].

PROPOSITION. *Si $x \in Ш(T)$ et $y \in Ш(T^*(1))$, on a*

$$C_T(x, y) = C_{T^*(1)}(y, x) .$$

PREUVE. On reprend les notations de 5.4.1 et on définit $\beta_{p,1}$ et $\beta_{1,p}$ comme on pense. Les classes dans $H^2(F_p, \overline{F}^*_p)$ de

$$(\alpha_{1,p} - \alpha_{p,1}) \cup \beta \quad \text{et} \quad (\alpha_{1,p} - \alpha_{p,1}) \cup \beta_{p,1}$$

sont égales. On remarque ensuite que, comme $\alpha_{p,1}$ (resp. $\beta_{p,1}$) est un élément de $Z^1_f(F_p, V)$ (resp. $Z^1_f(F_p, V^*(1))$, le cup-produit de $\alpha_{p,1}$ et de $\beta_{p,1}$ est un cobord. On peut donc écrire

$$(\alpha_{1,p} - \alpha_{p,1}) \cup \beta_{p,1} - \varepsilon_p \equiv \alpha_{1,p} \cup \beta_{p,1} - \varepsilon_p \quad \text{dans } H^2(F_p, \overline{F}^*_p) .$$

On a d'autre part

$$d(\alpha_1 \cup \beta_1) = d\alpha_1 \cup \beta_1 - \alpha_1 \cup d\beta_1 = d\alpha_1 \cup \beta_1 - d\beta_1 \cup \alpha_1 .$$

On a donc $d\beta_1 \cup \alpha = d\beta_1 \cup \alpha_1 = d(\alpha_1 \cup \beta_1 + \varepsilon)$. Il est facile d'en déduire la proposition comme en 1.4.5.

CHAPITRE III

STRUCTURES MOTIVIQUES

1. Structures de Hodge mixtes sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$

Il ne s'agit pas de notions nouvelles: une structure de Hodge mixte (sous-entendu réelle) sur $\mathbb{C}$ est ce que Deligne appelle une structure de Hodge mixte réelle **[De71]**; pour obtenir une structure sur $\mathbb{R}$, il faut rajouter une action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$.

1.1. Structures de Hodge mixte sur $\mathbb{C}$.

1.1.1. DÉFINITION. Une structure de Hodge mixte (sous-entendu réelle) (V, W, Fil) sur $\mathbb{C}$ consiste en

a) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie V appelé *réalisation tautologique* ou $\mathbb{R}$-*réalisation Betti*; le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ est noté indifféremment $D_{\mathrm{dR}}(V)$, V_{dR} ou $V_{\mathbb{C}}$ et est appelé *réalisation de Rham*;

b) une filtration finie croissante $(W_n V)_{n\in\mathbb{Z}}$ par des sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de V, appelée *filtration par le poids*;

c) une filtration finie décroissante $(\mathrm{Fil}^i V_{\mathrm{dR}})_{i\in\mathbb{Z}}$ par des sous-$\mathbb{C}$-espaces vectoriels de V_{dR}, appelée *filtration de Hodge*;

On exige que, sur $V_{\mathbb{C}}$, $(W, \mathrm{Fil}, \overline{\mathrm{Fil}})$ forment un système de trois filtrations opposées.

[Rappelons ce que cela signifie: Si f désigne l'automorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $V_{\mathbb{C}}$ qui est la conjugaison complexe sur $\mathbb{C}$ et l'identité sur V, la *filtration conjuguée* est la filtration $\overline{\mathrm{Fil}}$ de $V_{\mathbb{C}}$ définie par $\overline{\mathrm{Fil}}^i V_{\mathbb{C}} = f(\mathrm{Fil}^i V_{\mathbb{C}})$. Si l'on note encore W la filtration sur $V_{\mathbb{C}}$ déduite de W par extension des scalaires, on demande que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, les filtrations induites par Fil et $\overline{\mathrm{Fil}}$ sur $\mathrm{gr}^m V_{\mathbb{C}}$ soient *m-opposées*, i.e., que, si l'on note encore Fil et $\overline{\mathrm{Fil}}$ ces filtrations induites, alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'application naturelle

$$\mathrm{Fil}^i \mathrm{gr}^m V_{\mathbb{C}} \oplus \overline{\mathrm{Fil}}^{m+1-i} \mathrm{gr}^m V_{\mathbb{C}} \to \mathrm{gr}^m V_{\mathbb{C}}$$

soit un isomorphisme].

Dans la suite, on parlera abusivement de la structure de Hodge mixte V, la filtration par le poids et la filtration de Hodge étant sous-entendues.

1.1.2. Si V est une structure de Hodge mixte sur $\mathbb{C}$, on appelle *espace tangent* de V le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $t_V = \mathrm{t}_V(\mathbb{C}) = V_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^0 V_{\mathrm{dR}}$. On identifie V de manière naturelle à un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ et on note α_V l'application composée

$$\alpha_V : V \hookrightarrow V_{\mathbb{C}} \to t_V .$$

1.1.3. *Un morphisme* de structures de Hodge mixtes sur $\mathbb{C}$ est un morphisme des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels sous-jacents, compatible aux filtrations W et Fil. Il est bien connu (cf. [De71, n°2.3]) que tout morphisme de la catégorie $\mathbf{SH}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ des structures de Hodge mixtes sur $\mathbb{C}$ est strictement compatible aux filtrations. En particulier, si

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

est une suite exacte de structures de Hodge mixtes sur $\mathbb{C}$, la suite

$$0 \to t_{V'} \to t_V \to t_{V''} \to 0$$

est exacte.

La catégorie $\mathbf{SH}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ est de manière évidente une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{R}$, dont l'objet-unité, noté $\mathbb{1}_{\mathbb{C}}$ ou $\mathbb{1}$ s'il n'y a pas de risque de confusion, s'identifie à $\mathbb{R}$ (avec $W_{-1}\mathbb{R} = 0$, $W_0\mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\mathrm{Fil}^0\mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\mathrm{Fil}^1\mathbb{R} = 0$).

1.1.4. On dit qu'une structure de Hodge mixte V sur $\mathbb{C}$, non réduite à 0, est une structure de Hodge *pure* s'il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$, appelé *le poids de* V, tel que $\mathrm{gr}_n^W(V) = 0$ pour $n \neq m$.

La filtration par le poids définit en fait une filtration, que l'on note encore W, de tout objet V de $\mathbf{SH}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ par des sous-objets. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{gr}_n^W V$ est pur de poids n.

Un objet V de $\mathbf{SH}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ est semi-simple si et seulement si c'est une somme directe de structures de Hodge pures; en particulier, pour tout V, $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{gr}_n^W V$ est semi-simple.

Enfin on définit la *structure de Hodge de Tate sur* $\mathbb{C}$, notée $\mathbb{1}_{\mathbb{C}}(1)$ ou $\mathbb{1}(1)$ comme l'unique structure de Hodge pure de poids -2 portée par le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}(1)$ de $\mathbb{C}$ engendré par $2\pi i$. Si $r \in \mathbb{N}$, on pose aussi $\mathbb{1}_{\mathbb{C}}(r) = \mathbb{1}(r) = \mathrm{Sym}^r \mathbb{1}(1)$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{C}}(-r) = \mathbb{1}(-r) = \mathbb{1}(r)^*$; si V est un objet de $\mathbf{SH}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ et si $r \in \mathbb{Z}$, on pose $V(r) = V \otimes \mathbb{1}(r)$.

Soit V un objet simple de $\mathbf{SH}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$. Alors il est pur; si n est son poids, ou bien n est pair, $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$ et $V \simeq \mathbb{1}(-n/2)$, ou bien $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ et il existe des entiers $p < q$ vérifiant $p + q = n$ et une base $\{e_1, e_2\}$ de V telle que

$$\mathrm{Fil}^r V_{\mathbb{C}} = \begin{cases} \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 & \text{si } r \leq p, \\ \mathbb{C}(e_1 \oplus ie_2) & \text{si } p < r \leq q, \\ 0 & \text{si } r > q. \end{cases}$$

1.1.5. Pour toute structure de Hodge mixte V sur K, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $\gamma^i V$ le plus grand sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de V contenu dans $\mathrm{Fil}^i V_{\mathbb{C}}$ et $\delta^i V$ le plus petit sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de V tel que $\mathbb{C} \otimes \delta^i V$ contient $\mathrm{Fil}^i V_{\mathbb{C}}$. On obtient ainsi deux filtrations finies décroissantes $(\gamma^i V)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $(\delta^i V)_{i\in\mathbb{Z}}$ de V; on a

$$\gamma^i V = V \cap \mathrm{Fil}^i V_{\mathbb{C}} \cap \overline{\mathrm{Fil}}^i V_{\mathbb{C}} \quad \text{et} \quad \delta^i V = V \cap (\mathrm{Fil}^i V_{\mathbb{C}} + \overline{\mathrm{Fil}}^i V_{\mathbb{C}})$$

et les applications naturelles

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \gamma^i V \to \mathrm{Fil}^i V_{\mathbb{C}} \cap \overline{\mathrm{Fil}}^i V_{\mathbb{C}} \quad \text{et} \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \delta^i V \to \mathrm{Fil}^i V_{\mathbb{C}} + \overline{\mathrm{Fil}}^i V_{\mathbb{C}}$$

sont des isomorphismes. En outre, dans la dualité

$$V^*(1) \times V \to \mathbb{R}(1),$$

l'orthogonal de $\gamma^i V$ (resp. $\delta^i V$) est $\delta^{-i} V^*(1)$, i.e. $\delta^{-i}(V^*(1))$ (resp. $\gamma^{-i} V^*(1)$, i.e. $\gamma^{-i}(V^*(1))$).

Si $\eta: V_1 \to V_2$ est un morphisme de $\mathbf{SH}_{\mathbf{C}}(\mathbb{R})$, l'application induite de V_1 dans V_2 est compatible aux filtrations γ et δ, mais elle n'est en général pas strictement compatible (i.e., par exemple, l'inclusion $\eta(\gamma^i V_1) \subset \gamma^i V_2$ peut être stricte).

1.1.6. Pour toute structure de Hodge mixte V sur $\mathbb{C}$, et tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose

$$H^i(\mathbb{C}, V) = H^i_g(\mathbb{C}, V) = H^i(\mathbf{SH}_{\mathbf{C}}(\mathbb{R}), V) = \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{SH}_{\mathbf{C}}(\mathbb{R})}(\mathbb{1}, V).$$

On pose $H^1_e(\mathbb{C}, V) = 0$ et on note $H^1_f(\mathbb{C}, V)$ le sous-ensemble de $H^1(\mathbb{C}, V)$ formé des éléments qui sont la classe d'une extension

$$0 \to V \to U \to \mathbb{1} \to 0$$

telle que la projection $U \to \mathbb{R}$ est strictement compatible à la filtration γ (i.e. telle que l'application $\gamma^0 U \to \mathbb{R}$ est surjective).

PROPOSITION. *Soient V une structure de Hodge mixte sur $\mathbb{C}$, $V_0 = W_0 V$ et $\overline{V} = V/W_0 V$.*

i) *On a $H^i(\mathbb{C}, V) = 0$ si $i \geq 2$, $H^1_f(\mathbb{C}, V)$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $H^1(\mathbb{C}, V)$ et on a un diagramme commutatif de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, dont les lignes et les colonnes sont exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & H^1_f(\mathbb{C}, V) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & H^0(\mathbb{C}, V) & \to & V_0 \xrightarrow{\alpha_{V_0}} t_{V_0} & \to & H^1(\mathbb{C}, V) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Ker}\,\alpha_V & \to & V \xrightarrow{\alpha_V} t_V & \to & \mathrm{Coker}\,\alpha_V & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Ker}\,\alpha_{\overline{V}} & \to & \overline{V} \xrightarrow{\alpha_{\overline{V}}} t_{\overline{V}} & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & H^1_f(\mathbb{C}, V) & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

ii) *Si V est semi-simple, on a $H^1_f(\mathbb{C}, V) = 0$.*

iii) *La dualité* $V^*(1) \times V \to \mathbb{R}(1)$ *induit des dualités parfaites pour tout* $p \in \mathbb{Z}$

$$(V^*(1)/\delta^{-p}V^*(1)) \times \gamma^p V \to \mathbb{R}(1).$$

On a $\gamma^0 V = \operatorname{Ker}\alpha_V$, *l'application composée*

$$V(1) \subset V_{\mathbb{C}} = V_{\mathrm{dR}} \to t_V \to \operatorname{Coker}\alpha_V$$

est surjective et a pour noyau $(\delta^0 V)(1)$, *d'où des isomorphismes canoniques de* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels* $(V/\delta^0 V)(1) \simeq \operatorname{Coker}\alpha_V$ (*où* $(V/\delta^0 V)(1) = \mathbb{R}(1) \otimes (V/\delta^0 V)$), *et* $(\operatorname{Ker}\alpha_V)^* = \operatorname{Coker}\alpha_{V^*(1)}$.

iv) *On a* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Coker}\alpha_V = \dim_{\mathbb{R}} H^1_g(\mathbb{C}, V)/H^1_f(\mathbb{C}, V) = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}\alpha_{V^*(1)}$ *et* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}\alpha_V = \dim_{\mathbb{R}} H^1_g(\mathbb{C}, V^*(1))/H^1_f(\mathbb{C}, V^*(1)) = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Coker}\alpha_{V^*(1)}$.

PREUVE. i) Se donner $\eta \in H^0(\mathbb{C}, V) = \operatorname{Hom}(\mathbb{1}, V)$ revient à se donner l'image a de 1 dans V : inversement un tel $a \in V$ définit un morphisme si et seulement si $a \in W_0 V \cap \operatorname{Fil}^0 V_{\mathbb{C}} = V_0 \cap \operatorname{Fil}^0(V_0)_{\mathbb{C}} = \operatorname{Ker}\alpha_{V_0}$.

Soit U une extension de $\mathbb{1}$ par V ; on doit avoir une suite exacte de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$$0 \to W_0 V \to W_0 U \to \mathbb{R} \to 0$$

et des suites exactes de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$0 \to W_0 V_{\mathbb{C}} \to W_0 U_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} \to 0$$

et

$$0 \to W_0 \operatorname{Fil}^0 V_{\mathbb{C}} \to W_0 \operatorname{Fil}^0 U_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} \to 0;$$

si ε désigne un relèvement de 1 dans $W_0 U$, il doit exister $\lambda \in W_0 V_{\mathbb{C}} = (V_0)_{\mathbb{C}}$ tel que $\varepsilon + \lambda \in W_0 \operatorname{Fil}^0 U_{\mathbb{C}}$. On voit que l'image de λ dans $\operatorname{Coker}\alpha_{V_0}$ ne dépend pas des choix faits et que l'on définit ainsi un isomorphisme entre $H^1(\mathbb{C}, V)$ et $\operatorname{Coker}\alpha_{V_0}$. Dire que l'image de λ est 0 dans $\operatorname{Coker}\alpha_V$ signifie que $\lambda \in \operatorname{Fil}^0 V_{\mathbb{C}} + V$, ce qui revient à dire qu'il existe un relèvement ε' de 1 dans U tel que $\varepsilon' \in \operatorname{Fil}^0 U_{\mathbb{C}} \cap U = \gamma^0 U$ ou encore que la classe de l'extension appartient à $H^1_f(\mathbb{C}, V)$.

L'exactitude de la deuxième ligne est triviale et celle de la troisième revient à prouver que $\operatorname{Coker}\alpha_{\overline{V}} = 0$ ou encore que $\operatorname{Coker}\alpha_V = 0$ si $W_0 V = 0$; si

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

est une suite exacte courte de $\mathbf{SH}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, la suite

$$\operatorname{Coker}\alpha_{V'} \to \operatorname{Coker}\alpha_V \to \operatorname{Coker}\alpha_{V''} \to 0$$

est exacte, ce qui permet par dévissage de se ramener au cas où V est un objet simple de poids ≥ 1 et c'est alors une vérification immédiate (cf. la liste des objets simples au n°1.1.4).

Le reste des assertions concernant le diagramme est alors clair. Le fait que $H^i(\mathbb{C}, V) = 0$ pour $i \geq 2$ résulte de ce que, pour tout épimorphisme $V_2 \to V_1$, l'application $H^1(\mathbb{C}, V_2) \to H^1(\mathbb{C}, V_1)$ est surjective.

Il suffit de prouver l'assertion (ii) lorsque V est simple. Dans ce cas, ou bien $W_0 V = V$, donc $H^1(\mathbb{C}, V) \to \mathrm{Coker}\,\alpha_V$ est un isomorphisme, donc $H^1_f(\mathbb{C}, V) = 0$; ou bien $W_0 V = 0$ et $H^1(\mathbb{C}, V) = 0$, donc a fortiori $H^1_f(\mathbb{C}, V)$.

Prouvons (iii): La première partie est immédiate. On a $\mathrm{Ker}\,\alpha_V = V \cap \mathrm{Fil}^0 V_{\mathbb{C}} = \gamma^0 V$. On a $V_{\mathrm{dR}} = V \oplus V(1)$, ce qui fait que l'inclusion de $V(1)$ dans V_{dR} induit bien, par passage au quotient, une application surjective $V(1) \to \mathrm{Coker}\,\alpha_V$. Si $v \in V$ dire que $v \otimes (2\pi i)$ appartient au noyau signifie qu'il existe $w \in V$ et $z \in \mathrm{Fil}^0 V_{\mathbb{C}}$ tels que $iv = w + z$; on a alors $-iv = w + \overline{z}$, d'où $2iv = z - \overline{z}$ et $v \in \delta^0 V$; réciproquement, si $v \in \delta^0 V$, il existe $z_1, z_2 \in \mathrm{Fil}^0 V_{\mathbb{C}}$ tels que $v = z_1 + \overline{z}_2 = \overline{z}_1 = z_2$; on a aussi $2iv = i(z_1 + z_2) + i(\overline{z}_1 + \overline{z}_2)$ et $iv = w + z$, avec $z = i(z_1 + z_2) \in \mathrm{Fil}^0 V_{\mathbb{C}}$ et $w = (z + \overline{z})/2 \in V$, et $v \otimes (2\pi i) \in \mathrm{Ker}(V(1) \to \mathrm{Coker}\,\alpha_V)$.

La dernière partie de (iii) et l'assertion (iv) sont maintenant immédiates.

1.1.7. Par analogie avec les représentations ℓ-adiques d'un corps de nombres, il est commode de poser, pour toute structure de Hodge mixte V sur $\mathbb{C}$, $H^0_e(\mathbb{C}, V) = H^0_f(\mathbb{C}, V) = H^0(\mathbb{C}, V)$, $H^i_e(\mathbb{C}, V) = 0$ si $i \neq 0$, $H^i_f(\mathbb{C}, V) = 0$ si $i \neq 0, 1$ et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$H^i_{/f}(\mathbb{C}, V) = H^i_{g/f}(\mathbb{C}, V) = H^i_g(\mathbb{C}, V)/H^i_f(\mathbb{C}, V).$$

En particulier, $H^i_{/f}(\mathbb{C}, V) = 0$ si $i \neq 1$, tandis que le noyau et le conoyau de α_V se réinterprètent

$$\mathrm{Coker}\,\alpha_V = H^1_{/f}(\mathbb{C}, V) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\,\alpha_V = H^1_{/f}(\mathbb{C}, V^*(1))^*.$$

1.1.8. Rappelons **[De79]** que l'on pose

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2 \cdot (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(s).$$

Si V est une structure de Hodge mixte sur $\mathbb{C}$, et si, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $n_p = \dim_{\mathbb{R}}(\gamma^p V / \gamma^{p+1} V)$, on pose

$$L(V, s) = \prod_{p \in \mathbb{Z}} \Gamma_{\mathbb{C}}(s - p)^{n_p}.$$

Lorsque V est pur, ou plus généralement semi-simple, on voit que, avec des conventions évidentes,

$$\gamma^i V = V \cap \left(\bigoplus_{p, q \geq i} H^{p,q} \right),$$

ce qui fait que $n_p = h^{p,p} + 2 \cdot \sum_{q > p} H^{p,q}$. On retrouve donc la définition usuelle **[Se70, De79]**.

1.1.9. PROPOSITION. *Soit V une structure de Hodge mixte sur $\mathbb{C}$.*

i) *On a $L(V(1), s) = L(V, s+1)$.*

ii) *L'ordre du pôle en $s = 0$ de $L(V, s)$ est égal à $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} \alpha_V = \dim_{\mathbb{R}} H^1_{g/f}(\mathbb{C}, V^*(1))$.*

iii) *Soient*

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

une suite exacte courte de $\mathbf{SH}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$,

$$\nu \in \operatorname{Ext}^1(V'', V') = H^1(\mathbb{C}, V''^* \otimes V')$$

la classe de cette extension, $L(\nu, s) = L(V, s)/L(V', s) \cdot L(V'', s)$. Alors, on a $L(\nu, s) = 1$ si et seulement si $\nu \in H^1_f(\mathbb{C}, V''^* \otimes V')$.

PREUVE. (i) est clair. Montrons (ii). L'ordre du pôle en $s = 0$ est égal à $\sum_{p \geq 0} n_p = \dim_{\mathbb{R}} \gamma^0 V$; mais $\gamma^0 V = V \cap \operatorname{Fil}^0 V_{\mathbb{C}} = \operatorname{Ker} \alpha_V$ et la dimension de cet espace vectoriel est bien égale à celle de $H^1_{g/f}(\mathbb{C}, V^*(1))$. Montrons (iii). Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, la suite

$$0 \to \gamma^p V' \to \gamma^p V \to \gamma^p V''$$

est exacte et il est immédiat que $L(\nu, s) = 1$ si et seulement si $\gamma^p V \to \gamma^p V''$ est surjective pour tout p. L'image de ν dans $H^1(\mathbb{C}, V''^* \otimes V')$ est représentée par une extension U de $\mathbb{R}$ par $V''^* \otimes V'$.

Montrons que la condition est suffisante. On a des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V''^* \otimes V' & \longrightarrow & V''^* \otimes V & \longrightarrow & V''^* \otimes V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & V''^* \otimes V' & \longrightarrow & U & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et, pour tout p,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \gamma^p(V''^* \otimes V') & \longrightarrow & \gamma^p(V''^* \otimes V) & \longrightarrow & \gamma^p(V''^* \otimes V'') & & \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \gamma^p(V''^* \otimes V') & \longrightarrow & \gamma^p U & \longrightarrow & \gamma^p \mathbb{1}. & & \end{array}$$

Le morphisme $V''^* \otimes V'' \to \mathbb{R}$ est l'application trace et il est clair que $\gamma^0(V''^* \otimes V'') \to \mathbb{R}$ est surjectif. La surjectivité de $\gamma^p V \to \gamma^p V''$ pour tout p implique la surjectivité de $\gamma^0(V''^* \otimes V) \to \gamma^0(V''^* \otimes V'')$ et donc celle de $\gamma^0 U \to \mathbb{R}$. L'image de ν dans $H^1(\mathbb{C}, V''^* \otimes V')$ appartient donc à $H^1_f(\mathbb{C}, V''^* \otimes V')$.

Réciproquement, on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V'' \otimes V''^* \otimes V' & \longrightarrow & V'' \otimes U & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et, pour tout p,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \gamma^p(V'' \otimes V''^* \otimes V') & \longrightarrow & \gamma^p(V'' \otimes U) & \longrightarrow & \gamma^p V'' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \gamma^p V' & \longrightarrow & \gamma^p V & \xrightarrow{\cdot} & \gamma^p V''. \end{array}$$

La surjectivité de $\gamma^0 U \to \mathbb{R}$ implique la surjectivité de $\gamma^p(V'' \otimes U) \to \gamma^p V''$ pour tout p et donc la surjectivité de $\gamma^p V \to \gamma^p V''$.

1.1.10. Pour toute structure de Hodge mixte V sur $\mathbb{C}$, on pose

$$\varepsilon_0(V) = (-1)^{\sum_{p \in \mathbb{Z}} p(h_p - n_p)}$$

où $h_p = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Fil}^p V_{\mathbb{C}}/\mathrm{Fil}^{p+1} V_{\mathbb{C}})$ et $n_p = \dim_{\mathbb{R}}(\gamma^p V/\gamma^{p+1} V)$.

Soit $\psi_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ le caractère additif défini par $\psi_0(z) = \exp(2i\pi \cdot \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(z))$. Si $\mu = 2a \cdot dx \cdot dy$ avec $a \neq 0$ est une mesure de Haar sur $\mathbb{C}$, on pose

$$\varepsilon(V, \psi_0, \mu) = a^{\dim V} \cdot \varepsilon_0(V).$$

On vérifie facilement que, lorsque V est semi-simple, on retrouve la définition usuelle du facteur ε **[De73, Ta79]**.

1.2. Structures de Hodge mixtes sur $\mathbb{R}$. On note c la conjugaison complexe. Pour tout groupe abélien A sur lequel $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ opère, on pose

$$A^+ = \{a \in A \mid c(a) = a\} \quad \text{et} \quad A^- = \{a \in A \mid c(a) = -a\}.$$

1.2.1. DÉFINITION. Une structure de Hodge mixte (sous-entendu réelle) V sur $\mathbb{R}$ consiste en la donnée d'un couple formé d'une structure de Hodge mixte (réelle) sur $\mathbb{C}$ et d'une action de $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel sous-jacent V compatible avec la filtration par le poids et telle que, si l'on étend l'action de $G_{\mathbb{R}}$ à $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ par semi-linéarité, la filtration de Hodge soit stable par cette action. On appelle *réalisation de Rham* de V le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V_{\mathrm{dR}} = D_{\mathrm{dR}}(V) = (V_{\mathbb{C}})^{G_{\mathbb{R}}}$.

Se donner une structure de Hodge mixte sur $\mathbb{R}$ revient donc à se donner

- un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie V, muni d'une filtration finie croissante $(W_i V)_{i \in \mathbb{Z}}$ et d'une involution notée c telle que $c(W_i V) = W_i V$ pour tout i;
- une filtration finie décroissante $(\mathrm{Fil}^i V_{\mathrm{dR}})_{i \in \mathbb{Z}}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V_{\mathrm{dR}} (= D_{\mathrm{dR}}(V)) = (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V)^{c=1}$ (où $c(z \otimes v) = \overline{z} \otimes c(z)$), *la filtration de Hodge de la réalisation de Rham*, telle que V, muni de la filtration par le poids et de la filtration de $V_{\mathbb{C}}$ déduite de la filtration de Hodge par extension des scalaires, soit une structure de Hodge mixte sur $\mathbb{C}$.

On appelle *espace tangent* de la structure de Hodge mixte V sur $\mathbb{R}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $t_V = t_V(\mathbb{R}) = V_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^0 V_{\mathrm{dR}}$, de sorte que l'espace tangent de la structure de Hodge mixte sur $\mathbb{C}$ sous-jacente à V est $t_V(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} t_V$.

Pour toute structure de Hodge mixte V sur $\mathbb{R}$, on a une décomposition canonique $V = V^+ \oplus V^-$; l'application α_V induit, en prenant la partie fixe par c, une application

$$\alpha_V^+ : V^+ \to t_V .$$

1.2.2. Les structures de Hodge mixtes sur $\mathbb{R}$ forment, de manière évidente, une catégorie tannakienne $\mathbb{R}$-neutre $\mathbf{SH}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$; la filtration par le poids définit encore une filtration de tout objet V de $\mathbf{SH}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ par des sous-objets. On note $\mathbb{1}$ ou $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ l'objet-unité. *La structure de Hodge de Tate* $\mathbb{1}(1)$ est de façon naturelle un objet de cette catégorie, que l'on note parfois $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(1)$ (la conjugaison complexe est la multiplication par -1 sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel sous-jacent). Pour tout objet V de $\mathbf{SH}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ et tout $r \in \mathbb{Z}$, on définit $V(r)$ comme on pense.

Le foncteur *extension des scalaires*: $\mathbf{SH}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \to \mathbf{SH}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, noté $V \mapsto V_{/\mathbb{C}}$, est l'oubli de la conjugaison complexe. C'est un $\otimes$-foncteur exact et fidèle, qui admet un adjoint à gauche, la *restriction des scalaires* $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} : \mathbf{SH}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \to \mathbf{SH}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ définie ainsi: soit $\mathbb{R}[c] = \mathbb{R}[\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})]$; si V est un objet de $\mathbf{SH}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel sous-jacent à $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(M)$ est $U = \mathbb{R}[c] \otimes_{\mathbb{R}} V$, avec action de c par multiplication à gauche et filtration par le poids déduite de celle de V par extension des scalaires de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}[c]$; l'application $z \mapsto z \otimes 1 + \overline{z} \otimes c$ est un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ sur $(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[c])^c$ donc aussi de $V_{\mathrm{dR}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ sur $U_{\mathrm{dR}} = (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} U)^c = (\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}[c] \otimes V)^c$, ce qui nous permet d'identifier les deux réalisations de Rham; enfin on conserve la filtration de Hodge.

1.2.3. Pour toute structure de Hodge mixte V sur $\mathbb{R}$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose

$$H^i(\mathbb{R}, V) = H^i_g(\mathbb{R}, V) = H^i(\mathbf{SH}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), V) = \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{SH}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})}(\mathbb{1}, V) .$$

Pour $i \in \mathbb{Z}$ et $v \in \{e, f\}$, on note $H^i_v(\mathbb{R}, V)$ l'image inverse de $H^i_v(\mathbb{C}, V)$ dans $H^i(\mathbb{R}, V)$. On définit encore $H^i_{/f}(\mathbb{R}, V) = H^i_{g/f}(\mathbb{R}, V) = H^i_g(\mathbb{R}, V)/H^i_f(\mathbb{R}, V)$.

PROPOSITION. *Soient V une structure de Hodge mixte sur $\mathbb{R}$, $V_0 = W_0 V$ et $\overline{V} = V/W_0 V$.*

i) *Pour tout i, $H^i(\mathbb{R}, V) = H^i(\mathbb{C}, V)^c$ et le même résultat vaut pour les $H^1_j(\mathbb{R}, V)$, avec $j \in \{e, f, g\}$.*

ii) *On a $H^i(\mathbb{R}, V) = 0$ si $i \geq 2$, $H^1_e(\mathbb{R}, V) = 0$, $H^i_{/f}(\mathbb{R}, V) = 0$ si $i \neq 1$, $H^1_{/f}(\mathbb{R}, V) \simeq \mathrm{Coker}\, \alpha_V^+$ et on a un diagramme commutatif de $\mathbb{R}$-*

espaces vectoriels, dont les lignes et les colonnes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & H^1_f(\mathbb{R}, V) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & H^0(\mathbb{R}, V) & \to & V_0^+ & \xrightarrow{\alpha^+_{V_0}} & t_{V_0}(\mathbb{R}) & \to & H^1(\mathbb{R}, V) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{Ker}\alpha^+_V & \to & V^+ & \xrightarrow{\alpha^+_V} & t_V(\mathbb{R}) & \to & \operatorname{Coker}\alpha^+_V & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \operatorname{Ker}\alpha^+_{\overline{V}} & \to & \overline{V} & \xrightarrow{\alpha^+_{\overline{V}}} & t_{\overline{V}}(\mathbb{R}) & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & H^1_f(\mathbb{R}, V) & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & & & &
\end{array}$$

iii) *Si V est semi-simple, on a $H^1_f(\mathbb{R}, V) = 0$.*

iv) *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, les sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\gamma^i V$ et $\delta^i V$ sont stables par c; la dualité $V^*(1) \times V \to \mathbb{R}(1)$ induit des dualités parfaites*

$$(V^*(1)/\delta^{-i}V^*(1))^+ \times (\gamma^i V)^- \to \mathbb{R}(1) \quad \text{et} \quad (V^*(1)/\delta^{-i}V^*(1))^- \times (\gamma^i V)^+ \to \mathbb{R}(1).$$

On a des isomorphismes canoniques de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$$(\gamma^0 V)^+ \simeq \operatorname{Ker}\alpha^+_V \quad \textit{et} \quad (V/\delta^0 V)^-(1) \simeq \operatorname{Coker}\alpha^+_V;$$

en outre $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Coker}\alpha^+_V = \dim_{\mathbb{R}} H^1_{/f}(\mathbb{R}, V) = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}\alpha^+_{V^*(1)}$ *et* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}\alpha^+_V = \dim_{\mathbb{R}} H^1_{/f}(\mathbb{R}, V^*(1)) = \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Coker}\alpha^+_{V^*(1)}$.

PREUVE. Sur la catégorie des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels munis d'une involution, le foncteur $V \mapsto V^+ = V^{c=1}$ est exact et les assertions résultent facilement de la proposition 1.1.6.

REMARQUE. On voit qu'ici encore $\operatorname{Ker}\alpha^+_V$ s'identifie au dual de $\operatorname{Coker}\alpha^+_{V^*(1)}$ donc aussi à $H^1_{/f}(\mathbb{R}, V^*(1))^*$.

1.2.4. Rappelons [**De79**] que l'on pose $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2)$.

Si V est une structure de Hodge mixte sur $\mathbb{R}$, on pose

$$n_p^+ = \dim_{\mathbb{R}}(\gamma^p V/\gamma^{p+1}V)^+, \; n_p^- = \dim_{\mathbb{R}}(\gamma^p V/\gamma^{p+1}V)^-,$$

pour tout $p \in \mathbb{Z}$ (on a $(\gamma^p V/\gamma^{p+1}V)^+ = (\gamma^p V)^+/(\gamma^{p+1}V)^+$ et $(\gamma^p V/\gamma^{p+1}V)^- = (\gamma^p V)^-/(\gamma^{p+1}V)^-$) et

$$L(V, s) = \prod_{p \in \mathbb{Z}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \varepsilon_p - p)^{n_p^+} \cdot \Gamma_{\mathbb{R}}(s + 1 - \varepsilon_p - p)^{n_p^-},$$

où $\varepsilon_p \in \{0, 1\}$ est défini par $\varepsilon_p \equiv p \pmod 2$.

1.2.5. PROPOSITION. *Soit V une structure de Hodge mixte sur $\mathbb{R}$.*

i) *Si V est semi-simple, la définition de $L(V, s)$ que l'on vient de donner coïncide avec la définition usuelle* **[Se70, De79]**;

ii) *on a $L(V(1), s) = L(V, s+1)$;*

iii) *l'ordre du pôle en $s = 0$ de $L(V, s)$ est égal à la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $H^1_{g/f}(\mathbb{R}, V^*(1))$.*

iv) *si U est une structure de Hodge mixte sur $\mathbb{C}$, $L(\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} U, s) = L(U, s)$.*

v) *Soient*

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

une suite exacte courte de $\mathbf{SH}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$,

$$\nu \in \mathrm{Ext}^1(V'', V') = H^1(\mathbb{R}, V''^* \otimes V')$$

la classe de cette extension, $L(\nu, s) = L(V, s)/L(V', s) \cdot L(V'', s)$. Alors, on a $L(\nu, s) = 1$ si et seulement si $\nu \in H^1_f(\mathbb{R}, V''^* \otimes V')$.

PREUVE. Il suffit de *vérifier* (i) lorsque V est simple. On est alors dans l'un des cas suivants:

- ou bien $V_{\mathbb{C}} \simeq \mathbf{1}_{\mathbb{C}}(-r)$, pour un $r \in \mathbb{Z}$ convenable, et $V = V^+$ (resp. V^-); tous les n_p^+ et les n_p^- sont nuls sauf n_r^+ (resp. n_r^-) qui vaut 1, donc $L(V, s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\varepsilon_r-r)$ (resp. $\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1-\varepsilon_r-r)) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\varepsilon-r)$, avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$ si c agit par multiplication par $(-1)^{r+\varepsilon}$ sur V;
- ou bien V est "de type (r, s)", avec $r < s$; tous les n_p^+ et les n_p^- sont nuls sauf $n_r^+ = n_r^- = 1$, et

$$\begin{aligned} L(V, s) &= \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \varepsilon_p - p) \cdot \Gamma_{\mathbb{R}}(s + 1 - \varepsilon_p - p) \\ &= \Gamma_{\mathbb{R}}(s-p) \cdot \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1-p) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p). \end{aligned}$$

L'*assertion* (ii) est immédiate. *Prouvons* (iii): l'ordre du pôle en $s = 0$ de $L(V, s)$ est $\sum_{p \geq 0} n_p^+ = \dim_{\mathbb{R}} \gamma^0 V^+ = \dim_{\mathbb{R}} H^1_g(\mathbb{R}, V^*(1))/H^1_f(\mathbb{R}, V^*(1))$, d'après la proposition 1.2.3.

Prouvons (iv): Si $n_p = \dim_{\mathbb{R}} \gamma^p U/\gamma^{p+1} U$, si $V = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} U$, $n_p^+ = \dim_{\mathbb{R}}(\gamma^p V/\gamma^{p+1} V)^+$ et $n_p^- = \dim_{\mathbb{R}}(\gamma^p V/\gamma^{p+1} V)^-$, on a $n_p = n_p^+ = n_p^-$ et la formule résulte de ce que $\Gamma_{\mathbb{R}}(s-p) \cdot \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1-p) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)$. Enfin, l'assertion v) se démontre comme dans la proposition 1.1.9.

1.2.6. REMARQUE. On ne change pas les "bonnes propriétés" des facteurs locaux $L(V, s)$ pour une structure de Hodge mixte V sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ si l'on remplace $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)$ par $a \cdot \Gamma_{\mathbb{R}}(s)$ et $\Gamma_{\mathbb{C}}(s)$ par $a^2 \cdot \Gamma_{\mathbb{C}}(s)$, où a est une constante non nulle arbitraire. Nous avons choisi ces normalisations afin de retrouver les facteurs locaux usuels dans le cas des structures de Hodge pures. Les travaux de Deninger **[Den91]** suggèrent que $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(s)$ et $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = (2)^{-1/2} \cdot \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2)$ est un meilleur choix.

1.2.7. Pour toute structure de Hodge mixte V sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\varepsilon_0(V) = i^{\sum_{p\in\mathbb{Z}} p(h_p - n_p) + \varepsilon_p n_p^+ + (1-\varepsilon_p) n_p^-}$$

où ε_p, n_p, n_p^+, n_p^- sont comme au n°1.2.4 et $h_p = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Fil}^p V/\mathrm{Fil}^{p+1} V$.

Soit $\psi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ le caractère additif défini par $\psi_0(x) = \exp(2i\pi x)$. Si $\mu = a \cdot dx$, avec $a \neq 0$, est une mesure de Haar sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\varepsilon(V, \psi_0, \mu) = a \cdot \varepsilon_0(V).$$

On vérifie facilement que, lorsque V est semi-simple, on retrouve la définition usuelle du facteur ε **[De73, Ta79]**.

1.2.8. Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit

$$(\beta) \qquad 0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

une suite exacte courte de $\mathbf{SH}_K(\mathbb{R})$ et $\beta^*(1)$ la suite exacte

$$(\beta^*(1)) \qquad 0 \to V''^*(1) \to V^*(1) \to V'^*(1) \to 0.$$

Posons

$$L(\beta, s) = L(V, s)/L(V', s) \cdot L(V'', s)$$

et

$$\varepsilon(\beta) = \varepsilon(V, \psi_0, \mu)/\varepsilon(V', \psi_0, \mu) \cdot \varepsilon(V'', \psi_0, \mu)$$

(il est immédiat que $\varepsilon(\beta)$ est indépendant du choix de la mesure de Haar μ sur K).

PROPOSITION. *Soient $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et (β) une suite exacte de $\mathbf{SH}_K(\mathbb{R})$. Alors $\varepsilon(\beta) \in \{-1, 1\}$ et $L(\beta, s) = \varepsilon(\beta) \cdot L(\beta^*(1), -s)$.*

PREUVE. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Si $x \in \gamma^p V''$ et si $y \in \mathrm{Fil}^p V_{\mathbb{C}}$ relève x, $y - \overline{y} \in 2i\pi \cdot V'$ et sa projection $z \in (2i\pi \cdot V')/(2i\pi \cdot \delta^p V')$ ne dépend pas du choix de y. Comme $V'/\delta^p V'$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\gamma^{-p} V'^*(1), 2i\pi \cdot \mathbb{R})$ (n°1.1.6), $2i\pi \cdot V'/(2i\pi \cdot \delta^p V')$ s'identifie au dual de $\gamma^{-p} V'^*(1)$ et on obtient ainsi une application $\mathbb{R}$-linéaire

$$\gamma^p V'' \to (\gamma^{-p} V'^*(1))^*.$$

On vérifie que la suite

$$0 \to \gamma^p V' \to \gamma^p V \to \gamma^p V'' \to (\gamma^{-p} V'^*(1))^* \to (\gamma^{-p} V^*(1))^* \to (\gamma^{-p} V''^*(1))^* \to 0$$

est exacte.

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, posons $n_p' = \dim_{\mathbb{R}} \gamma^p V'/\gamma^{p+1} V'$, $n_p = \dim_{\mathbb{R}} \gamma^p V/\gamma^{p+1} V$ et $n_p'' = \dim_{\mathbb{R}} \gamma^p V''/\gamma^{p+1} V''$. Posons $n_p(\beta) = n_p - n_p' - n_p''$ et définissons $n_p(\beta^*(1))$ de manière similaire. On a alors

$$\sum_p n_p(\beta) = 0 \quad \text{et} \quad n_p(\beta^*(1)) + n_{-1-p}(\beta) = 0.$$

Prenons d'abord $K = \mathbb{C}$. On a $L(\beta, s) = \prod_p \Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{n_p(\beta)}$ et

$$L(\beta^*(1), -s) = \prod_p \Gamma_{\mathbb{C}}(-s-p)^{n_p(\beta^*(1))} = \prod_p \Gamma_{\mathbb{C}}(-s-p)^{-n_{-p-1}(\beta)}$$
$$= \prod_p \Gamma_{\mathbb{C}}(1-s+p)^{-n_p(\beta)}.$$

Mais

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(1-s+p)\cdot\Gamma_{\mathbb{C}}(s-p) = 4\cdot(2\pi)^{-1}\cdot\pi/\sin(\pi(s-p)) = (-1)^p\cdot 4\cdot(2\pi)^{-1}\cdot\pi/\sin(\pi s).$$

Donc

$$L(\beta^*(1), -s)/L(\beta, s) = [4\cdot(2\pi)^{-1}\cdot\pi/\sin(\pi s)]^{-\sum_p n_p(\beta)}\cdot(-1)^{\sum_p p\cdot n_p(\beta)}$$
$$= (-1)^{\sum_p p\cdot n_p(\beta)} = \varepsilon(\beta).$$

Pour $K = \mathbb{R}$, on pose $n_p^{\pm}(\beta) = n_p^{\pm} - n_p'^{\pm} - n_p''^{\pm}$ (avec des notations évidentes). On a

$$\sum_p n_p^{\pm}(\beta) = 0 \quad \text{et} \quad n_p^{\pm}(\beta^*(1)) + n_{-1-p}^{\pm}(\beta) = 0.$$

De plus, par définition de $L(\beta, s)$, on a

$$L(\beta, s) = \prod_p \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\varepsilon_p - p)^{n_p^+(\beta)}\cdot\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1-\varepsilon_p-p)^{n_p^-(\beta)}.$$

On utilise l'équation fonctionnelle de Γ sous la forme

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(2-s+p)\cdot\Gamma_{\mathbb{R}}(s-p) = 1/\sin(\pi\cdot(s-p)/2).$$

On a donc

$$L(\beta, s)/L(\beta^*(1), -s)$$
$$= (-1)^{\nu}\cdot\prod_p \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\varepsilon_p-p)^{n_p^+(\beta)+n_{-1-p}^+(\beta^*(1))}$$
$$\cdot\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1-\varepsilon_p-p)^{n_p^-(\beta)+n_{-1-p}^-(\beta^*(1))}$$
$$\cdot\sin(\pi\cdot s/2)^{\sum_p n_{-1-p}^+(\beta^*(1))}\cdot\sin(\pi\cdot(s-1)/2)^{\sum_p n_{-1-p}^+(\beta^*(1))}$$

avec

$$\nu \equiv \sum_p (p-\varepsilon_p)\cdot n_p^+(\beta^*(1))/2 + \sum_p (p+\varepsilon_p)\cdot n_p^-(\beta^*(1))/2 \mod 2$$
$$\equiv \sum_p (p-\varepsilon_p)\cdot n_p^+(\beta)/2 + \sum_p (p+\varepsilon_p)\cdot n_p^-(\beta)/2 \mod 2.$$

D'autre part, comme $\sum_p n_p^-(\beta) = 0$, le calcul montre que

$$\varepsilon(\beta) = i^{-\sum_p (p-\varepsilon_p)\cdot n_p^+(\beta) - (p+\varepsilon_p)\cdot n_p^-(\beta)} = (-1)^{\nu}.$$

D'où la proposition.

2. Structures pré-motiviques sur un corps de nombres

2.1. La catégorie des structures pré-motiviques. Les structures pré-motiviques que nous allons considérer dans ce paragraphe sont des structures à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Dans toute la suite de ce chapitre, on reprend les hypothèses et les notations du chapitre II, n°1.1.1. Si $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, on choisit en outre une identification de $\overline{F}_\mathfrak{p}$ à $\mathbb{C}$ et on pose $B_{\mathrm{dR},\mathfrak{p}} = \mathbb{C}$; si $\mathfrak{p} \in S_f(F)$, on note $B_{\mathrm{dR},\mathfrak{p}}$ le corps B_{dR} relatif à $\overline{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p}$ (cf. I, n°2.1.2).

2.1.1. Commençons par introduire une catégorie auxiliaire, la catégorie $\mathbf{PSPM}_F(\mathbb{Q})$.

Un objet M de cette catégorie consiste en la donnée

- d'une part,
  - i) d'un F-espace vectoriel noté M_{dR}, de dimension finie, appelée *réalisation de Rham de* M, muni d'une filtration finie décroissante par des sous-F-espaces vectoriels $(\mathrm{Fil}^i M_{\mathrm{dR}})_{i\in\mathbb{Z}}$, appelée *la filtration de Hodge*;
  - ii) pour chaque $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, d'un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie, noté $M_{B,\mathfrak{p}}$, muni d'une action linéaire de $G_\mathfrak{p}$ (i.e. d'une involution $c_\mathfrak{p}$ si $F_\mathfrak{p} = \mathbb{R}$, de "rien du tout" si $F_\mathfrak{p} = \mathbb{C}$), appelé $\mathfrak{p}$-*réalisation Betti de* M;
  - iii) pour chaque nombre premier ℓ, une représentation ℓ-adique pseudo-géométrique de G_F, notée M_ℓ et appelée *réalisation ℓ-adique de* M;
- d'autre part d'isomorphismes de comparaison, i.e.,
  - i) pour chaque couple $(\ell, \mathfrak{p})$ formé d'un nombre premier ℓ et de $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, d'un isomorphisme
$$\iota_{\ell,\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_\ell \otimes_\mathbb{Q} M_{B,\mathfrak{p}} \simeq M_\ell$$
de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels, compatible avec l'action de $G_\mathfrak{p}$;
  - ii) pour chaque $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$ d'un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels
$$\iota_\mathfrak{p} : \mathbb{C} \otimes_\mathbb{Q} M_{B,\mathfrak{p}} \simeq \mathbb{C} \otimes_F M_{\mathrm{dR}},$$
compatible avec l'action naturelle de $G_\mathfrak{p}$ (il revient au même de se donner un isomorphisme du $F_\mathfrak{p}$-espace vectoriel $(\mathbb{C} \otimes_\mathbb{Q} M_{B,\mathfrak{p}})^{G_\mathfrak{p}}$ sur $F_\mathfrak{p} \otimes_F M_{\mathrm{dR}}$);
  - iii) pour chaque place finie $\mathfrak{p}$ au-dessus d'un nombre premier p, d'un isomorphisme de $B_{\mathrm{dR},\mathfrak{p}}$-espaces vectoriels
$$\iota_\mathfrak{p} : B_{\mathrm{dR},\mathfrak{p}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} M_p \simeq B_{\mathrm{dR},\mathfrak{p}} \otimes_{F_\mathfrak{p}} M_{\mathrm{dR}},$$
compatible avec l'action naturelle de $G_\mathfrak{p}$ et avec la filtration de Hodge (il revient au même de se donner un isomorphisme du $F_\mathfrak{p}$-espace vectoriel filtré
$$D_{\mathrm{dR},\mathfrak{p}}(M_p) = (B_{\mathrm{dR},\mathfrak{p}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} M_p)^{G_\mathfrak{p}} \quad \text{sur } F_\mathfrak{p} \otimes_F M_{\mathrm{dR}}).$$

Dans la suite, on utilise les applications $i_{\ell,\mathfrak{p}}$, $i_{\mathfrak{p}}$ pour identifier les espaces vectoriels entre lesquels ces applications définissent des isomorphismes.

Un morphisme $f=(f_{\mathrm{dR}}, (f_{B,\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in S_\infty}, (f_\ell)_{\ell \text{ premier}}) : M\to N$ *de* $\mathbf{PSPM}_F(\mathbb{Q})$ est la donnée d'un morphisme pour chacune des réalisations, ces morphismes étant compatibles avec les isomorphismes de comparaison.

2.1.2. Il est immédiat que la catégorie $\mathbf{PSPM}_F(\mathbb{Q})$ est additive, $\mathbb{Q}$-linéaire. En fait elle est *abélienne*: cela résulte de ce que, pour tout morphisme f, la réalisation f_{dR} est strictement compatible aux filtrations (pour le voir on peut étendre les scalaires à un $F_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p}$ place finie, et c'est alors une conséquence des propriétés des représentations de de Rham de $G_{\mathfrak{p}}$).

2.1.3. Soit M un objet de $\mathbf{PSPM}_F(\mathbb{Q})$. Pour tout couple $(\ell, \mathfrak{p})$ formé d'un nombre premier ℓ et d'une place $\mathfrak{p}$ de F, on note $M_{\ell,\mathfrak{p}}$ la représentation ℓ-adique de $G_{\mathfrak{p}}$ obtenue par restriction à partir de M_ℓ.

Si $\mathfrak{p}\in S(F)$, on définit $M_{(\mathfrak{p})}$ comme étant $M_{p,\mathfrak{p}}$ si $\mathfrak{p}\in S_p(F)$, avec p premier, et $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} M_{B,\mathfrak{p}}$ si $\mathfrak{p}\in S_\infty(F)$; on convient aussi que $\mathbb{Q}_\infty=\mathbb{R}$. On remarque qu'avec ces notations, pour tout $\mathfrak{p}\in S(F)$, l'isomorphisme de comparaison $\iota_{\mathfrak{p}}$ identifie $(B_{\mathrm{dR},\mathfrak{p}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} M_{(\mathfrak{p})})^{G_{\mathfrak{p}}}$ à $F_{\mathfrak{p}}\otimes_F M_{\mathrm{dR}}$.

2.1.4. Définition. *Une structure pré-motivique sur* F est un couple formé d'un objet M de $\mathbf{PSPM}_F(\mathbb{Q})$ et d'une filtration finie croissante $(W_nM)_{n\in\mathbb{Z}}$, appelée *filtration par le poids*, tels que, pour tout $\mathfrak{p}\in S_\infty$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_{(\mathfrak{p})}$, muni de la filtration induite par la filtration par le poids, de la filtration induite par la filtration de Hodge via l'isomorphisme de comparaison, et, lorsque $F_{\mathfrak{p}}=\mathbb{R}$, de l'action de la conjugaison complexe, soit une structure de Hodge mixte sur $F_{\mathfrak{p}}$.

On parle abusivement de la structure pré-motivique M, la filtration par le poids étant sous-entendue.

On dit qu'une structure pré-motivique M non nulle est *pure de poids* r si $\mathrm{gr}_n^W M=0$ pour $n\neq r$. Plus généralement, les *poids d'une structure prémotivique* M sont les entiers n tels que $\mathrm{gr}_n^W M\neq 0$.

Un morphisme de structures pré-motiviques sur F est un morphisme des objets de $\mathbf{PSPM}_F(\mathbb{Q})$ sous-jacents qui est compatible avec la filtration par le poids. On vérifie facilement que la catégorie $\mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q})$ des structures pré-motiviques sur F est abélienne.

Cette catégorie a *un objet-unité*, noté $\mathbb{1}$, qui est la structure pré-motivique associée à $\mathrm{Spec}\,F$ (elle est de poids 0, avec $M_{\mathrm{dR}}=F$, $M_{B,\mathfrak{p}}=\mathbb{Q}$ pour tout $\mathfrak{p}\in S_\infty(F)$, $M_\ell=\mathbb{Q}_\ell$ pour tout nombre premier ℓ; les actions des groupes de Galois sont toutes triviales et les isomorphismes de comparaison sont les isomorphismes évidents). On a, de façon évidente, des notions de *produit tensoriel*, de *hom interne* qui font de cette catégorie une *catégorie tannakienne neutre* (chaque réalisation est un foncteur fibre; elle est neutre parce qu'il y a une réalisation dans les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels: pour chaque $\mathfrak{p}\in S_\infty(F)$, le foncteur $M\mapsto M_{B,\mathfrak{p}}$ en est une).

Pour chaque nombre premier ℓ, la correspondance $M \mapsto M_\ell$ définit un $\otimes$-foncteur exact et fidèle de $\mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q})$ dans la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell, pg}(G_F)$ des représentations ℓ-adiques pseudo-géométriques de G_F. Pour chaque $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, la correspondance $M \mapsto M_{(\mathfrak{p})}$ définit un $\otimes$-foncteur exact et fidèle de $\mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q})$ dans la catégorie $\mathbf{SH}_{F_\mathfrak{p}}(\mathbb{R})$ des structures de Hodge mixtes sur $F_\mathfrak{p}$.

2.1.5. Soit M une structure pré-motivique sur F. Pour tout couple $(\ell, \mathfrak{p})$ formé d'un nombre premier ℓ et d'une place finie $\mathfrak{p}$ de F, on note $M_{\ell,\mathfrak{p}}$ la restriction de la représentation M_ℓ de G_F à $G_\mathfrak{p}$. On sait lui associer (cf. I, n°2.2.5 et 2.2.6) une représentation $D_{pst}(M_{\ell,\mathfrak{p}})$ du groupe de Weil-Deligne ${}'W_\mathfrak{p} = {}'W_{F_\mathfrak{p}}$ de $F_\mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{p}$ est une place finie, on dit que

i) M *a bonne réduction en* $\mathfrak{p}$ si $M_{\ell,\mathfrak{p}}$ a bonne réduction pour tout ℓ;

ii) M est *L-admissible en* $\mathfrak{p}$ si les représentations $D_{pst}(M_{\ell,\mathfrak{p}})^{ss}$, pour ℓ premier, forment un système compatible de représentations $\mathbb{Q}$-rationnelles de ${}'W_\mathfrak{p}$ (I, n°1.2.5); on dit que M est *strictement L-admissible en* $\mathfrak{p}$ si, en outre, les $D_{pst}(M_{\ell,\mathfrak{p}})$ sont en fait F-semi-simples (auquel cas les $D_{pst}(M_{\ell,\mathfrak{p}})$ forment donc un système compatible de représentations $\mathbb{Q}$-rationnelles de ${}'W_\mathfrak{p}$).

Si $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, on convient que M est strictement *L-admissible en* $\mathfrak{p}$; on dit que M *a bonne réduction en* $\mathfrak{p}$ si $M_{(\mathfrak{p})}$ est un objet semi-simple de $\mathbf{SH}_{F_\mathfrak{p}}(\mathbb{R})$.

Si Σ est un ensemble fini de places de F, on dit que M est *L-admissible* (resp. *strictement admissible*) *en dehors de* Σ si elle est admissible (resp. strictement admissible) pour toute place $\mathfrak{p} \notin \Sigma$. S'il en est ainsi, il existe un ensemble fini de places de F tel que M a bonne réduction en dehors de cet ensemble; il suffit de choisir un nombre premier ℓ et de prendre l'union de $\Sigma \cup S_\infty(F)$ avec l'ensemble des places finies où M_ℓ a mauvaise réduction.

On dit que M est *L-admissible* s'il existe un ensemble fini Σ de places de F tel que M soit L-admissible en dehors de Σ. On dit que M est *L-admissible partout* si M est L-admissible en toute place $\mathfrak{p}$ de F.

REMARQUES. a) On prendra garde que la sous-catégorie pleine de la catégorie des structures pré-motiviques formée des objets L-admissibles n'est pas abélienne.

b) On s'attend à ce que les réalisations d'un "vrai" motif correspondent à une structure pré-motivique qui est strictement L-admissible en toute place. Pour un motif donné, on ne sait pas toujours prouver la F-semi-simplicité et on ne sait souvent prouver la L-admissibilité qu'en dehors d'un nombre fini de places. C'est pourquoi la notion de structure pré-motivique L-admissible est commode.

C'est pour la même raison qu'on n'a pas demandé que, pour toute structure pré-motivique M et tout nombre premier ℓ, la représentation M_ℓ soit géométrique, mais seulement qu'elle soit pseudo-géométrique. On remarque

toutefois que, si M est L-admissible, M_ℓ est géométrique pour presque tout ℓ.

2.1.6. Soit $\mathfrak{p} \in S(F)$. Si $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$ (resp. $S_f(F)$), la correspondance $M \mapsto M_{(\mathfrak{p})}$ définit un $\otimes$-foncteur exact et fidèle de la catégorie des structures pré-motiviques sur F dans celle des structures de Hodge mixtes sur $F_\mathfrak{p}$ (resp. des représentations de de Rham de $G_\mathfrak{p}$) ; l'isomorphisme de comparaison $\iota_\mathfrak{p}$ permet d'identifier $t_{M_{(\mathfrak{p})}}$ et $\mathbf{t}_M(F_\mathfrak{p}) := F_\mathfrak{p} \otimes_F t_M$.

2.1.7. Si F' est une extension finie de F, on a des foncteurs exacts et fidèles

$$\mathrm{Ext}_{F/F'} : \mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q}) \to \mathbf{SPM}_{F'}(\mathbb{Q}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}_{F'/F} : \mathbf{SPM}_{F'}(\mathbb{Q}) \to \mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q}),$$

dont la description est aussi évidente que fastidieuse, $\mathrm{Res}_{F'/F}$ étant l'adjoint à gauche de $\mathrm{Ext}_{F/F'}$. On observera toutefois que l'extension des scalaires correspond, sur la réalisation ℓ-adique, à la restriction de la représentation, alors que la restriction des scalaires correspond à l'induction. On voit que ces foncteurs transforment une structure pré-motivique L-admissible en une structure pré-motivique L-admissible.

2.1.8. La *structure pré-motivique de Tate* $\mathbb{1}_F(1)$ sur F (ou $\mathbb{1}(1)$ s'il n'y a pas de risque de confusion) est la structure pré-motivique, pure de poids -2, que l'on associe naturellement à G_m, ou si l'on préfère la duale de la structure pré-motivique associée à $H^2(P^1)$: c'est l'extension des scalaires de $\mathbb{Q}$ à F de $\mathbb{1}_\mathbb{Q}(1)$: on a $\mathbb{1}_\mathbb{Q}(1)_{\mathrm{dR}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_\mathbb{Q}(1)_B = (2\pi i)\cdot\mathbb{Q}$, $\mathbb{1}_\mathbb{Q}(1)_\ell = \mathbb{Q}_\ell(1)$.

Si $r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{1}(r)$ est la puissance symétrique r-ième de $\mathbb{1}(1)$ et $\mathbb{1}(-r) = \mathbb{1}(r)^*$; si M est une structure pré-motivique sur F et si $r \in \mathbb{Z}$, $M(r) = M \otimes \mathbb{1}(r)$.

2.2. La fonction L d'une structure pré-motivique. Pour tout nombre premier ℓ, on suppose choisi un plongement de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $\mathbb{C}$ (cf. II, n°3.4.1).

2.2.1. Soit M une structure pré-motivique sur F que l'on suppose L-admissible de sorte que l'ensemble Σ_M des places $\mathfrak{p}$ de F où M n'est pas L-admissible est fini. Si $\mathfrak{p} \notin \Sigma_M$, on pose

$$L_\mathfrak{p}(M, s) = L(M_{(\mathfrak{p})}, s).$$

Pour tout ensemble fini Σ de places de F contenant Σ_M, on pose

$$L_\Sigma(M, s) = \prod_{\mathfrak{p} \notin \Sigma} L_\mathfrak{p}(M, s).$$

En particulier, si M est L-admissible partout, *la fonction L de M* est $L(M, s) = L_{S_\infty(F)}(M, s)$ et *la fonction L complète de M* est $L_\varnothing(M, s)$.

2.2.2. Conjecture $C_{\mathrm{pr.an}}(M)$. *Si M est une structure pré-motivique L-admissible sur F, le produit $L_{\Sigma_M}(M, s)$ converge absolument pour* $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ *et admet un prolongement analytique méromorphe dans tout le plan complexe.*

2.2.3. REMARQUES. a) Choisissons un ensemble fini Σ de places de F contenant Σ_M. Cette conjecture équivaut à celle que l'on obtient en remplaçant $L_{\Sigma_M}(M, s)$ par $L_\Sigma(M, s)$.

b) Soit ℓ un nombre premier. La fonction $L_{\Sigma_M}(M, s)$ ne diffère de la fonction $L(M_\ell, s)$ qu'en un nombre fini de facteurs et on peut dans l'énoncé de la conjecture remplacer $L_{\Sigma_M}(M, s)$ par $L(M_\ell, s)$. Si l'on choisit ℓ tel que M_ℓ soit géométrique (par example si l'on choisit ℓ tel que M ait bonne réduction en toutes les places divisant ℓ), la conjecture $C_{\text{gal},L}(M_\ell)$ (II, n°3.4.3) implique $C_{\text{pr.an}}(M)$.

c) Si $\mathfrak{p} \notin \Sigma_M$, $P_\mathfrak{p}(M, u) \in \mathbb{Q}[u]$. En particulier, pour tout $\Sigma \supset \Sigma_M$, la fonction $L_\Sigma(M, s)$ est indépendante des plongements des $\mathbb{Q}_\ell$ dans $\mathbb{C}$ choisis.

d) Soit

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte courte de structures pré-motiviques; supposons que M' et M'' sont L-admissibles; il en est alors de même de M; en outre, si deux des trois conjectures $C_{\text{pr.an}}(M')$, $C_{\text{pr.an}}(M)$ et $C_{\text{pr.an}}(M'')$ sont vraies, il en est de même de la troisième: cela résulte de ce que, pour presque toute place $\mathfrak{p}$ de F, M', M, et M'' sont L-admissibles et $L_\mathfrak{p}(M, s) = L_\mathfrak{p}(M', s) \cdot L_\mathfrak{p}(M'', s)$.

3. Catégories pré-motiviques admissibles

3.1. Généralités.

3.1.1. Nous appelons *sous-catégorie pré-motivique de* $\mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q})$ toute sous-catégorie strictement pleine stable par somme directe, sous-objet et quotient (et donc, en particulier, abélienne), contenant $M^*(1)$ dès qu'elle contient M et contenant $\mathbb{1}$.

Une sous-catégorie tannakienne de $\mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q})$ est donc pré-motivique si et seulement si elle contient $\mathbb{1}(1)$.

Dans toute la suite du §3, $\mathbb{M}$ *est une sous-catégorie pré-motivique de* $\mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q})$.

3.1.2. Pour tout objet M de $\mathbb{M}$ de tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $H^i_\mathbb{M}(F, M) = \operatorname{Ext}^i_\mathbb{M}(\mathbb{1}, M)$. Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H^0_\mathbb{M}(F, M)$ est indépendant du choix de la sous-catégorie pleine $\mathbb{M}$ de $\mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q})$ contenant M et on le note aussi $H^0(F, M)$.

Si S est un ensemble fini de places de F, la sous-catégorie pleine $\mathbb{M}_S$ de $\mathbb{M}$ dont les objets sont ceux qui ont bonne réduction en dehors de S est encore une sous-catégorie pré-motivique. Par analogie avec les représentations ℓ-adiques, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout objet M de $\mathbb{M}_S$, on pose

$$H^i_\mathbb{M}(U_S, M) = H^i_{\mathbb{M}_S}(F, M).$$

3.1.3. Soit S un ensemble fini de places de F contenant $S_\infty(F)$ et M un objet de $\mathbb{M}_S$.

Si $x \in H^1_{\mathbb{M}}(U_S, M)$, pour tout nombre premier ℓ, on note x_ℓ l'image de x dans $H^1(U_S, M_\ell)$, qui appartient donc à $H^1_g(U_S, M_\ell)$; si $\mathfrak{p}$ est une place finie de F, on note $x_{\ell,\mathfrak{p}}$ l'image de x_ℓ dans $H^1_g(F_\mathfrak{p}, M_{\ell,\mathfrak{p}}) \subset H^1(F_\mathfrak{p}, M_{\ell,\mathfrak{p}})$.

Pour tout ensemble Σ de places de F, *vérifiant* $S_\infty \subset \Sigma \subset S$, on pose

$$\begin{aligned} H^1_{\mathbb{M},f,\Sigma}(F, M) &= \{x \in H^1_{\mathbb{M}}(U_S, M) \mid \text{pour tout } \ell,\ x_\ell \in H^1_{f,\Sigma}(F, M_\ell)\} \\ &= \{x \in H^1_{\mathbb{M}}(U_S, M) \mid \text{pour tout } \ell,\ x_{\ell,\mathfrak{p}} \in H^1_f(F_\mathfrak{p}, M_{\ell,\mathfrak{p}}) \\ &\qquad\qquad \text{si } \mathfrak{p} \notin \Sigma\} \end{aligned}$$

(remarquer que, pour tout $x \in H^1_{\mathbb{M}}(U_S, M)$, si $\mathfrak{p} \notin S$, $x_{\ell,\mathfrak{p}} \in H^1_f(F_\mathfrak{p}, M_{\ell,\mathfrak{p}})$ pour tout ℓ; et aussi que $H^1_{\mathbb{M},f,\Sigma}(F, M)$ est indépendant du choix de S qui peut être n'importe quel ensemble fini de places de F contenant Σ et tel que M a bonne réduction en dehors de S). On a $H^1_{\mathbb{M}}(U_S, M) = H^1_{\mathbb{M},f,S}(F, M)$.

On pose aussi $H^0_{\mathbb{M},f,\Sigma}(F, M) = H^0(F, M)$, $H^i_{\mathbb{M},f,\Sigma}(F, M) = 0$ pour $i \notin \{0, 1\}$ et $H^i_{\mathbb{M},f}(F, M) = H^i_{\mathbb{M},f,S_\infty}(F, M)$ pour tout i.

3.1.4. Soit

$$(\beta) \qquad 0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte courte de $\mathbb{M}$. C'est aussi une suite exacte courte de $\mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q})$ et elle définit un élément u de

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q})}(M'', M') = H^1_{\mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q})}(F, M''^* \otimes M').$$

On dit que c'est une *f-suite exacte courte de* $\mathbb{M}$ si

$$u \in H^1_{\mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q}),f}(F, M''^* \otimes M').$$

Si, pour tout objet M de $\mathbb{M}$, $M''^* \otimes M$ est encore un objet de $\mathbb{M}$ (c'est en particulier le cas lorsque $M'' = \mathbb{1}$), $u \in H^1_{\mathbb{M}}(F, M''^* \otimes M')$ et cela revient à demander que $u \in H^1_{\mathbb{M},f}(F, M''^* \otimes M')$. *Une telle f-suite exacte courte donne naissance à la suite exacte longue*

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(F, M') \to H^0(F, M) \to H^0(F, M'') \\ \to H^1_{\mathbb{M},f}(F, M') \to H^1_{\mathbb{M},f}(F, M) \to H^1_{\mathbb{M},f}(F, M''). \end{aligned}$$

On voit en effet que, pour $N = M'$, M, ou M'', si, pour tout nombre premier ℓ et toute place finie $\mathfrak{p}$ de F, on note $x_{\ell,\mathfrak{p}}$ l'image de $x \in H^1_{\mathbb{M},f}(F, N)$ dans $H^1(F_\mathfrak{p}, N_\ell)$, alors

$$\begin{aligned} &H^1_{\mathbb{M},f}(F, N) \\ &\quad = \{x \in H^1_{\mathbb{M},f}(F, N) \mid x_{\ell,\mathfrak{p}} \in H^1_f(F_\mathfrak{p}, N_\ell) \text{ pour tout } \ell \text{ et tout } \mathfrak{p}\}; \end{aligned}$$

comme, par ailleurs, la suite

$$0 \to H^0(F, M') \to H^0(F, M) \to H^0(F, M'')$$
$$\to H^1_{\mathbb{M}}(F, M') \to H^1_{\mathbb{M}}(F, M) \to H^1_{\mathbb{M}}(F, M'')$$

est exacte, il s'agit de vérifier

i) que l'image de $H^0(F, M'')$ dans $H^1_{\mathbb{M}}(F, M')$ est dans $H^1_{\mathbb{M},f}(F, M')$;

ii) que si $x \in H^1_{\mathbb{M},f}(F, M) \subset H^1_{\mathbb{M}}(F, M)$ s'envoie sur 0 dans $H^1_{\mathbb{M}}(F, M'')$, alors x appartient à l'image de $H^1_{\mathbb{M},f}(F, M')$.

Le fait que (β) soit une f-suite exacte implique que, pour tout ℓ et tout $\mathfrak{p}$, la suite

$$0 \to H^0(F_\mathfrak{p}, M'_\ell) \to H^0(F_\mathfrak{p}, M_\ell) \to H^0(F_\mathfrak{p}, M''_\ell)$$
$$\to H^1_f(F_\mathfrak{p}, M'_\ell) \to H^1_f(F_\mathfrak{p}, M_\ell) \to H^1_f(F_\mathfrak{p}, M''_\ell) \to 0$$

est exacte. En particulier l'image de $H^0(F_\mathfrak{p}, M''_\ell)$ dans $H^1(F_\mathfrak{p}, M'_\ell)$ est contenue dans $H^1_f(F_\mathfrak{p}, M'_\ell)$, ce qui implique (i). Si x est comme dans (ii), il provient d'un $x' \in H^1_{\mathbb{M}}(F, M')$. Le fait que, pour tout ℓ et tout $\mathfrak{p}$, $x_{\ell,\mathfrak{p}} \in H^1_f(F_\mathfrak{p}, M_\ell)$ joint au fait que, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^0(F_\mathfrak{p}, M''_\ell) & \longrightarrow & H^1_f(F_\mathfrak{p}, M'_\ell) & \longrightarrow & H^1_f(F_\mathfrak{p}, M_\ell) \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ H^0(F_\mathfrak{p}, M''_\ell) & \longrightarrow & H^1(F_\mathfrak{p}, M'_\ell) & \longrightarrow & H^1(F_\mathfrak{p}, M_\ell), \end{array}$$

les lignes sont exactes et les flèches verticales injectives implique que $x_{\ell,\mathfrak{p}} \in H^1_f(F_\mathfrak{p}, M'_\ell)$, d'où (ii).

3.1.5. Soient M un objet de $\mathbb{M}$ et $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$. Si $F_\mathfrak{p} = \mathbb{C}$, on pose $M^+_{(\mathfrak{p})} = M_{(\mathfrak{p})}$ et on note $\alpha_{M,\mathfrak{p}}: M^+_{(\mathfrak{p})} \to t_{M_{(\mathfrak{p})}} = F_\mathfrak{p} \otimes_F t_M$ l'application notée $\alpha_{M_{(\mathfrak{p})}}$ au n°1.1.2; si $F_\mathfrak{p} = \mathbb{R}$, on pose $M^+_{(\mathfrak{p})} = (M_{(\mathfrak{p})})^+$ et on note $\alpha_{M,\mathfrak{p}}: M^+_{(\mathfrak{p})} \to t_{M_{(\mathfrak{p})}} = F_\mathfrak{p} \otimes_F t_M$ l'application notée $\alpha^+_{M_{(\mathfrak{p})}}$ au n°1.2.1. On pose aussi

$$\alpha_M = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S_\infty(F)} \alpha_{M,\mathfrak{p}}: \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S_\infty} M^+_{(\mathfrak{p})} \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S_\infty(F)} t_{M_{(\mathfrak{p})}} = \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Q} t_M.$$

Si Σ est un ensemble fini de places de F et si $i \in \mathbb{Z}$, on définit des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $H^i_{\mathbb{M},f,\Sigma}(F, M)_\mathbb{R}$ de la façon suivante:

- si $S_\infty(F) \subset \Sigma$, $H^i_{\mathbb{M},f,\Sigma}(F, M)_\mathbb{R} = \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Q} H^i_{\mathbb{M},f,\Sigma}(F, M)$;
- si $S_\infty(F) \not\subset \Sigma$, $H^0_{\mathbb{M},f,\Sigma}(F, M)_\mathbb{R} = \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Q} H^0(F, M)$; $H^1_{\mathbb{M},f,\Sigma}(F, M)_\mathbb{R}$ (resp. $H^2_{\mathbb{M},f,\Sigma}(F, M)_\mathbb{R}$) est le noyau (resp. le conoyau) de l'homo-

morphisme naturel

$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} H^1_{\mathbb{M},f,\Sigma\cup S_\infty(F)}(F, M) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)-\Sigma_\infty} H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, M_{(\mathfrak{p})})$$

(rappelons que $H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, M_{(\mathfrak{p})}) = \operatorname{Coker}\alpha_{M,\mathfrak{p}}$) et $H^i_{\mathbb{M},f,\Sigma}(F, M)_{\mathbb{R}} = 0$ si $i \notin \{0, 1, 2\}$.

3.1.6. Soit $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$. Le foncteur qui, à un objet M de $\mathbb{M}$, associe la structure de Hodge mixte $M_{(\mathfrak{p})}$, induit, pour tout $i \in \mathbb{N}$, une application $\mathbb{Q}$-linéaire $H^i_{\mathbb{M}}(F, M) \to H^i(F_\mathfrak{p}, M_{(\mathfrak{p})})$, qui s'étend par linéarité en une application $\mathbb{R}$-linéaire $H^i_{\mathbb{M}}(F, M)_{\mathbb{R}} \to H^i(F_\mathfrak{p}, M_{(\mathfrak{p})})$; pour $i = 0$ (resp. 1), en composant avec la flèche de $H^i(F_\mathfrak{p}, M_{(\mathfrak{p})})$ dans $\operatorname{Ker}\alpha_{M,\mathfrak{p}}$ (resp. $\operatorname{Coker}\alpha_{M,\mathfrak{p}}$) définie dans les propositions 1.1.6 et 1.2.3, et en faisant la somme directe sur tous les $\mathfrak{p}$, on obtient des applications

$$u_M : H^0(F, M)_{\mathbb{R}} \to \operatorname{Ker}\alpha_M$$

et

$$v_M : H^1_{\mathbb{M}}(F, M)_{\mathbb{R}} \to \operatorname{Coker}\alpha_M;$$

on note encore

$$v_M : H^1_{\mathbb{M},f}(F, M)_{\mathbb{R}} \to \operatorname{Coker}\alpha_M$$

l'application obtenue en composant avec l'inclusion de $H^1_{\mathbb{M},f}(F, M)_{\mathbb{R}}$ dans $H^1_{\mathbb{M}}(F, M)_{\mathbb{R}}$.

Par ailleurs on sait (propositions 1.1.6 et 1.2.3) que, pour tout $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, le dual de $\operatorname{Ker}\alpha_{M,\mathfrak{p}}$ s'identifie à $\operatorname{Coker}\alpha_{M^*(1),\mathfrak{p}}$ et celui de $\operatorname{Coker}\alpha_{M,\mathfrak{p}}$ à $\operatorname{Ker}\alpha_{M^*(1),\mathfrak{p}}$. On note

$$v'_M : \operatorname{Ker}\alpha_M \to H^1_{\mathbb{M},f}(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}}$$

la transposée de $v_{M^*(1)}$ et

$$u'_M : \operatorname{Coker}\alpha_M \to H^0(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}}$$

la transposée de $u_{M^*(1)}$.

3.2. Catégories pré-motiviques f-admissibles. Dans tout le n°3.2, $\mathbb{M}$ une sous-catégorie pré-motivique de $\mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q})$.

3.2.1. Si ℓ est un nombre premier, on dit que *la propriété* $C_\ell(\mathbb{M})$ *est vraie* si tout objet M de $\mathbb{M}$ vérifie $C_\ell(M, \mathbb{M})$, c'est-à-dire est tel que, pour $i \in \{0, 1\}$, l'application naturelle

$$\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}} H^i_{\mathbb{M},f}(F, M) \to H^i_f(F, M_\ell)$$

est un isomorphisme.

On dit que *la propriété* $C_\infty(\mathbb{M})$ *est vraie* si tout objet M de $\mathbb{M}$ tel que $H^i_{\mathbb{M},f}(F, M^*(1)) = 0$ vérifie $C_\infty(M, \mathbb{M})$, c'est-à-dire est tel que

$$u_M : H^0(F, M)_{\mathbb{R}} \to \operatorname{Ker} \alpha_M$$

est un isomorphisme et que la suite

$$0 \to H^1_{\mathbb{M},f}(F, M)_{\mathbb{R}} \xrightarrow{v_M} \operatorname{Coker} \alpha_M \xrightarrow{u'_M} H^0(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}} \to 0$$

est exacte.

On dit que $\mathbb{M}$ est *f-admissible* si $C_\ell(\mathbb{M})$ est vraie pour tout $\ell \in S(\mathbb{Q})$.

3.2.2. On dit que $\mathbb{M}$ est *f-admissible à l'infini*[3] si elle satisfait $C_\infty(\mathbb{M})$ et vérifie en outre

i) on a $\dim_{\mathbb{Q}} H^1_{\mathbb{M},f}(F, M) < +\infty$ pour tout objet M de $\mathbb{M}$;

ii) on a $H^1_{\mathbb{M}}(F, \mathbb{1}) = 0$;

iii) pour toute f-suite exacte courte de $\mathbb{M}$ de la forme

$$0 \to M \to N \to \mathbb{1} \to 0,$$

l'application

$$H^1_{\mathbb{M},f}(F, N^*(1)) \to H^1_{\mathbb{M},f}(F, M^*(1))$$

est surjective.

3.2.3. PROPOSITION. *Si* $\mathbb{M}$ *est f-admissible, elle est f-admissible à l'infini.*

PREUVE. Pour prouver que (i), (ii), et (iii) ont vérifiés, il suffit de choisir un nombre premier ℓ et grâce à $C_\ell(\mathbb{M})$ de vérifier que les propriétés analogues pour M_ℓ sont vraies: (i) est clair; (ii) vient de ce que $H^1_g(F, \mathbb{Q}_\ell) = H^1_f(F, \mathbb{Q}_\ell) = 0$ par la finitude du groupe des classes de F; pour montrer (iii), c'est-à-dire la sujectivité de $H^1_f(F, N^*(1)_\ell) \to H^1_f(F, M^*(1)_\ell)$, on utilise la suite exacte s_f de la proposition II, n°2.2.3 et la nullité de $H^1_f(F, \mathbb{Q}_\ell)$.

3.2.4. Pour toute f-suite exacte de $\mathbb{M}$ de la forme

$$0 \to M \to N \to \mathbb{1} \to 0,$$

et pour $x \in H^1_{\mathbb{M},f}(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}}$, notons x_N son image dans $H^1_{\mathbb{M},f}(F, N^*(1))^*_{\mathbb{R}}$. Soit

$$\Lambda(M, N) = \{x \in H^1_{\mathbb{M},f}(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}} \mid x_N \in \operatorname{Im} v'_N\}.$$

Si $x \in \Lambda(M, N)$ et si $x_N = v'_N(y)$, l'image de y dans $\operatorname{Ker} \alpha_{\mathbb{1}}$ est l'image d'un élément $z \in H^0(F, \mathbb{1})_{\mathbb{R}}$ et l'image $\delta_{M,N}(x)$ de z dans $H^1_{\mathbb{M},f}(F, M)_{\mathbb{R}}$ ne dépend pas des choix faits.

[3] La terminologie diffère de [FP91c] où l'on avait appelé f-admissible ce qui s'appelle ici f-admissible à l'infini.

3.2.5. PROPOSITION. *Supposons que* $\mathbb{M}$ *est* f*-admissible à l'infini.*
i) *Il existe une unique transformation naturelle*

$$\delta = (\delta_M)_{M \in \mathrm{Ob}(\mathbb{M})}, \quad \text{avec } \delta_M : (H^1_{\mathbb{M},f}(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}} \to H^1_{\mathbb{M},f}(F, M)_{\mathbb{R}}$$

telle que, pour toute suite exacte comme ci-dessus et tout $x \in \Lambda(M, N)$, $\delta_M(x) = \delta_{M,N}(x)$;
ii) *pour tout objet* M *de* $\mathbb{M}$, *la suite*

$s_f(M)$
$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(F, M)_{\mathbb{R}} \to \operatorname{Ker} \alpha_M \to H^1_{\mathbb{M},f}(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}} \\ &\to H^1_{\mathbb{M},f}(F, M)_{\mathbb{R}} \to \operatorname{Coker} \alpha_M \to H^0(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}} \to 0 \end{aligned}$$

est exacte.

La *preuve* sera donnée au n°3.2.7.

3.2.6. Commençons par un lemme "standard" d'algèbre homologique que nous allons énoncer dans le cadre des groupes abéliens bien que l'on puisse remplacer la catégorie qu'ils forment par n'importe quelle catégorie abélienne.
Soit

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & A'' & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & B' & \to & B & \to & B'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & C' & \to & C & \to & C'' & & \\ & & \downarrow & & & & & & \\ & & D' & & & & & & \end{array}$$

un diagramme commutatif de groupes abéliens, dont les lignes et les colonnes sont exactes. Appelons *homomorphisme de connexion relatif à ce diagramme* l'homomorphisme

$$\delta : A'' \to D'$$

que l'on obtient par chasse au diagramme (si $a'' \in A''$ s'envoie sur $b'' \in B''$, si $b \in B$ est un relèvement de b'', il existe $c' \in C'$ dont l'image dans C est la même que celle de b et $\delta a''$ est l'image de c' dans D').

LEMME. *Soit*

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & (1) & & (2) & & (3) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \to & A & \to & A'' & & D' & \to & D & \to & D'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & B' & \to & B & \to & B'' & \to & E' & \to & E & \to & E'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & C' & \to & C & \to & C'' & \to & F' & \to & F & \to & F'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & (1) & & (2) & & (3) & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

un diagramme commutatif dont les deux lignes inférieures et les trois colonnes sont exactes. On suppose les flèches $B'' \to E'$ *et* $C'' \to F'$ *nulles. Le*

diagramme obtenu en rajoutant l'homomorphisme de connexion $A'' \to D'$ est encore commutatif et la suite

$$0 \to A' \to A \to A'' \xrightarrow{\delta} D' \to D \to D'' \to 0$$

est exacte.

PREUVE. Chasse au diagramme, longue mais facile.

3.2.7. Prouvons alors la Proposition 3.2.5. Soit $r = \dim_{\mathbb{Q}} H^1_{\mathbf{M},f}(F, M)$. Il existe une f-suite exacte courte dans $\mathbf{M}$

$$0 \to M \to M_u \to \mathbb{1}^r \to 0$$

avec $H^1_{\mathbf{M},f}(F, M_u) = 0$: par exemple, on choisit une base (u_i) du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H^1_{\mathbf{M},f}(F, M)$, chaque u_i est représenté par une extension M_i de $\mathbb{1}$ par M dans $\mathbf{M}$ telle que la suite exacte courte $0 \to M \to M_i \to \mathbb{1} \to 0$ soit f. On en déduit une f-suite exacte courte dans $\mathbf{M}$

$$0 \to M \to M_u \to \mathbb{1}^r \to 0;$$

l'application $H^0(F, \mathbb{1}^r) \to H^1_{\mathbf{M},f}(F, M)$ est un isomorphisme et la nullité de $H^1_{\mathbf{M},f}(F, \mathbb{1}^r)$ implique que $H^1_{\mathbf{M},f}(F, M_u) = 0$. L'extension M_u de $\mathbb{1}^r$ par M est définie à isomorphisme près. On applique (iii) de 3.2.2 à $M_u^*(1)$, la transposée de la suite exacte obtenue est la suite exacte

$$0 \to H^0(F, M_u) \to \operatorname{Ker} \alpha_{M_u} \to H^1_{\mathbf{M},f}(F, M_u^*(1))^* \to 0.$$

Si $\Lambda(M, M_u) = \{x \in H^1_{\mathbf{M},f}(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}} \mid x_{M_u} \in \operatorname{Im} v'_{M_u}\}$, on a donc

$$\Lambda(M, M_u) = H^1_{\mathbf{M},f}(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}}.$$

On définit alors comme en 3.2.4 une application

$$\delta_{M,M_u} : H^1_{\mathbf{M},f}(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}} \to H^1_{\mathbf{M},f}(F, M)^*_{\mathbb{R}}.$$

Il est facile de vérifier qu'elle ne dépend pas du choix de M_u et qu'elle coincide avec $\delta_{M,N}$ sur $\Lambda(M, N)$ pour toute f-suite exacte de $\mathbf{M}$ de la forme

$$0 \to M \to N \to \mathbb{1} \to 0.$$

On en déduit (i). Pour (ii), considérons les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & H^0(F, M)_{\mathbb{R}} & \to & \operatorname{Ker} \alpha_M & \to & H^1_{\mathbf{M},f}(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & H^0(F, M_u)_{\mathbb{R}} & \to & \operatorname{Ker} \alpha_{M_u} & \to & H^1_{\mathbf{M},f}(F, M_u^*(1))^*_{\mathbb{R}} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & H^0(F, \mathbb{1}^r)_{\mathbb{R}} & \to & \operatorname{Ker} \alpha_{\mathbb{1}^r} & \to & H^1_{\mathbf{M},f}(F, \mathbb{1}^r(1))^*_{\mathbb{R}} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & H^1_{\mathbf{M},f}(F, M)_{\mathbb{R}} & & & & & &
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1_{\mathbb{M},f}(F,M)_{\mathbb{R}} & \to & \mathrm{Coker}\,\alpha_M & \to & H^0(F,M^*(1))^*_{\mathbb{R}} & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Coker}\,\alpha_{M_u} & \to & H^0(F,M_u^*(1))^*_{\mathbb{R}} & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Coker}\,\alpha_{\mathbb{1}^r} & \to & H^0(F,\mathbb{1}^r)^*_{\mathbb{R}} & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

L'application $\Delta_{M,M_u} = \delta_M$ est l'application de connexion du premier diagramme au sens du paragraphe 3.2.6. En appliquant le lemme 3.2.6 aux deux diagrammes juxtaposés, on en déduit la suite exacte $s_f(M)$.

3.2.8. PROPOSITION. *Si* $\mathbb{M}$ *est* f*-admissible à l'infini et si*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une f*-suite exacte courte de* $\mathbb{M}$*, le diagramme rectangulaire tordu*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & (1) & (2) & (3) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
0 & \to & H^0(F,M')_{\mathbb{R}} & \to & \mathrm{Ker}\,\alpha_{M'} & \to & H^1_{\mathbb{M},f}(F,M'^*(1))^*_{\mathbb{R}} & \to & H^1_{\mathbb{M},f}(F,M')_{\mathbb{R}} & \to & \mathrm{Coker}\,\alpha_{M'} & \to & H^0(F,M'^*(1))^*_{\mathbb{R}} \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & & \\
0 & \to & H^0(F,M)_{\mathbb{R}} & \to & \mathrm{Ker}\,\alpha_M & \to & H^1_{\mathbb{M},f}(F,M^*(1))^*_{\mathbb{R}} & \to & H^1_{\mathbb{M},f}(F,M)_{\mathbb{R}} & \to & \mathrm{Coker}\,\alpha_M & \to & H^0(F,M^*(1))^*_{\mathbb{R}} \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & & \\
0 & \to & H^0(F,M'')_{\mathbb{R}} & \to & \mathrm{Ker}\,\alpha_{M''} & \to & H^1_{\mathbb{M},f}(F,M''^*(1))^*_{\mathbb{R}} & \to & H^1_{\mathbb{M},f}(F,M'')_{\mathbb{R}} & \to & \mathrm{Coker}\,\alpha_{M''} & \to & H^0(F,M''^*(1))^*_{\mathbb{R}} \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & (1) & & (2) & & (3) & & & & 0 & & 0
\end{array}$$

est commutatif et a ses lignes et colonnes exactes.

PREUVE. Les lignes sont les suites exactes $s_f(M')$, $s_f(M)$, $s_f(M'')$, les colonnes sont exactes par 3.1.4; pour la commutativité du diagramme, le seul point délicat se déduit de la fonctorialité de la transformation δ_M.

3.2.9. REMARQUES. i) L'existence et l'exactitude de $s_f(M)$ reviennent pour tout objet M de $\mathbb{M}$ à l'existence de dualités parfaites, fonctorielles en M,

$$H^i_{\mathbb{M},f,\varnothing}(F,M)_{\mathbb{R}} \times H^j_{\mathbb{M},f,\varnothing}(F,M^*(1))_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \quad \text{pour } i+j=2.$$

En effet,

- si $i \neq 0, 1, 2$, les deux groupes sont nuls;
- si $i = 2$, $H^2_{\mathbb{M},f,\varnothing}(F,M)_{\mathbb{R}}$ est par définition le conoyau de la flèche

$$H^1_{\mathbb{M},f}(F,M)_{\mathbb{R}} \to \bigoplus_{\mathscr{P}\in S_\infty(F)} \mathrm{Coker}\,\alpha_{M,\mathscr{P}} = \mathrm{Coker}\,\alpha_M$$

  et $s_f(M)$ dit que ce conoyau s'identifie au dual de $H^0_f(F, M^*(1))_{\mathbb{R}} = H^0_{\mathbb{M},f,\varnothing}(F, M^*(1))_{\mathbb{R}}$;
- de même si $i = 0$, le dual de $H^2_{\mathbb{M},f,\varnothing}(F, M^*(1))_{\mathbb{R}}$ est le noyau de la flèche

$$(\mathrm{Coker}\,\alpha_{M^*(1)})^* = \mathrm{Ker}\,\alpha_M \to H^1_{\mathbb{M},f}(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}}$$

et $s_f(M)$ dit que ce noyau s'identifie à $H^0_f(F, M)_{\mathbb{R}} = H^0_{\mathbb{M},f,\varnothing}(F, M)_{\mathbb{R}}$;

- enfin si $i = 1$, par définition, $H^i_{\mathbb{M},f,\varnothing}(F, M)_{\mathbb{R}}$ est le noyau de

$$H^1_{\mathbb{M},f}(F, M)_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Coker}\,\alpha_M$$

tandis que $H^1_{\mathbb{M},f,\varnothing}(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}}$ est le conoyau de

$$\mathrm{Ker}\,\alpha_M \to (H^1_{\mathbb{M},f}(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}};$$

et $s_f(M)$ nous donne un isomorphisme

$$H^1_{\mathbb{M},f,\varnothing}(F, M^*(1))^*_{\mathbb{R}} \to H^1_{\mathbb{M},f,\varnothing}(F, M)_{\mathbb{R}}$$

ce qui est la même chose qu'une dualité parfaite entre $H^1_{\mathbb{M},f,\varnothing}(F, M)_{\mathbb{R}}$ et $H^1_{\mathbb{M},f,\varnothing}(F, M^*(1))_{\mathbb{R}}$.

ii) On peut voir l'accouplement

$$H^1_{\mathbb{M},f,\varnothing}(F, M)_{\mathbb{R}} \times H^1_{\mathbb{M},f,\varnothing}(F, M^*(1))_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$$

comme une généralisation de l'accouplement de Bloch et Beilinson [**Be87, Bl84**] correspondant au cas où $M = H^i(X)((1+i)/2)$ (avec i impair), qui lui-même généralise la hauteur de Néron–Tate (cas où M "=" $H^1(X)(1)$, avec X variété abélienne, **[Ne65]**).

iii) On devrait pouvoir vérifier que l'application $\delta_{M^*(1)}$ s'identifie à l'opposé de la transposée de δ_M (autrement dit l'accouplement ci-dessus est le même qu'on le définisse à partir de M ou à partir de $M^*(1)$) ; la suite exacte $s_f(M^*(1))$ est alors au signe près la suite exacte transposée de $s_f(M)$.

3.3. Catégories pré-motiviques S-admissibles. Dans ce n°, on fixe un ensemble fini S de places de F contenant $S_\infty(F)$ et on suppose que tout objet de $\mathbb{M}$ a bonne réduction en dehors de S.

3.3.1. Pour tout nombre premier ℓ, on dit que *la propriété* $C_{\ell,S}(\mathbb{M})$ *est vraie* si, pour tout objet M de $\mathbb{M}$, la représentation M_ℓ est strictement S-géométrique (II, n°3.2.3), les applications naturelles

$$\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}} H^0(F, M) \to H^0(F, M_\ell) \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}} H^1_{\mathbb{M}}(F, M) \to H^1_g(U_S, M_\ell)$$

sont des isomorphismes et si cette dernière application induit, pour tout sous-ensemble Σ de S contenant $S_\infty(F)$, un isomorphisme

$$\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}} H^1_{\mathbb{M},f,\Sigma}(F, M) \to H^1_{f,\Sigma}(F, M_\ell).$$

On dit que $\mathbb{M}$ est *S-admissible* si elle vérifie $C_\infty(\mathbb{M})$ et $C_{\ell,S}(\mathbb{M})$ pour tout nombre premier ℓ. On voit que si $\mathbb{M}$ est S-admissible, $\mathbb{M}$ est f-admissible (prendre $\Sigma = S_\infty(F)$).

3.3.2. Supposons que $\mathbb{M}$ soit S-admissible. Elle a alors un certain nombre de propriétés très agréables. Par exemple:

a) Elle est de *dimension cohomologique* 1, autrement dit toute suite exacte courte

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

de $\mathbb{M}$ donne naissance à une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(F, M') \to H^0(F, M) \to H^0(F, M'') \\ \to H^1_{\mathbb{M}}(F, M') \to H^1_{\mathbb{M}}(F, M) \to H^1_{\mathbb{M}}(F, M'') \to 0. \end{aligned}$$

En effet, l'application naturelle

$$H^1_{\mathbb{M}}(F, M) \to H^1_{\mathbb{M}}(F, M'')$$

est surjective, puisque si ℓ est un nombre premier, après tensorisation par $\mathbb{Q}_\ell$, cette application s'identifie à l'application $H^1_g(U_S, M_\ell) \to H^1_g(U_S, M''_\ell)$ qui est surjective puisque M_ℓ est strictement S-géométrique.

b) De même, si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une f-suite exacte courte de $\mathbb{M}$, *la suite*

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(F, M') \to H^0(F, M) \to H^0(F, M'') \\ \to H^1_{\mathbb{M},f}(F, M') \to H^1_{\mathbb{M},f}(F, M) \to H^1_{\mathbb{M},f}(F, M'') \to 0 \end{aligned}$$

est exacte. Il suffit en effet de choisir un nombre premier ℓ et de remarquer que, après tensorisation par $\mathbb{Q}_\ell$, cette suite s'identifie à la suite exacte de la proposition II, n°3.3.2.

c) Soient $\Sigma \subset \Sigma'$ deux sous-ensembles de S vérifiant $\Sigma_\infty = \Sigma'_\infty = S_\infty(F)$. Pour tout objet M de $\mathbb{M}$ et tout nombre premier ℓ, *on a une suite exacte*

$$\begin{aligned} 0 \to \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}} H^1_{\mathbb{M},f,\Sigma}(F, M) \to \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}} H^1_{\mathbb{M},f,\Sigma'}(F, M) \\ \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Sigma' - \Sigma} H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, M_\ell) \to 0 \end{aligned}$$

(ce n'est rien d'autre que la suite exacte, cf. II, n°3.3.1,

$$0 \to H^1_{f,\Sigma}(F, M_\ell) \to H^1_{f,\Sigma'}(F, M_\ell) \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Sigma' - \Sigma} H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, M_\ell) \to 0).$$

d) De même, si $\Sigma \subset \Sigma'$ sont deux sous-ensembles de S vérifiant $\Sigma_f = \Sigma'_f$, *on a une suite exacte*

$$\begin{aligned} 0 \to H^1_{\mathbb{M},f,\Sigma}(F, M)_{\mathbb{R}} \to H^1_{\mathbb{M},f,\Sigma'}(F, M)_{\mathbb{R}} \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Sigma' - \Sigma} H^1_{/f}(F_\mathfrak{p}, M_{(\mathfrak{p})}) \\ \to H^2_{\mathbb{M},f,\Sigma}(F, M)_{\mathbb{R}} \to H^2_{\mathbb{M},f,\Sigma'}(F, M)_{\mathbb{R}} \to 0, \end{aligned}$$

comme on le voit par chasse au diagramme à partir du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & \bigoplus_{p\in\Sigma'_\infty-\Sigma_\infty} \mathrm{Coker}\,\alpha_{M,p} & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
0\to H^1_{\mathcal{M},f,\Sigma}(F,M)_{\mathbb{R}} & \to & H^1_{\mathcal{M},f,\Sigma\cup S_\infty}(F,M)_{\mathbb{R}} & \to & \bigoplus_{p\in S_\infty-\Sigma_\infty} \mathrm{Coker}\,\alpha_{M,p} & \to & H^2_{\mathcal{M},f,\Sigma}(F,M)_{\mathbb{R}} & \to & 0 \\
\downarrow & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0\to H^1_{\mathcal{M},f,\Sigma'}(F,M)_{\mathbb{R}} & \to & H^1_{\mathcal{M},f,\Sigma'\cup S_\infty}(F,M)_{\mathbb{R}} & \to & \bigoplus_{p\in S_\infty-\Sigma'_\infty} \mathrm{Coker}\,\alpha_{M,p} & \to & H^2_{\mathcal{M},f,\Sigma'}(F,M)_{\mathbb{R}} & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes.

4. Structures motiviques et valeurs de fonctions L

4.1. Généralités.

4.1.1. Soit X une variété propre et lisse sur F. Si $i\in\mathbb{N}$, les différentes théories de cohomologie, jointes aux différents théorèmes de comparaison (voir **[Il90]** pour une revue des résultats sur les isomorphismes de comparaison p-adiques) permettent d'associer au couple (X,i) une structure prémotivique $M=H^i(X)$ (avec des conventions évidentes, $M_{\mathrm{dR}}=H^i_{\mathrm{dR}}(X)$, $M_{B,p}=H^i_B(X_p(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$, $M_\ell=H^i_{\text{ét}}(X\times\overline{F},\mathbb{Q}_\ell)$). Notons $\mathbf{SM}_{F,\mathrm{pl}}(\mathbb{Q})$ la sous-catégorie tannakienne de $\mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q})$ engendrée par les $H^i(X)$, pour $i\in\mathbb{N}$ et X propre et lisse sur F. Cette catégorie contient en particulier les $H^i(X)(r)$, pour $i\in\mathbb{N}$, X propre et lisse sur F et $r\in\mathbb{Z}$. La structure pré-motivique $H^i(X)(r)$ est pure de poids $i-2r$.

4.1.2. Dans la suite de ce paragraphe, on fait semblant de savoir ce qu'est un motif mixte sur F. On admet savoir associer à un tel motif une structure pré-motivique, que l'on appelle *sa réalisation*. On note $\mathbf{SM}_F(\mathbb{Q})$ la sous-catégorie tannakienne de $\mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q})$ engendrée par les réalisations des motifs mixtes sur F. Les objets de cette catégorie sont appelés les *structures motiviques*.

La catégorie $\mathbf{SM}_{F,\mathrm{pl}}(\mathbb{Q})$ est une sous-catégorie tannakienne de $\mathbf{SM}_F(\mathbb{Q})$ (on s'attend à ce que $\mathbf{SM}_{F,\mathrm{pl}}(\mathbb{Q})$ soit la sous-catégorie pleine de $\mathbf{SM}_F(\mathbb{Q})$ dont les objets sont ceux qui sont semi-simples).

Il existe des définitions conjecturales de la notion de motif mixte sur F (cf. notamment Jannsen **[Ja90]**, autres textes de ce volume); pour notre propos, il serait satisfaisant de pouvoir choisir une telle définition, mais ce n'est pas essentiel: le but est de donner une description conjecturale "harmonieuse" de quelques propriétés de $\mathbf{SM}_F(\mathbb{Q})$ que l'on espère indépendante des ajustements qui pourraient s'avérer nécessaires pour la définitions des motifs mixtes. Cette description se fera via des "M-conjectures" (i.e. des "méta-conjectures" dépendant de la définition précise de $\mathbf{SM}_F(\mathbb{Q})$).

Pour tout ensemble fini S de places de F, on note $\mathbf{SM}_{F,S}(\mathbb{Q})$ la sous-catégorie tannakienne de $\mathbf{SM}_F(\mathbb{Q})$ dont les objets sont ceux qui ont bonne réduction en dehors de S. Cette catégorie contient les $H^i(X)(r)$, pour X propre et lisse sur F ayant bonne réduction en dehors de S (on convient qu'une variété propre et lisse sur F a bonne réduction en toutes les places infinies de F).

Enfin, on appelle *catégorie motivique* toute sous-catégorie pré-motivique de $\mathbf{SM}_F(\mathbb{Q})$.

4.1.3. Soient S un ensemble fini de places contenant $S_\infty(F)$ et M un objet de $\mathbf{SM}_{F,S}(\mathbb{Q})$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose

$$H^i_g(F, M) = H^i_{\mathbf{SM}_F(\mathbb{Q})}(F, M) \quad \text{et} \quad H^i_g(U_S, M) = H^i_{\mathbf{SM}_{F,S}(\mathbb{Q})}(F, M).$$

Soient Σ un sous-ensemble de S et $i \in \mathbb{Z}$. Si $\Sigma \supset S_\infty(F)$, on pose $H^i_{f,\Sigma}(F, M) = H^i_{\mathbf{SM}_{F,S}(\mathbb{Q}),f,\Sigma}(F, M)$; dans tous les cas on pose $H^i_{f,\Sigma}(F, M)_{\mathbb{R}} = H^i_{\mathbf{SM}_{F,S}(\mathbb{Q}),f,\Sigma}(F, M)_{\mathbb{R}}$. On pose aussi $H^i_f(F, M) = H^i_{g,S_\infty}(F, M)$.

Tous ces groupes sont indépendants du choix de S. Remarquons que pour calculer l'un d'entre eux, il n'est pas nécessaire de connaître toute la catégorie $\mathbf{SM}_{F,S}(\mathbb{Q})$. Par exemple, étant donné M, pour calculer $H^0_f(F, M) = H^0(F, M)$, il suffit de connaître M en tant que structure pré-motivique, pour calculer $H^1_f(F, M)$, il "suffit" de connaître une sous-catégorie motivique contenant M et stable par f-suite exacte courte de la forme

$$0 \to N' \to N \to \mathbf{1} \to 0.$$

4.1.4. REMARQUE. Des variantes "mixtes" des conjectures standards, il devrait résulter que le foncteur "réalisations" est une équivalence entre la catégorie des motifs mixtes et celle des structures motiviques. Les conjectures qui vont suivre ne nécessitent pas que cela soit vrai. Plus précisément, pour ce qui va suivre, on a besoin de la notion de motif mixte pour produire suffisamment de structures motiviques (et pas trop); mais on n'a pas besoin de savoir ce qu'est un morphisme de motifs mixtes.

4.1.5. M-CONJECTURE $C_{\mathrm{SM}}(F, S)$. *Soit S un ensemble fini de places de F contenant $S_\infty(F)$. La catégorie $\mathbf{SM}_{F,S}(\mathbb{Q})$ est S-admissible. En outre, chaque objet M de $\mathbf{SM}_{F,S}(\mathbb{Q})$ est strictement L-admissible.*

Cette M-conjecture paraît tout à fait hors d'atteinte pour le moment. Elle implique un formalisme permettant d'énoncer toutes sortes de conjectures sur les valeurs des fonctions L des structures motiviques et de vérifier certaines compatibilités entre ces conjectures. Pour l'énoncé de la conjecture sur la valeur en $s = 0$ d'une structure motivique donnée, on a besoin d'en savoir beaucoup moins!

4.2. L'ordre du zéro de la fonction L en $s = 0$. *Dans toute la fin, M est une structure motivique sur F et $\mathbb{M}$ une catégorie motivique contenant*

M. A chaque fois que l'on utilise l'un des groupes introduits au n°4.1.3, on suppose implicitement que ce groupe reste le même si, dans sa définition, on remplace $\mathbf{SM}_F(\mathbb{Q})$ par $\mathbb{M}$ (ce discours n'a comme seul but que de dire que, pour que chacune des conjectures qui nous intéresse, il n'est pas nécessaire de connaître toute la catégorie $\mathbf{SM}_F(\mathbb{Q})$ mais seulement une sous-catégorie motivique assez grosse $\mathbb{M}$ (cf. le cas des 1-motifs [**Fo92**, §8])).

4.2.1. Soit Σ un ensemble fini de places de F. Disons que la fonction $L_\Sigma(M, s)$ *existe en* $s = 0$ si M est L-admissible en dehors de Σ, si le produit infini $L_\Sigma(M, s)$ défini au n°2.2 converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ et si la fonction ainsi définie admet un prolongement analytique dans un ouvert connexe contenant 0. Lorsque $\Sigma = S_\infty(F)$, on dit que la fonction $L(M, s)$ *existe en* $s = 0$.

Les conjectures $C_{\mathrm{pr.an}}(M)$ du n°2.2.2 et $C_{SM}(F, S)$ du n°4.1.5 impliquent que pour tout M et tout Σ, la fonction $L_\Sigma(M, s)$ existe en 0. En outre, si $\Sigma \subset \Sigma'$ et si $L_\Sigma(M, s)$ existe en 0, la fonction $L_{\Sigma'}(M, s)$ aussi.

4.2.2. Enonçons quelques conjectures sur l'ordre du zéro de la fonction L d'une structure motivique en $s = 0$.

M-CONJECTURE $C_{\mathrm{ord}}(M)$. *La fonction* $L(M, s)$ *existe en* $s = 0$ *et*

$$\mathrm{ord}_{s=0} L(M, s) = \dim_{\mathbb{Q}} H^1_f(F, M^*(1)) - \dim_{\mathbb{Q}} H^0(F, M^*(1)).$$

C'est le cas particulier $\Sigma = S_\infty(F)$ de:

M-CONJECTURE $C_{\mathrm{ord}}(M, \Sigma)$. *Soit* Σ *un ensemble fini de places de* F *contenant* $S_\infty(F)$. *Alors la fonction* $L_\Sigma(M, s)$ *existe en* $s = 0$ *et*

$$\mathrm{ord}_{s=0} L_\Sigma(M, s) = \dim_{\mathbb{Q}} H^1_{f,\Sigma}(F, M^*(1)) - \dim_{\mathbb{Q}} H^0(F, M^*(1)).$$

M-CONJECTURE $C_{\mathrm{ord},\ell}(M, \Sigma)$. *Soient* ℓ *un nombre premier et* Σ *un ensemble fini de places de* F *contenant* $S_\infty(F)$. *Alors la fonction* $L_\Sigma(M, s)$ *existe en* $s = 0$ *et*

$$\mathrm{ord}_{s=0} L_\Sigma(M, s) = \dim_{\mathbb{Q}} H^1_{f,\Sigma}(F, M^*_\ell(1)) - \dim_{\mathbb{Q}} H^0(F, M^*_\ell(1)).$$

S'il existe un ensemble fini de places S de F contenant Σ et une catégorie motivique contenant M qui est S-admissible, $C_{\mathrm{ord},\ell}(M, \Sigma)$ équivaut à $C_{\mathrm{ord}}(M, \Sigma)$. S'il existe un catégorie motivique contenant M qui est f-admissible, $C_{\mathrm{ord},\ell}(M, S_\infty(F))$ équivaut à $C_{\mathrm{ord}}(M)$.

M-CONJECTURE $C'_{\mathrm{ord}}(M, \Sigma)$. *Soit* Σ *un ensemble fini de places de* F. *Alors la fonction* $L_\Sigma(M, s)$ *existe en* $s = 0$ *et*

$$\mathrm{ord}_{s=0} L_\Sigma(M, s) = -\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim_{\mathbb{R}} H^i_{f,\Sigma}(F, M^*(1))_{\mathbb{R}}.$$

Dans le cas particulier où $\Sigma \supset S_\infty(F)$, la définition des $H^1_{f,\Sigma}(F, M^*(1))_{\mathbb{R}}$ implique que $C'_{\mathrm{ord}}(M, \Sigma)$ équivaut à $C_{\mathrm{ord}}(M, \Sigma)$.

4.2.3. PROPOSITION. *Soit S un ensemble fini de places de F contenant $S_\infty(F)$. On suppose $C_{\mathrm{SM}}(F, S)$ vraie et que M est un objet de $\mathbf{SM}_{F,S}(\mathbb{Q})$.*

i) *Pour tout sous-ensemble Σ de S, $C_{\mathrm{ord}}(M, \Sigma)$ et $C_{\mathrm{ord}}(M)$ sont équivalentes; si de plus M est Σ-admissible et si ℓ est un nombre premier, $C_{\mathrm{ord}}(M, \Sigma)$ équivaut à $C_{\mathrm{ord}}(M_\ell, \Sigma)$ (cf. II n°3.4);*

ii) *si M est comme ci-dessus, l'ordre conjectural, en $s = 0$, de $L_\varnothing(M^*(1), s)$ est égal à celui de $L_\varnothing(M, s)$;*

iii) *si*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une suite exacte de $\mathbf{SM}_{F,S}(\mathbb{Q})$, et si $\Sigma \subset S$, si deux des trois M-conjectures $C_{\mathrm{ord}}(M', \Sigma)$, $C_{\mathrm{ord}}(M, \Sigma)$, et $C_{\mathrm{ord}}(M'', \Sigma)$ sont vraies, il en est de même de la troisième.

PREUVE. Lorsque $\Sigma_\infty = S_\infty$, (i) se déduit de l'assertion (i) de la Proposition 3.2.2 (on a en fait $H^2_{f,\Sigma}(F, M) = 0$ dans ce cas) et de l'égalité

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell}(H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, M_\ell)) = -\mathrm{ord}_{s=0}(L_\mathfrak{p}(M, s))$$

si $\mathfrak{p}$ est une place finie (I, n°3.4.6). Lorsque $\Sigma_\infty \neq S_\infty$, on se ramène au cas précédent en montrant que les M-conjectures $C_{\mathrm{ord}}(M, \Sigma)$ et $C_{\mathrm{ord}}(M, \Sigma \cup S_\infty)$ sont équivalentes. Pour cela, on utilise la suite exacte de la Proposition 3.2.2, (ii) et l'égalité

$$\dim_{\mathbb{R}}(H^1_{g/f}(F_\mathfrak{p}, M_\ell)) = -\mathrm{ord}_{s=0}(L_\mathfrak{p}(M, s))$$

lorsque $\mathfrak{p}$ est une place infinie (voir 1.1.9 et 1.2.5).

Lorsque M est Σ-admissible (pour Σ contenant S_∞) et ℓ un nombre premier, on a $L_\Sigma(M, s) = L_\Sigma(M_\ell, s)$. On en déduit par $C_{\ell,S}(\mathbb{M})$ que les M-conjectures $C_{\mathrm{ord}}(M_\ell, \Sigma)$ et $C_{\mathrm{ord}}(M, \Sigma)$ sont équivalentes.

L'assertion (ii) résulte de la dualité entre les $H^i_{f,\varnothing}(F, M^*(1))_{\mathbb{R}}$ et les $H^{2-i}_{f,\varnothing}(F, M)_{\mathbb{R}}$ (remarque (i) du n°3.2.9). Pour (iii), on peut choisir Σ suffisamment grand et contenant $S_\infty(F)$ de manière que M soit Σ-admissible et ait bonne réduction en dehors de Σ. Il suffit de montrer l'assertion (iii) pour cet ensemble Σ. On a alors

$$L_\Sigma(M, s) = L_\Sigma(M', s) \cdot L_\Sigma(M'', s)$$

et on utilise 3.3.2, (b).

4.3. L'équation fonctionnelle.

4.3.1. Soit $\mathbb{A}(F)$ l'anneau des adèles de F. Pour toute place $\mathfrak{p} \in S_f(F)$ (resp. $\in S_\infty(F)$), soit $\psi_{0,\mathfrak{p}}$ le cararatère de $F_\mathfrak{p}$ dans $\mathbb{C}^*$ défini par $\psi_{0,\mathfrak{p}}(x) = \exp(-2i\pi \cdot \tau_p(\mathrm{Tr}_{F_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p}(x)))$ où pour $y \in \mathbb{Q}_p$, $\tau_p(y)$ est un rationnel congru à y modulo $\mathbb{Z}_p$ (resp. $\psi_{0,\mathfrak{p}}(x) = \exp(2i\pi \cdot \mathrm{Tr}_{F_\mathfrak{p}/\mathbb{R}}(x))$). Soit ψ_0 le caractère additif non trivial de $\mathbb{A}(F) \to \mathbb{C}^*$ dont les composantes locales sont les $\psi_{0,\mathfrak{p}}$.

Son noyau contient F. Choisissons, pour chaque $\mathfrak{p}$, une mesure de Haar $\mu_\mathfrak{p}$ sur $F_\mathfrak{p}$ de façon que $\mu_\mathfrak{p}(\mathscr{O}_{F_\mathfrak{p}}) = 1$ pour presque toute place finie et que $\mu = \prod \mu_\mathfrak{p}$ soit la mesure de Tamagawa sur $\mathbb{A}(F)$ (c'est-à-dire l'unique mesure de Haar telle que $\mu(\mathbb{A}(F)/F) = 1$).

Supposons que M soit L-admissible partout (cf. 2.2.1). On peut alors définir la fonction L complète $L_\varnothing(M, s)$, produit des $L_\mathfrak{p}(M, s)$ pour toutes les places $\mathfrak{p}$ de F finies ou non.

Si $\mathfrak{p} \in S_f(F)$, la L-admissibilité en $\mathfrak{p}$ implique que le conducteur $a_\mathfrak{p}(D_{pst,\mathfrak{p}}(M_\ell))$ et le facteur $\varepsilon(D_{pst,\mathfrak{p}}(M_\ell), \psi_{0,\mathfrak{p}}, \mu_\mathfrak{p})$ (cf. I, n°1.2.2) sont indépendants de ℓ et nous les notons $a_\mathfrak{p}(M)$ et $\varepsilon_\mathfrak{p}(M, \psi_{0,\mathfrak{p}}, \mu_\mathfrak{p})$.

Si $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_{(\mathfrak{p})}$ a une structure naturelle d'objet de $\mathbf{SH}_{F_\mathfrak{p}}(\mathbb{R})$ et on pose $\varepsilon_\mathfrak{p}(M, \psi_{0,\mathfrak{p}}, \mu_\mathfrak{p}) = \varepsilon_\mathfrak{p}(M_{(\mathfrak{p})}, \psi_{0,\mathfrak{p}}, \mu_\mathfrak{p})$ (cf. n°1.1.10 et 1.2.7).

Pour presque tout $\mathfrak{p}$, on a $a_\mathfrak{p}(M) = 0$ et $\varepsilon_\mathfrak{p}(M, \psi_\mathfrak{p}, \mu_\mathfrak{p}) = 1$. Si pour tout $\mathfrak{p} \in S_f(F)$, on note $q(\mathfrak{p})$ le nombre d'éléments du corps résiduel de $F_\mathfrak{p}$, la fonction de la variable complexe s,

$$\varepsilon(M, s) = \prod_{\mathfrak{p} \in S(F)} \varepsilon_\mathfrak{p}(M, \psi_{0,\mathfrak{p}}, \mu_\mathfrak{p}) \times \prod_{\mathfrak{p} \in S_f(F)} q(\mathfrak{p})^{-a_\mathfrak{p}(M)\cdot s},$$

est bien définie et est indépendante du choix des $\mu_\mathfrak{p}$.

4.3.2. M-CONJECTURE $C_{\text{éq.fon}}(M)$. i) *Les structures motiviques M et $M^*(1)$ sont L-admissibles partout.*

ii) *Les produits infinis $L_\varnothing(M, s)$ et $L_\varnothing(M^*(1), s)$ convergent pour* $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ *et admettent un prolongement analytique méromorphie dans tout le plan complexe;*

iii) *on a* $L_\varnothing(M, s) = \varepsilon(M, s) \cdot L_\varnothing(M^*(1), -s)$.

4.3.3. Pour les motifs purs, on retrouve la conjecture usuelle **[De79]**. La proposition suivante ramène le cas général au cas des motifs purs:

PROPOSITION. *Soit*

$$(\beta) \qquad 0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte courte de structures pré-motiviques. Si deux des propriétés $C_{\text{éq.fon}}(M')$, $C_{\text{éq.fon}}(M)$, $C_{\text{éq.fon}}(M'')$ sont vraies, il en est de même de la troisième.

PREUVE. Il est clair que la propriété $C_{\text{éq.fon}}(M)$, (i) est "additive". Posons

$$L_\mathfrak{p}(\beta, s) = L_\mathfrak{p}(M, s) \cdot L_\mathfrak{p}(M', s)^{-1} \cdot L_\mathfrak{p}(M'', s)^{-1},$$

$$L_\mathfrak{p}(\beta^*(1), s) = L_\mathfrak{p}(M^*(1), s) \cdot L_\mathfrak{p}(M'^*(1), s)^{-1} \cdot L_\mathfrak{p}(M''^*(1), s)^{-1},$$

$$\varepsilon_\mathfrak{p}(\beta) = \varepsilon_\mathfrak{p}(M, \psi_{0,\mathfrak{p}}, \mu_\mathfrak{p}) \cdot \varepsilon_\mathfrak{p}(M', \psi_{0,\mathfrak{p}}, \mu_\mathfrak{p})^{-1} \cdot \varepsilon_\mathfrak{p}(M'', \psi_{0,\mathfrak{p}}, \mu_\mathfrak{p})^{-1},$$

etc. Il existe un ensemble fini de places S de F (contenant les places à l'infini) tel que $L_{\mathfrak{p}}(\beta, s) = L_{\mathfrak{p}}(\beta^*(1), s) = 1$, $\varepsilon_{\mathfrak{p}}(\beta) = 1$, $a_{\mathfrak{p}}(\beta) = 1$ pour $\mathfrak{p} \notin S$. On en déduit que si deux des propriétés $C_{\text{éq.fon}}(M)$, (ii), $C_{\text{éq.fon}}(M')$, (ii), $C_{\text{éq.fon}}(M'')$, (ii) sont vraies, la troisième l'est. La propriété concernant $C_{\text{éq.fon}}$, (iii) se déduit alors des formules

$$L_{\mathfrak{p}}(\beta, s) = q(\mathfrak{p})^{-a_{\mathfrak{p}}(\beta)\cdot s} \cdot \varepsilon_{\mathfrak{p}}(\beta) \cdot L_{\mathfrak{p}}(\beta^*(1), -s)$$

(I, n°1.2.3 pour $\mathfrak{p} \in S_f$, n°1.2.8 pour $\mathfrak{p} \in S_\infty$).

4.4. La valeur de $L^*(M, 0)$ à un nombre rationnel près.

4.4.1. On introduit les $\mathbb{Q}$-droites

$$L_f(M) = \det_{\mathbb{Q}} H^0(F, M) \otimes (\det_{\mathbb{Q}} H^1_f(F, M))^{-1},$$

$$\Delta_f(M)$$

$$= L_f(M) \otimes_{\mathbb{Q}} L_f(M^*(1)) \otimes_{\mathbb{Q}} \left(\bigotimes_{\mathfrak{p} \in S_\infty(F)} (\det_{\mathbb{Q}} H^0(F_{\mathfrak{p}}, M_{B,\mathfrak{p}}))^{-1} \right) \otimes_{\mathbb{Q}} \det_{\mathbb{Q}} t_M.$$

Si E est une $\mathbb{Q}$-algèbre non nulle, on utilise l'application $b \mapsto 1 \otimes b$ pour plonger $\Delta_f(M)$ dans $E \otimes_{\mathbb{Q}} \Delta_f(M)$.

4.4.2. La conjecture $C_{\text{SM}}(F, S)$ du n°4.1.5 implique que l'on doit pouvoir choisir $\mathbb{M}$ f-admissible à l'infini (n°3.2.2). Supposons qu'il en est ainsi. La *suite exacte fondamentale à l'infini*, i.e., la suite exacte $s_f(M)$ du n°3.2.5 nous fournit un isomorphisme canonique

$$\mathbb{R} \otimes (L_f(M) \otimes L_f(M^*(1))) \to \det_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker} \alpha_M) \otimes (\det_{\mathbb{R}}(\operatorname{Coker} \alpha_M))^{-1}.$$

Mais la *suite exacte tautologique*

$$0 \to \operatorname{Ker} \alpha_M \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S_\infty(F)} \mathbb{R} \otimes H^0(F_{\mathfrak{p}}, M_{B,\mathfrak{p}}) \to \mathbb{R} \otimes t_M \to \operatorname{Coker} \alpha_M \to 0$$

fournit un isomorphisme

$$\mathbb{R} \otimes \left(\bigotimes_{\mathfrak{p} \in S_\infty(F)} (\det_{\mathbb{Q}} H^0(F_{\mathfrak{p}}, M_{B,\mathfrak{p}}))^{-1} \right) \otimes_{\mathbb{Q}} \det_{\mathbb{Q}} t_M)$$
$$\to ((\det_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker} \alpha_M))^{-1} \otimes \det_{\mathbb{R}}(\operatorname{Coker} \alpha_M).$$

Le produit tensoriel de ces deux isomorphismes nous fournit un isomorphisme

$$\iota_M : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \Delta_f(M) \to \mathbb{R}.$$

4.4.3. M-CONJECTURE $C_{\mathrm{DB}}(M)$. *Il existe une base* b *de* $\Delta_f(M)$ *sur* $\mathbb{Q}$ *telle que*

$$\iota_M(b) = 1/L^*(M, 0).$$

Bien sûr, si un tel b existe, il est unique. En outre, cette conjecture détermine $L^*(M, 0)$ à un nombre rationnel près.

4.4.4. REMARQUES. i) Modulo des interprétations convenables des groupes de K-théorie, des régulateurs et des hauteurs qui interviennent, la conjecture $C_{\mathrm{DB}}(M)$ pour les motifs purs redonne les conjectures classiques de Deligne et Beilinson (cf. [Fo92] et les articles de Jannsen, Nekovar, et Scholl dans ce volume).

ii) Choisissons un ensemble fini S de places de F tel que M a bonne réduction en dehors de S. Supposons $C_{\mathrm{SM}}(F, S)$ (cf. 4.1.5). Soit

$$(\beta) \qquad 0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une f-suite exacte courte. Des suites exactes

$$\cdots \to H^i_f(F, M') \to H^i_f(F, M) \to H^i_f(F, M'') \to \cdots,$$
$$\cdots \to H^i_f(F, M''^*(1)) \to H^i_f(F, M^*(1)) \to H^i_f(F, M'^*(1)) \to \cdots$$
$$0 \to t_{M'} \to t_M \to t_{M''} \to 0,$$

$$0 \to H^0(F_{\mathfrak{p}}, M'_{B,\mathfrak{p}}) \to H^0(F_{\mathfrak{p}}, M_{B,\mathfrak{p}}) \to H^0(F_{\mathfrak{p}}, M''_{B,\mathfrak{p}}) \to 0 \quad \text{pour } \mathfrak{p} \in S_\infty,$$

on déduit un isomorphisme canonique

$$\Delta_f(M') \otimes \Delta_f(M'') \simeq \Delta_f(M).$$

On déduit facilement de la proposition 3.2.8 et de 3.3.2, (b) que l'on a

$$\iota_M(\omega' \cdot \omega'') = \iota_{M'}(\omega') \cdot \iota_{M''}(\omega'')$$

si $\omega' \in \Delta_f(M')$, $\omega'' \in \Delta_f(M'')$, et $\omega' \cdot \omega''$ est l'image de $\omega' \otimes \omega''$ dans $\Delta_f(M)$. Il en résulte que si deux des conjectures $C_{\mathrm{DB}}(M), C_{\mathrm{DB}}(M'), C_{\mathrm{DB}}(M'')$ sont vraies, la troisième l'est.

On doit pouvoir vérifier que le même résultat est vrai en supprimant l'hypothèse que la suite (β) est f.

iii) Soit F'/F une extension finie. Soit M' une structure motivique sur F' et $M = \mathrm{Res}_{F'/F} M'$ la restriction des scalaires de M de F' à F. On a alors des isomorphismes canoniques

$$H^i_f(F', M') \simeq H^i_f(F, M), \qquad t_M \simeq t_{M'}$$

et

$$\bigoplus_{\mathfrak{p} \in S_\infty(F)} H^0(F_{\mathfrak{p}}, M_{B,\mathfrak{p}}) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}' \in S_\infty(F')} H^0(F_{\mathfrak{p}'}, M'_{B,\mathfrak{p}'}).$$

D'où un isomorphisme $\mathrm{Res}_{F'/F}\colon \Delta_f(M') \simeq \Delta_f(\mathrm{Res}_{F'/F}M')$. Il est de nouveau facile de montrer que si $\omega' \in \Delta_f(M')$, on a $\iota_M(\mathrm{Res}_{F'/F}(\omega')) = \iota_{M'}(\omega')$. On en déduit encore que $C_{\mathrm{DB}}(M)$ est vraie si et seulement si $C_{\mathrm{DB}}(M')$ l'est.

iv) Enfin, on voit par un calcul analogue à celui de [De79], théorème 5.6 (cf. aussi l'exposé de Jannsen dans [RSS88]) et en utilisant la remarque 3.2.9, (iii) que, si l'on suppose que $\det(M)$ est un motif d'Artin tordu et que $C_{\text{éq.fon}}(M)$ est vraie, la conjecture $C_{\mathrm{DB}}(M)$ est vraie si et seulement si $C_{\mathrm{DB}}(M^*(1))$ l'est.

4.5. La valeur exacte de $L^*(M, 0)$.

4.5.1. Soit ℓ un nombre premier. La conjecture $C_{\mathrm{SM}}(F, S)$ du n°4.1.5 implique que l'on doit pouvoir choisir $\mathbb{M}$ vérifiant $C_\infty(\mathbb{M})$ et $C_\ell(\mathbb{M})$. Supposons qu'il en soit ainsi. On voit alors que $\mathbb{M}$ est f-admissible à l'infini mais aussi que $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}} \Delta_f(M)$ s'identifie à $\Delta_f(M_\ell)$ et est donc muni d'une norme canonique $|\cdot|_{\ell,\mathrm{EP}}$.

4.5.2. M-CONJECTURE $C_{\mathrm{BK},\ell}(M)$. *La conjecture $C_{\mathrm{DB}}(M)$ est vraie et si b est l'élément de $\Delta_f(M)$ tel que $\iota_M(b) = 1/L^*(M, 0)$, on a*

$$|b|_{\ell,\mathrm{EP}} = 1.$$

4.5.3. REMARQUES. i) Soit $c \in \Delta_f(M)$ non nul. Si $C_{\mathrm{BK},\ell}(M)$ est vrai pour tout ℓ, on doit avoir $|c|_{\ell,\mathrm{EP}} = 1$ pour presque tout ℓ. Si c'est le cas, il existe $b' \in \Delta_f(M)$, unique au signe près, tel que $|b'|_{\ell,\mathrm{EP}} = 1$ pour tout ℓ et on doit avoir $L^*(M, 0) = \pm 1/\iota_M(b')$. Ces conjectures $C_{\mathrm{BK},\ell}(M)$ déterminent donc $L^*(M, 0)$ au signe près.

On a aussi une formule conjecturale pour le signe qui s'obtient en conjecturant que $L(M, s)$ n'a ni zéro ni pôle sur la droite réelle en dehors des entiers naturels, en observant que $L^*(M, s) > 0$ pour s réel suffisamment grand, et que la conjecture $C_{\mathrm{ord}}(M(r))$ nous donne l'ordre du zéro (ou pôle) éventuel de $L(M, s)$ en $s = r$.

ii) C'est un exercice facile de déduire des résultats de II, n°5.3 une formulation plus classique des conjectures $C_{\mathrm{BK},\ell}(M)$ en termes du groupe de Shafarevich–Tate et des nombres de Tamagawa (cf. [Fo92]).

iii) On déduit de II, n°5.1 et de 4.4.4, (ii) que si $C_{\mathrm{SM}}(F, S)$ est vraie pour un S convenable et si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une f-suite exacte courte, si deux des conjectures $C_{\mathrm{BK}}(M)$, $C_{\mathrm{BK}}(M')$, $C_{\mathrm{BK}}(M'')$ sont vraies, la troisième l'est. Le fait que le même résultat soit vrai pour une suite exacte quelconque (pas nécessairement f) ne résulte pas du formalisme développé jusqu'à présent. Il semble que cela conduise à introduire la notion de "réduction modulo une place finie de F d'une structure motivique semi-stable".

iv) On déduit de II, n°5.2 et de 4.4.4, (iii) que si F'/F est une extension finie et M' une structure motivique sur F', $C_{\mathrm{BK}}(M')$ est vraie si et seulement si $C_{\mathrm{BK}}(\mathrm{Res}_{F'/F}M')$ l'est.

4.5.4. La compatibilité de $C_{\mathrm{BK}}(M)$ à l'équation fonctionnelle est loin d'être évidente. Pour expliquer la situation, revenons d'abord rapidement au cas local.

Soit K comme dans le chapitre I et V une représentation p-adique potentiellement semi-stable de G_K. L'isomorphisme de comparaison induit une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire non nulle ξ_V de

$$\Delta_K(V) = (\det_{\mathbb{Q}_p} D_{\mathrm{dR}}(V))^{-1} \otimes (\det_{\mathbb{Q}_p} V)^{\otimes[K:\mathbb{Q}_p]}$$

dans $\mathbb{C}_p \cdot t^r$ pour r convenable. Posons $\tilde{\xi}_V = t^{-r} \cdot \xi_V$. Choisissons un réseau T de V stable par G_K et une base ω de $\Delta_K(V)$. Comme $t_{V^*(1)}$ s'identifie au dual de $\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}$, on a

$$\det_{\mathbb{Q}_p} D_{\mathrm{dR}}(V) = (\det_{\mathbb{Q}_p} t_{V^*(1)})^{-1} \otimes \det_{\mathbb{Q}_p} t_V .$$

Soient ω_T une base du sous-$\mathbb{Z}_p$-module $\det_{\mathbb{Z}_p} T$ de $\det_{\mathbb{Q}_p} V$, ω_1 (resp. ω_2) une base de $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V$ (resp. $\det_{\mathbb{Q}_p} t_{V^*(1)}$) telles que $\omega = \omega_2 \otimes \omega_1^{-1} \otimes ((\omega_T)^{\otimes[K:\mathbb{Q}_p]})$. Soit d_K le discriminant de $K/\mathbb{Q}_p$ et $\mu_{0,K}$ la mesure de Haar sur K telle que $\mu_{0,K}(\mathscr{O}_K) = 1$. Enfin, si $j \in \mathbb{Z}$, posons $\Gamma^*(j) = \Gamma(j) = (j-1)!$ si $j > 0$; $\Gamma^*(j) = \lim_{s \to j}(s-j)\cdot\Gamma(s)$ si $j \leq 0$ (on a en fait dans ce dernier cas $\Gamma^*(j) = (-1)^j \cdot (-j)!)^{-1}$.

Posons $\eta_V(\omega) = |d_K|^{\dim(V)/2} \cdot \varepsilon(V, \psi_{0,K}, \mu_{0,K}) \cdot \tilde{\xi}_V(\omega)$ (on suppose choisi un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$, fermeture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$); on montre que $\eta_V(\omega)$ appartient à la complétion p-adique de $\mathbb{Q}_p^{nr}$.

CONJECTURE $C_{\mathrm{EP},K}(V)$. *Soit V une représentation p-adique potentiellement semi-stable de G_K. Avec les notations précédentes, si ω est un élément non nul de $\Delta_K(V)$, on a*

$$\mathrm{Tam}^0_{\omega_1}(T) \cdot \mathrm{Tam}^0_{\omega_2}(T^*(1))^{-1} = \left| \eta_V(\omega) \cdot \prod_j \Gamma^*(-j)^{h_j(V)\cdot[K:\mathbb{Q}_p]} \right|_p$$

où $h_j(V) = \dim_K \mathrm{Fil}^j D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^{j+1} D_{\mathrm{dR}}(V)$.

Bloch et Kato **[BK90,** Theorem 4.2] ont montré $C_{\mathrm{EP},K}(\mathbb{Q}_p(r))$ pour $r \in \mathbb{Z}$ et $K/\mathbb{Q}_p$ non ramifiée.

Revenons à M. Il n'est pas difficile de montrer (en utilisant II, 5.4) que, si l'on suppose que $\det(M)$ est un motif tordu d'Artin, si les conjectures $C_{\mathrm{EP},F_\mathfrak{p}}(M_{(\mathfrak{p})})$ sont vraies pour toute place $\mathfrak{p} \in S_f(F)$, si la conjecture $C_{\text{éq.fon}}(M)$ est vraie, alors la conjecture $C_{\mathrm{BK}}(M)$ est vraie si et seulement si

la conjecture $C_{BK}(M^*(1))$ est vraie. Nous reviendrons sur ce point dans un autre article ainsi que sur une formulation plus fonctorielle des conjectures $C_{EP,K}(V)$.

Principales notations

01: $H^i(G, V)$.
02: $C^i(G, T)$, $H^i_{cont}(G, T)$.
03: $\mathbb{Z}_\ell(1)$, $M(i)$.
04: $\det_E(C)$.
05: $\det_A(M)$.

Chap. I. $K, k, p, \overline{K}, G_K, \overline{k}, G_k, I_K, \mathbb{Q}_p^{nr}, K_0, \mathbb{Q}'_p, e, \sigma, q, f_k, \ell$.

1.1: W_K, $\mathbf{Rep}_E(W_K)$, ρ, Ta, Ta^{-1}, $\Delta\{-1\}$, $'W_K$, N, $\mathbf{Rep}_{E,Ta}('W_K)$, Ta_0, $\mathbf{Rep}_E('W_K)$, $\nu \in \{e, f, h, g\}$, $\mathbf{Rep}_{E,\nu}('W_K)$, $\mathbf{Rep}_{E,p\nu}('W_K)$.
1.2: ρ^{ss}, Δ^{ss}, $P_K(\Delta, u)$, $a(\Delta)$, $\varepsilon(\Delta, \psi, \mu)$.
1.3: ρ_{sl}, $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'W_K)$, $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(D'W_K)$, $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(D'G_K)$, $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(D'G_K)$.
1.4: $H^i_\nu(K, \Delta)$, Δ_{st}, $\Delta_{st}\{-1\}$, $C_\nu(K, \Delta)$.
2.1: $\mathbb{C}_p$, $V_p(U)$, R, $W(R)$, $W_{K_0}(R)$, A^0_{cris}, A_{cris}, B^+_{cris}, B^+_{dR}, θ, $\mathscr{M}_p$, U_p, t, B_{dR}, B_{cris}, $V^0_\ell(\Gamma)$, $B_{st,\ell}$, N.
2.2: $D_{HT}(V)$, $D_{dR}(V)$, t_V, $\mathrm{Fil}^i D_{dR}(V)$, $\widehat{D}_{pst}(V)$, $D_{pst}(V)$, $D_{st}(V)$, $D_{cris}(V)$, $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,\nu}(G_K)$.
3.1: S_ν.
3.2: $T\widehat{\ }$.
3.3: $C_\nu(K, V)$, λ_V, $D_\nu(V)$, $H^i_\nu(K, V)$, $H^i_{/f}(K, V)$.
4.1: $L_f(K, V)$, $H^1_f(K, T)$, $\mathrm{Tam}^0_{K,\omega}(T)$, $\mathrm{Tam}^0_K(T)$.

Chap. II.

1.1: $F, \overline{F}, F_\mathfrak{p}, \overline{F}_\mathfrak{p}, G_F, G_\mathfrak{p}, S(F), S_\infty(F), S_f(F), S_p(F), \Sigma_f, \Sigma_p, S, S_\infty, F_S, G_{F,S}, \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,S}(G_F), H^i(U_S, M), H^i(F, V)$.
1.2: $H^i_0(U_S, V)$.
1.3: $H^1_g(F, V)$, $H^1_{f,\Sigma}(F, V)$, $H^1_f(F, V)$, $\widetilde{H}^i_f(F, V)$.
2.1: t_V.
3.1: $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,pg}(G_F)$, $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell,pg,S}(G_F)$, $H^i_g(U_S, V)$, $H^i_g(F, V)$.
3.2: $D_{pst,\mathfrak{p}}(V)$.
3.3: $H^1_{\nu'/\nu}(F_\mathfrak{p}, V)$, $H^1_{/\nu}(F_\mathfrak{p}, V)$.
3.4: $L_\mathfrak{p}(V, s)$, $L_\Sigma(V, s)$, $L(V, s)$.
4.1: $\Delta_S(V)$, $\Delta_{S,\mathbb{Z}_\ell}(V)$, $|\cdot|_{can}$.
4.2: $\Delta_f(V)$, $|\cdot|_{EP,V}$.
5.3: $T\widehat{\ }$, $\Delta'_f(T)$, $\mathrm{Tam}^0_\omega(T)$, $Ш(T)$, $\widetilde{\Delta}'_f(T)$.

Chap. III.

1.1: $D_{\mathrm{dR}}(V)$, V_{dR}, $V_{\mathbb{C}}$, W_nV, $\mathrm{Fil}^iV_{\mathrm{dR}}$, $\mathbf{SH}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\mathbb{1}_{\mathbb{C}}(1)$, γ^iV, δ^iV, $H^i_g(\mathbb{C}, V)$, $H^i(\mathbb{C}, V)$, $H^1_e(\mathbb{C}, V)$, $H^1_f(\mathbb{C}, V)$, α_V, $L(V, s)$.

1.2: A^+, V_{dR}, $D_{\mathrm{dR}}(V)$, α^+_V, $\mathbf{SH}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(1)$.

2.1: $\mathbf{PSPM}_F(\mathbb{Q})$, M_{dR}, $M_{B,\mathrm{p}}$, M_ℓ, $M_{(\mathrm{p})}$, W_nM, $\mathbf{SPM}_F(\mathbb{Q})$, $\mathbb{1}_F$, $\mathrm{Ext}_{F/F'}$, $\mathrm{Res}_{F'/F}$.

2.2: Σ_M, $L_{\mathrm{p}}(M, s)$, $L_\Sigma(M, s)$, $L(M, s)$, $L_\varnothing(M, s)$.

3.1: $H^i_{\mathbb{M}}(F, M)$, $\mathbb{M}_S$, $H^i_{\mathbb{M}}(U_S, M)$, $H^i_{\mathbf{M},f,\Sigma}(F, M)$, $M^+_{(\mathrm{p})}$, $\alpha_{M,\mathrm{p}}$, $H^i_{\mathbf{M},f,\Sigma}(F, M)_{\mathbb{R}}$, u_M, v_M, v'_M, u'_M.

3.2: $C_\ell(\mathbb{M})$, $\Lambda(M, N)$, δ_M, $s_f(M)$.

3.3: $C_{\ell,S}(\mathbb{M})$.

4.1: $\mathbf{SM}_{F,\mathrm{pl}}(\mathbb{Q})$, $\mathbf{SM}_F(\mathbb{Q})$, $\mathbf{SM}_{F,S}(\mathbb{Q})$, $H^i_g(F, M)$, $H^i_g(U_S, M)$, $H^i_{f,\Sigma}(F, M)$, $H^i_{f,\Sigma}(F, M)_{\mathbb{R}}$, $H^i_f(F, M)$.

4.3: $\Delta_f(M)$, ι_M, $L_f(M)$.

RÉFÉRENCES

[Be85] A. Beilinson, *Higher regulators and values of L-functions*, J. Soviet. Math. **30** (1985), 2036–2070.

[Be87] ——, *Height pairing between algebraic cycles*, Contemp. Math. **67** (1987), 1–24.

[Bl80] S. Bloch, *A note on height pairing, Tamagawa numbers and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture*, Invent. Math. **58** (1980), 65–76.

[Bl84] ——, *Height pairing for algebraic cycles*, J. Pure Appl. Algebra **34** (1984), 119–145.

[BK90] S. Bloch et K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, in The Grothendieck Festschrift, vol. 1, Prog. in Math. **86**, Birkhäuser, Boston, 1990, pp. 333–400.

[Bu] *Séminaire sur les périodes p-adiques*, (tenu à Bures en 1988), actes en préparation.

[Ca64] J. W. S. Cassels, *Arithmetic on curves of genus* 1, IV Proof of the Hauptvermutung, J. reine u. angew. Math. **211** (1962), 95–112.

[De71] P. Deligne, *Théorie de Hodge.* II, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **40** (1971), 5–57.

[De73] ——, *Les constantes de l'équation fonctionnelle des fonctions L*, dans *Modular functions of one variable.* II, Lecture Notes in Math. 349, Springer-Verlag, Berlin, 1973, pp. 501–595.

[De74] ——, *Théorie de Hodge.* III, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 44 (1974), 5–77.

[De79] ——, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proc. Sympos. Pure Math. **33**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979, pp. 313–346.

[De85] ——, Lettre à C. Soulé (1985).

[DM82] P. Deligne and J. Milne, *Tannakian categories*, Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties, Lecture Notes in Math. **900**, Springer-Verlag, Berlin, 1982, pp. 101–128.

[Den91] C. Deninger, *On the Γ-factors attached to motives*, Invent. Math. **104** (1991), 245–265.

[Fl90] M. Flach, *A generalisation of the Cassels–Tate pairing*, J. reine u. angew. Math. **412** (1990), 113–127.

[Fo83] J.-M. Fontaine, *Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p-adiques*, dans Algebraic Geometry Tokyo-Kyoto, Lecture Notes in Math., vol. 1016, Springer, Berlin, 1983, pp. 86–108.

[Fo92] ——, *Valeurs spéciales des fonctions L des motifs*, Séminaire Bourbaki, exposé 751, février 1992.

[FI] J.-M. Fontaine et L. Illusie, *p-adic periods: A survey*, prépublication d'Orsay, 1990.

[FL82] J.-M. Fontaine et G. Laffaille, *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **15** (1982), 547–608.

[FP91] J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou, *Autour des conjectures de Bloch et Kato: I; Cohomologie galoisienne. II; Structures motiviques f-closes. III—Le cas général*, C. R. Acad. Sci., Paris, 313, série I, 1991, pp. 189–196, 349–356, et 421–428.

[H] O. Hyodo, $H^1_g(K, V) = H^1_{st}(K, V)$, mauuscript non publié (1989).

[Il90] L. Illusie, *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique*, Séminaire Bourbaki, exposé 726, juin 1990.

[Ja89] U. Jannsen, *On the ℓ-adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology*, Galois groups over $\mathbb{Q}$, MSRI Publications, vol. 16, Springer, Berlin, 1989, pp. 315–360.

[Ja90] ——, *Mixed motives and algebraic K-theory*, Lecture Notes in Math., vol. 1400, Springer, Berlin, 1990.

[Ka] K. Kato, *Iwasawa theory and p-adic Hodge theory*, prépublication, 1991.

[Li72] S. Lichtenbaum, *On the values of zeta and L-functions*. I, Ann. of Math. **96** (1972), 338–360.

[Li73] ——, *Values of zeta functions, étale cohomology and algebraic K-theory*, Algebraic K-theory II, Lecture Notes in Math., vol. 342, Springer, Berlin, 1973.

[Mi86] J. S. Milne, *Arithmetic duality theorems*, Perspectives in Mathematics, vol. 1, Academic Press, Boston, 1986.

[N] J. Nekovář, *On p-adic heights pairings*, Séminaire de théorie des nombres de Paris, 1991.

[Ni] W. Niziol, *On a cohomological functor associated to crystalline representations*, prépublication, 1990.

[Ne65] A. Néron, *Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes*, Ann. of Math. **82** (1965), 249–331.

[Po67] G. Poitou, *Cohomologie galoisienne des modules finis*, Dunod, Paris, 1967.

[Sc79] P. Schneider, *Über gewisse Galoiscohomologiegruppen*, Math. Z. **168** (1979), 181–205.

[Sc91] A. J. Scholl, *Remarks on special values of L-functions*, L-functions and Arithmetic, Proc. of the Durham Symposium, London Math. Soc. Lecture Notes Series **153**, Cambridge University Press, 1991, pp. 373–392.

[Se67] J.-P. Serre, *Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles*, in Proc. of a conference on Local fields, Nuffic Summer School at Driebergen, Springer-Verlag, Berlin, 1967, pp. 118–131 (= Oe.72).

[Se68] ——, *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves*, Benjamin, Inc., New York, 1968; 2ème édition, Addison-Wesley, Reading (1989).

[Se70] ——, *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures)*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1969/70, exp. 19 (= Oe.87).

[ST68] J.-P. Serre et J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*, Ann. of Math. **88** (1968), 492–517 (= J.-P. Serre, Oe.79).

[So79] C. Soulé, *K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombre et cohomologie étale*, Invent. Math. **55** (1979), 251–295.

[Ta62] J. Tate, *Duality theorems in Galois cohomology over number fields*, Proc. ICM Stockholm (1962), 288–295.

[Ta67] ——, *p-divisible groups*, in Proc. of a Conf. on Local Fields, Nuffic Summer School at Driebergen, Springer-Verlag, Berlin, 1967, pp. 153–183.

[Ta76] ——, *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257–274.

[Ta79] ——, *Number theory background*, Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math. **33** (2), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979, pp. 3–26.

[RSS88] *Beilinson's conjectures on special values of L-functions*, (M. Rapoport, N. Schappacher, P. Schneider, eds.), Perspectives in Mathematics, vol. 4, Academic Press, Boston, 1988.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, ORSAY, FRANCE

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE, PARIS, FRANCE